ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

НИЗОМИЙ НОМИДАГИ ТОШКЕНТ ДАВЛАТ ПЕДАГОГИКА УНИВЕРСИТЕТИ

А.ЮНУСОВ, Д.ЮНУСОВА

СОНЛИ СИСТЕМАЛАР

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги томонидан олий ўқув юртлари 5140100 – «Математика ва информатика» бакалавриат таълим йўналиши талабалари учун ўқув қўлланма сифатида тавсия этилган

Тошкент
«IQTISOD-MOLIYA»
2008

Тақризчилар: Физика-математика фанлари номзоди, доцент **А.Аманов**
Физика-математика фанлари номзоди, доцент **Р.Турғунбоев**

Юнусов А.

Сонли ситемалар. Олий ўқув юртлари учун ўқув қўлланма / Юнусов А., Юнусова Д.; Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги. – Т.: «IQTISOD-MOLIYA», 2008. – 116 б.

Юнусова Д.

Ушбу дарслик педагогика олий ўқув юртларининг математика информатика йўналиши бакалавр бўлими ўқув режасига киритилган «Сонли системалар» фани давлат таълим стандартлари, ўқув дастурлари асосида ёзилган бўлиб, IV бобдан иборат. Бобларни ташкил этган параграфлар охирида такрорлаш учун саволлар ва машқлар келтирилган. Дарсликда мактаб, академик лицей, касб-ҳунар коллежлари математика курсида ўқитиладиган барча сонли системалар аксиоматик қуриб чиқилган.

Дарсликдан педагогика олий ўқув юртлари талабалари, умумий ўрта таълим мактаблари, академик лицей ва касб-ҳунар коллежлари ўқитувчилари фойдаланишлари мумкин.

Сўз боши

Агар эътибор берсак 1-синфдан бошлаб сонли системаларни ўқувчиларга ўргатиш бошланади. Ўқувчилар олдин натурал сонлар тўплами, улар устидаги амаллар билан танишадилар, сўнгра бутун сонлар системаси, рационал сонлар системаси, ҳақиқий сонлар системаси ва ниҳоят, академик лицей, касб-ҳунар коллежлари ўқувчилари комплекс сонлар системасини ўқиб ўрганадилар. Шунинг учун бу китобда мактаб, лицей, касб-ҳунар коллежларида ўқитиладиган математиканинг энг муҳим мавзуларидан бири бўлган сонли ситемалар ҳозирги замон математикаси нуқтаи назаридан баён қилинган.

Дарсликда ўрганилиши анъана бўлиб қолган сонли системалардан ташқари р-адик сонлар системаси, кватернионлар алгебраси ҳақида ҳам асосий маълумотлар берилган.

Сонли системаларни қуриш жараёнида талабалар математик анализ, геометрия, алгебра, математик мантиқ фанларида танишган чуқур математик ғояларнинг татбиқларини кўрадилар.

Дарслик асосан ўқув режасига «Сонли системалар» фани киритилган олий ўқув юртлари талабалари, умумий ўрта таълим мактаблари, академик лицей, касб-ҳунар коллежлари ўқитувчилари учун мўлжалланган.

Дарсликда ўқувчилар мустақил ишларини ташкил этиш учун мўлжалланган топшириқлар ҳар бир параграфдан сўнг олинган билимларни текшириш учун саволлар, мустақил ишлаш учун мисоллар кўринишида келтирилган.

Дарсликда асосий материални ўзлаштириш енгилроқ бўлиши учун алгебрадан, математик анализдан, математик мантиқдан керакли материаллар берилган.

I БОБ. ТЎПЛАМЛАР НАЗАРИЯСИ ВА МАТЕМАТИК МАНТИҚ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

I.1-§. Тўплам. Тўпламлар устида амаллар

Тўплам математиканинг бошланғич тушунчаларидан бири бўлиб у мисоллар ёрдамида тушунтирилади.

Тўплам маълум бир хосса ёки хусусиятга эга бўлган предметлар ёки объектлар мажмуасидан иборат бўлади. Масалан, Африкадаги барча дарёлар ёки бир факультетдаги барча гурухлар мажмуаси тўплам бўла олади. Тўпламни ташкил қилувчи предметлар ёки объектлар тўпламнинг *элементлари* дейилади. Тўплам лотин алифбосининг бош ҳарфлари A, B, C,... лар орқали белгиланади.

Мисоллар: Барча натурал сонлар тўплами $N=\{1,2,3,...\}$, бутун сонлар тўплами $Z=\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$ кўринишда белгиланади. Q орқали барча рационал сонлар тўпламини, яъни $\frac{p}{q}$, $q\neq 0$, $p,q\in Z$ каср кўринишида ёзиш мумкин бўлган сонларни белгилаймиз. R орқали эса барча хақиқий сонлар тўпламини белгилаймиз.

a объект A тўпламнинг элементи бўлса, $a\in A$, аксинча a объект A тўпламнинг элементи бўлмаса, $a\notin A$ ёки $a\,\bar{\in}\, A$ орқали белгиланади. Агар A тўпламнинг ҳар бир элементи B тўпламнинг ҳам элементи бўлса, $A\subset B$ орқали белгиланади ва A тўплам B тўпламнинг *тўпламостиси* дейилади.

Бир хил элементлардан ташкил топган тўпламлар *тенг тўпламлар* дейилади. A ва B тўпламлар тенг бўлса $A=B$ кўринишда белгилаймиз. A ва B тўпламларнинг тенг бўлиши учун $A\subset B$ ва $B\subset A$ бўлиши зарур ва етарли эканлигини кўриш қийин эмас. Битта ҳам элементи йўқ тўпламни *бўш тўплам* деб атаймиз ва $\varnothing$ ёки Λ орқали белгилаймиз.

I.1.1-таъриф. *A ва B тўпламларнинг камида бирига тегишли бўлган барча элементлардан ташкил топган A ва B тўпламларнинг бирлашмаси ёки йиғиндиси дейилади.*

A ва B тўпламларнинг йиғиндиси $A\bigcup B$ орқали белгиланади.

I.1.2-мисол. $A=\{1, 2, O, \Delta, \Diamond\}$, $B=\{1, O, \Delta, 8, 9\}$ тўпламларнинг бирлашмаси $A\bigcup B=\{1, 2, O, \Delta, \Diamond, 8, 9\}$ бўлиши равшан

I.1.3-таъриф. *A ва B тўпламларнинг кесишмаси ёки кўпайтмаси деб, A ва B тўпламларнинг барча умумий, яъни A га ҳам, B га ҳам тегишли элементлардан ташкил топган тўпламга айтилади.*

A ва B тўпламларнинг кесишмаси $A\cap B$ кўринишида белгиланади.

I.1.2-мисолдаги A ва B лар учун $A\bigcap B=\{1, O, \Delta\}$ бўлади.

I.1.4-таъриф. *A ва B тўпламларнинг айирмаси деб, A тўпламнинг B тўпламга тегишли бўлмаган барча элементларидан ташкил топган тўпламга айтилади.*

A ва B тўпламларнинг айирмаси $A\setminus B$ кўринишида белгиланади.

I.1.2-мисолдаги A ва B тўпламлар учун $A\backslash B=\{2, \Diamond\}$, В ва А тўпламлар учун эса $B\backslash A=\{8, 9\}$.

$(A\backslash B)\bigcup(B\backslash A)$ тўплам А ва В тўпламларнинг *симметрик айирмаси* дейилади ва $A\,\Delta\,B$ орқали белгиланади. $A\,\Delta\,B=(A\bigcup B)\backslash(A\bigcap B)$ бўлишини исбот қилишни ўқувчиларга ҳавола этамиз.

I.1.5-таъриф. *Агар $A\subset B$ бўлса, $B\backslash A$ тўплам A тўпламнинг B тўпламгача тўлдирувчи тўплам дейилади.*

Тўлдирувчи тўплам $\subset A$ ёки A' орқали белгиланади. Шундай қилиб, $\subset A=B\backslash A$.

Математиканинг баъзи соҳаларида фақатгина бирорта тўплам ва унинг барча тўпламостилари билан иш кўришга тўғри келади. Масалан, планиметрия текислик ва унинг барча тўпламостилари билан, стереометрия эса фазо ва унинг барча тўпламостилари билан иш кўради.

Агар бирор Е тўплам ва фақат унинг тўпламостилари билан иш кўрсак, бундай Е тўпламни универсал тўплам деб атаймиз. Универсал тўпламнинг барча тўпламостилари тўпламини B (Е) орқали белгилаймиз.

Тўпламлар устида амалларнинг хоссалари.

Тўпламлар устида бажариладиган алгебраик амаллар қуйидаги хоссаларга эга.

1°. $\begin{matrix} A\bigcap B=B\bigcap A \\ A\bigcup B=B\bigcup A \end{matrix}$ кесишма ва бирлашманинг коммутативлиги;

2°. $\begin{matrix} (A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C) \\ (A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C) \end{matrix}$ кесишма ва бирлашманинг ассоциативлиги;

3°. Кесишманинг бирлашмага нисбатан дистрибутивлиги:
$A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$;

4°. Бирлашманинг кесишмага нисбатан дистрибутивлиги:
$A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$;

5°. $(A\setminus B)\bigcap C=(A\bigcap C)\setminus B=(A\bigcap C)\setminus(B\bigcap C)$;

6°. $A\setminus B=A\setminus(A\bigcap B)$;

7°. $(A\bigcap B)\bigcup(A\setminus B)=A$

$A_1\bigcup A_2\bigcup\ldots A_n\bigcup\ldots$ бирлашмани $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$, $A_1\bigcap A_2\bigcap\ldots A_n\bigcap\ldots$ кесишмани $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ деб белгилаб олсак, яна қуйидаги хоссаларга эга бўламиз. $A_i, i=1,\ldots$ тўпламлар бирорта Х тўпламнинг тўпламостилари бўлсин, у ҳолда

8°. $X\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}(X\setminus A_i)$;

9°. $X\setminus\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(X\setminus A_i)$.

Бу тенгликларни исботлаш учун, тенгликларнинг чап томонидаги тўпламга тегишли ихтиёрий элемент, тенгликнинг ўнг томонидаги тўпламга тегишли ва тўпламнинг ўнг томонидаги тўпламга тегишли ихтиёрий элемент чап томонидаги тўпламга ҳам тегишли бўлишини кўрсатиш етарли.

Юқоридаги хоссаларнинг бир нечтасини исбот қилиб кўрайлик.

3^0-нинг исботи: ихтиёрий $x \in (A \bigcap (B \bigcup C))$ бўлсин, у ҳолда кесишманинг таърифига асосан, $x \in A$ ва $x \in (B \bigcup C)$ бўлади. Тўпламлар бирлашмасининг таърифига асосан $x \in B$ ёки $x \in C$ бўлади. Демак, $x \in A$ ва $x \in B$ ёки $x \in A$ ва $x \in C$ бўлади. Бу эса $x \in (A \bigcap B)$ ёки $x \in (A \bigcap C)$ дегани. Охирги муносабат $x \in ((A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C))$ бўлишини билдиради. Шундай қилиб, ҳар қандай $x \in (A \bigcap (B \bigcup C))$ учун, $x \in ((A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C))$ экан.

Энди $x \in ((A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C))$ бўлсин, у ҳолда тўпламлар бирлашмаси амалининг таърифига кўра $x \in (A \cap B)$ ёки $x \in (A \bigcap C)$ бўлади. Тўпламлар кесишмасининг таърифига кўра $x \in A$ ва $x \in B$ ёки $x \in C$ бўлади, у ҳолда $x \in (A \bigcap (B \bigcup C))$.

8^0- хоссанинг исботи: ихтиёрий $x \in (X \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i)$ бўлсин, у ҳолда $x \in X$ ва $x \notin \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Демак, $x \notin A_1$ ва $x \notin A_2$ ва... ва $x \notin A_n$,... . У ҳолда $x \in (X \setminus A_1)$, $x \in (X \setminus A_2)$, ..., $x \in (X \setminus A_n)$ ва ҳоказо, яъни $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i)$.

Аксинча, $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i)$ бўлсин, у ҳолда тўпламлар кесишмасининг таърифига кўра $x \in (X \setminus A_1)$ ва $x \in (X \setminus A_2)$ ва ... ва $x \in (X \setminus A_n)$ ва ҳоказо. Тўпламлар айирмаси амалининг таърифига кўра $x \in X$ ва $x \notin A_1$ ва $x \notin A_2$ ва ... ва $x \notin A_n$ ва ... бўлади. Тўпламлар бирлашмасининг таърифига кўра $x \notin \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Демак $x \in (X \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i)$.

Бу хоссалардан ташқари тўпламлар устида бажариладиган амаллар исботи равшан бўлган қуйидаги хоссаларга эга:

$10^\bullet$. $A \bigcup A = A$

$11^\bullet$. $A \bigcap A = A$

$12^\bullet$. $A \subset B$ бўлса, $\subset (\subset A) = A$.

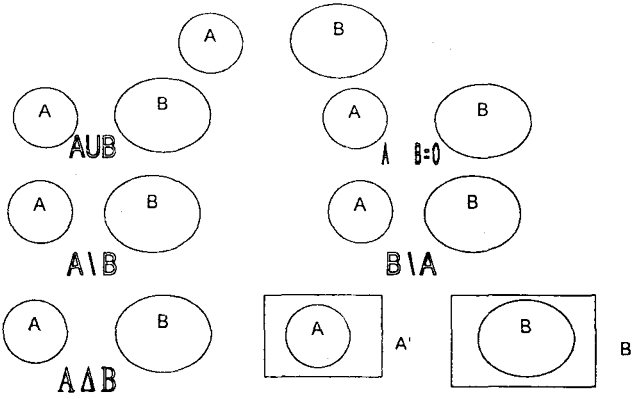
$13^\bullet$. $A \subset C$ ва $B \subset C$ бўлса, $(A \bigcup B)' = A' \bigcap B'$ ва $(A \bigcap B)' = A' \bigcup B'$.

$14^\bullet$. $A \bigcap \varnothing = \varnothing$

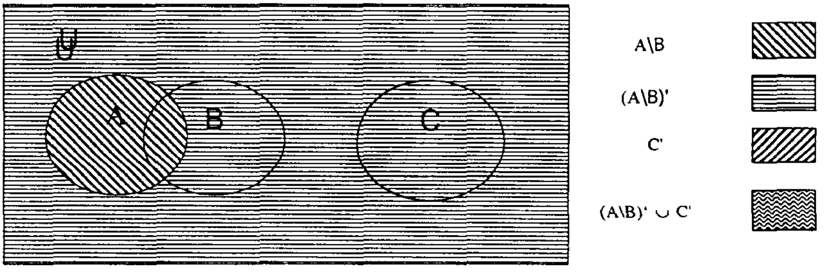
$15^\bullet$. $A \bigcup \varnothing = A$

Тўмламлар устида бажариладиган амалларни **Эйлер-Венн** диаграммалари деб аталадиган шакллар ёрдамида ифода қилиш мумкин.

Универсал тўплам тўғри тўрт бурчак шаклида, унинг тўпламостилари тўғри тўртбурчак ичидаги доиралар орқали ифода қилинади. У ҳолда, икки тўплам бирлашмаси, кесишмаси, айирмаси, тўлдурувчи тўпламлар, икки тўпламнинг симметрик айирмаси мос равишда қуйидагича ифодаланади:



I.1.6-misol. (A\B)'UC' to'plamni Eyler-Venn diagrammalari yordamida tasvirlang.



Такрорлаш учун саволлар

1. Тўплам тушунчасига мисоллар келтиринг.
2. Тўплам элементи деб нимага айтилади?
3. Қисм тўплам таърифини айтинг.
4. Тенг тўпламлар тушунчасига таъриф беринг.
5. Бўш тўплам, универсал тўпламлар таърифини айтинг.
6. Тўпламлар бирлашмаси, кесишмасига таъриф беринг.
7. Тўпламлар айирмаси, симметрик айирмасига таъриф беринг.
8. Тўпламлар бирлашмасининг қандай хоссаларини биласиз?
9. Тўпламлар кесишмасининг қандай хоссаларини биласиз?
10. Тўпламлар устида бажариладиган амалларнинг хоссалари қандай тушунчалар ёрдамида исботланади?
11. Эйлер-Венн диаграммаларини тушунтиринг.
12. Эйлер-Венн диаграммалари ёрдамида тўпламларнинг тенглигини исботлаш мумкинми?

Машқлар

1. Қуйидаги айниятларни исбот қилинг:

a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

b) $A \setminus (B \cap C \cap D) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (A \setminus D)$

c) $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$

d) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$

2. Қуйидаги тасдиқларни исбот қилинг:

a) агар $A \subset B$ бўлса, у ҳолда $(A \setminus B) \cup A = A$ бўлади;

b) $A \subset B$ бўлиши учун $A \cup B = A$ бўлиши зарур ва етарли;

c) агар $A \subset B$ бўлса, у ҳолда $A \setminus C \subset B \setminus C$;

d) агар $A \subset B$ бўлса, $A \cup C \subset B \cup C$ бўлади.

3. Агар $n(X) - X$ чекли тўпламнинг элементлари сонини билдирсин. У ҳолда A , B ва C чекли тўпламлар учун , $n(B \cap C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C)$ тенгликни исботланг.

4. Элементлари сони n та бўлган тўпламнинг барча тўпламостилари сони 2^n та бўлишини исбот қилинг.

I.2-§. Мулоҳаза. Мулоҳазалар устида амаллар

Рост ёки ёлғонлигини бир қийматли аниқлаш мумкин бўлган дарак гап *мулоҳаза* деб тушунилади.

«Қайин – дарахт», «Тошкент – пойтахт шаҳар», «5 > 2», «9 – май - байрам» каби гаплар мулоҳазаларга мисол бўла олади. Лекин ҳар қандай гап ҳам мулоҳаза бўла олмайди, масалан, «Яшасин Ўзбекистон ёшлари!», «Сен нечанчи курсда ўқийсан?» каби гаплар мулоҳазалар эмас, чунки улар дарак гаплар эмас.

Демак, бирор бир гап мулоҳаза бўлиши учун, у албатта дарак гап бўлиши ва рост ёки ёлғонлиги бир қийматли аниқланиши шарт.

Ўзбек тилидаги барча мулоҳазалар тўпламини M орқали белгилайлик. M тўпламнинг элементларини лотин алифбосининг босмача, индексли ёки индекссиз бош ҳарфлари билан белгилашга келишиб оламиз. Яъни A , B , C , . . . , A_1, A_2, . . . , A_n - мулоҳазалардир. A мулоҳаза рост бўлса, унга 1 ни, ёлғон бўлса, 0 ни мос қўямиз, яъни M тўпламга қуйидаги акслантиришни киритамиз:

$$\begin{cases} \mu(A) = 1, \text{ агар A- рост мулоҳаза бўлса;} \\ \mu(A) = 0, \text{ агар A-ёлғон мулоҳаза бўлса.} \end{cases}$$

μ(A) қийматга A мулоҳазанинг мантиқий қиймати дейилади. Ростлик жадвалларини тўлдирганимизда ёзувни ихчамлаштириш мақсадида μ(A) ўрнига A ёзишни келишиб оламиз.

I.2.1 – таъриф. *A ва B мулоҳазаларнинг конъюнкцияси деб, A ва B мулоҳазалар рост бўлгандагина рост, қолган ҳолларда ёлғон бўладиган A &B мулоҳазага айтилади.*

Мулоҳазалар конъюнкцияси мантиқий кўпайтириш деб ҳам аталади ва $A \cdot B$ ёки $A \wedge B$ каби белгиланиши мумкин.

I.2.2 - таъриф. *A ва B мулоҳазалар дизъюнкцияси деб, A ва B мулоҳазаларнинг иккаласи ҳам ёлғон бўлгандагина ёлғон, қолган ҳолларда рост бўладиган $A \vee B$ мулоҳазага айтилади.*

Мулоҳазалар дизъюнкцияси мантиқий қўшиш деб ҳам юритилади ва $A + B$ каби белгиланиши ҳам мумкин.

I.2.3 - таъриф. *A мулоҳаза рост бўлганда ёлғон, ёлғон бўлганда рост бўладиган $\rceil A$ мулоҳаза A мулоҳазанинг инкори дейилади.*

А мулоҳазанинг инкори $\overline{A}$ орқали белгиланиши ҳам мумкин.

Мулоҳазалар устида бажариладиган амаллар ростлик жадвали деб аталадиган жадваллар ёрдамида ҳам берилиши мумкин. Юқорида таърифланган амаллар ростлик жадвали қуйидаги кўринишда бўлади :

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\rceil A$
1	1	1	1	0
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

Бундан ташқари яна бир қанча амаллар, яъни :

$\Rightarrow$ - импликация ёки мантиқий хулоса,

$\Leftrightarrow$ ёки $\equiv$ - эквиваленция ёки мантиқий тенг кучлилик,

$|$ - Шефер штрихи,

$\downarrow$ - Пирс стрелкаси,

$\oplus$ - қатъий дизъюнкция, яъни 2 модуль бўйича қўшиш амаллари қуйидаги жадвал орқали берилади:

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$A \mid B$	$A \downarrow B$	$A \oplus B$
1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0

Такрорлаш учун саволлар

1. Қандай гаплар мулоҳаза бўлади ?
2. Мулоҳазалар конъюнкцияси, дизъюнкцияси, импликацияси, эквиваленцияси ҳамда инкори таърифларини айтинг.
3. Ростлик жадвали нима ?
4. Бири иккинчисининг инкори бўлган мантиқ амалларини келтиринг.

М а ш қ л а р

1. Қуйидаги гаплар ичидан мулоҳазаларни ажратинг ва уларнинг рост ёки ёлғон эканлигини аниқланг :

1). Сирдарё Орол денгизига қуйилади.

2). Сиз қайси олийгоҳда ўқийсиз ?

3). Ўзбекистон Мустақиллигининг 15 йиллиги муборак бўлсин!

4). Ҳар қандай сон мусбат.

5). 0 ҳар қандай ҳақиқий сонга бўлинади.

6). $3x^3 - 5y + 9$.

2. Қуйидаги жуфтликларнинг қайси бирида мулоҳазалар бир–бирининг инкори :

1) $2 < 0,\ 2 > 0$.

2) $6 < 9,\ 6 \geq 9$.

3) «ABC тўғри бурчакли учбурчак», «ABC ўтмас бурчакли учбурчак».

4) «f- функция – тоқ» , «f – функция – жуфт» ?

3. Қуйидаги мулоҳазаларнинг ростлик қийматини аниқланг:

1). Агар 12 6 га бўлинса, у ҳолда 12 3 га бўлинади.

2). Агар 11 4 га бўлинса, у ҳолда 11 2 га бўлинади.

3). Агар 15 3 га бўлинса, у ҳолда 15 6 га бўлинади.

4). 12 6 га бўлинади, фақат ва фақат шу ҳолда-ки, агар 12 3 га бўлинса.

5). 15 6 га бўлинади, фақат ва фақат шу ҳолда-ки, агар 15 3 га бўлинса.

4. Агар A орқали «9 - мураккаб сон», B орқали «8 - туб сон» деган мулоҳазалар белгиланган бўлса, у ҳолда қуйидаги мулоҳазаларни сўзлар орқали ифодаланг ва ростлик қийматини аниқланг:

$A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$, $\rceil A \Rightarrow B$, $\rceil B \Rightarrow A$, $\rceil A \Rightarrow \rceil B$, $\rceil B \Rightarrow \rceil A$,

$A \Rightarrow \rceil B$, $B \Rightarrow \rceil A$, $A \Leftrightarrow B$, $\rceil A \Leftrightarrow \rceil B$, $\rceil A \Leftrightarrow B$, $A \Leftrightarrow \rceil B$.

I.3 -§. Мулоҳазалар алгебраси. Мулоҳазалар алгебраси алфавити, формула тушунчаси

Мулоҳазалар алгебраси тушунчасини киритиш учун алгебра тушунчасини эслатиб ўтамиз. $A \neq \varnothing$ тўплам ва Ω - A тўпламда аниқланган алгебраик амаллар тўплами берилган бўлсин. У ҳолда (A,Ω)- жуфтликни *алгебра* деб атаймиз.

I.3.1 - таъриф. $< M\ ,\ \{\rceil\ ,\ \wedge\ ,\ \vee\ ,\Rightarrow\ ,\ \Leftrightarrow\ \}\ >$ *- универсал алгебра мулоҳазалар алгебраси дейилади.*

Мулоҳазалар алгебрасини қисқача МА деб белгилаймиз.

МА нинг алфавити қуйидагилардан иборат :

A , B , C , . . . – мулоҳазаларни белгилаш учун ишлатиладиган харфлар;

$\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ - мантиқ амалларини белгилаш учун ишлатиладиган белгилар;

(,) - чап ва ўнг қавслар .

Мулоҳазалар алгебрасининг асосий тушунчаларидан бири формула тушунчасидир. Унга индуктив таъриф берамиз.

I.3.2 - таъриф. *1). Ҳар қандай мулоҳаза формуладир.*

2). Агар $\mathfrak{I}$ ва $\mathfrak{R}$ лар формулалар бўлса, у ҳолда

$(\rceil\mathfrak{I})$, $(\mathfrak{I} \wedge \mathfrak{R})$, $(\mathfrak{I} \vee \mathfrak{R})$, $(\mathfrak{I} \Rightarrow \mathfrak{R})$, $(\mathfrak{I} \Leftrightarrow \mathfrak{R})$ лар ҳам формулалардир.

3). 1) ва 2) лар ёрдамида ҳосил қилинган ифодаларгина формулалардир.

Масалан, A , B , C лар 1) га асосан формулалар; $(\rceil B)$, $(A\Rightarrow(\rceil B))$, $(((A \Rightarrow (\rceil B)) \Rightarrow A)\wedge C)$ лар 2) га асосан формулалардир.

Формулаларнинг таркибидаги қавсларни камайтириш мақсадида мантиқ амалларининг бажарилиш тартибини $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ деб белгилаб оламиз. Бундан ташқари ташқи қавсларни ҳам эҳтиёж бўлмаганда ташлаб юборамиз. Бундай ўзгартиришлардан кейин $((A \wedge B) \vee ((\rceil A) \Rightarrow C))$ формулани $A \wedge B \vee (\rceil A \Rightarrow C)$ кўринишда ёзишимиз мумкин бўлади.

I.3.3-таъриф. *Формулада қатнашган мантиқ амаллари сони формуланинг ранги дейилади.*

Юқорида келтирилган формуланинг ранги 4 га тенг.

I.3.4- таъриф. *1. $\mathfrak{I}$ формула - A дан иборат бўлса, унинг формулаости фақат унинг ўзидан иборат.*

*2. Агар формуланинг кўриниши $\mathfrak{I} * \mathfrak{R}$ дан иборат бўлса, у ҳолда унинг формулаостилари $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{I} * \mathfrak{R}$, ҳамда $\mathfrak{I}$ ва $\mathfrak{R}$ ларнинг барча формулаостиларидан иборат бўлади. Бу ерда * - $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ амалларидан бири.*

3. Агар формуланинг кўриниши $\rceil\mathfrak{I}$ бўлса, унинг формулаостилари $\mathfrak{I}$ формула, $\mathfrak{I}$ формуланинг барча формулаостилари ва $\rceil\mathfrak{I}$ нинг ўзидан иборат.

4. Бошқа формулаостилари йўқ.

I.3.5 - мисол. $(A \wedge B) \Rightarrow \rceil A$ формуланинг формулаостилари таърифга кўра қуйидагилардан иборат : A , B , $\rceil A$, $A \wedge B$, $(A \wedge B) \Rightarrow \rceil A$.

Агар $\mathfrak{I}$ формула таркибига фақат $A_1, A_2, \ldots, A_n$ –мулоҳазалар кирган бўлса, бу мулоҳазаларни *пропозиционал ўзгарувчилар* деб атаймиз ва формулани эҳтиёж бўлганда $\mathfrak{I}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ кўринишда ёзамиз.

Координаталари 0 ёки 1 лардан иборат $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ вектор (бу ерда i_k лар 0 ёки 1 лардан иборат) пропозиционал ўзгарувчиларнинг *қийматлари тизими* дейилади.

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ пропозиционал ўзгарувчиларнинг барча қийматлари тизими 2^n та эканлигини кўриш қийин эмас. Демак, агар мулоҳазалар алгебрасининг бирор $\mathfrak{I}$ формуласи таркибига n та мулоҳаза кирган бўлса, бу формуланинг ростлик жадвали 2^n та қийматлар тизимидан ташкил топган бўлади.

I.3.6 - мисол . $A \wedge B \Rightarrow \neg A \vee C$ формуланинг ростлик жадвалини тузинг.

A	B	C	$\neg A$	$A \wedge B$	$\neg A \vee C$	$A \wedge B \Rightarrow \neg A \vee C$
1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	1

Такрорлаш учун саволлар

1. Мулоҳазалар алгебраси деб нимага айтилади ?
2. Мулоҳазалар алгебрасининг алфавитини келтиринг.
3. Мулоҳазалар алгебрасининг формуласи деб нимага айтилади ?
4. Мантиқ амалларининг бажарилиш тартибини айтинг.
5. Формуланинг ранги нима?
6. Формулаости нима?
7. Формула учун ростлик жадвали қандай тузилади ?

М а ш қ л а р

1. Қуйидаги ифодалардан қайсилари формула эканлигини аниқланг :

1) $A \vee B \wedge \neg A \Leftrightarrow C \Rightarrow \neg B$;

2) $A \Leftrightarrow B\, C \neg A$;

3) $\neg A \vee \neg B \Leftrightarrow \neg\neg C$;

4) $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B \Leftrightarrow C) \wedge (\wedge B)$.

2. $A \vee B \wedge \neg A \Leftrightarrow C$ формуладан қавслар ёрдамида ҳосил қилиш мумкин бўлган барча формулаларни топинг.

3. Қуйидаги формулаларнинг барча формула остиларини аниқланг :

1) $A \Leftrightarrow B \vee C \wedge \neg A$;

2) $((A \Leftrightarrow B) \wedge \neg C) \Leftrightarrow (((A \vee B) \Rightarrow A) \Rightarrow \neg B)$;

3) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Leftrightarrow \neg B) \Rightarrow (A \wedge B))$;

4) $A \Rightarrow \neg B \vee C \Rightarrow \neg A \Rightarrow \neg C$.

4. Юқоридаги мисолларда келтирилган формулалар рангларини аниқланг.

5. Юқоридаги мисолларда келтирилган формулалар учун ростлик жадваллари тузинг.

I.4 - § . Тенг кучли формулалар. Тавтология – мантиқ қонуни.

I.4.1-таъриф. *МА нинг $\Im$ ва $\Re$ формулалари берилган бўлиб, бу формулалар таркибига кирган барча мулоҳазалар $A_1, \ldots, A_m$ - лардан иборат бўлсин. Агар $A_1, \ldots, A_m$ мулоҳазаларнинг барча қийматлар тизимлари $(i_1, \ldots, i_m)$ лар учун $\Im$ ва $\Re$ формулалар бир хил қийматлар қабул қилсалар, у ҳолда, бу формулалар тенг кучли формулалар дейилади.*

$\Im$ ва $\Re$ формулаларнинг тенг кучлилиги $\Im \equiv \Re$ кўринишда ифодаланади.

I.4.2 - таъриф. *Мулоҳазалар алгебрасининг $\Im(A_1, \ldots, A_n)$ формуласи $A_1, \ldots, A_n$ мулоҳазаларнинг барча қийматлари тизими $(i_1, \ldots, i_n)$да 1 қиймат қабул қилса, айнан рост формула ёки тавтология ёки мантиқ қонуни дейилади.*

Айнан рост формулани қисқача АР деб белгилаймиз.

I.4.3-таъриф. *МА нинг $\Im(A_1, \ldots, A_n)$ формуласи $A_1, \ldots, A_n$ мулоҳазаларнинг барча қийматлари тизими $(i_1, \ldots, i_n)$ да 0 қиймат қабул қилса, айнан ёлғон ёки зиддият дейилади*

I.4.4-таъриф. *Агар мулоҳазалар алгебрасининг $\Im(A_1, \ldots, A_n)$ формуласи $A_1, \ldots, A_n$ ларнинг камида битта $(i_1, \ldots, i_n)$ қийматлари тизимида 1 га тенг қиймат қабул қилса, у ҳолда бу формула бажарилувчи формула дейилади.*

I.4.5-теорема. *Мулоҳазалар алгебрасининг $\Im$ ва $\Re$ формулалари тенг кучли формулалар бўлиши учун, $\Im \Leftrightarrow \Re$ формула айнан рост формула бўлиши зарур ва етарли.*

Исбот. $\Im \equiv \Re$ бўлсин. У ҳолда $\Im$ ва $\Re$ формулаларга кирган барча пропозиционал ўзгарувчиларнинг барча қийматлари тизимларида $\Im$ ва $\Re$ формулалар бир хил қийматлар қабул қиладилар. Яъни, $\Im \Leftrightarrow \Re \equiv 1$ бўлади.

Аксинча, $\Im \Leftrightarrow \Re \equiv 1$ бўлса, $\Im \equiv 1$ бўлганда $\Re \equiv 1$ ва $\Im \equiv 0$ бўлганда $\Re \equiv 0$ бўлади.

I.4.6. Асосий тенг кучли формулалар.

1. $A \wedge A \equiv A$ (конъюнкциянинг идемпотентлик қонуни).
2. $A \vee A \equiv A$ (дизъюнкциянинг идемпотентлик қонуни).
3. $A \wedge 1 \equiv A$.
4. $A \vee 1 \equiv 1$.
5. $A \wedge 0 \equiv 0$.
6. $A \vee 0 \equiv A$.
7. $A \vee \rceil A \equiv 1$ – учинчисини инкор қилиш қонуни.
8. $A \wedge \rceil A \equiv 0$ - зиддиятга келтириш қонуни.
9. $\rceil(\rceil A) \equiv A$ - қўш инкор қонуни.
10. $A \wedge (B \vee A) \equiv A$.
11. $A \vee (B \wedge A) \equiv A$.

12. $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

13. $A \Rightarrow B \equiv \rceil A \vee B$.

14. $\rceil(A \wedge B) \equiv \rceil A \vee \rceil B$.

15. $\rceil(A \vee B) \equiv \rceil A \wedge \rceil B$.

16. $A \wedge B \equiv \rceil(\rceil A \wedge \rceil B)$.

17. $A \vee B \equiv \rceil(\rceil A \wedge \rceil B)$.

18. $A \wedge B \equiv B \wedge A$ – конъюнкциянинг коммутативлик қонуни.

19. $A \vee B \equiv B \vee A$ – дизъюнкциянинг коммутативлик қонуни.

20. $A\wedge(B\vee C)\equiv(A \wedge B)\vee (A\wedge C)$ - $\wedge$ нинг $\vee$ га нисбатан дистрибутивлик қонуни.

21. $A\vee(B\wedge C)\equiv(A\vee B)\wedge(A\vee C)$ - $\vee$ нинг $\wedge$ га нисбатан дистрибутивлик қонуни.

22. $A\wedge(B\wedge C)\equiv(A\wedge B)\wedge C$ – конъюнкциянинг ассоциативлик қонуни.

23. $A\vee(B\vee C)\equiv(A\vee B)\vee C$ – дизъюнкциянинг ассоциативлик қонуни.

Бу тенгкучлиликлар ростлик жадваллари ёрдамида исботланиши мумкин. Масалан, 20 - тенгкучлиликнинг исботи учун ростлик жадвали тузамиз :

A	B	C	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$(A\wedge B)\vee (A\wedge C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Ростлик жадвалидаги охирги икки устунлар мос қаторларидаги қийматлар тенглигидан кўринадики : $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

Такрорлаш учун саволлар

1. Мулоҳазалар алгебрасининг тенг кучли формулаларига таъриф беринг.
2. Мантиқ қонуни деб нимага айтилади ?
3. Мулоҳазалар алгебрасида зиддият деб нимага айтилади?
4. Бажарилувчи формула таърифини айтинг.
5. Мулоҳазалар алгебрасининг формулалари тенг кучли бўлишининг зарур ва етарли шартларини келтиринг.
6. Учинчисини инкор қилиш, ютилиш, қўш инкор ва зиддиятга келтириш қонунларини ифодаланг.

Машклар

1. Қуйидаги формулаларнинг айнан рост эканлигини исботланг :

1) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\rceil A \Leftrightarrow \rceil B)$;

2) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$;

3) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B))$;

4) $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow (C \vee B))$.

2. Қуйидаги формулаларнинг айнан ёлғон эканлигини исботланг :

1) $A \wedge (B \wedge (\rceil A \vee \rceil B))$;

2) $\rceil(\rceil(A \vee B) \Rightarrow \rceil(A \wedge B))$;

3) $\rceil(A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$;

4) $\rceil(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C))$.

3. Қуйидаги формулаларнинг қайсилари бажарилувчи эканлигини аниқланг :

1) $\rceil(A \Rightarrow \rceil A)$;

2) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$;

3) $(B \Rightarrow (A \wedge C)) \wedge \rceil((A \vee C) \Rightarrow B)$;

4) $\rceil((A \Leftrightarrow \rceil B) \vee C) \wedge B$.

4. I.4.6 да келтирилган тенгкучлиликларни ростлик жадваллари ёрдамида исботланг.

I.5- §. Предикат тушунчаси. Предикатлар устида амаллар.

Предикатлар алгебраси мулоҳазалар алгебрасини кенгайтириш натижасида ҳосил қилинган бўлиб, мулоҳазалар алгебрасини ўз ичига олади. Предикатлар алгебрасининг асосий тушунчаси – предикат тушунчаси билан танишиб чиқайлик. Бизга бирорта иҳтиёрий бўш бўлмаган предметлар тўплами $П$ берилган бўлсин. $П$ тўпламнинг ихтиёрий « a » элементи ҳақида айтилган мулоҳазани $P(a)$ кўринишида белгилайми. $P(a)$ рост ёки ёлғон мулоҳаза бўлиши мумкин. Масалан, $П$ – натурал сонлар тўпламидан иборат бўлсин, $P(a)$ – «a – туб сон» - деган дарак гап бўлсин. У ҳолда $P(1)$ – « 1 – туб сон » - ёлғон мулоҳаза, $P(2)$ – « 2 – туб сон » - рост мулоҳаза, $P(3)$ – «3 – туб сон» - рост мулоҳаза, $P(4)$ – «4 - туб сон» - ёлғон мулоҳаза ва ҳ. к.

Кўриниб турибдики, $P(a)$ - a нинг ўрнига $П$ тўпламнинг аниқ элементларини қўйганимизда рост ёки ёлғон мулоҳазаларга айланар экан.

Худди шундай, $П$ тўпламининг иккита элементи ҳақида айтилган мулоҳаза $P(a, b)$ кўринишида белгиланиши мумкин ва ҳ.к.

I.5.1 - таъриф. *Бўш бўлмаган $П$ тўплам берилган бўлсин. $P : П^n \rightarrow \{0, 1\}$, $n = 0, 1, \ldots$ кўринишдаги ҳар қандай функция n ўринли предикат дейилади.*

n=0 бўлганда $П^0 = \{\varnothing\}$ бўлиб, $P(\varnothing) = 0$ ёки $P(\varnothing) = 1$ кўринишдаги ажратилган элементлар ҳосил бўлади. Бу ажратилган элементларни ёлғон ёки рост мулоҳаза деб тушунишимиз мумкин. Шундай қилиб 0 ўринли предикат – мулоҳазадир.

Икки ўринли предикатга мисол келтирайлик. Натурал сонлар тўплами Nда берилган $P(a,b)$ – «a сон b сонига қолдиқсиз бўлинади» - деган предикатни кўриб чиқайлик. Унинг қийматлари қуйидагича :

$P(1,1)=1,\ P(1,2)=0, \ldots, P(2,1)=1$

$P(2,2)=1,\ P(2,3)=0, \ldots, P(3,1)=1$ ва ҳ.к.

Бир ўринли предикатлар билан тўлиқроқ танишиб чиқамиз.

Предикатлар устида ҳам мулоҳазалар устида бажарилган амалларни киритишимиз мумкин. $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ амаллари бир ўринли предикатлар учун қуйидагича аниқланади :

П тўпламда аниқланган P ва Q предикатлар берилган бўлсин. У ҳолда :

($\rceil$P) – P нинг инкори ;

(P $\wedge$ Q) – P ва Q нинг конъюнкцияси ;

(P $\vee$ Q) – P ва Q нинг дизъюнкцияси ;

(P $\Rightarrow$ Q) – P ва Q нинг импликацияси ;

(P $\Leftrightarrow$ Q) – P ва Q нинг эквиваленцияси қуйидагича аниқланади :

$(\rceil P)(x)=\rceil(P(x)),\ (P * Q)(a)=P(x) * Q(x),$

бу ерда $*$ - $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ амаллардан бири.

I.5.2 - мисол. N – натурал сонлар тўпламида берилган P (x) –«x – туб сон», Q (x) – « x – тоқ сон » - предикатлари берилган бўлсин. У ҳолда $(\rceil P)(x)=\rceil(P(x))$ – « x – туб сон эмас » деган предикатдир. x нинг бир нечта қийматларида $\rceil$P предикатнинг қийматларини топамиз :

$(\rceil P)(3)=\rceil(P(3))=\rceil 1=0,\ (\rceil P)(4)=\rceil(P(4))=\rceil 0=1$

(Q $\wedge$ P) (x) – « x – тоқ ва туб сон » - деган предикатни ҳам x нинг бир нечта қийматларида рост ёки ёлғон бўлишини кўрамиз

$(Q \wedge P)(1)=Q(1) \wedge P(1)=1 \wedge 0=0,$

$(Q \wedge P)(2)=Q(2) \wedge P(2)=0 \wedge 1=0,$

$(Q \wedge P)(3)=Q(3) \wedge P(3)=1 \wedge 1=1.$

Шунга ўхшаш P $\vee$ Q, P $\Rightarrow$ Q, P $\Leftrightarrow$ Q предикатларнинг моҳиятини тушуниб олиш қийин эмас.

Предикатлар устида бажариладиган яна иккита амал киритамиз :

I.5.3 - таъриф. *П тўпламда аниқланган P(x) предикат берилган бўлсин. Агар x нинг П тўпламдаги барча қийматларида P (x) = 1 бўлса, у ҳолда* $\forall_x$ *P (x) – ифода рост мулоҳаза, акс ҳолда, яъни П тўпламнинг камида битта* x_0 *элементи учун P (*x_0*) = 0 бўлса, ёлғон мулоҳазадир.*

I.5.4 - таъриф. *$\exists x$ P (x) – ифода x нинг П тўпламдаги камида битта* x_0 *элементи учун P(*x_0*) = 1 бўлганда рост, қолган ҳолларда ёлғон мулоҳазадир.*

$\forall$ - белги, умумийлик кванторининг белгиси, $\exists$ - белги, мавжудлик кванторининг белгиси. $\forall$x P(x) – «барча x лар учун P(x) бўлади », $\exists$x P(x) – «шундай x топилади-ки, P(x) бўлади» деб ўқилади.

$\forall$x P(x) ва $\exists$xP(x) ифодалардаги x ўзгарувчи $\forall$ ёки $\exists$ *кванторлари орқали боғланган*, ё бўлмаса, x ўзгарувчига $\forall$ ёки $\exists$ *квантори осилган* дейилади.

Такрорлаш учун саволлар

1. Предикат деб нимага айтилади ?
2. Предикатлар устида мантиқ амаллари қандай бажарилади ?
3. Предикатнинг ростлик соҳасига таъриф беринг.
4. Предикатлардан кванторлар ёрдамида мулоҳаза ҳосил қилишни тушунтиринг.
5. Мавжудлик ва умумийлик кванторлари ёрдамида ҳосил бўлган мулоҳазаларнинг ростлик қийматлари қандай аниқланади ?

Машқлар

1. Қуйидаги ифодалар ичидан предикатларни ажратинг :

1. « x 5 га бўлинади » ($x \in N$) ;
2. « $x^2 + 2x + 4$ » ($x \in R$) ;
3. « $ctg\ 45^0 = 1$ » ;
4. «x ва y лар z нинг турли томонларида ётади» (x ва y лар текисликдаги нуқталар тўпламига, z эса текисликдаги тўғри чизиқлар тўпламига тегишли).

2. Қуйидаги мулоҳазаларни ўқинг ва уларнинг ростлик қийматини аниқланг :

1) $\forall x \exists y(x + y = 7)$;
2) $\exists y \forall x(x + y = 7)$;
3) $\exists x \exists y(x + y = 7)$;
4) $\forall x \forall y(x + y = 7)$;
5) $\forall x ((x^2 > x) \Leftrightarrow ((x > 1) \vee (x < 0)))$;
6) $\exists a\ \forall b\ \exists x (x^2 + ax + b = 0)$.

3. Кванторлар ёрдамида қуйидаги предикатлардан ҳосил қилиш мумкин бўлган барча мулоҳазаларни қуринг ва уларнинг ростлик қийматини аниқланг :

1) $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$.
2) $x^2= y^2 \Rightarrow x = y$.
3) $\sin x = \sin y$.
4) $(x < 0) \vee (x = 0) \vee (x > 0)$.

4. Қуйидаги предикатларнинг ростлик соҳаларини аниқланг :

1) « $x^2 + 4 > 0$ », $M = R$.
2) « $x_1 < x_2$ » , $M_1 = M_2 = R$.
3) « $\sin x > 1$ » , $M = R$.
4) « x 3 га каррали » , $M = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$.

5. Қуйидаги предикатлар тенг кучли бўладиган тўпламни аниқланг :

1) « x 3 га каррали » , « x 7 га каррали ».
2) « x – параллелограмм » , « x тўртбурчакнинг диагоналлари тенг » .
3) « x – туб сон » , « x – жуфт сон » .
4) « $x^2 - x - 2 = 0$ » , « $x^3 + 1 = 0$ » .

I.6-§. Предикатлар алгебрасининг формулалари

Предикатлар учун қуйида киритиладиган барча тушунчалар иҳтиёрий *П* тўплам билан боғлиқ. Бу тўпламни *предметлар тўплами* деб атаймиз. Лотин алифбосининг охирроғидаги $x, y, z, u, v, x_1, x_2, \ldots$ - лар ўзгарувчи предметларни, бошидаги ҳарфлар $a, b, c, a_1, a_2, \ldots$ - лар *П* тўпламнинг аниқ элементларини билдиради. Лотин алифбосининг бош ҳарфлари A , B , C , . . . - орқали ўзгарувчи ёки ўзгармас мулоҳазалар белгиланади.

$F(x), G(x, y), P(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots$ – ифодалар орқали предикатларни белгилаймиз.

Агар a, b – доимий предметлар, G – икки ўзгарувчили предикат бўлса, $G(a, b)$ мулоҳаза бўлиши равшан.

A , B , C , . . . ва $F(a), G(a, b), \ldots$ кўринишдаги мулоҳазалар *элементар мулоҳазалар* дейилади.

Энди предикатлар алгебрасининг формуласи тушунчасини киритамиз.

Предикатлар алгебрасида қуйидаги символлар ишлатилади:

1. $x_0, x_1, \ldots, x_n$ – предмет ўзгарувчилар.
2. $R_0^{n_0}, R_1^{n_1}, \ldots, R_i^{n_i}, \ldots$ – предикатлар ($R_i^{n_i}$ - n – ўринли предикат).
3. $\rceil, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ - мантиқ амаллари.
4. $\forall$, $\exists$ - кванторлар.
5. (,) - қавслар.

I.6.1 - таъриф. *1. Ҳар қандай элементар мулоҳаза – формуладир.*

2. Агар $R_i^{n_i}$ - n – ўринли предикат, $x_1, \ldots, x_{n_i}$ - ўзгарувчи предметлар ёки доимий предметлар бўлсин. У ҳолда $R_i^{n_i}(x_1,\ldots,x_{n_i})$ - формуладир.

Юқоридаги 1,2–пунктларда аниқланган формулалар элементар формулалар дейилади.

3. Предикатлар алгебрасининг бирида боғлиқ бўлган предмет ўзгарувчи иккинчисида эркин бўлмайдиган $\mathfrak{I}$ ва $\mathfrak{R}$ формулалар берилган бўлсин. У ҳолда $\mathfrak{I} \wedge \mathfrak{R}$, $\mathfrak{I} \vee \mathfrak{R}$, $\mathfrak{I} \Rightarrow \mathfrak{R}$, $\mathfrak{I} \Leftrightarrow \mathfrak{R}$, $\rceil\mathfrak{I}$ ифодалар ҳам предикатлар алгебрасининг формулаларидир.

4. Предикатлар алгебрасининг x эркин ўзгарувчи қатнашган A (x) формуласи берилган бўлсин, у ҳолда $\forall x\, A(x)$, $\exists x\, A(x)$ ифодалар ҳам предикатлар алгебрасининг формуласидир.

5.Предикатлар алгебрасининг 1 – 4 пунктларда санаб чиқилган формулалардан бошқа формулалари йўқ.

I.6.2 - мисол. $P_1^1(\delta)$, $Q_0^2(x,y)$, $R_0^3(x,y,z)$, $\forall x Q_0^2(x,y), \exists x Q_0^1(x)$, $\forall x R_0^2(x,y)$ - ифодалар предикатлар алгебрасининг формулаларидир.

Предикат символидаги индексларни керак бўлмаган ҳолларда ташлаб ёзишни келишиб оламиз. Масалан, $P_1^3(x,y,z)$ ўрнига $P(x, y, z)$ деб ёзиш мумкин.

I.6.3 - мисол . $\forall x\, Q(x, y) \vee P(x)$ ифода формула бўлмайди, чунки, I.6.1 - таърифдаги 3 - пункт шартлари бажарилмаган.

I.6.4 - мисол . $N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ тўплам ва $N_0 \times N_0$ да аниқланган

$P(x, y)$: «$x < y$» , $Q(x, y)$: «$x^2 + y^2 = 5$» предикатлар берилган бўлсин. $\exists x\,(P(x, y) \wedge Q(x, y))$ – предикатнинг қийматларини топайлик. Бу формула бир ўзгарувчили предикат бўлиб, унинг кийматлари фақат у га боғлик. Масалан, агар

$y = 0$ бўлса, $\exists x\,((« x < y ») \wedge (« x^2 + 0^2 = 5 »)) = 0$;

$y = 1$ бўлса, $\exists x\,((« x < 1 ») \wedge (« x^2 + 1^2 = 5 »)) = 0$;

$y = 2$ бўлса, $\exists x\,((« x < 2 ») \wedge (« x^2 + 2^2 = 5 »)) = 1$ ва ҳ.к.

(бу ерда « : » белги « айнан шу » маъносини билдиради).

Такрорлаш учун саволлар

1. Предикатлар алгебрасининг символларини айтинг.
2. Предикатлар алгебрасининг формуласига таъриф беринг.
3. Предикатнинг предметлар соҳаси нима ?

Машқлар

1. Қуйидаги формулалардаги эркли ва боғлиқ ўзгарувчиларни аниқланг:

1) $\forall x\, A(x)$.
2) $A(y) \Rightarrow \exists x\, B(x)$.
3) $\exists x\, \forall y\, (A(x) \wedge B(y)) \Rightarrow \forall y\, C(t, y)$.
4) $\forall x\, (\exists y\, (A(x, y)) \Rightarrow B(t, t, z))$.

2. Қуйидаги мулоҳазаларни предикатлар алгебраси тилида ифодаланг :

1) « Барча рационал сонлар ҳақиқий ».
2) « Айрим рационал сонлар ҳақиқий эмас ».
3) « 12 га бўлинувчи ҳар қандай натурал сон 2, 4 ва 6 га бўлинади ».
4) « Айрим илонлар заҳарли ».
5) « Бир тўғри чизиқда ётмаган 3 та нуқта орқали ягона текислик ўтказиш мумкин ».
6) « Ягона х мавжудки, $P(x)$ ».

3. $A(x)$: « x – туб сон », $B(x)$: « x – жуфт сон », $C(x)$: « x – тоқ сон », $D(x)$: « x у ни бўлади » каби хоссаларни билдирса қуйидагиларни ўқинг :

1) $A(7)$.
2) $B(2) \wedge A(2)$.
3) $\forall x\, (B(x) \Rightarrow \forall y\, (D(x, y) \Rightarrow B(y)))$.
4) $\forall x\, (C(x) \Rightarrow \forall y\, (A(y) \Rightarrow \rceil D(x, y)))$.

I.7-§. Декарт кўпайтма. n-ар муносабат. Эквивалентлик муносабати

Ихтиёрий a, b предметлар учун $\{a, \{a, b\}\}$ тўплам a ва b предметларнинг *тартибланган жуфтлиги* деб айтилади ва (a, b) орқали белгиланади.

Баъзи адабиётларда *(a,b)* ўрнига $<a,b>$ белгилаш ҳам ишлатилади. Тартибланган *(a,b)* жуфтликда *a* унинг *биринчи координатаси*, *b* эса унинг *иккинчи координатаси* деб аталади. Баъзан "координата" термини ўрнига "компанента" сўзи ҳам ишлатилади. $(a,b)=(c,d)$ тенглик ўринли бўлса, $a=c$, $b=d$ бўлишини кўриш қийин эмас. Аксинча $a=c$, $b=d$ бўлса, $(a,b)=(c,d)$ бўлиши равшан.

Агар $a \neq b$ бўлса, $(a,b) \neq (b,a)$ бўлиб, $\{a,b\} \neq \{b,a\}$ бўлади.

I.7.1-таъриф. *(a,b) ни тартибланган жуфтлик деб атаймиз.*

Фараз қилайлик $(\grave{a}_1,\grave{a}_2,\ldots \grave{a}_k)$ *тартибланган жуфтлик аниқланган бўлсин. У ҳолда* $((\grave{a}_1,\grave{a}_2,\ldots \grave{a}_k)\grave{a}_{k+1})$ *ни тартибланган (k+1) лик деб атаймиз* ва $(\grave{a}_1,\grave{a}_2,\ldots \grave{a}_k,\grave{a}_{k+1})$ *орқали белгилаймиз.*

I.7.2-теорема. *Агар* $(a_1,a_2,\ldots a_n)=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ *бўлса, у ҳолда* $a_1=b_1,a_2=b_2,\ldots a_n=b_n$ *бўлади.*

Исбот. Исботни n бўйича математик индукция усули билан олиб борамиз.

n=2 бўлганда теорема тўғрилиги равшан.

n=k бўлганда теорема тўғри бўлсин, яъни $(\grave{a}_1,\grave{a}_2,\ldots \grave{a}_k)=(b_1,b_2,\ldots,b_k)$ бўлса, у ҳолда $a_1=b_1,a_2=b_2,\ldots a_k=b_k$. $(\grave{a}_1,\grave{a}_2,\ldots \grave{a}_k,\grave{a}_{k+1})=(b_1,b_2,\ldots,b_k,b_{k+1})$ бўлсин, у ҳолда таърифга кўра $((\grave{a}_1,\grave{a}_2,\ldots \grave{a}_k),a_{k+1})=((b_1,b_2,\ldots,b_k),b_{k+1})$ бўлиб, $(\grave{a}_1,\grave{a}_2,\ldots \grave{a}_k)=(b_1,b_2,\ldots,b_k)$ ва $\grave{a}_{k+1}=b_{k+1}$. У ҳолда индукция фаразига асосан $a_1=b_1,a_2=b_2,\ldots a_k=b_k$ ва $\grave{a}_{k+1}=b_{k+1}$.

Теореманинг тескариси, яъни $a_1=b_1,a_2=b_2,\ldots a_n=b_n$ бўлса, $(a_1,a_2,\ldots a_n)=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ бўлиши равшан. Шундай қилиб, $[(a_1,a_2,\ldots a_n)=(b_1,b_2,\ldots,b_n)] \Leftrightarrow [(a_1=b_1)\wedge(a_2=b_2)\wedge\ldots\wedge(a_n=b_n)]$.

I.7.3-таъриф. *Биринчи координатаси A тўпламга, иккинчи координатаси B тўпламга тегишли бўлган барча (a,b) кўринишдаги тартибланган жуфтликлар тўплами A ва B тўпламларнинг декарт кўпайтмаси дейилади ва* $A\times B$ *кўринишида белгиланади.*

Шундай қилиб, $A\times B=\{(a,b)\,|\,a\in A\wedge b\in B\}$. $A\times B$ декарт кўпайтма баъзан *тўғри кўпайтма* ёки *кўпайтма* ҳам деб аталади.

Агар $A\times B=\varnothing$ бўлса, $A=\varnothing$ ёки $B=\varnothing$ бўлиши ва аксинча $A=\varnothing$ ёки $B=\varnothing$ бўлса, $A\times B=\varnothing$ бўлишини кўриш қийин эмас.

I.7.4-мисол. $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,\Theta,\Delta,O\}$ бўлса, $A\times B=\{(1,1),(1,\Theta),(1,\Delta),(1,O)\},(2,1),(2,\Theta),(2,\Delta),(2,O),(3,1),(3,\Theta),(3,\Delta),(3,O)\}$ бўлиши равшан.

I.7.5-таъриф. $A_1,A_2,\ldots,A_n$ *тўпламлар берилган бўлсин, у ҳолда* $A_1\times A_2\times\ldots\times A_{n-1}\times A_n=(A_1\times A_2\times\ldots\times A_{n-1})\times A_n$ *сифатида аниқланади.*

Тарифдан кўринадики $A_1\times A_2\times A_3=(A_1\times A_2)\times A_3$ бўлиб, $A_1\times A_2\times A_3$ тўплам барча тартибланган учликлар тўпламидан иборатдир.

Демак, $\grave{A}_1\times\grave{A}_2\times\grave{A}_3=\{(a_1,a_2,a_3)\,|\,a_i\in A_i, i=1,2,3\}$.

I.7.6-таъриф. *Ихтиёрий* $A \neq \varnothing$ *тўплам учун* $A^0 = \{\varnothing\}$, $A^1 = A, A^2 = A \times A, \ldots, A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n}$ *тўпламлар A тўпламнинг мос равишда нолинчи, биринчи, иккинчи ва ҳ.к n-даражалари дейилади.*

I.7.7-таъриф. *Ихтиёрий* $A \neq \varnothing$ *тўплам учун* A^n *нинг ихтиёрий бўш бўлмаган тўпламостиси A тўпламда берилган n ўринли ёки n-ар муносабат дейилади.*

I.7.8- мисол. n=0 бўлса, $A^0 = \{\varnothing\}$ бўлиб, нол ўринли муносабат $\varnothing$ ва A^0 дан иборат бўлишини кўрамиз. Бир ўринли муносабат A тўпламнинг ихтиёрий тўпламостиси бўлиши, 2 ўринли муносабат ихтиёрий тартибланган жуфтликлар тўпламидан иборат бўлиши кўриниб турибди. n ўринли муносабат ихтиёрий тартибланган $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ кўринишдаги n-ликлар тўпламидан иборатдир.

Тартибланган n-ликни *n элементли кортеж* деб атайдилар. Агар R n ўринли муносабат бўлса, n унинг *ранги* деб аталади.

I.7.9-таъриф. $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ *тўпламнинг ихтиёрий тўпламостиси n ўринли (ёки n- ар муносабат) дейилади.*

I.7.10-таъриф. *Ихтиёрий n элементли кортежлар тўплами n-ар муносабат дейилади.*

I.7.11-теорема. *I.7.7, I.7.9, I.7.10- таърифлар тенг кучли таърифлардир.*

Ихтиёрий $\omega \subset A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times A_{n+1}$ бўлсин, $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$ элементлар учун $(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}) \in \omega$ шартни қаноатлантирадиган барча a_{n+1} элементлар тўпламини $\omega(\grave{a}_1, \grave{a}_2, \ldots, \grave{a}_n)$ ёки ω орқали белгилаймиз.

Агар $\omega(\grave{a}_1, \grave{a}_2, \ldots, \grave{a}_n)$ бир элементли тўплам бўлса, яъни $\omega(\grave{a}_1, \grave{a}_2, \ldots, \grave{a}_n) = \{\grave{a}_{n+1}\}$ бўлса, $\omega(\grave{a}_1, \grave{a}_2, \ldots, \grave{a}_n) = a_{n+1}$ кўринишдаги белгилашни келишиб оламиз.

$A_1 = A_2 = A_3 = \ldots = A_n = A$ бўлиб, $\omega \subset A^{n+1}$ $(n+1)$ ўринли муносабат берилган бўлса, у ҳолда ҳар бир $\grave{a}_1, \grave{a}_2, \ldots, \grave{a}_n \in \grave{A}$ элементлар учун $\omega(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ кўпи билан бир элементли тўпламдан иборат бўлиб, $\omega - (n+1)$ ўринли муносабат *n ўринли* ёки *n-ар қисман алгебраик амал* дейилади. n эса *ω амалнинг ранги* дейилади. Агар юқоридаги ҳолатда $\omega(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ фақат бир элементли тўпламдан иборат бўлса, у ҳолда $\omega - (n+1)$ ўринли муносабат А тўпламда аниқланган *n ўринли алгебраик амал* дейилади.

Шундай қилиб тарифга кўра нол ўринли алгебраик амал А тўпламдаги битта элементдан иборат, бир ўринли амал $\omega \in A^2$ бинар муносабатдан иборат бўлиб, $\forall a \in A$ учун ягона $\omega(a)$ мос келади. Бир ўринли алгебраик амал *оператор* ёки *унар алгебраик амал* дейилади. Агар n=2 бўлса, алгебраик амал *бинар алгебраик амал* дейилади. Агар ω -3 ўринли муносабат бўлса, у бинар алгебраик амал бўлиши учун $\forall a_1, a_2 \in A$

элементлар жуфтлигига ягона $\omega(a_1,a_2)\in A$ мавжуд бўлиб, бундай элемент баъзан $a_1\omega a_2$ кўринишда ҳам белгиланади. Бундай ҳолда ҳар бир (a_1,a_2) жуфтликка ягона $\omega(a_1,a_2)$ элемент мос қўйилади деб айтишимиз мумкин.

Уч ўринли алгебраик амал *тернар алгебраик амал* дейилади.

Келгусида бинар муносабатлар $=,\cong,>,\geq,<,\leq$ ва бошқа символлар орқали белгиланади.

I.7.12- мисол. $\omega=\{(n,n+1)|\,\forall n\in N\}$ бинар муносабат бўлиб, унар алгебраик амал сифатида қаралиши мумкин. Бу унар алгебраик амал ҳар бир n га n+1 ни мос қўядиган оператордан иборатдир.

I.7.13-мисол. $\omega=\{(m,n,m+n)|\,\forall m,n\in N\}$ тернар муносабат бинар алгебраик амал бўлиб, ҳар бир (m,n) жуфтликка уларнинг йиғиндиси $(m+n)$ни мос қўяди.

I.7.14-тариф. $A\subset B$ бўлиб, ω B тўпламдаги n-ар муносабат бўлсин, у ҳолда $\omega' =\omega\cap A^n$ – А даги n-ар муносабат бўлиши аён. ω' ни ω n-ар муносабатнинг A даги *изи*, ω ни эса ω' нинг B даги *давоми* дейилади.

I.7.15-мисол. $\omega=\{(a,b,c)|\,c=a+b\wedge a,b,c\in Z\}$ муносабат $\omega'=\{(m,n,m+n)|\,\forall m,n\in N\}$ тернар муносабатни Z даги давоми, ω' эса ω нинг N даги изидир.

I.7.16-мисол. Бутун сонлар тўпламида аниқланган $\omega=\{(a,b,a-b)|\,\forall a,b\in Z\}$ тернар муносабат Z да бинар алгебраик амал бўлиб, унинг N даги изи тернар муносабатдир, лекин бинар алгебраик амал бўла олмайди.

Бинар муносабатнинг турлари.

Агар ω A тўпламда берилган бинар муносабат бўлиб $(a,b)\in\omega$ бўлса, a ва b элементлар ω *муносабатда ётади* ёки a ва b элементлар ω *муносабатда* дейилади ва $a\omega b$ орқали белгиланади.

I.7.17-таъриф. *A тўпламда ω бинар муносабат берилган бўлсин.*

1. Агар $\forall a\in A$ учун $(a,a)\in\omega$ бўлса ω рефлексив;

2. Агар $\forall a\in A$ учун $(a,a)\notin\omega$ бўлса ω антирефлексив;

3. Агар $\exists a\in A$ учун $(a,a)\notin\omega$ бўлса ω арефлексив;

4. Агар $\forall a,b\in A$ учун $a\neq b\Rightarrow(a,b)\in\omega\vee(b,a)\in\omega$ бўлса, ω боғлиқ;

5. Агар $\forall a,b\in A$ учун $(a,b)\in\omega\Rightarrow(b,a)\in\omega$ бўлса, ω симметрик;

6.Агар $\forall a,b\in A$ учун $(a,b)\in\omega\wedge(b,a)\in\omega\Rightarrow a=b$ бўлса, ω антисимметрик;

7. Агар $\forall a,b\in A$ учун $(a,b)\in\omega\Rightarrow\rceil((b,a)\in\omega)$ бўлса, ω асимметрик;

8. Агар $\forall a,b,c\in A$ учун $(a,b)\in\omega\wedge(b,c)\in\omega\Rightarrow(a,c)\in\omega$ бўлса, ω транзитив;

9. Агар ω бир вақтда рефлексив, симметрик, транзитив бўлса, у ҳолда эквивалентлик муносабати дейилади.

I.7.18-таъриф. *A тўпламда * бинар алгебраик амал ва R бинар муносабат берилган бўлсин. Агар $\forall a,b,c\in A$ учун $(a,b)\in R$ дан*

$(a*c, b*c), (c*a, c*b) \in R$ *бўлиши келиб чиқса, у ҳолда* R *муносабат* $*$ *амалга нисбатан монотон дейилади.*

I.7.19-мисол. N- натурал сонлар тўпламида $\leq$ муносабат $+$ амалига нисбатан монотон. Ҳақиқатдан ҳам, $(a \leq b) \Rightarrow (a + c \leq b + c) \wedge (c + a \leq c + b)$.

Такрорлаш учун саволлар

1. Тартибланган жуфтлик нима?
2. Тартибланган жуфтликлар қачон тенг бўлади?
3. Тўпламларнинг тўғри (декарт) кўпайтмаси нима?
4. Тартибланган n лик қандай ҳосил қилинади?
5. Бинар муносабатга таъриф беринг.
6. Рефлексив бинар муносабатни таърифланг.
7. Симметрик бинар муносабатни таърифланг.
8. Транзитив бинар муносабатни таърифланг.
9. Эквивалентлик бинар муносабатини таърифланг.

М а ш қ л а р

1. Қуйидагиларни исботланг:

a.$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

b. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

c.$A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

d. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

e.$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

2. R, S – бинар муносабатлар учун қуйидагиларни исботланг:

a. R, S - транзитив $\Rightarrow$ $R \cup S$, $R \cap S$– транзитив.

b. R , S – рефлексив $\Rightarrow$ $R \cup S$, $R \cap S$ – рефлексив.

c. R, S - симметрик $\Rightarrow$ $R \cup S$, $R \cap S$ – симметрик.

d. R, S - эквивалент $\Rightarrow$ $R \cup S$, $R \cap S$ – эквивалент.

3. $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$ тўпламда берилган қуйидаги бинар муносабатларнинг хоссаларини текширинг:

3.1. $R = \{ \langle x,y \rangle \mid x,y \in M \wedge x \leq y + 1 \}$.

3.2. $R = \{ \langle x,y \rangle \mid x,y \in M \wedge x^2 = y^2 \}$.

3.3. $R = \{ \langle x,y \rangle \mid x,y \in M \wedge |x| = |y| \}$.

3.4. $R = \{ \langle x,y \rangle \mid x,y \in M \wedge x \vdots y \}$.

3.5. $R = \{ \langle x,y \rangle \mid x,y \in M \wedge x < y \}$.

3.6. $R = \{ \langle x,y \rangle \mid x,y \in M \wedge x \neq y \}$.

3.7. $R = \{ \langle x,y \rangle \mid x,y \in M \wedge x \vdots y \vee x < y \}$.

3.8. $R = \{ \langle x,y \rangle \mid x,y \in M \wedge (x - y) \vdots 2 \}$.

3.9. $R = \{ \langle x,y \rangle \mid x,y \in M \wedge x + y = 12 \}$.

3.10. $R = \{ \langle x,y \rangle \mid x,y \in M \wedge x + y \leq 7 \}$.

3.11. $R = \{ \langle x,y \rangle \mid x,y \in M \wedge x + y \geq 20 \}$.

3.12. $R = \{ \langle x,y \rangle \mid x,y \in M \wedge (x + y) \vdots 5 \}$.

I.8-§. Акслантириш (функция). Тартиб муносабати

I.8.1-таъриф. *f – A тўпламда берилган бинар муносабат бўлсин. Агар $\forall x, y, z \in A$ лар учун $(x, y) \in f$ ва $(x, z) \in f$ бўлишидан $y = z$ келиб чиқса, у ҳолда f бинар муносабат акслантириш (функция) дейилади.*

Бошқача қилиб айтсак, f бинар муносабатнинг аниқланиш соҳасига тегишли бўлган ҳар бир x элемент учун, ягона y элемент топилиб, $(x, y) \in f$ бўлса, у ҳолда f муносабат функция дейилади. Агар f бинар муносабат функция бўлиб, $(x, y) \in f$ бўлса, у ҳолда $y = f(x)$ деб ёзиш қабул қилинган. Баъзан $x \to f(x)$ ёки $f : x \to y$ деб ҳам ёзилади x элементга f функция y элементни мос қўяди деб ва y элемент x нинг *образи* (*тасвири*), x эса y нинг *прообрази* *(асли)* дейилади. $Dom\, f = \{x \,/\, \exists y (x, y) \in f\}$ тўплам функциянинг аниқланиш соҳаси, $\mathrm{Im}\, f = \{y \,/\, \exists x (x, y) \in f\}$ тўплам функциянинг ўзгариш соҳаси дейилади. Бизга иккита f ва g функциялар берилган бўлса, уларнинг тенглигини f ва g- жуфтликлар тўпламининг тенглиги сифатида тушунилади. Предикатлар алгебраси тилига ўтсак, $(f = g) \Leftrightarrow ((\forall (x, y) \in f) \leftrightarrow (\forall (x, y) \in g))$ формула тавтологиядир.

Ҳар қандай функция $\forall x \in Dom\, f$ элементга ягона $y \in \mathrm{Im}\, f$ элементни мос қўйганлиги сабабли, f ни *акслантириш* деб аташ мақсадга мувофиқ. Агар $Dom\, f \subset A$, $\mathrm{Im}\, f \subset B$ бўлса, у ҳолда f *A тўпламдан B тўпламга акслантириш* дейилади.

Агар $A = Dom\, f$ $B = \mathrm{Im}\, f$ бўлса, у ҳолда f функцияни A тўпламни B тўламга акслантириш деб атаймиз. A тўпламни B тўпламга акслантирадиган барча функциялар тўпламини B^A орқали белгилаш қабул қилинган. Фараз қилайлик, f A тўпламдан B тўпламга акслантириш бўлсин.

Бундан кейин агар f A тўпламни B тўпламга акслинтириш бўлса, $f : A \to B$ деб белгилаймиз. Агар A тўплам тартибланган жуфтликлар тўпламидан иборат бўлса, у ҳолда $f : A \to B$ акслантириш икки ўзгарувчили функция, n ўзгарувчили функция сифатида $X \neq \varnothing$ $Y \neq \varnothing$ тўпламлар учун $f : X^n \to Y$ акслантириш тушунилади, бу ерда n = 0, 1, … . n ўзгарувчили функцияни $y = f(x_1, ..., x_n)$ кўринишида белгилаймиз.

1.8.2-таъриф. *f ва g функциялар берилган бўлсин, у ҳолда $f \circ g = \{(x, z) \,/ \exists\, t (x, t) \in g$ ва $(t, z) \in f\,\}$ тўплам f ва g функцияларнинг композицияси дейилади.*

1.8.3-мисол. $f = \{(1, 3), (2, 3), (3, 6)\}$ $g = \{(1, 3), (2, 1), (3, 4)\}$ бўлса, у ҳолда $f \circ g = \{(1, 6), (2, 3)\}$.

1.8.4-теорема. *Функциялар композицияси қуйидаги хоссаларга эга:*

1°. $Dom\ f \circ g = \{x / g(x) \in Dom\ f\}$

2°. $\forall x \in Dom\ f \circ g$ *учун* $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

3°. $f \circ g = \{(x, f(g(x))) / g(x) \in Dom\ f\}$

4°. $Dom\ f \circ g \subset Dom\ g$.

5°. $\mathrm{Im}\,(f \circ g) \subset \mathrm{Im}\, f$

6°. *Агар* $\mathrm{Im}\, g = Dom\ f$ *бўлса*, $Dom\ f \circ g = Dom\ g$ *ва* $\mathrm{Im}\,(f \circ g) = \mathrm{Im}\, f$

1^0- хоссанинг исботи. $\forall x \in Dom\ f \circ g$ бўлсин, у ҳолда $f \circ g$ нинг таърифига кўра $(x, y) \in f \circ g$ бўлиб, шундай t топиладики, натижада $(x, t) \in g$ ва $(t, z) \in f$ бўлади, демак $t = g(x)$ эканлигидан $g(x) \in Dom\ f$ бўлади. Аксинча, агар $g(x) \in Dom\ f$ бўлса, шундай z топиладики, $(g(x), z) \in f$, у ҳолда $(x, g(x)) \in g$ бўлгани учун $(x, z) \in f \circ g$ бўлади, яъни $x \in Dom f \circ g$.

Қолган хоссаларнинг исботи мустақил бажариш учун ўқувчиларга ҳавола қилинади.

1.8.5-теорема. *Функциялар композицияси ассоциативдир.*

Бу теореманинг исботи бинар муносабатлар композицияси ассоциативлигининг бевосита натижасидир.

1.8.6-таъриф. *$A \neq \varnothing$ тўпламнинг ҳар бир элементини ўзини ўзига акслантирадиган акслантириш айний акслантириш ёки бирлик акслантириш дейилади.* Бундай акслантиришни E_A орқали белгилаймиз.

1.8.7-теорема. *Агар f - акслантириш A тўпламни B тўпламга акслинтириш бўлса $f \circ f^{v} = E_B$ бўлади.*

Исбот. $\mathrm{Im}\, f = B$ бўлганидан $E_B \subset f \circ f^{v}$ келиб чиқиши равшан. Фараз қилайлик $(x, y) \in f \circ f^{v}$, яъни шундай $z \in V$ топилиб $(x, z) \in f^{v}$ ва $(z, y) \in f$ бўлсин. У ҳолда инверсиянинг таърифига кўра $(z, x) \in f$ энди f бинар муносабат функциялигини этиборга олсак $x = y$. Демак, $f \circ f^{v} \subset E_B$.

1.8.8-таъриф. *$f : A \to B$ акслантириш A тўпламни B тўпламга акслантириш бўлсин. У ҳолда, агар $\forall x_1, x_2 \in A$ ва $x_1 \neq x_2$ элементлар учун $f(x_1) \neq f(x_2)$ бўлса, f-инъектив, $\mathrm{Im}\, f = B$ бўлса, f- сюръектив акслантириш дейилади. Агар f ҳам сюръектив, ҳам инъектив акслантириш бўлса, у ҳолда f биектив акслантириш дейилади.*

1.8.9-мисол. Ҳақиқий сонлар тўплами R ни ўзини ўзига акслантирадиган $f(x) = x^2$ функция инъектив ҳам эмас, биектив ҳам эмас. Ҳақиқатдан ҳам, $+2 \neq -2$.

Лекин $(-2)^2 = 2^2 = 4$; $\mathrm{Im}\, f = R^+ \cup \{0\}$; $[R^+ \cup \{0\}]$- манфий бўлмаган ҳақиқий сонлар тўплами.

1.8.10-мисол. $f(x) = x^2$ функция барча ҳақиқий сонлар тўпламини $R^+ \cup \{0\}$ тўпламга акслантирсин. У ҳолда $\mathrm{Im}\, f = R^+ \cup \{0\}$. Демак, f - сюръектив акслантириш, лекин инъектив акслантириш эмас.

1.8.11-мисол. $y=\sqrt{x}$ функция $R^{+}\bigcup\{0\}$ тўпламни R - ҳақиқий сонлар тўпламига акслантиради. Бу функция инъектив, лекин сюръектив эмас.

1.8.12-мисол. $y=x^{3}$ функция R - ҳақиқий сонлар тўпламини ўзини ўзига акслантирадиган биектив функциядир.

1.8.13-мисол. $x=\{a,b\}$ тўплам берилган бўлсин, у ҳолда $f(a)=b$; $f(b)=a$; $g(a)=a$; $g(b)=a$ шартлар билан аниқланган f ва g функцияларни қарасак, $((f\circ g)(a))=f(g(a))=f(a)=b$.
$(f\circ g)(b)=f(g(b))=f(a)=b$; $(g\circ f)(a)=g(f(a))=g(b)=a$ $(g\circ f)(b)=g(f(b))=g(a)=a$ бўлади.

Бу мисолдан кўринадики, $f\circ g\neq g\circ f$, яъни функциялар композицияси ҳар доим ҳам коммутатив бўлавермас экан.

1.8.14-таъриф. *$f:A\to B$, $g:B\to A$ акслантиришлар берилган бўлсин, у ҳолда агар $f\circ g=E_B$ бўлса f акслантириш g акслантиришга чапдан тескари, g акслантириш эса f акслантиришга ўнгдан тескари дейилади. Агар $f\circ g=E_B$ ва $g\circ f=E_A$ шартлар бажарилса, у ҳолда f ва g акслантиришлар бир бирига тескари акслантиришлар дейилади.*

1.8.15-теорема. *Агар $f:A\to B$; $g:B\to A$ акслантиришлар берилган бўлиб, $g\circ f=E_A$ шарт бажарилса, у ҳолда f-инъектив, g эса сюръектив акслантиришдир.*

Исбот. Теорема шартлари бажарилган деб фараз қилайлик. У ҳолда, $\forall a\in A$ учун $g\circ f(a)=g(f(a))=a$. Фараз қилайлик $a_1\neq a_2$ элементлар учун $f(a_1)=f(a_2)$ бўлсин, у ҳолда $a_1=(g\circ f)(a_1)=g(f(a_1))=g(f(a_2))=a_2$. Бу эса $a_1\neq a_2$ фаразимизга зид.

Энди учун шундай $b\in B$ топилиб, $g(b)=a$ бўлишини кўрсатайлик. Ҳақиқатдан, теорема шартига кўра $\forall a\in A$ учун $(g\circ f)(a)=g(f(a))=a$ бўлади. $f(a)$ ни b орқали белгиласак $g(b)=a$. Демак, g-сюръектив акслантириш экан

1.8.16-теорема. *$f:A\to B$ акслантиришга тескари акслантириш мавжуд бўлиши учун унинг биектив бўлиши зарур ва етарли.*

Исбот. Агар f- биектив бўлса, $\forall b\in B$ учун шундай ягона $a\in A$ топилиб, $f(a)=b$ бўлади. У ҳолда $\forall b\in B$ учун $g(b)=a$ шартни қаноатлантирадиган g акслантириш f акслантиришга тескари акслантириш бўлиши равшан.

Фараз қилайлик f акслантириш учун g - тескари акслантириш бўлсин, у ҳолда, тескари акслантириш таърифига кўра $g\circ f=E_A$, $f\circ g=E_B$, у ҳолда 1.8.15-теоремага кўра f ва g лар биектив акслантиришлардир.

Келгусида f акслантиришга тескари акслантириш мавжуд бўлса, уни f^{-1} орқали белгилаймиз.

1.8.17-натижа. *Ўзаро тескари акслантиришлар биектв акслантиришлардир.*

Тўпламни ўзини ўзига акслантириш *алмаштириш* дейилади.

1.8.18-теорема. *Чекли тўпламни алмаштириш биектив бўлиши учун, сюръектив ёки инъектив бўлиши зарур ва етарлидир.*

Исбот. X - чекли тўплам берилган бўлсин. f алмаштириш биектив бўлса, ҳам сюръектив, ҳам инъектив бўлиши равшан. Фараз қилайлик $f: X \to X$ сюръектив бўлиб, инъектив бўлмасин. У ҳолда X чекли тўплам бўлгани учун унинг элементлари $x_1, x_2, ..., x_n$ лардан иборат десак, $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$ элементлар $n-1$ тадан кўп эмас. Демак, камида битта x_k элемент учун прообраз топилмайди. Бу эса f -сюръектив деган фаразимизга зид. $f: X \to X$ сюръективлигидан f нинг инъективлигини келтириб чиқариш ўқувчиларга хавола қилинади.

1.8.19-таъриф. *Агар иккита A ва B тўпламларнинг бирини иккинчисига ўзаро бир қийматли акслантирадиган камида битта акслантириш мавжуд бўлса, тўпламлар тенг қувватли дейилади ва $A \cong B$ кўринишида ёки $|A| = |B|$ кўринишида белгиланади.*

1.8.20-таъриф. *A тўпламда берилган $R \subset A \times A$ антисимметрик ва транзитив муносабат A тўпламдаги тартиб муносабати дейилади.*

1.8.21-таъриф. *A тўпламдаги тартиб муносабати рефлексив муносабат бўлса, бундай муносабат A тўпламдаги ноқатъий тартиб муносабат дейилади.*

A тўпламдаги тартиб муносабат антирефлексив муносабат бўлсин, бундай муносабат A тўпламдаги *қатъий тартиб муносабат* дейилади.

1.8.22-мисол. $B(A) - A$ тўпламнинг барча тўпламостилари тўплами бўлсин. $B(A)$ тўпламда тўпламости бўлиш муносабати ноқатъий тартиб муносабтидир.

1.8.23-мисол. $A = \{4, 12, 36, 72\}$ тўпламда бўлиниш муносабати ноқатъий тартиб муносабатидир.

1.8.24-таъриф. *A тўпламда R тартиб муносабат берилган бўлсин. У ҳолда, агар $\forall a, b \in A$ элементлар учун xRy ёки $x = y$ ёки yRx муносабатлардан камида биттаси албатта бажарилса, бундай муносабат A тўпламдаги чизиқли тартиб муносабат дейилади.*

Чизиқли бўлмаган тартиб муносабат, *қисман тартиб муносабат* дейилади.

1.8.25-мисол. N-натурал сонлар тўпламида $R = \{(x, y) | \forall x, y \in N \; x \vdots y\}$ муносабат қисман тартиб муносабат бўлади. $"<" = \{(x, y) | \forall x, y \in N \; \exists k \in N \; y = x + k\}$ муносабат эса чизиқли тартиб муносабатдир.

1.8.26-таъриф. *A тўпламда R тартиб муносабат берилган бўлсин, (A, R) жуфтлик тартибланган тўплам дейилади. Агар R - қисман тартиб* *муносабати бўлса, (A, R) қисман тартибланган тўплам, R чизиқли тартиб муносабати бўлса, (A, R) чизиқли тартибланган тўплам дейилади.*

1.8.27-мисол. $(N, <)$-жуфтлик чизиқли тартибланган тўпламдир. Келгисида $a<b$ ёзувни одатдагидек $a<b$, $a \le b$ ёзувни эса a кичик ёки тенг b деб ўқиймиз ва $a \le b$ ни $(a<b) \vee (a=b)$ мулоҳаза маъносида тушунамиз. Хусусан $4 \le 4, 3 \le 4$ мулоҳазалар айнан рост мулоҳазалардир.

$(A, <)$- тартибланган тўплам берилган бўлсин, у ҳолда $a \in A$ элементдан кичик элемент мавжуд бўлмаса a*- минимал элемент*, агар a дан катта элемент мавжуд бўлмаса a*-максимал элемент* дейилади. A даги ўзидан бошқа барча элементларидан кичик бўлган a элемент *A тўпламнинг энг кичик элементи*, A даги ўзидан бошқа барча элементларидан катта бўлган b элемент *A тўпламнинг энг катта элементи* дейилади.

1.8.28-мисол. $A = \{1, 2, 3, 4, 12\}$ тўпламида, агар $a \vdots b$ бўлса, $b<a$ дейлик, у ҳолда 1 энг кичик элемент, 12 энг катта элемент бўлади.

1.8.29-мисол. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ тўпламда ҳам 1.8.28–мисолдаги каби аниқланган $<$ –тартиб муносабатни қарайлик.У ҳолда 1 минимал элемент, 3, 4 максимал элементлар бўлиши равшан.

Шундай қилиб, максимал элементлари бир нечта бўлган тўпламлар мавжуд экан. Минимал элементлари ҳам бир нечта бўладиган тўпламга мисол келтиришни ўқувчиларга ҳавола этамиз.

1.8.30-таъриф. *Ҳар қандай бўш бўлмаган тўпламостиси минимал элементга эга чизиқли тартибланган тўплам тўлиқ тартибланган тўплам дейилади.*

Чизиқли тартибланган тўпламларда минимал элемент тушунчаси энг кичик элемент тушунчаси билан, максимал элемент тушунчаси эса энг катта элемент тушунчаси билан бир хил бўлиши равшан.

1.8.31–мисол. N-натурал сонлар тўпламида $<$ - табиий тартиб муносабати бўлсин. Яъни агар $\forall a, в \in N$ учун шундай R топилиб, $a = в + к$ бўлса, $в < a$ деймиз. У ҳолда $(N, <)$ тўплам тўлиқ тартибланган тўпламдир.

1.8.32–мисол. R-ҳақиқий сонлар тўплами табиий тартиб муносабатга нисбатан тўлиқ тартибланган бўла олмайди. Чунки R тўпламнинг энг кичик элементи йўқ.

Такрорлаш учун саволлар

1. Акслантириш қандай муносабат?
2. Акслантиришнинг аниқланиш соҳасини таърифланг.
3. Акслантиришнинг қийматлар тўплми қандай тўплам?
4. Акслантиришлар композициясини тушунтиринг.
5. Акслантиришлар композицияси хоссаларини айтинг.
6. Инъектив акслантиришга мактаб математикасидан мисол келтиринг.

7. Сюръектив акслантиришга мактаб математикасидан мисол келтиринг.

8. Биектив акслантириш мактабда қандай номланган?

9. Айний акслантиришни тушунтиринг.

10. Тартиб муносабат турларини мактаб математикасидан олинган мисоллар ёрдамида тушунтиринг.

11. Тартибланган тўпламларга мисоллар келтиринг.

12. Бутун сонлар тўплами тўла тартибланган тўплам бўлади-ми?

Машқлар

1. R, S, T – бинар муносабатлар учун қуйидагиларни текширинг:

1) $(R \cap S)^{\cup} = R^{\cup} \cap S^{\cup}$.
2) $(R \cup S)^{\cup} = R^{\cup} \cup S^{\cup}$.
3) $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$.
4) $(R \circ S)^{\cup} = S^{\cup} \circ R^{\cup}$.
5) $(R \cup S) \circ T = R \circ T \cup S \circ T$.
6) $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$.
7) $(R \cap S) \circ T \subset R \circ T \cap S \circ T$.
8) $R \circ (S \cap T) \subset R \circ S \cap R \circ T$.
9) $\mathrm{Dom}\,(R^{\cup}) = \mathrm{Im}\,R$ ..
10) $\mathrm{Im}\,(R^{\cup}) = \mathrm{Dom}\,R$..
11) $\mathrm{Dom}\,(R \circ S) \subset \mathrm{Dom}\,S$.
12) $\mathrm{Im}\,(R \circ S) \subset \mathrm{Im}\,R$.
13) $(R \setminus S)^{\cup} = R^{\cup} \setminus S^{\cup}$.
14) R, S - қатъий тартиб $\Rightarrow$ $R \cup S, R \cap S, R^{\cup}, S^{\cup}$ – **қатъий тартиб.**
15) R, S - қисман тартиб $\Rightarrow$ $R \cup S, R \cap S, R^{\cup}, S^{\cup}$ – **қисман тартиб.**
16) R, S - чизиқли тартиб $\Rightarrow$ $R \cup S, R \cap S, R^{\cup}, S^{\cup}$ – **чизиқли тартиб.**

II БОБ. АЛГЕБРАЛАР ВА АЛГЕБРАИК СИСТЕМАЛАР

II.1-§. Бинар алгебраик амаллар. Нейтрал, симметрик элементлар.

II.1.1-таъриф. *A^n тўпламни A га акслантирадиган ҳар қандай акслантириш A тўпламда берилган n-ар ёки n ўринли алгебраик амал дейилади.*

Бу ерда n-манфий бўлмаган бутун сон бўлиб, *алгебраик амалнинг ранги* дейилади. $n=0$ бўлса, $A^0=\varnothing$ бўлгани учун, 0-ар амал $f:\{\varnothing\}\to A$ кўринишидаги акслантириш бўлиб, $\varnothing$ ни A тўпламнинг бирорта элементига ўтказади. Бошқача қилиб айтганда, 0-ар амал A тўпламнинг ажратилган элементидан иборат. Бир ўринли амал $f:A\to A$ кўринишдаги функциядан иборат бўлиши равшан. Бир ўринли алгебраик амал қисқалик учун баъзан *унар амал* дейилади.

$n=2$ бўлганда икки ўринли алгебраик амал $f:A\times A\to A$ акслантиришдан иборат бўлиб, *бинар алгебраик амал* дейилади. Уч ўринли алгебраик амал *тернар алгебраик амал* дейилади. Агар ω A тўпламда бериган n-ар алгебраик амал бўлса, *A тўпламни ω- n-ар алгебраик амалга нисбатан алгебраик ёпиқ* дейилади.

II.1.2-таъриф. *A^n тўпламдан A тўпламига акслантириш A да аниқланган n ўринли қисман амал дейилади.*

II.1.3-мисол. B(A) - A тўпламининг барча тўпламостиларидан тузилган тўплам берилган бўлсин, у ҳолда $f:B(A)\to B(A), \forall X\in B(A)$ учун $f(X)=A\setminus X$ тенглик ёрдамида аниқланадиган амал унар алгебраик амалдир.

II.1.4-мисол. Q- рациноал сонлар тўпламида бўлиш амали бинар қисман амалдир.

II.1.5-мисол. Натурал сонлар тўпламида ихтиёрий учта сонга уларнинг энг катта умумий бўлувчисини мос қўядиган амал, натурал сонлар тўпламида аниқланган тернар алгебраик амалдир.

Бинар алгебраик амалларни $*,\bullet,+,*,\odot$ кўринишларда белгилаш қабул қилинган.

II.1.6-мисол. $+:Z^2\to Z$ яъни $+(a,b)=a+b$ тенглик ёрдамида аниқланган амал - бутун сонлар тўпламида қўшиш амали бўлиб, (a,b) бутун сонлар жуфтлигига мос келадиган бутун сонни $a+b$ кўринишида ёзиш қабул қилинган.

Шунга ўхшаш A тўпламида $*$ бинар алгебраик амал берилган бўлса, $*(a,b)$ ўрнига $a*b$ ёзишни келишиб оламиз.

II.1.7-таъриф. *$A\neq 0$ тўплам ва унда аниқланган $*$ бинар алгебраик амал берилган бўлсин. У ҳолда $(A,*)$ жуфтлик группоид деб аталади.*

II.1.8-мисол. N-натурал сонлар тўплами «$\bullet$»- N даги кўпайтириш амали бўлса, у ҳолда $(N,\bullet)$ -группоиддир.

II.1.9-таъриф. *$(A,*)$-группоид берилган бўлсин, у ҳолда*

а) агар $\forall a,b \in A$ учун $a*b=b*a$ бўлса, у ҳолда $*$ - алгебраик амал A тўпламда коммутатив дейилади;

б) агар $\forall a,b,c \in A$ учун $a*(b*c)=(c*b)*c$ шарт бажарилса, $*$ - A тўпламда ассоциатив алгебраик амал дейилади;

в) Агар $\forall a \in A$ учун шундай $e \in A$ топилиб, $e*a=a$ шарт бажарилса, e элемент $*$ амалга нисбатан чап нейтрал элемент, агар $a*e=a$ шарт бажарилса, ўнг нейтрал элемент, агар иккала шарт ҳам бажарилса нейтрал элемент дейилади.

II.1.8-таъриф. *$(A,*)$-группоид берилган бўлсин. Агар $e \in A$ элемент $*$ - амалга нисбатан нейтрал элемент бўлса, у ҳолда e грўппоиднинг нейтрал элементи дейилади.*

II.1.9-теорема. *Агар $(A,*)$-группоидда нейтрал элемент мавжуд бўлса, у ягонадир.*

Исбот. Фараз қилайлик $(A,*)$-группоидда иккита e_1 ва e_2 нейтрал элементлар мавжуд бўлсин, у ҳолда нейтрал элементнинг таърифига кўра $e_1=e_1*e_2=e_2$, яъни $e_1-=e_2$

II.1.10-натижа. *Агар $(A,*)$-группоидда нейтрал элемент мавжуд бўлса, унинг барча чап , ўнг нейтрал элементлари нейтрал элементга тенг.*

II.1.11-таъриф. *Агар $(A,*)$-группоидда $*$ амал қўшиш амалидан иборат бўлса, группоид аддитив группоид; агар $*$ амал, кўпайтириш амали бўлса, группоид мультипликатив группоид дейилади.*

Одатда қўшиш амали «+» орқали, кўпайтириш амали «•» орқали белгиланади. Қўшиш амалига нисбатан нейтрал элементни нол деб атаймиз ва «0» орқали белгилаймиз. Кўпайтириш амалига нисбатан нейтрал элемент бирлик элемент дейилиб «1» орқали белгиланади.

II.1.12-мисол. $(R,+)$ группоиднинг нейтрал элементи 0; $(R,\bullet)$-группоиднинг нейтрал элементи 1. Бу ерда R-ҳақиқий сонлар тўплами, +, •- R даги қўшиш ва кўпайтириш амалларидир.

II.1.13-мисол. B(А) - A тўпламнинг барча тўпламостилари бўлсин, у ҳолда B(А) тўпламларни қўшиш амалига нисбатан группоид бўлиб, унинг нейтрал элементи $\varnothing$ тўпламдир. B(А) - тўпламларнинг кесишмаси амалига нисбатан ҳам группоид бўлиб, унинг нейтрал элементи A тўпламдан иборат.

II.1.14-таъриф. *$(A,*)$-группоид берилган бўлсин, у ҳолда $a \in A$ элемент ва $\forall b,c \in A$ элементлар учун $a*b=a*c$ тенгликдан $b=c$ келиб чиқса, у ҳолда a элемент $(A,*)$ группоиднинг чап регуляр элементи, $b*a=c*a$ шартдан $b=c$ келиб чиқса, a элемент $(A,*)$ группоиднинг ўнг регуляр элементи дейилади. Ҳам чап, ҳам ўнг регуляр элемент регуляр элемент дейилади.*

II.1.18-мисол. $(R,+)$ группоиднинг барча элементлари регуляр элементлардир.

II.1.19 -таъриф. *$(A,*)$-группоид нейтрал элементга эга бўлсин. У ҳолда $a \in A$ элемент учун шундай $a' \in A$ элемент топилиб, $a'*a=e$ бўлса, a'*

элемент a элементга чап симметрик элемент, $a*a'=e$ бўлса ўнг симметрик, иккала шарт ҳам бажарилса, симметрик элемент дейилади.

II.1.20-мисол. $(R,+)$ группоидда $\forall a\in R$ элемент учун a элемент симметрик элементдир.

II.1.21-мисол. $(R,\bullet)$- группоидда $\forall a\in R$, $a\neq 0$ элемент учун a^{-1} элемент симметрик элементдир.

Агар $(A,*)$-группоидда $*$-амал қўшиш бўлса, «симметрик» термини, «қарама-қарши» термини билан; агар $*$-амали кўпайтириш бўлса, «тескари» термини билан алмаштирилади.

II.1.22-таъриф. *$(A,*)$-группоид, R эса A тўпламдаги эквивалентлик муносабати бўлсин. Агар $a_1,a_2,b_1,b_2\in A$ элементлар учун a_1Rb_1 ва a_2Rb_2 шартлардан $(a_1*a_2)R(b_1*b_2)$ келиб чиқса, у ҳолда R-эквивалентлик муносабати $(A,*)$ группоидда конгруэнция дейилади.*

II.1.23-мисол. $(Z;+)$ группоидда $\forall z_1,z_2\in Z$ элементлар учун $(z_1Rz_2)\Leftrightarrow((z_1-z_2)\vdots 3)$ қонун билан аниқланган эквивалентлик конгруэнциядир. Ҳақикатдан ҳам, x_1Ry_1 ва $x_2\ Ry_2$ бўлсин, яъни $x_1-y_1\vdots 3$ ва $x_2-y_2\vdots 3$ у ҳолда $(x_1+x_2)-(y_1+y_2)=(x_1-y_1)+(x_2-y_2)$ ҳам 3 га бўлиниши равшан.

Такрорлаш учун саволлар

1. Бинар алгебраик амалга мактаб математикасидан мисоллар келтиринг.
2. n-ар алгебраик амал таърифини айтинг.
3. Унар алгебраик амалга мисол келтиринг.
4. Группоид нима?
5. Группоиднинг нейтрал элементи хоссаларини айтинг.
6. Группоиднинг регуляр элементи таърифини айтинг.
7. Группоиднинг симметрик элементи нима?
8. Нейтрал, регуляр, симметрик элементларга ўрта махсус таълим математикасидан мисоллар келтиринг.
9. Конгруэнцияни мисоллар ёрдамида тушунтиринг.

Машқлар

1. Тўпламларнинг кесишмаси ассоциатив, коммутатив амал бўлишини исботланг.
2. Тўпламларнинг бирлашмаси коммутатив, ассоциатив амал бўлишини исботланг.
3. Тўпламларнинг айирмаси коммутатив эмаслигини исботланг.
4. Матрицаларни қўшиш коммутатив ва ассоциатив амал эканлигини исботланг.

5. Матрицаларни кўпайтириш ассоциатив, коммутатив бўлмаган бинар амал эканлигини исбротланг.

6. Матрицаларни кўпайтириш қўшиш амалига нисбатан дистрибутив эканлигини исботланг.

7. Тўпламларнинг кесишмаси бирлашмасига нисбатан дистрибутивлигини исботланг.

8. Ихтиёрий a,b,c кардинал сонлар учун қуйидагиларни исботланг:
$1) a+b=b+a;$
$2) (a+b)+c=a+(b+c);$
$3) a\cdot b=b\cdot a;$
$4) (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c);$
$5) (a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c;$
$6) a^{b+c}=a^b\cdot a^c.$

II.2-§. Алгебра. Алгебралар гомоморфизми. Алгебраости. Фактор-алгебра

II.2.1-таъриф. $(A,*)$*-группоидда* $*$*-ассоциатив амал бўлса, бундай группоид яримгруппа дейилади.*

Нейтрал элементга эга бўлган яримгруппа *моноид* дейилади.

II.2.2-мисол. Натурал сонлар тўплами қўшиш амалига нисбатан яримгруппадир. Келгусида бу яримгруппа $(N,+)$ орқали белгиланади.

II.2.3-мисол. Натурал сонлар тўплами кўпайтириш амалига нисбатан моноиддир. Бу моноидда $(N;\cdot,1)$ тартибланган учлик кўринишида белгиланади.

II.2.4-теорема. *Моноидда иҳтиёрий элемент кўпи билан битта симметрик элементга эга.*

Исбот. Фараз қилайлик $(A,*)$- яримгруппада a элемент учун иккита a_1 ва a_2 симметрик элементлар мавжуд бўлсин. У ҳолда

$$a_1=a_1*e=a_1*(a*a_2)=(a_1*a)*a_2=e*a_2=a_2.$$

II.2.5-натижа. *Моноидда a элемент учун симметрик элемент мавжуд бўлса, a элементга чап, ўнг симметрик элементлар a га симметрик бўлган элементга тенг бўлади.*

II.2.6-теорема. $(A,*,e)$- моноидда $a\in A$ элементга $a',b\in A$ элементга эса b'- симметрик элемент бўлсин, у ҳолда $a*b$ элементга $b'*a'$ симметрик элемент бўлади.

Исбот. Ҳақиқатдан ҳам, $(a*b)*(b'*a')=(a*(b*b')*a')=(a*e)*a'=a*a'=e$ ва $(b'*a')(a*b)=(b'*(a'*a))*b=(b'*e)*b=b'*b=e$

II.2.7-теорема. $(A,*,e)$ *- моноид берилган бўлсин, агар $a\in A$ элемент учун симметрик элемент мавжуд бўлса, бундай элемент регуляр элементдир.*

Исбот. Ҳақиқатдан ҳам, $a \in A$ элементга $a' \in A$ элемент симметрик бўлсин, у ҳолда $\forall b, c \in A$ элементлар учун $a * b = a * c$ шарт бажарилса, $a' * (a * b) = a' * (a * c)$ ёки $(a' * a) * c = (a' * a) * c$ бўлади. Агар $a' * a = e$ бўлишини ҳисобга олсак, $b = c$ бўлади.

II.2.8-таъриф. *$(A,*)$-группоид ва $B \subset A$ бўлсин. Агар $\forall b_1, b_2 \in B$ элементлар учун $b_1 * b_2 \in B$ бўлса, B тўплам $*$ алгебраик амалга нисбатан алгебраик ёпиқ дейилади. $(B,*)$ жуфтлик эса $(A,*)$ группоиднинг қисм группоиди ёки группоидости дейилади.*

II.2.9-мисол $(Z,+)$ группоид $(R,+)$ группоиднинг қисм группоидидир.

II.2.10-таъриф. *$A \neq \varnothing$ тўплам ва A да бажариладиган алгебраик амаллар тўплами Ω берилган бўлсин. (A,Ω) - жуфтлик алгебра дейилади.*

A - тўплам алгебранинг *бош тўплами*, Ω-алгебранинг *бош амаллари тўплами* дейилади.

(A,Ω) тўплам берилган бўлса, A тўплам Ω даги барча амалларга нисбатан алгебраик ёпиқ бўлиши равшан. Алгебрадаги Ω-амаллар тўплами чекли, яъни $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ бўлса, $(A, \{\omega_1, ..., \omega_n\})$ ўрнига ёзувни иҳчамлаштириш мақсадида (A, Ω) - деб ёзишга келишиб оламиз.

II.2.11-мисол. Ҳар қандай группоид алгебрадир.

II.2.12-мисол. Ҳақиқий сонлар тўплами ва унда бажариладиган «•», «+» амаллари 0-ўринли амаллар 0, 1 лар билан бирга, яъни $(R,+,\bullet,0,1)$ - алгебрадир. Бу алгебранинг бош амаллари тўплами $(+,\bullet,0,1)$ бўлиб, даражага кўтариш, айириш амалларини ҳосилавий амаллар деб қарашимиз мумкин.

II.2.13-таъриф. *(A,Ω) ва (B,Ω') алгебраларнинг амаллари тўпламлари Ω ва Ω' лар орасида биектив мослик ўрнатилган бўлиб, Ω тўпламдаги ҳар бир ω n-ар амалга нисбатан Ω' дан ω' n-ар амал мос қўйилган бўлса, бу алгебралар бир ҳил турли алгебралар дейилади.*

Агар (A,Ω) алгебра берилган бўлса, Ω-тўпламдаги амалларнинг рангларидан иборат тўплам *алгебранинг тури* дейилади. Хусусан $(A;\omega_1,...,\omega_n)$ алгебранинг тури $\{r(\omega_1),...,r(\omega_n)\}$ тўпламдан иборат. Бир хил турдаги алгебраларнинг бир-бирига мос келадиган амалларининг ранглари бир хил бўлиши равшан.

II.2.14-мисол. $(A,*)$-группоиднинг тури $\{2\}$ тўпламдан, $(A,*,e)$-моноиднинг тури эса $\{2,0\}$ тўпламдан иборат.

Алгебрадаги амаллар тўплами чекли бўлганда, бу алгебранинг турини кетма-кетлик сифатида ёзиш мақсадга мувофиқ, яъни $(A;\omega_1,...,\omega_n)$ алгебранинг тури $(r(\omega_1),...,r(\omega_n))$ кетма-кетлик кўринишида ифода қилинади.

II.2.15-мисол. $(R,+,\bullet,0,1)$ алгебранинг тури $(2,2,0,0)$ кетма-кетликдан иборат.

(A,Ω) ва (B,Ω') бир хил турли алгебралар берилган бўлсин. $\forall \omega \in \Omega$ амалга $\omega' \in \Omega'$ амал мос қўйилган деб фараз қилайлик. Агар $\varphi: A \to B$, акслантириш ва $\forall a_1,...,a_n \in A$ элементлар учун $\varphi(\omega(a_1,...,a_n)) = \omega'(\varphi(a_1),...,\varphi(a_n))$ тенглик бажарилса, φ *акслантириш* ω *амални сақлайди.* ω амал A тўпламдаги ажратилган элемент, яъни нол ўринли амал бўлса, у ҳолда ω га мос келадиган ω' ҳам B тўпламнинг ажратилган элементи бўлади, $\varphi(\omega) = \omega'$.

II.2.16-таъриф. (A,Ω), (B,Ω') *алгебралар берилган бўлсин.* Ω *даги барча амалларни сақлайдиган* $\varphi: A \to B$ *акслантириш* (A,Ω) *агебранинг* (B,Ω) *алгебрага гомоморфизми дейилади.*

II.2.17-таъриф. $\varphi: A \to B$ *акслантириш* (A,Ω) *агебранинг* (B,Ω') *алгебрага гомоморфизми бўлсин. У ҳолда агар* φ *- инъектив акслантириш бўлса, мономорфизм;* φ *- сюръектив акслантириш бўлса, эпиморфизм;* φ *- биектив акслантириш бўлса изоморфизм дейилади. Мономорф акслантиришни изоморф жойлаштириш деб ҳам юритилади.*

II.2.18-таъриф. *Алгебрани ўзини ўзига гомоморф акслантириш эндоморфизм; алгебрани ўзини ўзига изоморф акслантириш эса автоморфизм дейилади.*

II.2.19-таъриф. (A,Ω) *алгебрани* (B,Ω') *алгебрага акслантирадиган камида битта изоморфизм мавжуд бўлса, у ҳолда* (A,Ω) *алгебра* (B,Ω') *алгебрага изоморф дейилади.*

II.2.20-мисол. R - ҳақиқий сонлар тўплами R^+ мусбат ҳақиқий сонлар тўплами бўлсин $(R^+,\bullet,1)$ ва $(R,+,0)$ алгебралар (2,0) типли алгебралар бўлиб, $\varphi: R^+ \to R$, $\varphi(x) = \lg x$ акслантириш биринчи алгебрани иккинчи алгебрага изоморф акслантиришдир. Ҳақиқатдан ҳам, φ - биектив акслантириш бўлиб $\varphi(a \bullet b) = \lg(a \bullet b) = \lg a + \lg b = \varphi(a) + \varphi(b)$.

II.2.21-теорема. (A,Ω_1), (B,Ω_2), (C,Ω_3) *алгебралар берилган бўлиб,* g *A тўпламни B тўпламга,* φ *эса B тўпламни C тўпламга акслантириш,* $\varphi \circ g$ *эса бу акслантиришларнинг композицияси бўлсин. У ҳолда* φ *ва* g *лар гомоморфизм бўлишидан* $\varphi \circ g$ *нинг гомоморфизм бўлиши;* φ *ва* g *лар эпиморфизм бўлишидан* $\varphi \circ g$ *нинг эпиморфизм бўлиши;* φ *ва* g *лар мономорфизм бўлишидан* $\varphi \circ g$ *нинг мономорфизм бўлиши;* φ *ва* g *ларнинг изоморфизм бўлишидан* $\varphi \circ g$ *нинг изоморфизм бўлиши келиб чиқади.*

Исбот. $\omega_1 \in \Omega_1$ n-ар алгебраик амалга Ω_2 дан ω_2 n-ар алгебраик амал мос қўйилган, ω_2 га эса Ω_3 дан ω_3 n-ар алгебраик амал мос қўйилган бўлсин, у ҳолда $\forall a_1,...,a_n \in A$ учун теорема шартига кўра φ ва g акслантиришлар гомоморфизмлар бўлишини инобатга олсак,

$$(\varphi \circ g)(\omega_1(a_1,..,a_n)) = \varphi(g(\omega_1(a_1,...,a_n)) = \varphi(\omega_2(g(a_1),...,g(a_n))) =$$
$$= \omega_3(\varphi(g(a_1)),...,\varphi(g(a_n))) = \omega_3((\varphi \circ g)(a_1),...,(\varphi \circ g)(a_n)).$$

Шундай килиб φ ва g лар гомоморфизмлар бўлишидан $\varphi \circ g$ нинг гомоморфизм бўлишини исбот қилдик. Теореманинг қолган тасдиқлари функциялар композициясининг хоссаларидан бевосита келиб чиқади.

II.2.22-теорема. *Агар (A,Ω_1) алгебранинг (B,Ω_2) алгебрага изоморфизми бўлса, у ҳолда φ га тескари бўлган φ^{-1} акслантириш (B,Ω_2) алгебранинг (A,Ω_1) алгебрага изоморфизмидир.*

Исбот. φ-биектив акслантириш бўлганлиги сабабли φ^{-1} ҳам биектив акслантириш бўлиши юқорида исбот қилингандек. Шунинг учун теоремани исбот килиш учун φ^{-1} акслантириш алгебраик амалларни сақланишини кўрсатиш кифоя.

Фараз қилайлик, $\omega_1 \in \Omega$ n-ар алгебраик амалга Ω_2 тўпламидан ω_2 амал мос келсин. $\forall b_1,...,b_n \in B$ элементлар учун $\varphi(a_1)=b_1,...,\varphi(a_n)=b_n$ деб олсак, у ҳолда $\varphi^{-1}(b_1)=a_1,...,\varphi^{-1}(a_n)=b_n$.

Энди $\varphi^{-1}(\omega_2(b_1,...,b_n))=\omega_1(\varphi^{-1}(b_1),...,\varphi^{-1}(b_n))$ бўлишини кўрсатамиз. Ҳақиқатдан агар φ-акслантириш амалларни сақлашини ҳисобга олсак,

$$\varphi^{-1}(\omega_2(b_1),...,\omega_2(b_n))=\varphi^{-1}(\omega_2(\varphi(a_1)),...,(\varphi(a_n)))=\varphi^{-1}(\varphi(\omega_1(a_1,...,a_n)))=$$
$$=(\varphi^{-1}\circ\varphi)(\omega(a_1,...,a_n))=\omega_1(a_1,...,a_n)=\omega_1(\varphi^{-1}(b_1),...,\varphi^{-1}(b_n))$$

II.2.23-натижа. *Алгебралар изоморфизми эквивалентлик муносабатидир.*

II.2.24-таъриф. *(A,Ω_1) ва (A,Ω_2) бир хил типли алгебралар берилган бўлиб, $B \subset A$ бўлсин. Агар $\forall\omega_1 \in \Omega$ n-ар алгебраик амалга Ω_2 дан мос келадиган n-ар алгебраик амални ω_2 орқали белгилаймиз. Агар $\forall b_1,...,b_n \in B$ учун $\omega_2(b_1,...,b_n)=\omega_1(b_1,...,b_n)$ тенглик бажарилса, у ҳолда ω_2 n-ар алгебраик амал ω_1 n-ар алгебраик амалнинг B тўплами бўйича чекланганu (B,Ω_1) алгебра эса (A,Ω_2) алгебранинг қисм алгебраси ёки алгебраости дейилади.*

II.2.25-мисол. $(Q,+,\bullet,0,1)$ алгебра $(R,+,\bullet,0,1)$ алгебранинг алгебраости бўлиб, Q даги амаллар R даги амалларни Q тўплам бўйича чекланганидир.

II.2.26-теорема. *Алгебраости бўлиш муносабати рефлексив, антисимметрик, транзитив муносабат, яъни ноқатъий тартиб муносабатдир.*

Исбот. Ҳақиқатдан ҳам, ҳар қандай $(A;\Omega_1)$ алгебра $(A;\Omega_1)$ алгебранинг алгебраостидир. Агар (A,Ω_1) алгебра (B,Ω_2) алгебранинг алгебраости бўлса ва аксинча (B,Ω_2) алгебра (A,Ω_1) алгебранинг алгебраости бўлса, $A \subset B$ ва $B \subset A$ бўлади, бундан $A=B$ келиб чиқади. У ҳолда, агар Ω_1 даги ω_1 n-ар алгебраик амалга Ω_2 дан ω_2 n-ар амал мос келса, $\forall a_1,...,a_n \in A$ учун $\omega_1(b_1,...,b_n)=\omega_2(b_1,...,b_n)$ бўлади.

Алгебраости муносабати транзитив бўлиши ҳам бевосита текширилади. Буни мустақил исботлаш учун талабаларга қолдирамиз.

Шундай қилиб, алгебраости бўлиш муносабати рефлексив, антисимметрик ва транзитив муносабат, яъни, ноқатъий тартиб муносабат экан.

$\{(A_\alpha, \Omega_\alpha) \mid -\alpha \in M\}$ тўплам (B,Ω) алгебранинг алгебраостилари тўплами бўлсин. Алгебраостининг таърифига кўра ҳар бир $(A_\alpha, \Omega_\alpha)$ алгебра (B,Ω) алгебра билан бир хил турли ва $\forall \omega_2$ n-ар алгебраик амал Ω даги қандайдир ω-ар алгебраик амалнинг чекланганидир.

Фараз қилайлик $\bigcap\limits_{\alpha \in M} A_\alpha \neq \varnothing$ бўлсин, у ҳолда $\forall a_1,...,a_n \in \bigcap A_\alpha$ учун $\omega_\alpha(a_1,...,a_n) = \omega(a_1,...,a_n) \in \bigcap A_\alpha$ бўлади. Демак, $\bigcap\limits_{\alpha \in M} A_\alpha$ - тўплам ω-ар алгебраик амалнинг $\bigcap\limits_{\alpha \in M} A_\alpha$ даги чекланганларини белгиласак: $(\bigcap\limits_{\alpha \in M} A_\alpha, \Omega')$ алгебра (B,Ω) алгебранинг алгебраости бўлиши равшан. Бу алгебрани $(A_\alpha, \Omega_\alpha)$-алгебраостиларнинг кесишмаси деб атаймиз.

II.2.27-теорема. *Агар (A,Ω) алгебрада ҳеч бўлмаганда битта нол ўринли алгебраик амал бўлса, бу алгебранинг алгебраостилари ихтиёрий тўпламидаги алгебраостилар кесишмаси яна (A,Ω) нинг алгебраости бўлади.*

Исбот. Нол ўринли амал ажратилган элемент эканлигини ҳисобга олсак, бу элемент (A,Ω) алгебранинг ҳар қандай алгебраостининг ҳам ажратилган элементи бўлиши келиб чиқади. Демак, (A,Ω) алгебранинг алгебраостилари ихтиёрий тўпламидаги алгебраостилари кесишмаси бўш эмас. Натижада бу кесишма юқорида исботлаганимизга кўра алгебраости бўлади.

II.2.28-натижа. *(A,Ω) алгебра ва $B \neq \varnothing$ тўплам A нинг тўпламости берилган бўлсин. $\{(A_\alpha, \Omega_\alpha) \mid -\alpha \in M\}$ тўплам эса (A,Ω) алгебранинг $B \subset A_\alpha$ шартни қаноатлантирадиган барча алгебраостилари бўлсин. У ҳолда барча $(A_\alpha, \Omega_\alpha)$-алгебраостиларнинг кесишмаси (A,Ω) алгебранинг алгебраости бўлади. Бу алгебраости B тўплам яратган алгебраости дейилади.*

A тўплам ва унда бажарилган n-ар алгебраик амал, ~-эквивалентлик муносабати берилган бўлсин. Агар $\forall a_1,...,a_n \in A$ ва $\forall b_1,...,b_n \in A$ элементлар учун $a_i \sim b_i, i = 1,...,n$ шартдан $\omega(a_1,...,a_n) \sim \omega(b_1,...,b_n)$ келиб чиқса, ~-эквивалентлик муносабати ω-n-ар *алгебраик амалга нисбатан конгруэнция* дейилади. $A/\sim$ тўплам A нинг эквивалентлик муносабатига нисбатан фактор тўплами бўлсин. $[a_1],...,[a_n]$ лар $A/\sim$ нинг ихтиёрий элементлари бўлсин. У ҳолда $\forall([a_1],...,[a_n])$ n ликга $[\omega(a_1,...,a_n)]$ эквивалентлик синфини мос қўядиган акслантириш $A/\sim$ тўпламда аниқланган n-ар алгебраик амалдир. Ҳақиқатдан $[\omega(a_1,...,a_n)]$ синф $[a_1],...,[a_n]$ эквивалентлик синфларидан олинган a_1 вакилларга боғлиқ эмас.

Чунки, агар $i=1,...,n$лар учун $b_i \in (a_i)$, яъни $b_i \sim a_i$ бўлса $\sim$-эквивалентлик муносабати конгруэнция бўлгани учун, $\omega(a_1,...,a_n) \sim \omega(b_1,...,b_n)$ бўлади, у ҳолда $[\omega(a_1,...,a_n)] \sim [\omega(b_1,...,b_n)]$.

$A/\sim$ фактор тўпламда аниқланган бу амалнинг $\sim$-конгруэнция орқали ω-n-ар алгебраик амал билан ассоцирланган амал деб атаймиз ва ω^* орқали белгилаймиз. Шундай қилиб $\forall[a_1],...,[a_n] \in A/\sim$ учун $\omega^*([a_1],...,[a_n]) = ([\omega(a_1,...,a_n)])$.

II.2.29-таъриф. (A,Ω) *алгебра ва* $\sim$ Ω *даги ҳар бир амалга нисбатан конгруэнция бўлсин.* Ω^* *тўплам эса* $A/\sim$ *фактор-тўпламда аниқланган ва* Ω *даги амаллар билан ассоцирланган барча амаллар тўплами бўлсин. У ҳолда* $(A/\sim,\Omega^*)$ *- алгебра* (A,Ω) *алгебранинг* $\sim$ *- конгруэнция бўйича фактор-алгебраси дейилади.*

II.2.30-мисол. Z - бутун сонлар тўплами бўлсин. Z да $a \sim b$ деймиз ва a га $a-b$жуфт сон бўлса, $\sim$- муносабат конгруэнция бўлиши равшан. Бу муносабат бўйича эквивалентлик синфлари фақат иккита бўлиб, улар $[0]$, $[1]$ синфлардан иборат. Бу синфлар тўпламини $Z/\sim$ орқали белгилайлик, $\forall[a],[b] \in Z/\sim$ учун $\oplus$, Θ амалларини $[a]\oplus[b]=[a+b]$. $[a]\odot[b]=[a\bullet b]$ тенгликлар орқали аниқласак, $(\{[0],[1]\},\oplus,\odot,[0],[1])$ алгебра $(Z+,\bullet,0,1)$ алгебранинг фактор алгебраси бўлади.

II.2.31-теорема. $\varphi: A \to B$ *акслантириш* (A,Ω_1) *алгебранинг* (B,Ω_2) *алгебрага эпиморфизми бўлсин. У ҳолда* A *тўпламда аниқланган* $R=\{(x'x'') \mid \forall x',x'' \in A, \varphi(x')=\varphi(x'')\}$ *- муносабат* Ω_1 *тўпламдаги ҳар бир амалга нисбатан конгруэнция бўлиб,* A/R *тўплам* Ω_1^* *амаллар тўпламига нисбатан* (A,Ω_1) *алгебранинг фактор алгебраси бўлади. Бу алгебрани* $(A/R,\Omega^*)$ *орқали белгилаймиз.*

Исбот. Теоремани исбот қилиш учун $R-\Omega_1$ даги ҳар бир ω_1 n-ар амалга нисбатан конгруэнция бўлишини кўрсатиш етарли. R - эквивалентлик муносабати бўлиши исботланган эди. Шунинг учун $\forall a_1,...,a_n \in A$ ва $b_1,...,b_n \in A$ элементлар учун $a_i R b_i, i=1,...,n$ муносабатдан $\omega_1(a_1,...,a_n) R \omega_1(b_1,...,b_n)$ бўлишини кўрсатишимиз етарли.

Шартга кўра $\varphi(a_i)=\varphi(b_i), i=1,...,n$, у ҳолда φ-гомоморфизм бўлиши учун

$\varphi(\omega_1(a_1,...,a_n)) = \omega_1(\varphi(a),...,\varphi(a_n)) = \omega_1(\varphi(b_1),...,\varphi(b_n)) = \varphi(\omega_1(b_1,...,b_n))$.

Демак, $\omega_1(a_1,...,a_n) R \omega_1(b_1,...,b_n)$.

II.2.32-теорема. $\varphi: A \to B$ *акслантириш* (A,Ω_1) *алгебранинг* (B,Ω_2) *алгебрага эпиморфизми,* $R=\{(x'x'') \mid \forall x',x'' \in A, \varphi(x')=\varphi(x'')\}$ *-эса* A *да аниқланган эквивалентлик муносабати бўлсин. У ҳолда* $(A/R,\Omega^*)$ *фактор алгебра* (B,Ω_1) *алгебрага изоморфдир.*

Исбот. Ҳар бир $[a] \in A/R$ синфга $\varphi(a)$ ни мос қўядиган $\Phi: A/R \to B$ акслантириш $(A/R,\Omega_1^*)$ алгебрани (B,Ω_2) алгебрага акслантирадиган изоморфизмдир. Ундан ташқари $\forall[a_1],...,[a_n]\in A/R$ элементлар ва $\forall\omega_1\in\Omega_1^*$ n-ар алгебраик амал учун $\hat{O}(\omega_1^*([\dot{a}_1],...,[\dot{a}_n]))=$

$$=\hat{O}([\omega_1(\dot{a}_1,...,\dot{a}_n)])=\varphi(\omega_1(\dot{a}_1,...,\dot{a}_n))=\omega_1(\varphi(a_1),...,\varphi(a_n))=\omega^*_1(\hat{O}([\dot{a}_1],...,\hat{O}([\dot{a}_n]))$$

II.2.33-теорема. *$(A,*)$ группоид, $\sim$-эса, A даги конгруэнция муносабати $A/\sim$-A тўпламнинг $\sim$-эквивалентлик муносабати бўйича фактор-тўплами бўлсин. У ҳолда $\forall[a_1][a_2]\in A/\sim$ эквивалентлик синфлари учун $[a_1]_*[a_2]=[a_1*a_2]$ тенглик билан аниқланадиган муносабат A/N тўпламда алгебраик амал бўлади.*

Исбот. Теоремани исбот қилиш учун $\forall[a_1][a_2]$ синфларга теорема шартида кўрсатилган тенглик ягона синфни мос қўйишини кўрсатиш етарли.

Фараз қилайлик, $\forall b_1\in[a_1]\wedge\forall b_2\in[a_2]$ бўлсин, у ҳолда $b_1\sim a_1$ ва $b_2\sim a_2$. Теорема шартига кўра $\sim$- конгруэнция. Демак, $b_1*b_2\sim a_1*a_2$ яъни, $[a_1*a_2]=[b_1*b_2]$. Демак, $[a_1]*[a_2]$ ифода $[a_1]$ ва $[a_2]$ эквивалентлик синфларидан олинган вакилларга боғлиқ бўлмаган ягона эквивалентлик синфи экан.

Шундай қилиб, $A/\sim$ тўплам $*$- амалга нисбатан группоид бўлишини исбот қилдик. Бу группоидни $(A,*)$ группоиднинг фактор группоиди деб атаймиз ва $(A/\sim,\oplus)$ орқали белгилаймиз.

II.2.34-мисол. $(Z,+)$-группоидда $\forall z_1,z_2\in A$ учун $(z_1\sim z_2)\Leftrightarrow((z_1-z_2)\vdots 3)$ қонуният билан аниқланган муносабат конгруэнция бўлишини юқорида кўрдик. Z нинг $\sim$ муносабат бўйича эквивалентлик синфлари $Z_3=\{[0],[1],[3]\}$-тўпламдан иборат. У ҳолда $Z_3,\forall[a],[b]\in Z_3$ учун $[a]\oplus[b]=[a+b]$ тенглик ёрдамида аниқланган амалга нисбатан группоид бўлиб, Z нинг фактор группоидидир.

II.2.35-теорема. $(G_1,\Omega_1),(G_2,\Omega_2),(G,\Omega)$- *бир хил турли алгебралар берилган бўлиб, $G_1\cong G_2$, (G_2,Ω_2)- алгебра (G,Ω)- алгебранинг алгебраостиси бўлсин. У ҳолда (G_1,Ω_1)- қисм алгебрадан иборат қисм алгебрага эга бўлган (G,Ω) алгебрага изоморф (G_3,Ω_3) алгебра мавжуд.*

Исбот. Фараз қилайлик $\forall\omega_1\in\Omega_1$ n-ар алгебраик амалга $\omega_2\in\Omega_2$ n-ар алгебраик амал, $\omega_2\in\Omega_2$ алгебраик амалга эса $\omega\in\Omega$ n-ар алгебраик амал мос келсин ва $\varphi:G_1\in G_2$ изоморф акслантириш бўлсин.

$G_3=(G/G_2)\bigcup G_1$ тўпламда ҳар бир $\omega\in\Omega$ n-ар алгебраик амалга мос қилиб ω_3 n-ар алгебраик амални $\forall a_1,...,a_k\in G\setminus G_2,\forall a_{k+1},...,a_n\in G_1$ элементлар учун, агар $\omega(a_1,...,a_k,\varphi(a_{k+1}),\varphi(a_n))\in G_2$ бўлса,

$$\omega_3(a_1,...,a_k,a_{k+1},...,a_n)=\varphi^{-1}(\omega(a_1,...,a_k,\varphi(a_{k+1}),...,\varphi(a_n)));$$

Агар

$$\omega(a_1,...,a_k,\varphi(a_{k+1}),\varphi(a_n))\in G\setminus G_2$$

бўлса, $\omega_3(a_1,...,a_k,a_{k+1},...,a_n)=\omega(a_1,...,a_k,\varphi(a_{k+1}),\varphi(a_n))$ тенгликлар ёрдамида аниқлайлик. Агар шундай усулда G_3 да аниқланган барча амаллар тўпламини Ω_3 орқали белгиласак (G_3,Ω_3)- алгебра ҳосил бўлади. Бу алгебра теореманинг барча шартларини қаноатлантирувчи алгебрадир. Алгебранинг тузилишига асосан (G_1,Ω_1) алгебра бу алгебранинг алгебраостиси бўлиб, (G_3,Ω_3) ва (G_1,Ω) алгебралар бир хил турлидир.

$$\forall a_3\in G_3 \quad \text{учун} \quad \psi(a_3)=\begin{cases} a_3, agar\ a_3\in G_1/G_2; \\ \varphi(a_3), agar\ a_3\in G_1 \end{cases}$$

акслантириш (G_3,Ω_3) алгебрани (G,Ω) алгебрага изоморф акслантиради.

Ҳақиқатдан ҳам, ψ – тузилишига асосан биектив акслантириш бўлиши равшан. Шунинг учун ψ Ω_3 даги амалларни сақлашини кўрсатиш кифоя $\forall\omega_3\in\Omega, a_1,...,a_k\in G\setminus G_2, a_{k+1},...,a_n\in G_1$ учун $\psi(\omega_3(a_1,...,a_k,a_{k+1},...,a_n))=\omega(\psi(a_1),...,\psi(a_k),\psi(a_{k+1}),...,\psi(a_n))$ тенгликни исбот қиламиз ва ψ лар ω_3 нинг аниқланишига кўра агар $\omega(a_1,...,a_k,\varphi(a_{k+1}),\varphi(a_n))\in G_T/G_2$ бўлса, $\psi(\omega_3(a_1,...,a_k,a_{k+1},...,a_n)=$ $\psi(\omega(a_1,...,a_k,\varphi(a_{k+1}),\varphi(a_n))=\omega(a_1,...,a_k,\varphi(a_{k+1}),\varphi(a_n))$ $=\omega(\psi(a_1),...,\psi(a_k),\psi(a_{k+1}),...,\psi(a_n))$, агар $\omega(a_1,...,a_k,\varphi(a_{k+1}),\varphi(a_n))\in G_2$ бўлса яна ω_3 ва ψ ларнинг аниқланишига ва $\varphi^{-1}(\omega(a_1,...,a_k,\varphi(a_{k+1}),...,\varphi(a_n)))\in G_1$ бўлишига кўра $\psi(\omega_3(a_1,...,a_k,a_{k+1},...,a_n)=\psi(\varphi^{-1}(\omega(a_1,...,a_k,\varphi(a_{k+1}),...,\varphi(a_n)))=$ $\varphi(\varphi^{-1}(\omega(a_1,...,a_k,\varphi(a_{k+1}),...,\varphi(a_n)))=\omega(a_1,...,a_k,\varphi(a_{k+1}),\varphi(a_n))$ $=\omega(\psi(a_1),...,\psi(a_k),\psi(a_{k+1}),...,\psi(a_n))$.

Такрорлаш учун саволлар

II. Яримгруппа деб нимага айтилади?

III. Моноидга таъриф беринг ва мисол келтиринг.

IV. Алгебра тушунчасига мактаб математикасидан мисоллар келтиринг.

V. Алгебранинг тури қандай аниқланади?

VI. Алгебралар гомоморфизмини тушунтиринг.

VII. Изоморфизм, автоморфизм таърифидаги умумий, фарқли шартларни аниқланг.

VIII. Биектив акслантиришлар изоморфизм бўла оладими?

М а ш қ л а р

1. $A = \{e,a\}$ тўпламда бинар алгебраик амал қуйидаги жадвал орқали аниқланган:

$\cdot$	e	a
e	e	a
a	a	a

А тўплам ушбу амалга нисбатан қисқартириш бажариб бўлмайдиган яримгруппа эканлигини исботланг.

2. Натурал сонлар тўплами кўпайтириш амалига нисбатан яримгруппа ташкил этишини исботланг.

3. Натурал сонлар тўплами қўшиш амалиган нисбатан яримгруппа ташкил этишини исботланг.

4. Барча мусбат рационал сонлар тўплами бўлиш амалиган нисбатан группоид бўлади, лекин яримгруппа ташкил этмайди. Исботланг.

6. Гомоморфизмлар композицияси яна гомоморфизм эканлигини исботланг.

7. Алгебралар изоморфизми эквивалентлик муносабати эканлигини исботланг.

8. Алгебраостилар кесишмаси яна алгебра бўлишини исботланг.

II.3-§. Группа. Ҳалқа. Группалар, ҳалқалар гомоморфизми

II.3.1-таъриф. *Бизга* $(2,1)$ *турли* $(G,*,{}')$ *алгебра бериган бўлиб қуйидаги шартлар бажарилсин:*

1. $*$*-бинар алгебраик амал ассоциатив, яъни* $\forall a,b,c \in G$ *учун* $(a*b)*c = a*(b*c)$ *бўлсин.*

2. G *да нейтрал элемент мавжуд, яъни* $\forall a \in G$ *учун шундай* $e \in G$ *топилиб,* $e*a = a$ *шарт бажарилсин.*

3. *Ҳар қандай* $a \in G$ *учун* $a'*a = e$ *бўлсин.*

У ҳолда $(G,*,{}')$*- алгебра группа дейилади.*

Группадаги амал коммутатив, яъни $\forall a,b \in G$ учун $a*b = b*a$ шарт бажарилса, бундай группа *абель группаси* дейилади. Бундай группалар, группалар назариясидаги юқори даражали тенгламаларни ечилиши муамоларини қўйган И. Г. Абель шарафига абел группалари деб номланган.

Ҳар бир $a \in G$ элемент учун $a' \in G$ элемент a элементга чапдан *симметрик* дейилади. Гурппадаги элементлар сони унинг *тартиби* дейилади. Агар группа тартиби натурал сондан иборат бўлса, бундай группа *чекли тартибли группа*, акс холда *чексиз тартибли группа* дейилади.

Группада $*$- бинар алгебраик амал "+"- қўшиш амали ёки "$\bullet$"- кўпайтириш амали бўлиши мимкин.

Бирлик элементи кўпинча e ёки 1 орқали, нолни "0"- орқали, a га тескари элементни a^{-1}, a га қарама-карши элементни $-a$ орқали белгилаш кабул килинган.

Группадаги бинар алгебраик амал "$\bullet$" бўлса, бундай группани *мультипликатив группа*, "+" бўлса *аддитив группа* деймиз. Группадаги амални кўпайтириш деб караш ёзувни ихчамлаштиради, шу сабаб, мультипликатив группанинг терминларидан фойдаланамиз.

II.3.2-теорема. *Группадаги ихтиёрий элементга чап тескари элемент, шу элементга ўнгдан ҳам тескари бўлади.*

Исбот. Группага тегишли $\forall a$ элементга чапдан тескари a^{-1} элемент, ўнгдан ҳам тескари бўлишини кўрсатамиз. Шартга кўра $a^{-1} \bullet a = e$ ундан ташқари $(a^{-1})^{-1}$ элемент a^{-1} га чапдан тескари элемент бўлса $(a^{-1})^{-1} \bullet a^{-1} = e$ бўлиши ҳам равшан у ҳолда, группа таърифининг 2 ва 3 шартларига кўра $a \bullet a^{-1} = e(a \bullet a^{-1}) = ((a^{-1})^{-1} \bullet a^{-1}) \bullet (a \bullet a^{-1}) = (a^{-1})^{-1}((a^{-1} \bullet a)a^{-1}) = (a^{-1})^{-1} \bullet (ea^{-1}) = (a^{-1})^{-1} \bullet a^{-1} = e$

Шундай қилиб $a \bullet a^{-1} = e$, яъни a^{-1} элемент a элементга ўнгдан тескари элемент экан.

II.3.3-теорема. *Группада ўнг бирлик элемент, чап бирлик элемент бўлади.*

Исбот. Группа таърифи ва II.3.2-теоремага кўра

$$a \bullet e = a \bullet (a^{-1} \bullet a) = (a \bullet a^{-1})a = ea = a.$$

II.3.4-теорема. *Группада бирлик элемент ягонадир.*

Исбот. **II.3.3**- теоремада чап бирлик элемент ўнг бирлик элементга тенглигини кўрсатдик. Бу элементни *группанинг бирлик элементи* деб атаймиз. Энди иккита e_1 ва e_2 бирлик элементлар мавжуд деб фараз қилайлик. У ҳолда $e_1 = e_1 \bullet e_2 = e_2 \bullet e_1 = e_2$

II.3.5-теорема. *Группада ихтиёрий элемент учун ягона тескари элемент мавжуд.*

Исбот. Ҳақиқатдан a_1 элементга a_1^{-1} ва a_2^{-1} тескари элементлар мавжуд бўлсин, у ҳолда $a_1^{-1} = a_1^{-1} \bullet e = a_1^{-1}(a \bullet a_2^{-1}) = (a_1^{-1} \bullet a) \bullet a_2^{-1} = e \bullet a_2^{-1} = a_2^{-1}$.

II.3.6-теорема. *Группанинг ихтиёрий a ва b элементлари учун $ax = b$ ва $ya = b$ тенгламаларнинг ҳар бири ягона ечимга эга.*

Исбот. $x = a^{-1} \bullet b$ ва $y = b \bullet a^{-1}$ элементлар мос равишда бу тенгламаларнинг ечими бўлиши аён. Фараз қилайлик $ax = b$ тенгламанинг иккита x_1 ва x_2 ечимлари бўлсин. У ҳолда $ax_1 = b = ax_2$ ёки $ax_1 = ax_2$. Бу тенгликнинг иккила томонини a^{-1} га кўпайтирсак $a^{-1} \bullet (ax_1) = a^{-1} \bullet (ax_2)$ ёки $(a^{-1}a)x_1 = (a^{-1}a)x_2$ у ҳолда $ex_1 = ex_2$ демак $x_1 = x_2$ бўлади. Иккинчи тенглама ечими ягона бўлиши шунга ўхшаш исбот қилинади.

II.3.7-натижа. *Группанинг ихтиёрий a,b,c элементлар учун $a \bullet b = a \bullet c$ ёки $b \bullet a = c \bullet a$ бўлса $a = c$ бўлади.*

II.3.8-натижа. *Группада ихтиёрий a,b,c элементлар учун $a \bullet b = e$ ёки $c \bullet b = e$ бўлса, $b = e = c$ бўлади.*

II.3.9-натижа. *Группада ихтиёрий e элемент учун $(a^{-1})^{-1} = a$, яъни a^{-1} элементнинг тескариси a элементдир.*

II.3.10-натижа. *Группанинг ихтиёрий a,b элементлар учун $a\bullet b=e$ бўлса a ва b элементлар бир-бирига тескари элементлардир.*

Бу натижаларнинг исботи юқоридаги теоремалардан бевосита келиб чиқади, шунинг учун уларнинг исботини ўқувчиларга машқ сифатида қолдирамиз.

Группалар назариясида гомоморфизм, изоморфизм, группаости тушунчалари алгебрадаги мос тушунчаларнинг хусусий холлари бўлиб, улар қуйидагича киритилади: $(G,\bullet,^{-1})$ ва $(H,\bullet,^{-1})$ группалар берилган бўлиб, $h:G\to H, G$ ни H га акслантириш бўлсин. У ҳолда $\forall a,b\in G$ учун $h(a\bullet b)=h(a)\bullet h(b)$ ва $h(a^{-1})=(h(a))^{-1}$ шартлар бажарилса, h- *гомоморф* акслантириш дейилади. Агар h-инъектив бўлса, *мономорф*; сюръектив бўлса, *эпиморф*; биектив бўлса, *изоморф* акслантириш дейилади.

II.3.9-таъриф. $(G,\bullet,^{-1}),(H,\bullet,^{-1})$ *группалар берилган бўлсин. Агар G ни H га акслантирадиган камида битта изоморф акслантириш мавжуд бўлса бу группалар изоморф дейилади ва $G\cong H$ орқали белгиланади.*

II.3.10-таъриф. *Группани ўзини ўзига гомоморф акслантириш эндоморфизм, ўзига ўзини изоморф акслантириш афтоморфизм дейилади.*

II.3.11-теорема. $(G,\bullet,^{-1}),(H,\bullet,^{-1})$ *группалар берилган бўлсин. G ни H га акслантирадиган $\varphi:G\to H$ -акслантириш гомоморф акслантириш бўлиши учун G даги бинар амални сақлаш етарли, яъни $\forall a,b\in G$ учун $\varphi(a\bullet b)=\varphi(a)\bullet\varphi(b)$ бўлиши етарли.*

Исбот. Берилган группаларнинг бирлик элементлари мос равишда e ва e' бўлсин, у ҳолда $\varphi(e)=e'$. Ҳақиқатдан хам, $\varphi(e)=\varphi(e\bullet e)=\varphi(e)\bullet\varphi(e)$.

Демак, $e'=\varphi(e)\bullet\varphi(e)^{-1}=(\varphi(e)\bullet\varphi(e))\varphi(e)^{-1}=\varphi(e)\bullet(\varphi(e)\bullet\varphi(e)^{-1})=\varphi(e)$ $\forall a\in G$ учун $\varphi(e)=\varphi(a\bullet a^{-1})=\varphi(a)\bullet\varphi(a^{-1})$ у ҳолда $\varphi(a^{-1})=\varphi(e)\bullet\varphi(a)^{-1}=e'\bullet\varphi(a)^{-1}=\varphi(a)^{-1}$, яъни $\varphi(a^{-1})=\varphi(a)^{-1}$.

II.3.12-теорема. *Группаларнинг изоморфизми эквивалентлик муносабатидир.*

II.3.13-мисол. R^+-мусбат ҳақиқий сонлар тўплами бўлсин. R^+ ҳақиқий сонларни кўпайтириш ва тескарисини олиш амалларига нисбатан мультипликатив группа ташкил қилади.

R- ҳақиқий сонлар тўплами эса қўшиш ва қарама- қаршисини олиш амалларига нисбатан аддитив группа ҳосил қилади. Бу группаларни мос равишда $(R^+,\bullet,-1)$ ва $(R,+,-)$ орқали белгилайлик. $\varphi:R\to R^+$ $\varphi(x)=ex$- биектив акслантириш бўлиб $\forall x_1,x_2\in R$ элементлар учун $\varphi(x_1+x_2)=e^{x_1+x_2}=e^{x_1}\bullet e^{x_2}-\varphi(x_1)\bullet\varphi(x_2)$.

II.3.14-таъриф. *Группанинг группадаги амалларига нисбатан ёпиқ бўш бўлмаган тўпламостиси группаости дейилади.*

$(G,\bullet,^{-1})$-группа берилган бўлсин. У ҳолда таърифга кўра $H\neq\varnothing$ ва $H\subset G$ тўпламости группаости бўлиши учун $\forall a,b\in H$ элементлари учун $a\bullet b\in H$ ва $a^{-1}\in H$ бўлиши етарли. У ҳолда $a\bullet a^{-1}=e\in H$. Яъни группанинг нейтрал элементи группаости учун ҳам нейтрал элемент экан. $H \subset G$ бўлганлиги учун группаостида ҳам "$\bullet$" бинар алгебраик амал ассоциативдир. Шундай қилиб, группаости ҳам ўз навбатида группа ҳосил қилар экан.

II.3.15-теорема. *$(G,\bullet,^{-1})$ группа берилган бўлсин $H \neq \varnothing$ $H \subset G$ тўпламости группаости бўлиши учун $\forall a,b \in H$ элементлари учун $a \bullet b^{-1} \in H$ бўлиши зарур ва етарли.*

Исбот. Агар $(H,\bullet,^{-1})$ группаости бўлса, $\forall a,b \in H$ учун $a \bullet b^{-1} \in H$ бўлиши равшан. Фараз қилайлик $\forall a,b \in H$ учун $a \bullet b^{-1} \in H$ бўлсин. У ҳолда хусусан $a=b$ бўлса $a \bullet a^{-1} = e \in H$ бўлиб, бундан $\forall e,b$ элементлар учун $e \bullet b^{-1} \in H$, яъни $\forall b$ учун $b^{-1} \in H$ бўлиши келиб чиқади. Агар $\forall a,b \in H$ учун $a \bullet b^{-1} \in H$ шартда b ни b^{-1} билан алмаштирсак, $\forall a,b \in H$ учун $a \bullet b \in H$ бўлиши келиб чиқади. Яъни H - группаости экан.

II.3.16-теорема. *Группаости бўлиш муносабати ноқатъий тартиб муносабатдир.*

II.3.17-теорема. $(G,\bullet,^{-1})$ группанинг группаостиларидан иборат бўш бўлмаган B тўпламнинг барча элементларининг кисишмаси яна группаости бўлади.

$(G,\bullet,^{-1})$ группа ва G нинг бўш бўлмаган тўпламостиси M бирилган бўлсин. $M \subset G_a$ шартни қанотлантирадиган $(G,\bullet,^{-1})$ нинг барча $(G_a;\bullet,^{-1})$ группаостиларнинг кисишмаси M *тўплам яратган группаости* дейилади ва бу группаости $(<M>^{-1},\bullet)$ орқали белгиланади. Агар M -бир элементли тўплам бўлса, бу группа *циклик группа* дейилади.

II.3.18-мисол. $M = \{1,2,...,h\}$ тўплам берилган бўлсин. M ни M га акслантирадиган ҳар қандай биектив акслантириш M тўпламда аниқлаган *ўринга қўйиш* дейилади. M тўпламда аниқланган барча ўрнига қўйишлар тўпламини S_n орқали белгилаймиз. S_n да иккита φ ва ψ ўрнига қўйишларнинг композициясини $\forall x \in M$ учун $\varphi \circ \psi(x) = \varphi(\psi(x))$ кўринишда аниқласак, S_n тўплам « $\circ$ » амалга нисбатан группа ташкил этади.

Ҳақиқатдан ҳам, иккита биектив функцияларнинг композицияси яна биектив функция бўлиб, ассоциативдир. Ҳар қандай биектив функцияга тескари функция мавжуд, $\varphi(x) = x$ тенглик билан аниқланган ўрнига қўйиш эса композиция амалига нисбатан нейтрал элементдир.

Бу мисолни $n=3$ учун кўриб чиқишни ўқувчиларга ҳавола қиламиз.

II.3.19-мисол. Мунтазам k-бурчакни диагоналлари кесишган нукта атрофида $\frac{2\pi}{k} \bullet n, k = 3,4,...,n-1$ бурчакларга буришлар тўплами, буришларни кетма-кет бажариш амалига нисбатан группа ҳосил қилади.

II.3.20-мисол. G-текисликдаги векторлар тўплами бўлсин. У ҳолда G векторларни қўшиш амалига нисбатан группа ҳосил қилади.

II.3.21-мисол. $(Z,+,-)$-бутун сонлар аддитив группаси $(Q,+,-)$ рационал сонлар аддитив группасининг группаостисидир.

II.3.22-мисол. $(Q,+,\bullet,^{-1})$-мусбат рационал сонлар мультипликатив группаси $(R^{+},\bullet,^{-1})$ мусбат ҳақиқий сонлар мультипликатив группасининг группаостисидир.

II.3.23-таъриф. *Агар қуйидаги шартлар бажарилса* $(K;+,\bullet)$ *алгебрага яримҳалқа дейилади:*

$(1)\forall(a,b,c \in K)(a+b)+c = a+(b+c);$

$(2)\forall(a,b \in K)a+b = b+a;$

$(3)(\forall a,b,x \in K)(a+x = b+x \Rightarrow a = b)\wedge(x+a = x+b \Rightarrow a = b);$

$(4)\forall(a,b,c \in K)(a\bullet b)\bullet c = a\bullet(b\bullet c);$

$(5)\forall(a,b,c \in K)(a+b)\bullet c = añ+bc)\wedge(c\bullet(a+b) = ca+cb).$

II.3.24-таъриф. *Агар* $(K,+,-,\bullet)$ $(2,1,2)$ *турли алгебра учун қуйидаги шартлар бажарилса*

(1) $(K,+,-,)$ *абель группаси;*

(2) $(K,\bullet)$*-ярим группа;*

(3) $\forall a,b,c \in K$ *учун* $a\bullet(b+c) = a\bullet b+a\bullet c$ *ва* $(b+c)\bullet a = b\bullet a+c\bullet a$ *у ҳолда* $(K,+,-,\bullet)$*- алгебра ҳалқа дейилади.*

$(K,+,-,)$ аддитив группанинг нейтрал элементи *ҳалқанинг ноли* дейилади ва 0 орқали белгиланади.

Z ҳалқа унда бажарилган "$\bullet$"-амалнинг хоссаларига мос равишда номланади. Агар кўпайтириш амали ассоциатив бўлса, ҳалқа *ассоциатив ҳалқа*, кўпайтириш амалига нисбатан бирлик элемент мавжуд бўлса, ҳалқа *бирлик элементли ҳалқа* дейилади.

Агар ҳалқада $a \neq 0$ ва $b \neq 0$ элементлар учун $a\bullet b = 0$ бўлса, a нолнинг чап бўлувчиси, b эса нолнинг ўнг бўлувчиси дейилади. Нолнинг ҳам чап, ҳам ўнг бўлувчиси бўлган элемент *нолнинг бўлувчиси* дейилади. Биз асосан бирлик элементга эга бўлган ассоциатив ҳалқаларни ўрганамиз. Ҳалқанинг бирлик элементини одатда 1 орқали белгилаймиз.

II.3.25-таъриф. Нолнинг бўлувчиларига эга бўлмаган ассоциатив, коммутатив ҳалқада $1 \neq 0$ шарт бажарилса, бундай ҳалқа *бутунлик соҳаси* дейилади.

II.3.26-мисол. Z-бутун сонлар тўплами $+,-,\bullet$ амалларига нисбатан ҳалқа бўлиб, $(Z,+,-,\bullet)$ орқали белгиланади. Бу ҳалқа бутунлик саҳасидир.

II.3.27-мисол. $K = \{0,e,a,b\}$ тўпламида $+,-,\bullet$ амаллари қуйидаги жадваллар орқали берилган бўлсин:

$\oplus$	0	e	a	b
0	0	e	0	b
e	e	a	a	a_3
a	a	b	0	e
b	b	a_3	a	a

$\odot$	0	e	a	b
0	0	0	0	0
e	0	e	a	b
a	0	a	0	a
b	0	b	a	e

(K, ⊕, Θ, ⊙) алгебра коммутатив, ассоциатив, бирлик элементга эга бўлган ҳалқадир. Лекин $a \bullet a = 0$, бўлиб a нолнинг бўливчисидир.

II.3.28-теорема. $(K,+,-,\bullet)$ *ҳалқа берилган бўлиб* a,b,c *лар ҳалқанинг ихтиёрий элементлари бўлсин, у ҳолда*

(I) агар $a+b=a$ *бўлса,* $b=0$.

(II) агар $a+b=0$ *бўлса,* $a=-b$.

(III) $-(-a)=a$.

(IV) $0\bullet a = a\bullet 0 = 0$.

(V) $(-a)(-b)=a\bullet b$.

(VI) $(a-b)\bullet c = ca-bc$.

(VII) $c(a-b)=ca-cb$.

Исбот. I, II, III, IV тасдиқлар $(K,+,-,)$-коммутатив группалигидан бевосита келиб чиқади. (VI)- хоссанинг исботини келтирамиз.

$a\bullet 0 = a(0+0) = a\bullet 0 + a\bullet 0 \Rightarrow a\bullet 0 = a\bullet 0 + a\bullet 0 \Rightarrow a\bullet 0 = 0$

$0\bullet a = 0$ тенглик шунга ўхшаш исбот қилинади.

(V) тсадиқнинг исботи.

$(-a)\bullet b + a\bullet b = ((-a)+a)\bullet b = 0\bullet b = 0$. Демак. $(-a)\bullet b = -(a\bullet b)$;

У ҳолда $ab = -(-a)\bullet b$. Энди

$(-a)\bullet(-b) + (-a)\bullet b = (-a)(-b+b) = (-a)\bullet 0 = 0$ ни ҳисобга олсак $(-a)(-b) = -(-a)\bullet b = ab$.

(VII) тасдиқ (VI) га ўхшаш исботланади.

II.3.29-таъриф. $(K,+,-,\bullet)$ *ва* $(K',+,-,\bullet)$ *ҳалқалар берилган бўлсин.* K *ни* K' *га акслантирадиган ва* $(K,+,-,\bullet)$ *ҳалқанинг ҳамма амалларини сақлайдиган* $\varphi: K \to K'$ *акслантириш гомоморф акслантириш дейилади.*

Одатдагидек φ-инъектив бўлса, *мономорф;* сюрьектив бўлса *эпиморф*; биектив бўлса *изоморф* акслантириш дейилади. Ҳалқани ўзини-ўзига гомоморф акслантириш *эндоморфизм*; изоморф акслантириш эса *автоморфизм* дейилади.

Худди алгебрадагидек ҳалқаларнинг изоморфизми эквивалентлик муносабати бўлиб, изоморф ҳалқалар$(K,+,-,\bullet) \cong (K',+,-,\bullet)$ орқали белгиланади.

II.3.30-мисол $(Z,+,-,\bullet)$ бутун сонлар ҳалқаси (K, ⊕, Θ, ⊙) II.3.27-мисолдаги ҳалқа бўлсин, у ҳолда $\varphi: Z \to K$,

$$\varphi(z)=\begin{cases} 0, agar\ z=4k; \\ e, agar\ z=4k+1; \\ a, agar\ z=4k+2; \\ b, agar\ z=4k+3 \end{cases}$$

акслантириш гомоморфизмдир.

Ҳалқаости тушунчаси ҳам, алгебраости тушунчаси каби киритилади.

II.3.31-таъриф. $(K,+,-,\bullet)$ *ҳалқа берилган бўлсин.* L *эса* K *нинг бўш бўлмаган тўпламостиси бўлсин.*

Агар L *тўплам* K *даги* $+,-,\bullet$ *амалларига нисбатан алгебраик ёпиқ бўлса, яъни* $\forall a,b\in L$ *учун* $a+b\in L$, $a\bullet b\in L$, $-a\in L$ *шартлар бажарилса* $(L,+,-,\bullet)$*-алгебра* $(K,+,-,\bullet)$ ***ҳалқанинг ҳалқаостиси дейилади.***

Ҳалқаости ўз навбатида халқа бўлиши равшан, чунки ҳалқа таърифининг қолган шартлари $L\subset K$ муносабатдан келиб чиқади.

II.3.32-теорема. *Ҳалқанинг ноли ҳалқаостисининг ҳам ноли бўлади. Агар ҳалқада кўпайтиришга нисбатан нейтрал элемент мавжуд бўлса, бу элемент* L *учун ҳам кўпайтиришга нисбатан нейтрал элемент бўлади.*

Такрорлаш учун саволлар

6. Группа таърифини келтиринг. Унинг асосий хоссаларини айтинг.
7. Аддитив, мультипликатив группаларга алгебра, геометрия курсидан мисоллар келтиринг.
8. Группалар гомоморфизмининг қандай турларини биласиз?
9. Ҳар қандай гомоморфизм изоморфизм бўла оладими, ёки аксинча?
10. Группалар автоморфизми нима?
11. Группаости тушунчасига мисоллар келтиринг.
12. Ҳалқанинг қандай турларини биласиз?
13. Халқалар гомоморфизми, изоморфизмига мисоллар келтиринг.
14. Ҳалқалар автоморфизми таърифини баён қилинг.
15. Ҳалқаостилар кесишмаси яна халқаости бўлишини исботланг.

М а ш қ л а р

Қуйидаги тўпламларни мультипликатив группа ташкил этишини исботланг:

$G=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in Q,\ a^2+b^2>0\}$.

$G=\{a+bi\sqrt{3}\mid a,b\in Q,\ a^2+b^2>0\}$.

$G=\{\begin{bmatrix} a & -b\\ b & a\end{bmatrix}\mid a,b\in R,\ a^2+b^2>0\}$.

$G=\{\begin{bmatrix} \sin\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\mid \varphi\in R\}$.

$G=\{2^z\mid z\in Z\}$.

2. Қуйидаги тўпламларни аддитив группа ташкил этишини исботланг:

$G=\{a+bi\sqrt{2}\mid a,b\in Z\}$.

$G=\{a+b\sqrt{3}\mid a,b\in Z\}$.

$G=\{\frac{a}{7^k}\mid a\in Z,\ k\in N\}$.

$G=\{a-b\sqrt{p}\mid a,b\in Z;\ p$ - туб сон $\}$

Қуйидаги тўпламларни халқа ташкил этишини исботланг:

$K = \{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in 3Z\}$.

$G = \{a + b\sqrt{p} \mid a, b \in Z$; p - туб сон $\}$;

$< Z_5; +, \cdot >$.

Қуйидаги алгебралар орасида изоморфизм ўрнатинг:

$< \{2^z \mid z \in Z\}; \cdot, ^{-1}, 1 > \wedge < Z; +, -, 0 >$.

$< Z; +, -, 0 > \wedge < 2Z; +, -, 0 >$.

$< \{a + bi \mid a, b \in R \wedge i^2 = -1\}; +, -, 0 > \wedge < R^2; +, -, 0 >$.

$< \{a + b\sqrt{p} \mid a, b \in Q\}; +, \cdot > \wedge < \{a - b\sqrt{p} \mid a, b \in Q\}; +, \cdot >$.

II.4-§. Алгебраик системалар. Алгебраик системалар гомоморфизми

II.4.1-таъриф. *$A \neq \varnothing$ тўплам учун Ω- A тўпламда аниқланган амаллар тўплами, Ω'-A тўпламда аниқланган муносабатлар тўплами бўлсин. У ҳолда (A, Ω, Ω'')- тартибланган учлик- алгебраик система дейилади.*

A-тўплам *алгебраик системанинг асосий тўплами*, Ω-*алгебраик системанинг бош амаллари тўплами*, Ω'- *алгебраик системанинг бош муносабатлари тўплами* дейилади.

Ҳар қандай n-ўринли алгебраик амални $(n+1)$- ўринли алгебраик муносабат сифатида қарашимиз мумкинлиги аён. Ҳақиқатдан ҳам, $\omega : A^n \to A$ n-ар алгебраик амални

$R_\omega = \{(a_1,...,a_n); \omega(a_1,...,a_n) \mid \forall a_1,...,a_n \in A\}$ $n+1$ ўринли муносабат дейишимиз мумкин. Агар (A, Ω, Ω') алгебраик система берилган бўлса, уни A тўплам ва унда берилган $\Omega \bigcup \Omega'$- муносабатлар тўпламидан иборат $(A, \Omega \bigcup \Omega')$- жуфтлик сифатида қарашимиз мумкин. Айтилганларни ҳисобга олсак қуйидагиларга эга бўламиз.

II.4.2-таъриф. *$A \neq \varnothing$ тўплам, унда аниқланган Ω- муносабатлар тўпламидан иборат (A, Ω) жуфтлик алгебраик система дейилади.*

II.4.3-таъриф. *(A, Ω_1) ва (B, Ω_2) алгебраик системалар берилган бўлсин. Агар Ω_1 ва Ω_2 - муносабатлар тўплами орасида биектив мослик ўрнатилган бўлиб, натижада Ω_1 даги ҳар бир n- ўринли ω_1 муносабатга Ω_2 да ҳам ω_2 k-ўринли муносабат мос келса, бу алгебраик системалар бир хил турли системалар дейилади.*

II.4.4-мисол. Z- бутун сонлар тўплами, унда бажарилган $+, \bullet, 0, 1$ амаллар ва $\geq$ муносабатга нисбатан алгебраик системадир. Уни $(Z, +, \bullet, 0, 1, \geq)$ орқали белгилаймиз ва *бутун сонлар системаси* деб атаймиз.

II.4.5-мисол. Z- бутун сонлар тўплами, $2Z$ эса жуфт бутун сонлар тўплами бўлсин, у ҳолда $(Z, +, 0, \geq)$ ва $(2Z, +, 0, \geq)$ алгебраик системалар бир хил турли алгебраик системалардир.

(A, Ω_1) ва (B, Ω_2) бир хил турли алгебраик системалар берилган бўлиб, $\omega_1 \in \Omega_1$ n- ар муносабатга $\omega_2 \in \Omega_2$ n- ар алгебраик муносабат мос қўйилган бўлсин. Агар, A тўпламни B тўпламга акслантирадиган $\varphi : A \to B$ акслантириш берилган бўлиб, $\forall a_1,\ldots,a_n \in A$ элементлар учун $(a_1,\ldots,a_n)\in\omega_1$ бўлишидан $(\varphi(a_1),\ldots,\varphi(a_n))\in\omega_2$ бўлиши келиб чикса, φ акслантириш, R_1 *муносабатни сақлайди* деб атаймиз. A тўпламни B тўпламга акслантирадиган $\varphi : A \to B$ акслантириш Ω_1 даги ҳар бир ω_1 муносабатни сакласа, бундай акслантириш (A,Ω_1) алгебраик системани (B,Ω_2) алгебраик системага *гомоморф акслантириш* дейилади. Худди алгебралардагидик φ - сюръектив бўлса, *эпиморфизм;* инъектив бўлса *мономорфизм;* биектив бўлса *изоморфизм* дейилади.

Системаости тушунчаси ҳам алгебраости тушунчасига ўхшаш усулда киритилади (A,Ω_1) ва (B,Ω_2) бир хил турли алгебраик системалар берилган. $A\subset B$, ва $\omega_1\in\Omega_1$ n - ар муносабатга $\omega_2\in\Omega_2$ n - ар алгебраик муносабат мос қўйилган бўлсин. Агар $\forall a_1,\ldots,a_n\in A$ учун $(a_1,\ldots,a_n)\in\omega_1$, бўлишидан $(a_1,\ldots,a_n)\in\omega_2$ бўлиши келиб чиқса ω_1 муносабат ω_2 *муносабатнинг A тўплам билан чеклангани* дейилади. Агар (A,Ω_1) системадаги ҳар бир $\omega_1\in\Omega$ муносат бу муносабатга Ω_2 тўпламдан мос бўлган ω_2 муносабатнинг чеклангани бўлса, у ҳолда (A,Ω_1) алгебраик система (B,Ω_2) *алгебраик системанинг системаостиси* дейилади.

Алгебраик системага хос бўлган бошқа тушунчалар ва баъзи теоремалар алгебрадагиларга мос равишда ифодаланади. Алгебраик системалар ҳақида тўлиқроқ маълумотлар олишни истаган ўқувчиларга атоқли математик А.И.Мальцевнинг «Алгебраические системы» номли рисоласига мурожаат қилишни тавсия қиламиз.

Такрорлаш учун саволлар

6. Алгебраик системага таъриф беринг.
7. Академик лицей, мактаб математикасидан алгебраик системага доир мисоллар келтиринг.
8. Алгебраик системалар гомоморфизмини тушунтиринг.
9. Алгебраик системалар автоморфизми деб нимага айтилади?
10. Алгебраик система системаости тушунчасига таъриф беринг.

Машқлар

6. $A=(A;+,\cdot), B=(B;\oplus,\otimes)$ алгебраик системалар берилган бўлиб, f биринчи алгебраик системани иккинчи алгебраик системага эпиморф акслантириш бўлсин. У ҳолда қуйидагиларни исбот қилинг:

1. агар биринчи алгебраик системадаги кўпайтириш амали қўшиш амалига нисбатан дистрибутив бўлса, у ҳолда иккинчи алгебраик системада ҳам кўпайтириш амали қўшиш амалига нисбатан дистрибутив бўлади;

2. агар биринчи алгебраик системадаги бирорта амал р хоссага эга бўлса, у ҳолда иккинчи алгебраик системадаги унга мос амал ҳам шу хоссага эга бўлади (р-ассоциативлик, коммутативлик ва ҳ.к.);

3. агар биринчи алгебраик система ҳалқа бўлса иккинчи алгебраик система ҳам ҳалқа бўлади;

4. агар биринчи алгебраик система майдон бўлса иккинчи алгебраик система ҳам майдон бўлади;

5. агар биринчи алгебраик система жисм бўлса иккинчи алгебраик система ҳам жисм бўлади;

7. Ҳар қандай A,B,C алгебраик системалар учун қуйидаги хоссалар ўринли эканлигини исботланг:

1)$A \cong A$;

2)$A \cong B \Rightarrow B \cong A$;

3)$A \cong B \wedge B \cong C \Rightarrow A \cong C$.

8. Агар $A=(A;+,\cdot,P)$ Р майдон устида қурилган е бирлик элементга эга чизиқли алгебра бўлса, у ҳолда бу алгебранинг Р майдонга изоморф бўлган қисм алгебраси мавжудлигини исботланг.

9. α,βлар $x^3=2$ тенгламанинг иккита турли комплекс илдизлари бўлсин. У ҳолда рационал сонлар майдонининг α,β сонлар орқали аниқланган алгебраик кенгайтмалари изоморф бўлишини исботланг.

10. Бир бирига изоморф бўлиб, биринчисида қисқартириш бажарилиб иккинчисида қисқартириш бажарилмайдиган яримгруппаларга мисол келтиринг.

II.5-§. Тартибланган алгебралар

Тартибланган ярим группалар.

II.5.1-таъриф. $(A,+,\succ)$ *алгебраик система учун қўйидаги шартлар бажарилган бўлсин:*

1. $(A,+)$-система яримгруппа.

2. $(A,\succ)$-тартибланган тўплам.

3. Яримгруппадаги амалларга нисбатан $\succ$ бинар муносабат монотон, яъни $\forall \grave{a},b,\tilde{n}\in \grave{A}$ учун $\grave{a}\succ b \Rightarrow a+c\succ b+c \wedge c+a\succ c+b$. У ҳолда $(A,+,\succ)$ тартибланган яримгруппа дейилади.

II.5.2-таъриф. *Агар $(A,+,\succ)$ тартибланган яримгруппа бўлиб, $(A,+)$-алгебра группа бўлса, у ҳолда $(A,+,\succ)$ система тартибланган группа дейилади.*

$\succ$ -тартиб муносабат мос равишда $\succ$ - чизиқли тартиб муносабат бўлса, $(A,+,\succ)$ чизиқли тартибланган группа, агар қўшиш амали ўрнида кўпайтириш амали бўлса, у ҳолда тартибланган яримгруппа – тартибланган мультипликатив группа дейилади.

II.5.3-мисол. $(N,+,\cdot,1)$ натурал сонлар системасида $\forall a,b \in N$ учун шундай q натурал сон топилиб, $a = b \cdot q$ тенглик ўринли бўлса, *a натурал сон b натурал сонга бўлинади* деймиз ва $a \vdots b$ орқали белгилаймиз.

Бу муносабат натурал сонлар тўпламида антисимметрик, рефлексив, транзитив муносабат бўлиб, кўпайтиришга нисбатан монотондир. Демак $(N,\cdot,\vdots)$ ноқатъий тартибланган ярим группа бўлади.

II.5.4-мисол. Агар $\forall a,b \in N$ натурал сонлар учун шундай q натурал сон топилиб, $a = b + q$ тенглик бажарилса, *a натурал сон b натурал сондан катта* деймиз ва $a > b$ орқали белгилаймиз.

$(a > b) \vee (a = b)$бўлса, $a \geq b$ деб ҳисоблаймиз. $(N,+,\geq)$ алгебраик система ноқатъий чизиқли тартибланган яримгруппа; $(N,+,>)$ қатъий чизиқли тартибланган яримгруппадир.

Тартибланган яримгруппанинг хоссалари.

1^0. $(A,+,>)$ тартибланган яримгруппа бўлсин, $\forall a,b,a',b' \in A$ учун $a > b \wedge a' > b' \Rightarrow a + a' > b + b'$.

2^0. $(A,+,>)$ тартибланган яримгруппа n натурал сон бўлса, $\forall a,b \in A$ учун $a > b \Rightarrow n \cdot a > n \cdot b$ $\left(n \cdot c = \underbrace{\tilde{n} + \ldots + \tilde{n}}_{n} \right)$.

3^0. Агар $(A,+,>)$ қатъий чизиқли тартибланган яримгруппа бўлса

1. $\forall a,b,c \in A$ учун $(a + c = b + c) \Leftrightarrow (a = b) \Leftrightarrow (c + a = c + b)$.
2. $\forall a,b,c \in A$ учун $(a + c > b + c) \Leftrightarrow (a > b) \Leftrightarrow (c + a > c + b)$.

Демак, ҳар қандай қатъий чизиқли тартибланган яримгруппа қисқартиришга эга бўлган яримгруппа бўлар экан.

4^0. Агар $(A,+,>)$ қатъий чизиқли тартибланган яримгруппа бўлса, у ҳолда

1. $\forall a,x \in A$ $(a + x = x) \Leftrightarrow (a + a = a) \Leftrightarrow (x + a = x)$.
2. $\forall a,x \in A$ $(a + x > x) \Leftrightarrow (a + a > a) \Leftrightarrow (x + a > x)$.
3. $\forall a,x \in A$ $(a > a + x) \Leftrightarrow (a > a + a) \Leftrightarrow (x > x + a)$.

Бу хоссаларнинг исботи бевосита таърифдан келиб чиқади. Мисол сифатида бир нечта хоссанинг исботини кўриб чиқамиз.

1^0. хоссанинг исботи:

$(A,+,>)$ тартибланган яримгруппа бўлиб, $a > b$ва $a' > b'$ бўлсин, у ҳолда таърифга асосан $a + a' > a' + b$ ва $a' + b > b' + b$. Бундан $>$ муносабатнинг транзитивлик хоссасига кўра $a' + a > b' + b$.

2^0. хоссанинг исботи:

$a > b$ тенгсизликни ўзини-ўзига n марта қўшсак $n \cdot a > n \cdot b$ бўлади.

$(A,+,>)$ тартибланган яримгруппанинг $a + a > a$ шартни қаноатлантирадиган a элементи мусбат элемент дейилади. Агар $a > a + a$ шарт бажарилса, a яримгруппанинг манфий элементи дейилади.

$(A,+,>)$ қатъий чизиқли тартибланган яримгруппа бўлсин. Агар $a + a \neq 0$ шарт бажарилса, буни группанинг $a, 2a, 3a, \ldots, n \cdot a, \ldots$ қаторнинг бир хил ҳадлари мавжуд эмас. $a = 2a$ бўлса, $a = a + a$ шартга зид. Демак $a \neq 2a$.

Тартибланган яримҳалқа

II.5.5-таъриф. $(A;+,\cdot,>)$ *алгебра учун:*

1. $(A;+,\cdot)$ *яримҳалқа.*

2. $(A;+,>)$ *тартибланган яримгруппа.*

3. $(A;+,>)$ *тартибланган яримгруппанинг мусбат элементлари тўпламида камида битта элемент маижуд.*

4. $\forall a,b \in A$ *ва* $(A;+,>)$ *яримгруппанинг с мусбат элементи учун* $a>b \Rightarrow ac>bc \wedge ca>cb$ *шартлар бажарилса,* $(A;+,\cdot,>)$ *алгебраик система тартибланган яримҳалқа;* $(A;+,>)$ *яримгруппа мусбат элементи* $(A;+,\cdot,>)$ *яримҳалқанинг мусбат элементи дейилади.*

Тартибланган яримҳалқа, тартибланган яриммайдон тушунчалари келтирилган таъриф ёрдамида киритилади. Масалан, $(A;+,\cdot,0,1;>)$ алгебраик система тартибланган яриммайдон бўлиши учун 1- шартни $(A;+,\cdot,0,1)$ алгебра майдон бўлсин деб ўзгартириб, қолган шартларни ўз ҳолича қолдириш етарли.

Агар $(A;+,\cdot,>)$ яримҳалқада $\forall a,b \in A$ элементлар учун $n\cdot a>b$ шарт бажариладиган n натурал сон мавжуд бўлса, бундай яримҳалқа *архимедча тартибланган яримҳалқа* дейилади.

$(N;+,\cdot,0,1,>)$ натурал сонлар яримҳалқасида $\forall a,b \in N$ учун $k \in N$ топилиб, $a=b+k$ шарт бажарилса, a катта b деймиз, у ҳолда $(N;+,\cdot,0,1,>)$ алгебраик система қатъий тартибланган ятимҳалқа бўлади. Бу яримҳалқа *натурал сонлар тартибланган яримҳалқаси* дейилади.

II.5.6-теорема. *Агар* $(A;+,\cdot,>)$ *тартибланган яримҳалқа бўлса,* $\forall a,b,a',b' \in A^{+}$ *элементлар учун* $a>b$ *ва* $a'>b'$ *шартлардан* $a\cdot a'>b\cdot b'$ *келиб чиқади.*

Исбот. Агар $a>b$ бўлса, $a\in A^{+}$ бўлгани учун $a\cdot a'>b\cdot b'$. У ҳолда $a'>b'$ ва $b'\in A^{+}$бўлгани учун $a\cdot a'>b\cdot b'$. $>$ муносабат транзитив бўлганлигидан $a\cdot a'>b\cdot b'$ бўлади.

$(A;+,\cdot,>)$ тартибланган яримҳалқа, $(B,\oplus,\otimes)$ эса $(A;+,\cdot)$ яримҳалқага изоморф бўлган яримҳалқа бўлсин. $\varphi: A\to B$ изоморф акслантириш бўлсин. У ҳолда $\forall b_1,b_2 \in B$ учун $a_1\in A$ b_1нинг $a_2\in A$ b_2 нинг прообрази бўлсин. Агар $a_1>a_2$бўлса, b_1 элемент b_2 элемент билан ρ муносабатда деймиз.

II.5.7-теорема. *Агар* $(A;+,\cdot,>)$ *тартибланган яримҳалқа бўлса,* $(B,\oplus,\cdot,\rho)$ *ҳам тартибланган яримҳалқа бўлади. Шунинг билан бирга* $>$ *муносабатнинг барча хоссалари* ρ *учун ҳам ўринли бўлади.*

Исбот. Фараз қилайлик $>$ A тўпламда рефлексив бинар муносабат бўлсин. $\forall b\in B$ учун шундай $a\in A$ мавжуд бўлиб, $a>a$ бўлади. Демак, $f(a_1)\rho f(a_2)$ ёки $b\rho b$ бўлади. Демак, бинар муносабат B тўпламда рефлексивдир. $>$ бинар муносабат A тўпламда чизиқли тартиб муносабат бўлсин, у ҳолда ρ ҳам B тўпламда чизиқли тартиб муносабат бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам $\forall b_1, b_2 \in B$ элементлар учун $f(a_1)=b_1$ ва $f(a_2)=b_2$ бўлсин. У ҳолда $a_1=a_2$ бўлса, f-биектив бўлгани $b_1=b_2$ бўлади. Агар $a_1>a_2$ бўлса, $f(a_1)\rho f(a_2)$ ёки $b_1\rho b_2$ бўлади. Агар $a_2>a_1$ бўлса $f(a_2)\rho f(a_1)$ ёки $b_2\rho b_1$ бўлади. Худди шундай $>$ муносабатнинг бошқа хоссалари ҳам B тўпламда бажарилишини текшириб чиқиш мумкин.

Чизиқли тартибланган ҳалқалар.

II.5.8-таъриф. *Агар* $(A;+,0,>)$ *чизиқли тартибланган группа* $(A;+,0,\cdot)$ *алгебра ҳалқа бўлса, у ҳолда* $(A;+,0,\cdot,>)$ *алгебраик система чизиқли тартибланган ҳалқа дейилади.*

II.5.9-мисол. Бутун сонлар ҳалқаси, бутун сонлар ҳалқасида аниқланган табиий тартиб муносабатга нисбатан чизиқли тартибланган яримҳалқадир.

Бутун сонлар ҳалқасида $a-b>0$ бўлса, $a>b$ деймиз. Бу муносабат бутун сонлар ҳалқасида чизиқли тартиб муносабатдир.

Чизиқли тартибланган ҳалқада $\succ$ тартиб муносабат аниқланган бўлса, $\forall a,b\in A$ учун $(a>b)\Leftrightarrow((a\succ b)\wedge(a\neq b))$ қатъий тартиб муносабатдир. Агар $<$ қатъий тартиб муносабат бўлса, $(a\geq b)\Leftrightarrow((a>b)\vee(a=b))$ муносабат ноқатъий тартиб муносабат бўлади.

II.5.10-теорема. *Чизиқли тартибланган* $(A;+,0,\cdot,>)$ *ҳалқада қуйидагилар ўринли:*

1^0 $(a\in A^+)\Leftrightarrow(a>0)$.

2^0 $(\forall a\in A)$ *учун* $(a>0)\vee(a=0)\vee(-a>0)$.

3^0 $(a,b\in A^+)$ *учун* $a\cdot b\in A^+$.

4^0 $\forall a,b\in A$ *учун* $(a\cdot b=0)\Rightarrow(a=0)\vee(b>0)$.

5^0 $\forall a\in A\wedge a\neq 0$ *учун* $a^2>0$.

6^0 $\forall a_1,a_2,a_3,\dots,a_n\in A$ *учун*

$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\dots+a_n^2=0)\Leftrightarrow(a_1=0\wedge a_2=0\wedge\dots\wedge a_n=0)$.

Исбот. 1^0 -хоссанинг исботи. $a\in A^+$ бўлса, таърифга кўра $a+a>0$, у ҳолда $(a+a)+(-a)>a+(-a)\Rightarrow a+(a+(-a))>0\Rightarrow a+0>0\Rightarrow a>0$. Аксинча, $a>0$ бўлса, $a+a>0+a\Rightarrow a+a>a$.

4^0 - хоссанинг исботи. $a\cdot b=0$ бўлсин $a\neq 0$ ва $b\neq 0$ бўлсин, у ҳолда қуйидаги ҳолатлар юз бериши мумкин:

1) $(a>0)\wedge(b>0)$ 2) $(-a>0)\wedge(b>0)$ 3) $(-a>0)\wedge(-b>0)$

4) $(a>0)\wedge(-b>0)$.

Агар $a>0$ ва $b>0$ бўлса, $ab>0$;

Агар $-a>0\wedge b>0$ бўлса, $-ab>0$ ё $ab<0$;

Агар $(-a>0)\wedge(-b>0)$ бўлса, $ab>0$;

Агар $(a>0)\wedge(-b>0)$ бўлса, $ab<0$ бўлиб, тасдиқ шартга зид.

Қолган хоссаларнинг исботи мустақил ишлаш учун қолдирилади.

Чизиқли тартибланган жисмлар.

II.5.11-таъриф. *Агар* $(T;+,\cdot,0,>)$ *алгебраик система чизиқли тартибланган ҳалқа,* $(T;+,\cdot,0,1)$ *алгебра жисм бўлса, у ҳолда* $(T;+,\cdot,0;>)$ *алгебрик система чизиқли тартибланган жисм дейилади.*

$(T;+,\cdot,0,e,>)$ жисм учун қуйидаги белгилашларни киритамиз: $a \neq 0$элемент учун a^{-1} элементни $\frac{e}{a}$; $(\forall a,b \in T) \wedge (b \neq 0)$ элементлар учун ab^{-1} ўрнига $a \cdot \frac{e}{b}$ ва $b^{-1}a$ ўрнига $\frac{e}{b} \cdot a$ деб ёзамиз. Агар $e \in T$ бўлса, $\underbrace{e + \ldots + e}_{n} = ne$ деб белгилаймиз.

II.5.12-теорема. $(T;+,\cdot,0,e,>)$ чизиқли тартибланган жисм бўлсин. У ҳолда қуйидаги тасдиқлар ўринли:

1^0 $e > 0$.

2^0 $\forall a,b \in T,\ a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow \left(a \cdot \frac{e}{b} > 0\right) \wedge \left(\frac{e}{b} \cdot a > 0\right)$.

3^0 $\forall a,b \in T, a > b > 0 \Rightarrow \left(a > (a+b) \cdot \frac{e}{2e} > 0\right) \wedge \left(a > \frac{e}{2e}(a+b) > 0\right)$.

4^0 $\forall a \in T \ \wedge \ \forall n \in N, n > 1,\ (a > 0) \Rightarrow a > a \cdot \frac{e}{n \cdot e} > 0 \wedge a > \frac{e}{n \cdot e} \cdot a > 0$.

Исбот.

1^0 -хоссанинг исботи. Т чизиқли тартибланган жисм бўлганлиги учун $e \neq 0$. У ҳолда фақат $e > 0$ ёки фақат $-e > 0$.

$-e > 0$ бўлсин, у ҳолда $-e > 0$ бўлгани учун $(-e)^2 > 0$ ёки $e > 0$. Демак $-e > 0$ бўлиши мумкин эмас. У ҳолда $e > 0$.

2^0 -хоссанинг исботи. $a > 0$ бўлса, $a^{-1} > 0$. Ҳақиқатдан ҳам, $a \geq a^{-1}$ бўлсин. У ҳолда $a \cdot 0 \geq aa^{-1} \Rightarrow 0 \geq e$ зиддият ҳосил бўлади. Демак $a^{-1} > 0$ ёки $\frac{e}{a} > 0$. $a > 0$ ни ўнгдан $\frac{e}{b}$ га кўпайтириб, $a \cdot \frac{e}{b} > 0$ ни ҳосил қиламиз.

$\frac{e}{b} \cdot a > 0$ ни исботи шунга ўхшаш.

3^0- хоссанинг исботи. $a > 0,\ b > 0$ дан $a + a > a + b > 0$ ёки $(2e) \cdot a > a' + b > 0$ келиб чиқади. Бу тенгсизликнинг уччала қисмини $(2e)^{-1}$ га чапдан кўпайтирсак, $a > \frac{\mathring{a}}{2e}(a+b) > 0$,$(a+b) \cdot (2 \cdot e)^{-1} > 0$ ҳосил бўлади.

$a > (a+b)\frac{e}{2e} > 0$ тенгсизликни исботи юқоридагидек бажарилади.

4^0 -хоссанинг исботи. $a > 0$, $a + a > a$. Ҳосил бўлган тенгсизликка $n-1$ марта $a > 0$ тенгсизликни ҳадма-ҳад қўшиб, $na > a$ ёки $(n \cdot e)a > a$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Натижада, тенгсизликни иккала қисмини $(n\cdot e)^{-1}$ га чапдан кўпайтириб, $a > \frac{e}{(n\cdot e)}\cdot a > 0$ ни ҳосил қиламиз.

4^0-хоссанинг иккинчи қисми $(n\cdot e)\cdot a = a(n\cdot a)$ дан келиб чиқади.

II.5.13-теорема. *Агар* $(T;+,\cdot,0,e,>)$ *архемедча чизиқли тартибланган жисм бўлса, у ҳолда* $\forall a,b \in T$ *учун шундай* $n,m \in N$ *мавжуд бўлиб,* $(a > b \geq 0) \Rightarrow \left(a > \frac{n\cdot e}{m\cdot e} > b\right)$.

Исбот. $a > b \geq 0$ дан $a-b > 0$ ва демак $(a-b)^{-1} > 0$ ёки $\frac{e}{a-b} > 0$ ҳосил бўлади. Архемед аксиомасига асосан шундай $n \in N$ топилиб, $me > \frac{e}{a-b}$. У ҳолда, $((me)\cdot(a-b) > e) \Rightarrow (a \geq a-b > (me)^{-1}$.

Архемед аксиомасига асосан шундай $k \in N$ топилиб $k\cdot(m\cdot e)^{-1} \geq a$. Албатта, $k \neq 1$ бўлиши аён. У ҳолда $(n+1)\cdot(m\cdot e)^{-1} \geq a$ шартни қаноатлантирадиган энг кичик натурал сон n ни танлаб олсак, $n\cdot a > n\cdot(m\cdot e)^{-1}$.

Демак. $(n+1)\cdot(m\cdot e)^{-1} \geq a > n\cdot(me)^{-1}$.

II.5.14-таъриф. $(A,+,\cdot,0,>)$ чизиқли тартибланган ҳалқа бўлсин. $\forall a \in A$ учун $a, -a$ элементларнинг каттасини *a элементнинг абсолют қиймати* деб аталади.

$(A,+,\cdot,0,>)$ - чизиқли тартибланган ҳалқада $\forall a \in A$ учун абсолют қиймат қўйидаги хоссаларга эга:

1^0. $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

2^0. $|a| > 0 \Leftrightarrow a \neq 0$.

3^0. $|-a| = |a|$.

4^0. $a \leq |a| \wedge -a \leq |a|$.

$\forall a,b \in A$ учун

5^0. $|a+b| \leq |a| + |b|$.

6^0. $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$.

7^0. $|a\cdot b| = |a|\cdot|b|$.

8^0. $\forall a,b,k,l \in A\ (l \leq a \leq k \wedge l \leq b \leq k) \Rightarrow |a-b| \leq k-l$.

Исбот. Ҳоссаларнинг исботи бевосита таърифдан келиб чиқади. Масалан, 1^0- нинг исботини кўриб чиқамиз. $|a| = 0$ бўлса, таърифга асосан a ва $-a$ нинг каттаси нолга тенг. Демак, $a = 0$.

Аксинча, $a = 0$ бўлса, $a = 0, -a = 0$ бўлиб, $|a| = 0$ бўлади.

Ҳалқани тартиблаш.

$(K,+,\cdot,0)$ ҳалқа берилган бўлсин. M тўплам K тўпламнинг тўпламостиси бўлиб, қуйидаги

1. $\forall a \in R$ учун $(a \in M) \Rightarrow a \neq 0 \wedge -a \notin M$.

2. $\forall a \in K$ учун $a \neq 0 \Rightarrow a \in M \vee -a \in M$.

3. $\forall a,b \in M$ учун $(a+b) \in M \vee a \cdot b \in M$ шартлар бажарилсин, у ҳолда M *тўплам K тўпламнинг мусбат элементлари тўплами* дейилади. K ҳалқанинг мусбат элементлар тўпламини K^+ орқали белгилаймиз.

Фараз қилайлик, $K^+ \neq \varnothing$ бўлсин. У ҳолда $\forall a,b \in K$ учун $a-b \in K^+$ шарт бажарилса, $a > b$ деймиз. “>” муносабат K тўпламда қатъий чизиқли тартиб муносабат булишини исбот қиламиз. Ҳақиқатдан:

1. $\forall a \in K$ учун $a-a=0 \notin K^+$. Демак $\forall a \in K$ учун $\rceil(a>a)$. Яъни, $>$ - антирефлексив муносабатдир.

2. $a > b$ бўлсин, у ҳолда $a-b \in K^+$. K^+нинг таърифига кўра $-(a-b) \notin K^+$ ёки $b-a \notin K^+$. Демак, $\rceil(b>a)$. Шундай қилиб, $>$ - антисимметрик муносабатдир.

3. $\forall a,b,c \in K$ учун $(a>b \wedge b>c) \Rightarrow a>c$. Ҳақиқатдан ҳам, $a-b \in K^+ \wedge b-c \in K^+$ бўлишидан $(a-b)+(b-c)=a-c \in K^+$, яъни, $a>c$ келиб чиқади.

$\forall a \neq b$ учун $a-b \neq 0$. Демак, K^+нинг таърифига кўра $a-b \in K^+$ ёки $-(a-b) \in K$, у ҳолда $a>b$ ёки $a<b$ бўлади.

Юқоридагилардан $>$ муносабат K ҳалқада қатъий чизиқли тартиб муносабат бўлади деб хулоса чиқарсак бўлади.

$\forall a,b \in K$ учун $a>b \Rightarrow a+c>b+c \wedge c+a>c+b$. Ҳақиқатдан ҳам, $a>b \Rightarrow a-b \in K^+ \Rightarrow (a+c)+(b+c) \in K^+$. Демак, $a+c>b+c$.

$\forall a,b \in K$ ва $c \in K^+$ бўлсин, у ҳолда $a>b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$. Ҳақиқатдан ҳам, $(a>b) \Rightarrow (a-b \in K^+) \Rightarrow a \cdot c - b \cdot c = (a-b) \cdot c \in K^+ \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$.

Шундай қилиб, аниқланган муносабат Kни қатъий чизиқли тартиб муносабати бўлиб, K ни тартибланган ҳалқага айлантириши мумкин экан.

Фараз қилайлик $(K,+,\cdot,0,>)$ қатъий чизиқли тартибланган халқа бўлсин, у ҳолда $a>0$ шартни қаноатлантирадиган барча элементлар тўпламини K^+ орқали белгилаймиз. Бу тўплам K ҳалқанинг мусбат элементлари тўпламидан иборат бўлади. (исбот қилиб кўринг) ва $K^+ \neq \varnothing$.

Хулоса қилиб айтадиган бўлсак, қуйидаги теорема исбот қилинди:

II.5.15-теорема. *$(K,+,\cdot,0,>)$-ҳалқани қатъий чизиқли тартибланган ҳалқага айлантириш учун $K^+ \neq \varnothing$ бўлиши зарур ва етарли.*

II.5.16-теорема. *$(A+,\cdot,0,>)$, $(B+,\cdot,0,>_1)$ чизиқли тартибланган ҳалқалар бўлиб, $(A+,\cdot,0)$ ҳалқа $(B+,\cdot,0)$ ҳалқанинг қисм ҳалқаси бўлсин. A^+ A нинг, B^+ Bнинг мусбат элементлар тўплами бўлсин. $>_1$ татиб $>$ тартибнинг давоми бўлиши учун $A^+ \subset B^+$ шарт бажарилиши зарур ва етарли.*

Исбот. $A^{+} \subset B^{+}$ бўлсин. $\forall a,b \in A$ учун $a > b \Rightarrow a - b \in A^{+}$. Демак, $(a - b \in B^{+}) \Rightarrow (a >_1 b)$.

Энди $a >_1 b$ бўлсин , у ҳолда $a \neq b$. Демак, $a - b \in A^{+}$ ёки $-(a-b) \in A^{+}$. Агар $a - b \in A^{+}$ бўлса, $a > b$.

Агар $-(a-b) \in A^{+}$ бўлса, $-(a-b) \in B^{+}$. Бу эса $a >_1 b$ шартга зид.

Такрорлаш учун саволлар

1. Тартиб муносабати деб нимага айтилади?
2. Тартиб муносабатининг турлари.
3. Чизиқли тартибланган тўплам деб нимага айтилади?
4. Тартибланган яримгруппа деб нимага айтилади?
5. Тартибланган группа деб нимага айтилади?
6. Тартибланган яримҳалқа деб нимага айтилади?
7. Тартибланган ҳалқа ва тартибланган майдон нима?
8. Чизиқли тартибланган алгебралар деб нимага айтилади?

Машқлар

1. Бутун сонлар мультипликатив группасини чизиқли тартиблаш мумкин эмаслигини исботланг.
2. Қисқартириш бажариладиган коммутатив яримгруппа мусбат элементларининг йиғиндиси мусбат бўлишини исботланг.
3. Қатъий чизиқли тартибланган яримгруппа мусбат элементларининг йиғиндиси мусбат бўлишини исботланг.
4. Яримгруппа чизиқли тартибланган бўлиши учун унинг ихтиёрий чекли бўш бўлмаган тўпламостиси фақат битта энг катта элементга эга бўлиши зарур ва етарли эканлигини исботланг.
5. Тартибланган коммутатив, қисқартириш бажариладиган яримгруппада мусбат элементдан катта бўлган элемент мусбат бўлмаслиги мумкинлигини исботланг.

II.6- §. Нормаланган майдонлар

$(A+,\cdot,0,1)$ майдон ва $(P;+,\cdot,0,1;>)$ чизиқли тартибланган майдон берилган бўлсин.

$\lambda : A \to P$ акслантириш учун қуйидаги шартлар бажарилсин:

1. $\forall a \in A$ учун $\lambda(a) \geq 0$.
2. $\lambda(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$.
3. $\forall a,b \in A, \lambda(a \cdot b) \leq \lambda(a) \cdot \lambda(b)$.
4. $\forall a,b \in A, \lambda(a+b) \leq \lambda(a) + \lambda(b)$.

У ҳолда λ акслантириш A майдонда P чизиқли тартибланган майдон орқали аниқланган *норма* дейилади. (A, P, λ) учлик эса *нормаланган майдон* дейилади. A майдон эса P чизиқли тартибланган майдон орқали λ *норма билан нормаланган майдон* дейилади.

Адабиётларда $\lambda(a)$ ни ўрнига баъзан $\|a\|$ ёзув ишлатилади.

II.6.1-мисол. R тартибланган ҳақиқий сонлар майдонида $\lambda : a \to |a|$ акслантириш норма бўлади.

II.6.2-мисол. А ихтиёрий майдон R ҳақиқий сонлар майдони бўлсин. $\forall a \in A$ учун $\mu(\grave{a}) = \begin{cases} 1, agar\ a \neq 0; \\ 0,\ agar\ a = 0. \end{cases}$

У ҳолда μ норма бўлишини текшириш қийин эмас. (A, R, μ) учлик тартибланган майдон бўлиб, μ *тривиал норма* дейилади.

II.6.3-мисол. Р чизиқли тартибланган майдон бўлсин, у ҳолда $a \to |a|$ акслантириш Р да норма бўлади.

II.6.4-мисол. Q рационал сонлар майдони бўлсин, Р туб сон, θ эса (0,1) интервалга тегишли бирорта рационал сон бўлсин, яъни $0 < \theta < 1$ бўлсин.

Ихтиёрий α рационал сонни $\alpha = p^n \cdot \frac{a}{b}$, $(p,a)=1$, $(p,b)=1$, $n \in Z$ шартларни қаноатлантирадиган қилиб ёзиб олиш мумкин. Масалан, $p=1$, $\alpha = \frac{7}{8}$ бўлсин $\alpha = 7^0 \cdot \frac{7}{8}$. Агар $\alpha = \frac{7}{27}$ бўлса, $\alpha = 3^{-3}\frac{7}{1}$ кўринишда ёзиш мумкин.

$\mu_p(\alpha) = \theta^n$ акслантириш рационал сонлар майдонида норма бўлишини текшириб чиқайлик:

1. $\lambda(\alpha) = \theta^n > 0$, $\lambda(0) = p^n \cdot 0 = 0$..

2. Агар $\alpha = p^n \frac{a_1}{b_1}, \beta = p^m \frac{a_2}{b_2}$, $(p,a_1)=(p,a_2)=(p,b_1)=(p,b_2)=1$ бўлса, $\alpha \cdot \beta = p^{n+m} \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}$, $(p,a_1,a_2)=(p,b_1,b_2)=1$ бўлади. У ҳолда $\lambda(\alpha \cdot \beta) = \theta^{n+m} = \theta^n \cdot \theta^m = \lambda(\alpha) \cdot \lambda(\beta)$.

3. $\alpha = p^n \frac{a_1}{b_1}, \beta = p^m \frac{a_2}{b_2}$ бўлсин аниқлик учун $n>m$ дейлик, у ҳолда

$$\alpha + \beta = p^n \frac{a_1}{b_1} + p^m \frac{a_2}{b_2} = p^m (p^{n-m} \frac{a_1}{b_1} + p^m \frac{a_2}{b_2}) = p^m \frac{p^{n-m} a_1 b_2 + b_1 a_2)}{b_1 b_2},$$

$$(p, p^{n-m} a_1 b_2 + b_1 a_2) = 1,\ (P, b_1 b_2) = 1.$$

Демак, $\lambda(\alpha \cdot \beta) = \theta^m \le \theta^m + \theta^n = \lambda(\alpha) + \lambda(\beta)$. Бу норма *р-адик норма* дейилади. Бу нормани λ_p орқали белгилаб оламиз.

II.6.5-теорема. *A нормаланган майдон, $\|a\|$ эса $a \in A$ элемент нормаси бўлсин, у ҳолда қуйидаги хоссалар ўринли:*

1^0. $\|1\| = 1$.

2^0. $\|-1\| = 1$.

3^0. $a \neq 0 \Rightarrow \|a^{-1}\| = \|a\|^{-1}$.

4^0. $\|\|a\| - \|b\|\| \leq \|a - b\|$.

Исбот.

1^0. $\|1\| = \|1 \cdot 1\| = \|1\| \cdot \|1\| \Rightarrow \|1\| = 1$..

2^0. $\|1\| = \|-1\| \cdot \|-1\| \Rightarrow \|-1\|^2 = 1 \Rightarrow \|-1\| = 1$.

3^0. $\|1\| = \|a \cdot a^{-1}\| = \|a\| \cdot \|a^{-1}\| \Rightarrow \|a^{-1}\| = \|a\|^{-1}$.

II.6.6-натижа. *A нормаланган майдон бўлсин, у холда қуйидаги хоссалар ўринли:*

1^0. $\|-a\| = \|a\|$.

2^0. $\|a \cdot b^{-1}\| = \|a\| \cdot \|b\|^{-1}$.

3^0. $\|a\| > \|b\| - \|b - a\|$.

Исбот. 1^0. $\|-a\| = \|-1 \cdot a\| = \|-1\| \cdot \|a\| = 1 \cdot \|a\| = \|a\|$ қолган тасдиқларни исботи шунга ўхшаш юқорида исбот қилинган теоремадан келиб чиқади.

Нормаланган майдонда кетма-кетликлар.

Бизга A майдон P чизиқли тартибланган майдон , λ - A даги P майдон орқали аниқланган норма берилган бўлсин.

II.6.7-таъриф. *A майдонда аниқланган $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма - кетлик учун шундай $c \in P^+$ топилиб , $\forall n \in N$ учун $\lambda(a_n) \leq c$ шарт бажарилса, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма - кетлик чегараланган кетма - кетлик дейилади.*

II.6.8-теорема. *$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма - кетлик чегараланган кетма - кетлик бўлиши учун шундай $c \in P^+$ мавжуд бўлиб, $\forall n \in N$ учун $\lambda(a_n) \leq c$ шарт бажарилиши зарур ва етарли.*

Исбот. $\{a_n\}$ чегараланган *кетма-кетлик* бўлсин, у холда $\forall n \in N$ учун $\exists\ c \in P^+$ $\lambda(a_n) \leq c$ бўлади. Натижада $\lambda(a_n) \leq c + 1$ Аксинча $\forall n \in N$ учун $\exists\ c \in P^+$, $\lambda(a_n) < c \Rightarrow \lambda(a_n) \leq c$..

II.6.9-таъриф. *A нормаланган майдондаги $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма - кетлик учун $\forall \varepsilon \in P^+$, $(\exists n_0 \in N) \wedge (\forall n, k \in N)(\ n > n_0 \ \wedge \ k > n_0)$, $\lambda(a_n - a_k) < \varepsilon$ шарт бажарилса, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма - кетлик λ нормага нисбатан фундаментал кетма-кетлик дейилади.*

II.6.10-теорема. *A нормаланган майдондаги $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма - кетлик фундаментал кетма-кетлик бўлиши учун қуйидаги шартлар бажарилиши зарур ва етарли:*

$$\forall \varepsilon \in P^+ ,\ \exists n_0 \in N,\ \forall n, l \in N,\ n > n_0 \quad \text{учун} \quad \lambda(a_{n+l} - a_n) < \varepsilon \qquad (*)$$

Исбот. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментал кетма-кетлик бўлсин, у ҳолда $\forall\varepsilon\in P^+$, $\exists n_0\in N$, $\forall n,k\in N$, $n>n_0$, $k>n_0$ учун $\lambda(a_n-a_k)<\varepsilon$, $n\geq n_0$ бўлса, $n+l\geq n_0$. Демак, $\lambda(a_{n+l}-a_n)<\varepsilon$. Яъни (*) шарт бажарилади. Аксинча (*) шарт бажарилса, $n>n_0$, $k>n_0$, аниқлик учун $k>n$ деб фараз қилсак $\lambda(a_k-a_n)\Rightarrow\lambda(a_{n+(k-n)}-a_n)<\varepsilon$. Демак, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментал кетма-кетлик экан.

II.6.11-теорема. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *фундаментал кетма-кетлик бўлиши учун* $\forall\varepsilon\in P^+$, $\exists n_0\in N$, $\forall n\in N$, $n>n_0$, $\lambda(a_n-a_{n_0})<\varepsilon$ *шарт бажарилиши зарур ва етарли.*

Исбот. Юқоридаги теорема исботига ўхшаш бажарилади.

II.6.11-таъриф. *A нормаланган майдондаги* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *кетма – кетлик берилган бўлсин. Агар* $\forall\varepsilon\in P^+$ *учун* $\exists n_0\in N$, $\exists a\in A$, $n>n_0$ *дан* $\lambda(a_n-a)<\varepsilon$ *шарт бажарилса,* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *кетма-кетлик a элементга яқинлашади дейилади.*

Агар $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетлик a элементга яқинлашса, a элемент $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *кетма-кетликнинг чеки ёки лимити* дейилади ва $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\to a$ деб ёки $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ деб ёзилади. Агар $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ бўлса, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетлик *норма бўйича нол кетма-кетлик* дейилади.

II.6.12-таъриф. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ва* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *кетма-кетликлар учун* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$ *шарт бажарилса,* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ва* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *кетма-кетликлар тенг кучли дейилади ва* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\sim\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *кўринишида белгиланади.*

II.6.13-теорема. $\sim$ *муносабат эквивалентлик муносабатидир, яъни*

1. $\sim$ *– рефлексив.*

2. $\sim$ *– симметрик.*

3. $\sim$ *– транзитивлик муносабатидир.*

II.6.14-теорема. (A,P,λ) *нормаланган майдон берилган бўлсин. У ҳолда A майдондаги* λ *норма бўйича яқинлашувчи кетма-кетлик фундаментал кетма-кетлик бўлади.*

Исбот. Фараз қилайлик $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ бўлсин, у ҳолда $\forall n\in N$, $n>n_0$ учун

$\lambda(a_n-c)<\frac{1}{2}\varepsilon$ бўлса, $\forall n,k\in N$, $n>n_0\wedge k>k_0$ $\Rightarrow$

$$\lambda(a_n-a_k)=\lambda(a_n-a+a-a_k)\leq\lambda(a_n-a)+\lambda(a-a_n)<\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon.$$

Демак, $\lambda(a_n-a_k)<\varepsilon$.

II.6.15-теорема. (A,P,μ) нормаланган майдон берилган бўлсин. Агар

1. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ A майдонда фундаментал кетма-кетлик бўлса, у ҳолда, $\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ва $\{a_n-b_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетликлар ҳам фундаментал кетма-кетликдир.

2. Агар $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \to a$ ва $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \to b$ бўлса, у ҳолда $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty} \to a + b$ ва $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty} \to a - b$ бўлади.

3. Агар $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \to 0$ ва $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \to 0$ чегараланган кетма-кетлик бўлса, у ҳолда $\{a_n \cdot b_n\} \to 0$.

4. Агар $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ ва $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ чегараланган кетма-кетлик бўлса, у ҳолда $\{a_n \cdot c_n\} \sim \{b_n \cdot c_n\}$ бўлади.

5. Агар $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ бўлса, у ҳолда $\{a_n + c_n\} \sim \{b_n + c_n\}$ бўлади.

6. Агар $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ бўлса, иҳтиёрий бирининг фундаментал кетма-кетлик бўлишидан иккинчисининг ҳам фундаментал кетма-кетлик бўлиши келиб чиқади. Бу кетма-кетликлардан иҳтиёрий бирининг яқинлашувчи бўлишидан иккинчисининг ҳам яқинлашувчи бўлиши келиб чиқади.

7. Агар $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ кетма-кетликлар фундаментал кетма-кетликлар бўлса у ҳолда, $\{a_n \cdot b_n\}$ кетма-кетликлар ҳам фундаментал кетма-кетлик бўлади. Агар $\{b_n\}$ кетма-кетлик нол кетма-кетлик бўлмаса ва $\forall n \in N$ учун $b_n \neq 0$ бўлса $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ҳам фундаментал кетма-кетлик бўлади.

8. Агар $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи, $\{a_n\} \to 0$ ва $\{b_n\} \to b$ бўлса, $\{a_n \cdot b_n\} \to ab$ бўлади; агар $b \neq 0$ ва $\forall n \in N$ учун $b_n \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \to \frac{a}{b}$ бўлади.

Такрорлаш учун саволлар

1. Нормаланган майдон таърифини айтинг.
2. Норма хоссаларини айтинг.
3. Стационар кетма-кетлик деб нимага айтилади?
4. Нормаланган майдонда чегараланган кетма-кетлик деб нимага айтилади?
5. Нормаланган майдонда чегараланган кетма-кетлик деб нимага айтилади?
6. Нормаланган майдонда фундаментал кетма-кетлик деб нимага айтилади?
7. Нормаланган майдонда яқинлашувчи кетма-кетлик деб нимага айтилади?
8. Эквивалент кетма-кетликлар таърифини айтинг.

Машқлар

1. Рационал сонлар майдонини қуйидагича нормалаймиз: с $0 < c \leq 1$ шартни қаноатлантириувчи ҳақиқий сон бўлсин. У ҳолда ихтиёрий рационал соннинг нормаси сифатида $|a|^c$ ни оламиз. Рационал сонлар майдони киритилган нормага кўра нормаланган майдон бўлишини исботланг.

2. Нормаланган майдонда ҳар қандай яқинлашувчи кетма-кетлик фундаментал кетма-кетлик бўлишини исботланг.
3. Нормаланган майдонда фундаментал кетма-кетликлар йиғиндиси яна фундаментал кетма-кетлик бўлишини исботланг.
4. Нормаланган майдонда эквивалент кетма-кетликлардан бири фундаментал кетма-кетлик бўлса, иккинчиси ҳам фундаментал кетма-кетлик бўлишини исботланг.
5. Нормаланган майдонда эквивалент кетма-кетликлардан бири яқинлашувчи кетма-кетлик бўлса, иккинчиси ҳам яқинлашувчи кетма-кетлик бўлишини исботланг.
6. Нормаланган майдонда кетма-кетликларнинг эквивалентлик муносабати рефлексив, симметрик, транзитив бинар муносабат эканлигини исботланг.

III БОБ. АКСИОМАТИК НАЗАРИЯЛАР

III.1-§. Математик назариялар ҳақида тушунча

Аксиоматик назарияларни яратишда қўлланиладиган аксиоматик метод шу математик назария объектлари орасидаги энг содда хоссаларни ифода қилишга асосланганлиги учун математик фанларни аниқ ифода қилиш имконини беради. Бу содда хоссалар аксиомалар деб аталиб, уларга асосланиб теоремалар исботланади.

Математикада бирор тушунчани таърифлаганимизда бошқа соддароқ тушунчалардан фойдаланилади. Лекин ўша содда тушунчаларни ифодалаш учун яна бошқа бир тушунчалар ишлатилиши табиий ва ҳ.к. Шу нуқтаи назардан қарасак, биз баъзи бир тушунчаларни таърифсиз қабул қилишга мажбур бўламиз. Бу тушунчаларни аксиоматик назариянинг асосий тушунчалари деб атаймиз.

Худди шундай, бирорта математик тасдиқни исбот қилганимизда бошқа исбот қилинган тасдиқлардан фойдаланамиз, исбот қилинган тасдиқлар ҳам ўз навбатида бошқа тасдиқларга асосланиб исботланади ва ҳ.к. Шунинг учун баъзи тўғрилиги шубҳа туғдирмайдиган тасдиқларни исботсиз қабул қилишга мажбурмиз. Бу тасдиқларни аксиомалар деб атаймиз. Аксиомаларга асосланиб теоремалар исбот қилинади. Бу эса аксиоматик назариянинг мазмунини ташкил этади.

Аксиоматик назариялар формал ва мазмунли (ноформал) аксиоматик назариялар деб аталадиган икки турга бўлинади.

Мазмунли аксиоматик назарияда келтириб чиқариш қоидалари аниқ белгилаб қўйилмаган бўлиб, у кўпроқ интуицияга асосланган назариядир. Яъни, бу назарияда теоремалар интуицияга асосланган қоидалардан фойдаланиб исботланади.

Мазмунли аксиоматик назарияга группалар назарияси, ҳалқалар назарияси мисол бўла олади.

Формал аксиоматик назария эса қуйидаги схема асосида қурилади :

Назария тили берилади.

Формула тушунчаси аниқланади.

Аксиомалар деб аталадиган асосий формулалар рўйхати берилади.

Келтириб чиқариш қоидалари санаб чиқилади.

Биз асосан *биринчи тартибли математик назария*лар деб аталадиган назариялар билан шуғулланамиз. Бу назария бизга маълум бўлган асосий математик назарияларни қуриш учун етарлидир. Бундай назариялар баъзан *элементар назариялар* деб ҳам аталади. Биринчи тартибли тилда предикатнинг аргументи, предикат ёки функция бўлган предикатлар, квантор билан боғланган предикат ёки функциялар қаралмайди.

Такрорлаш учун саволлар

Аксиоматик метод ҳақида тушунча беринг.

Аксиома билан теореманинг фарқини айтинг.

Аксиоматик назарияни қуриш схемасини келтиринг.

Мазмунли аксиоматик назария ҳақида тушунча беринг ва мисол келтиринг.

Формал аксиоматик назария ҳақида тушунча беринг ва мисол келтиринг.

III.2-§. Биринчи тартибли тил

Ихтиёрий табиатли символларнинг чекли тўплами - W берилган бўлсин. Бу тўпламни биринчи тартибли тилнинг *алифбоси* деб атаймиз. W алифбодаги символларнинг чекли кетма – кетлигини биринчи тартибли тилнинг *сўзлари* деймиз. Иккита $a_1, \ldots, a_n$ ва $b_1, \ldots, b_n$ сўзларнинг мос ҳарфлари тенг, яъни $a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$ бўлса, бу *сўзлар тенг* дейилади.

Фараз қилайлик, бирор бир аксиоматик назария қаралаётган бўлсин. W – шу назариянинг алифбоси, U – эса шу назариядаги сўзлар тўплами бўлсин. У ҳолда, (W, U) жуфтлик қаралаётган *назариянинг тили* дейилади.

Биринчи тартибли тил орқали биринчи тартибли назариялар ифодаланади. Биринчи тартибли назариялар, умуман олганда, юқорида айтганимиздек предикатлар ҳисобини қамраб олади. Яъни, предикатлар ҳисобининг символлари, аксиомалари, формулалари, келтириб чиқарилувчи формулалари биринчи тартибли назарияга киради. Ундан ташқари, биринчи тартибли назарияда $f_i^{n_i}$ (i, $n_i \in N$) - n_i ўринли функциянинг символлари қатнашиши мумкин. Шу муносабат билан биринчи тартибли тилда формула тушунчаси бироз кенгайтирилади.

Биринчи тартибли назарияларда икки хил ифодалар ишлатилади. Булар терм ва формулалардир.

III.2.1–таъриф. *1.Ўзгарувчи предметлар, доимий предметлар, яъни константалар термдир.*

2. Агар $t_1, \ldots, t_n$ – лар термлар, A – n ўринли алгебраик амал бўлса, у ҳолда A $(t_1, \ldots, t_n)$ – термдир.

3.Бошқа термлар йўқ.

Таърифдан кўринадики, алгебраик амал боғловчилари воситасида термларни боғлаб ҳам ўзгарувчи предметлар, константалардан фарқли термларни ҳосил қилишимиз мумкин экан.

III.2.2–таъриф. (Биринчи тартибли назарияда формула тушунчаси).

A – n ўринли предикат, $t_1, \ldots, t_n$ – термлар бўлсин, у ҳолда A $(t_1, \ldots, t_n)$ – формуладир.

Агар $\mathfrak{I}$ ва $\mathfrak{R}$ лар формулалар бўлса, у ҳолда

$\mathfrak{I} \wedge \mathfrak{R}$, $\mathfrak{I} \vee \mathfrak{R}$, $\mathfrak{I} \Rightarrow \mathfrak{R}$, $\neg \mathfrak{I}$ *- лар ҳам формулалардир.*

Агар $\Im$ формула, у – эркин ўзгарувчи бўлса, у ҳолда $\forall y \Im$ ва $\exists y \Im$ ифодалар ҳам формулалардир.

1, 2, 3 пунктларда аниқланган формулалардан ташқари бошқа формулалар йўқ.

Предикатлар ҳисобининг барча аксиомалари биринчи тартибли тил учун ҳам ўринли бўлиб, бу аксиомалар биринчи тартибли тилнинг мантиқий аксиомалари дейилади. Бундан ташқари биринчи тартибли тил билан ифода қилинаётган ҳар бир назариянинг ўзига ҳос аксиомалари ҳам бўлади. Бу аксиомалар назариядан назарияга ўтганда ўзгариб туради. Шунинг учун уларни махсус аксиомалар деб атаймиз.

Биринчи тартибли тил билан ифода қилинадиган деярли барча назарияларга тенглик аксиомалари киритилади. Улар қуйидагилардан иборат:

III$_1$. $x = x$.

III$_2$. $x = y \Rightarrow (A (x) \Rightarrow A (y))$.

Биринчи тартибли тилда предикатлар ҳисобининг келтириб чиқариш қоидаларининг баъзиларига ўзгартиришлар киритилади.

III.2.3. (Ўзгарувчи предметларни алмаштириш қоидаси).

Агар $\Im$ келтириб чиқарилувчи формула бўлса, у ҳолда $\Im$даги ўзгарувчи предметни $\Im$да боғланган ўзгарувчи предметлар қатнашмаган терм билан алмаштирсак, ҳосил бўлган ифода яна келтириб чиқарилувчи формула бўлади.

III.2.4. (Ўзгарувчи предикатни алмаштириш қоидаси).

$\Im$ келтириб чиқарилувчи формуладаги n ўринли $F (t_1 , \ldots , t_n)$ - предикатни коллизия ҳолати юз бермайдиган қилиб $\Re (\theta_1 , \ldots , \theta_n)$ – формула билан алмаштирсак, ҳосил бўлган ифода яна келтириб чиқарилувчи формула бўлади. Бу ерда $t_1, \ldots , t_n$; $\theta_1, \ldots , \theta_n$ лар биринчи тартибли назариядаги термлардир.

Бошқа келтириб чиқариш қоидалари ўзгаришсиз қолади.

Биринчи тартибли тил учун гипотезалардан келтириб чиқарилувчи формулалар тушунчаси, дедукция теоремаси предикатлар ҳисобидагидан шаклан фарқ қилмайди. Лекин мазмунан келтириб чиқарилувчи формулалар ҳақида гапирганимизда юқорида келтирилган келтириб чиқариш қоидаларини эътиборга олишимиз зарур.

III.2.5. Назария тилининг интерпретацияси.

Назария тилининг интерпретацияси тушунчаси билан танишиб чиқамиз.

Фараз қилайлик, W – тўплам назариянинг алифбоси бўлсин. W′ – эса бошқа бирорта аксиоматик ёки интуитив назариянинг символлари тўплами (алифбоси) бўлсин. W тўпламнинг ҳар бир элементига W′ нинг аниқ битта элементини шундай мос қўямиз – ки натижада, W даги константага W′ даги константа, W да ўзгарувчи предметга W′ даги ўзгарувчи предмет ёки константа мос келсин, W да аниқланган ҳар бир предикатга W′ да аниқланган ягона предикат, W да аниқланган ҳар бир функционал символга W′ да аниқланган аниқ битта функционал символ мос келсин. У ҳолда биринчи назарияда аниқланган ҳар бир ифодага иккинчи назарияда аниқланган аниқ ифода мос келади. Аниқроқ қилиб айтадиган бўлсак, биринчи назариядаги ҳар бир термга иккинчи назариядан аниқ битта терм, биринчи назариядаги ҳар бир формулага иккинчи назариядаги аниқ битта формула мос келади. У ҳолда иккинчи назария биринчи назариянинг ифодаси ёки *интерпретацияси* дейилади.

Агар бир назариянинг ҳар бир келтириб чиқарилувчи формуласи шу назариянинг интерпретациясида айнан рост формула ёки келтириб чиқарилувчи формула бўлса у ҳолда бундай интерпретация берилган *назариянинг модели* дейилади.

III.2.6–таъриф. *Берилган назариянинг иккита W_1, W_2 – тўпламларида аниқланган иккита интерпретацияси берилган бўлсин. W_1, W_2 тўпламлар орасида шундай ўзаро бир қийматли мослик, яъни биектив мослик ўрнатилган бўлсин. Натижада, биринчи интерпретациядаги ҳар бир ўзгарувчи предметга иккинчи интерпретациядаги ўзгарувчи предмет, биринчи интерпретациядаги константага иккинчи интерпретациядаги константа, биринчи интерпретациядаги ҳар бир n ($n \geq 0$) ўринли функционал символга иккинчи интерпретациядаги n ўринли функционал символ, биринчи интерпретациядаги ҳар бир n ($n \geq 0$) ўринли предикат символига иккинчи интерпретациядаги n ($n \geq 0$) ўринли предикат символи мос қўйилган бўлиб, натижада биринчи интерпретациядаги ҳар бир келтириб чиқарилувчи (айнан рост) формулага иккинчи интерпретациянинг келтириб чиқарилувчи (айнан рост) формуласи мос келса, у ҳолда бундай иккита интерпретация изоморф дейилади.*

III.2.7–таъриф. *Агар математик назариянинг ҳар қандай иккита модели изоморф бўлса, бундай математик назария қатъий назария дейилади.*

Евклид геометрияси, натурал сонлар назарияси, бутун сонлар назарияси, рационал сонлар назарияси, ҳақиқий сонлар назарияси, комплекс сонлар назарияси қатъий математик назарияларга мисол бўла олади.

Группалар назарияси эса ноқатъий аксиоматик назарияга мисол бўла олади.

Такрорлаш учун саволлар

1. Математик назария тили нима ?
2. Биринчи тартибли тил ҳақида тушунча беринг.
3. Биринчи тартибли назарияда формула тушунчаси таърифини айтинг.
4. Биринчи тартибли тилнинг мантиқий аксиомаларини келтиринг.
5. Биринчи тартибли тилнинг келтириб чиқариш қоидаларини айтинг.
6. Интерпретация ҳақида тушунча беринг.
7. Математик назариянинг модели нима?
8. Группалар аксиоматик назарияси моделига мисоллар келтиринг.

III.3-§. Математик назарияларнинг зидсизлик, тўликлик, ечилиш муаммолари

Зидсизлик муаммоси.

III.3.1-таъриф. *Агар математик назарияда $\mathfrak{I}$ ва $\rceil\mathfrak{I}$ формулалар келтириб чиқарилувчи бўлса, бундай математик назариялар зиддиятли математик назариялар дейилади.*

Зиддиятли назарияни қуришнинг маъноси йўқ, чунки бундай назарияда ҳар қандай формула келтириб чиқарилувчи формула бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам, $\vdash \mathfrak{I}$ ва $\vdash \rceil\mathfrak{I}$ бўлса, у ҳолда $\vdash \mathfrak{I} \wedge \rceil\mathfrak{I}$ бўлади. Бундан, ихтиёрий $\mathfrak{R}$ формула учун $\vdash \mathfrak{I} \wedge \rceil\mathfrak{I} \Rightarrow \mathfrak{R}$ эканлиги келиб чиқади. Бу формулага (MP) қоидани қўлласак, $\vdash \mathfrak{R}$ бўлади.

III.3.2–таъриф. *Математик назарияда $\mathfrak{I}$ ва $\rceil\mathfrak{I}$ формулалардан камида биттаси келтириб чиқарилмайдиган формула бўлса, бундай назария зидсиз назария дейилади.*

Математик назариянинг зидсизлигини кўрсатиш учун, шу назариянинг камида битта зидсизлиги маълум бўлган моделини кўрсатиш етарли.

Ҳақиқатдан ҳам, берилган назария зиддиятли назария бўлса, у ҳолда шундай $\mathfrak{I}$ формула топилиб, $\vdash \mathfrak{I}$ ва $\vdash \rceil\mathfrak{I}$ бўлар эди. У ҳолда $\mathfrak{I}$ формулага моделда мос келган $\mathfrak{I}'$, $\rceil\mathfrak{I}$ га моделда мос келадиган $\rceil\mathfrak{I}'$ формулалар ҳам келтириб чиқарилувчи формулалар бўлиб, модел зиддиятли бўлар эди.

III.3.3-мисол. Группалар назарияси зидсиз назариядир. Ҳақиқатдан ҳам, масалан, $G = \{ -1, 1 \}$ икки элементли мультипликатив группа группалар назарияси учун зидсиз модел бўлади.

Математик назариянинг кенг маънода тўлиқлиги.

III.3.4-таъриф. *Агар математик назариядаги ихтиёрий $\mathfrak{I}$ формула учун $\mathfrak{I}$ ёки $\rceil\mathfrak{I}$ формулалардан камида биттаси келтириб чиқарилувчи формула бўлса, бундай аксиоматик назария кенг маънода тўлиқ назария дейилади.*

Агар математик назария кенг маънода тўлиқ бўлса, бу назариянинг ихтиёрий $\mathfrak{I}$ формуласи ёки бу формуланинг инкори ихтиёрий моделда келтириб чиқарилувчи формула бўлади.

Математик назариянинг тор маънода тўлиқлиги.

III.3.5-таъриф. *Агар математик назария аксиомалари системасига шу назарияга исбот қилинмайдиган формулани аксиома сифатида қўшиб, келтириб чиқариш қоидаларини ўзгаришсиз қолдирсак, натижада ҳосил бўлган назария зиддиятли назария бўлса, у ҳолда математик назария тор маънода тўлиқ дейилади.*

Такрорлаш учун саволлар

1. Математик назарияларда зидсизлик муаммоси.
2. Математик назарияларнинг тўлиқлиги деганда нимани тушунасиз?
3. Математик назарияларда ечилиш муаммоси ҳақида нималарни биласиз?

III.4-§. Математик назарияларга намуналар

III.4.1. Қисман тартибланиш назарияси.

Бу назарияда икки ўринли P предикат қатнашиб $P(x,y)$ – « $x < y$ » муносабатни билдиради.

Бу назариянинг махсус аксиомалари :

I. $\forall x \rceil (x < x)$ – антирефлексивлик муносабати.

II. $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 ((x_1 < x_2) \wedge (x_2 < x_3) \Rightarrow (x_1 < x_3))$ – транзитивлик муносабати.

Бу назариянинг ихтиёрий модели қисман тартибланган структура дейилади.

III.4.2. Группалар назарияси.

Группалар назариясини ифодалаш учун битта предикат символи A ва битта функционал символ f ва битта a_1 – константа етарли.

$A (t, s) , t = s$ предикатни;

$f (t, s) ,\ t + s$ - амални;

a_1 – 0 ни билдирсин.

Группалар назариясининг махсус аксиомалари қуйидагилардан иборат:

$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3)$ – ассоциативлик.

$\forall x_1 (0 + x_1 = x_1 = x_1 + 0)$ – 0 нинг хоссаси.

$\forall x_1 \exists x_2 (x_1+x_2=x_2+x_1=0)$ – қарама-қарши элементнинг мавжудлиги.

Бу назариянинг ҳар қандай модели группа дейилади. Масалан, (Z; +, 0) – бутун сонлар группасидир.

III.4.3. Натурал сонлар назарияси.

Натурал сонлар назариясини ифода қилиш учун константа 0 ; функционал символлар: $+ , \cdot , '$ (бирни қўшиш); « = » предикат символи етарли.

Бу назариянинг махсус аксиомалари қуйидагилардан иборат:

$x_1 = x_2$.

$x_1 = x_2 \Rightarrow x_2 = x_1$.

$x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1 = x_3 \Rightarrow x_2 = x_3)$.

$0 \neq x_1'$.

$x_1' = x_2' \Rightarrow x_1 = x_2$.

$x_1 + 0 = x_1$.

$x_1 + x_2' = (x_1 + x_2)'$.

$x_1 \cdot 0 = 0$.

$x_1' \cdot x_2' = x_1 \cdot x_2 + x_1$.

$A (0) \Rightarrow (\forall x (A (x) \Rightarrow A (x')) \Rightarrow \forall x\, A (x))$, бунда A (x) – натурал сонлар назариясининг ихтиёрий формуласидир.

10–аксиома ўзида чексиз кўп аксиомаларни мужассамлаган схемадир. Уни одатда математик индукция принципи деб атайдилар.

III.4.4. Тўлиқсизлик ҳақида Гёдел теоремаси.

1931- йил К. Гёдел формал арифметиканинг тўлиқ эмаслигини кўрсатиб берди. Яъни ҳеч бўлмаганда формал арифметикани қамраб олган ҳар қандай формал назарияда шундай ёпиқ $\mathfrak{I}$ формула топилиб, $\mathfrak{I}$ ни ҳам $\rceil \mathfrak{I}$ ни ҳам бу назарияда исбот қилиб бўлмаслигини кўрсатиб берди. Бундан ташқари баъзи шартлар бажарилганда $\mathfrak{I}$ формула сифатида шу назария зидсиз деган тасдиқ олиниши мумкинлигини исбот қилиб берди.

Такрорлаш учун саволлар

1. Математик назарияларга мисоллар келтиринг.
2. Гёдел теоремасини тушунтиринг.
3. Математик назарияларнинг мантиқий ва махсус аксиомалари орасидаги фарқларни айтинг.

IV БОБ. СОНЛИ СИСТЕМАЛАР

IV.1-§. Натурал сонлар мазмунли аксиоматик назарияси

Бошланғич тушунчалар ва белгилар

Натурал сонлар тўплами, бирлик элемент натурал сонлар аксиоматик назариясининг асосий тушунчалари бўлиб, улар таърифсиз қабул қилинади.

Натурал сонлар тўпламини – N, бирлик элементни – 1 символлар кўринишида белгилаб оламиз, ундан ташқари $+$, $\cdot$ символлари орқали мос равишда N тўпламдаги қўшиш ва кўпайтириш амаллари белгиланади.

Бу белгилардан ташқари $\exists! c \in A$ – A га тегишли ягона c элемент мавжудлигини ифодаласин; $a+b$ орқали a ва b элементлар йиғиндисини; $A+B$ орқали эса $\{a+b \mid \forall a \in A \wedge \forall b \in B\}$ тўплам белгиланади.

IV.1.1- мисол. $\{1,3\}+\{7,8\}=\{8,9,10,11\}$.

Натурал сонлар назариясининг аксиомалари.

1°. $1 \in N \wedge \forall a,b \in N$ учун $a+b \neq 1$ яъни, 1 натурал сон бўлиб, бир ҳеч қандай натурал сонлар йиғиндисига тенг эмас.

2°. $\forall a \in N$ учун $\exists! a' \in N$ $a' = a+1$, яъни ҳар қандай a натурал сон учун, бевоста a дан кейин келувчи ягона a' натурал сон мавжуд.

3°. $\forall a,b \in N$ учун $a+1=b+1$ бўлса, $a=b$ бўлади.

4°. $\forall a,b \in N$ учун $a+b$ аниқланган бўлса, $(a+b)+1=a+(b+1)$. Бу аксиома + амали ассоциативлигининг енгиллаштирилган кўриниши дейилади.

5°. $\forall a \in N$ учун $a \cdot 1 = a$.

6°. $\forall a,b \in N$ учун $ab+a$ ва $a(b+1)$ ифодалар аниқланган бўлса, $ab+a=a(b+1)$ бўлади. Бу аксиома кўпайтириш амалини қўшиш амалига нисбатан дистрибутивлигининг енгиллаштирилган кўриниши дейилади.

7°. Агар M натурал сонлар тўпламининг тўпламостиси бўлиб, $1 \in M$ ва $\forall a \in M$ бўлишидан $a+1 \in M$ келиб чиқса, у ҳолда $M=N$ бўлади. Бу аксиома индукция аксиомаси дейилади.

Такрорлаш учун саволлар

1. Натурал сонлар асиомалар системасидаги асосий тушунчалар ва белгилашларни айтинг.
2. Натурал сонлар аксиоматик назарияси аксиомаларини айтинг.
3. Индукция аксиомасини тушунтиринг.
4. Математик индукция методининг қандай турларини биласиз?
5. Математик индукция методи билан индукция аксиомасининг фарқини тушунтиринг.
6. Элементар математикадан математик индукция методи билан исботланадиган тасдиқларга мисоллар келтиринг.

М а ш қ л а р

Қуйидагиларни исботланг:

Агар М ихтиёрий тўплам бўлиб, (М фақат натурал сонлардан иборат бўлмаслиги ҳам мумкин) қуйидаги шартлар бажарилсин:

$1 \in \dot{I}$;

$\forall \grave{a} \in N \wedge a \in M \Rightarrow a+1 \in M$.

У ҳолда натурал сонлар тўплами М тўпламнинг қисм тўплами бўлишини исботланг.

2. Исботланг:

$(4^n + 15n - 1) \vdots 9$.

$(x_1+\ldots+x_n)^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2 + 2(x_1 x_2 + \ldots + x_{n-1} x_n)$.

$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

$(1-\dfrac{1}{4})(1-\dfrac{1}{9})\ldots(1-\dfrac{1}{(n-1)^2}) = \dfrac{n+2}{2n+2}$.

$\dfrac{1}{1\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 9} + \ldots + \dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \dfrac{4}{4n+1}$.

$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$.

$(6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n) \vdots 11$.

$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$ $(x \neq 1)$.

$\dfrac{4^n}{n+1} < \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$.

$\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \ldots + \dfrac{n}{(n+1)!} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!}$.

$\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$ $(n > 1)$.

$\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{2}{1+x^2} + \ldots + \dfrac{2^n}{1+x^{2^n}} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$ $(|x| \neq 1)$.

$\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{3n-2} > 1$.

$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \dfrac{n(n+1)}{2}$

$\dfrac{1^2}{1\cdot 3} + \dfrac{2^2}{3\cdot 5} + \ldots + \dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

$\dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \dfrac{n}{3n+1}$.

IV.2-§. Натурал сонлар тўпламида қўшиш амали ва унинг хоссалари

IV.2.1-теорема. (қўшиш амалини аниқлаш). *$\forall a,b\in N$ учун шундай ягона $c\in N$ мавжуд бўлиб, $a+b=c$ бўлади.*

Исбот. Математик индукция аксиомасидан фойдаланиб исботлаймиз.

Исбот тушунарли бўлиши учун, аввал, исботни $a=1$ бўлган ҳол учун кўриб чиқамиз. 1 ва b натурал сонлар учун ягона c натурал сон мавжуд бўлиб, $1+b=c$ тенглик ўринли бўладиган барча b лар тўпламини M_1 орқали белгилаб оламиз. У ҳолда $1\in M_1$. Ҳақиқатдан ҳам, 2°- аксиомага асосан $1'=1+1$.

$b\in M_1$ бўлса, $b+1\in M_1$ бўлишини исботлаймиз. 4°-аксиомага асосан $1+(b+1)=(1+b)+1$, у ҳолда 2°-аксиомага асосан бевосита $(1+b)$ дан кейин келувчи ягона элемент мавжуд. $(1+b)+1=(1+b)'$. Демак, $b+1\in M_1$. У ҳолда индукция аксиомага асосан. $M_1=N$, яъни 1 ва ихтиёрий b натурал сонлар учун уларнинг йиғиндиси бўлган ягона $1+b$ натурал сон мавжуд.

Исботни ихтиёрий a натурал сон учун такрорлаймиз. M_a орқали a ва b натурал сонлар учун уларнинг йиғиндиси бўлган ягона $a+b$ натурал сон мавжуд бўладиган барча b натурал сонлар тўпламини белгилайлик, яъни, $M_a=\{b|\exists!c\in N\ a+b=c\}$. У ҳолда,

1) N_2 аксиомага $\exists!a'\in N\ \ a+1=a'$. Демак, $1\in M_a$.

2) $b\in M_a$ бўлсин $b+1=b'\in M_a$ бўлишини кўрсатамиз.

$b\in M_a$ бўлса $\exists!c\in N\ \ a+b=c$. Бунда $a+(b+1)=(a+b)+1=c+1=c'$. Индукция фаразига кўра ягона c мавжуд. 2°-аксиомага асосан эса ягона c' мавжуд. Демак, $c+1\in M_a$. У ҳолда, индукция аксиомасига асосан $M_a=N$.

Шундай қилиб $\forall a,b\in N$ учун $\exists!c\in N\ \ a+b=c$.

Индукция аксиомасидан математик индукция методи деб аталадиган қуйидаги тасдиқ бевосита келиб чиқади:

IV.2.2-теорема. *x – натурал сонга боғлиқ бўлган $P(x)$ предикат берилган бўлсин. Агар $P(1)$ - рост бўлиб, ихтиёрий $k\in N$ учун $P(k)$ ростлигидан $P(k+1)$ ростлиги келиб чиқади. Яъни, $\forall k\in N$ учун $P(k)=1\to P(k+1)=1$ бўлса, у ҳолда $\forall n\in N$ учун $P(k)$ рост мулоҳазадир.*

Шундай қилиб, $P(x)$ предикатнинг ҳар қандай $x\in N$ учун ростлигини исбот қилиш учун:

1) $P(1)$ рост бўлиши исбот қилинади. Бу қадамни биз *индукция базиси* деб атаймиз.

2) k натурал сон учун $P(k)$ рост деб фараз қилинади. Бу қадам *индукция фарази* деб аталади.

3) $P(k)$ рост бўлишидан $P(k+1)$ рост бўлиши исбот қилинади. Бу қадам *индукция исботи* дейилади.

IV.2.3-теорема. *Натурал сонлар тўпламида қўшиш амали ассоциатив амалдир, яъни,* $\forall a,b,c\in N \quad (a+b)+\tilde{n}=a+(b+c)$.

Исботни математик индукция методи билан бажарамиз.

1. Индукция базиси. Агар $c=1$ бўлса, $(a+b)+1=a+(b+1)$ тенглик тўғрилиги 4°-аксиома тасдиғидан иборат.

2. Индукция фарази. c натурал сон учун $(a+b)+c=a+(b+c)$ тенглик тўғри деб фараз қилайлик.

3. Исбот. 4°-аксиомага асосан $(a+b)+(c+1)=((a+b)+c)+1$. Индукция фаразига асосан $((a+b)+c)+1=((a+(b+c))+1$, яъни, 4°-аксиомани ҳисобга олсак $(a+(b+c))+1=a+((b+c)+1)=a+(b+(c+1))$ тенгликка эга бўламиз, у ҳолда $(a+b)+(c+1)=a+(b+(c+1))$.

Шундай қилиб, $\forall c\in N$ ва фиксирланган a,b натурал сонлар учун $(a+b)+c=a+(b+c)$.

a,b натурал сонлар ўрнига бошқа натурал сонлар қўйиб, исботни сўзма-сўз такрорлаш мумкин. Демак, $\forall a,b,c\in N$ учун $(a+b)+c=(a+b)+c$.

IV.2.4-теорема. $\forall a\in N$ *учун* $a+1=1+a$.

Исбот. 1. Индукция базиси. $a=1$ бўлса, $1+1=1+1$.

2. Индукция фарази. $a+1=1+a$ бўлсин.

3. Индукция фаразига ва ассоциативлик қонунига асосан $(a+1)+1=(1+a)+1=1+(a+1)$.

IV.2.5-теорема. *Ихтиёрий* a,b *натурал сонлар учун* $a+b=b+a$, *яъни, натурал сонлар тўпламида қўшиш амали амали коммутатив амалдир.*

IV.2.6-теорема. $\forall a,b,c\in N$ *учун* $a+c=b+c$ *тенгликда* $a=b$ *келиб чиқади.*

Ушбу теоремаларнинг исботи ўқувчиларга ҳавола қилинади.

Такрорлаш учун саволлар

1. Бинар алгебраик амал таърифини айтинг.
2. Коммутатив бинар алгебраик амал деб нимага айтилади?
3. Ассоциатив бинар алгебраик амал таърифини айтинг.
4. Нол ўринли алгебраик амални тушунтиринг.

Машқлар

1. Натурал сонлар тўпламида ихтиёрий натурал сон учун уларнинг йиғиндиси яна ягона натурал сондан иборат бўлишини исботланг.
2. Ҳар қандай a,b натурал сонлар учун $(a+b)+1=a+(b+1)$ эканлигини асосланг.
3. Натурал сонлар тўпламида қўшиш амали ассоциатив амали эканлигини исботланг
4. Ихтиёрий a натурал сон учун $a+1=1+a$ эканлигини исботланг.

5. Натурал сонлар тўпламида қўшиш амали коммутативлигини исботланг.

$\forall a,b\in N$ учун $a+2=b+2$ эканлигини исботланг.

$\forall a,b\in N$ учун $a+b'=b'+b \Rightarrow a=b$ эканлигини исботланг.

$\forall a,b,c\in N$ учун $a+c=b+c \Rightarrow a=b$ эканлигини исботланг.

IV.3-§. Натурал сонларни кўпайтириш ва унинг хоссалари

IV.3.1-теорема. *Ҳар қандай a,b натурал сонлар учун шундай ягона c натурал сон мавжуд бўлиб, $a\cdot b=c$ тенглик ўринли бўлади.*

Исбот. Математик индукция методи орқали исбот қиламиз.

1. Индукция базиси. $b=1$ бўлсин, у ҳолда 5°-аксиомага асосан $a\cdot 1=a$.

2. Индукция фарази. b натурал сон учун шундай ягона p натурал сон мавжуд бўлиб, $a\cdot b=p$ бўлсин.

3. Исбот. 6°-аксиомага асосан $a\cdot(b+1)=a\cdot b+a$, индукция фаразига асосан шундай ягона p натурал сон мавжуд бўлиб, $a\cdot b+a=p+a$. Иккита натурал сон учун уларнинг йиғиндиси бўлган ягона натурал сон мавжуд. Исботни якунлаш учун ихтиёрий иккита натурал сон учун уларнинг йиғиндиси бўлган ягона натурал сон мавжудлигини эслаш етарли.

IV.3.2-теорема. $\forall a,b,c\in N$ *учун* $(a+b)\cdot c=ac+bc$, *яъни, натурал сонларни кўпайтириш амали натурал сонларни қўшиш амалига нисбатан чап томондан дистрибутив.*

Исбот. 1. Индукция базиси. $c=1$ бўлсин, у ҳолда 5°-аксиомага асосан $\forall a,b\in N$ учун $(a+b)\cdot 1=a+b=a\cdot 1+b\cdot 1$.

2. Индукция фарази .$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$ бўлсин.

3. Исбот. $(a+b)\cdot(c+1)=a(c+1)+b(c+1)$ тенглик ўринли бўлишини кўрсатамиз.

Ҳақиқатдан ҳам, 6°-аксиомага асосан $(a+b)\cdot(c+1)=(a+b)\cdot c+(a+b)$, лекин индукция фаразига кўра $(a+b)\cdot c+(a+b)=(ac+bc)+(a+b)$. Қўшишнинг хоссаларига асосан $(ac+bc)+(a+b)=(ac+a)+(bc+b)$. Охриги ифодага 6°-аксиомани қўллаймиз, $(ac+a)+(bc+b)=a(c+1)+b(c+1)$. Шундай қилиб, $(a+b)\cdot(c+1)=a(c+1)+b(c+1)$. Демак, $\forall a,b,c\in N$ учун $(a+b)\cdot c=ac+bc$.

IV.3.3-теорема. $\forall a\in N$ *учун* $a\cdot 1=1\cdot a=a$.

Исбот. 1. Индукция базиси. $a=1$ бўлсин, у ҳолда $1\cdot 1=1\cdot 1=1$.

2. Индукция фарази . $a\cdot 1=1\cdot a=a$ бўлсин деб фараз қиламиз.

3. Исбот. $(a+1)\cdot 1=1\cdot(a+1)=a+1$ бўлишини кўрсатамиз. Ҳақиқатдан ҳам, 5°-аксиомага асосан $(a+1)\cdot 1=a+1=a\cdot 1+1$. Индукция фаразига ва 6°-аксиомага асосан $a\cdot 1+1=1\cdot a+1=1\cdot(a+1)$. Демак, $(a+1)\cdot 1=1\cdot(a+1)=a+1$. Шундай қилиб, $\forall a\in N$ учун $1\cdot a=a\cdot 1=a$.

IV.3.4-теорема. $\forall a,b\in N$ *учун* $a\cdot b=b\cdot a$ *яъни, натурал сонларни кўпайтириш коммутатив.*

Исбот. 1. $b=1$ бўлсин, у ҳолда юқорида исбот қилганимизга кўра $a\cdot 1=1\cdot a$.

2. b натурал сон учун $a\cdot b=b\cdot a$ бўлсин.

3. $a(b+1)=(b+1)\cdot a$ бўлишини исбот қиламиз. 6°-аксиома, юқорида исбот қилинган теорема ва фаразга кўра $a(b+1)=ab+a=ba+a=ba+1a=(b+1)a$. Демак, $a(b+1)=(b+1)a$.

IV.3.5-теорема. $\forall\, a,b,c\in N$ *учун* $c(a+b)=ca+cb$.

Исбот. Юқорида исбот қилинган теоремаларга асосан $c(a+b)=(a+b)c=ac+bc=ca+cb$

IV.3.6-теорема. $\forall\, a,b,c\in N$ *учун* $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$.

Исбот. 1. $(a\cdot b)\cdot 1=ab=a(b\cdot 1)$

2. $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ бўлсин.

3. $(a\cdot b)(c+1)=abc+ab=a(bc+b)=a(b(c+1))$.

Шундай қилиб, натурал сонлар тўплами қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбат коммутатив яримҳалқа бўлиши исбот қилинди. Бундан сўнг $(N+,\cdot)$ – алгебрани *натурал сонлар яримҳалқаси* деб атаймиз.

Энди қуйидаги белгилашларни қабул қилишимиз мумкин: $1=\{\varnothing\}, 2=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}, 3=\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$ ва ҳ.к. $L=\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing,...\{\varnothing\}...\}\}\}$ бўлсин.

Агар ихтиёрий $n\in N$ учун $n+1$сифатида $\{\varnothing\cdot n\}$ тўпламни қабул қилсак, ҳосил бўлган тўплам учун Пеано аксиомаларини бажарилишини текшириб чиқиш қийин эмас.

Агар ҳосил бўлган белгилашларга кўра $1+1=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}=2$. Худди шундай, $2+1=\{\varnothing 2\}=\{\varnothing\{\varnothing\{\varnothing\}\}\}=3$, шунга ўхшаш, $3+1=4$ ва ҳ.к. бўлишини исбот қилиш қийин эмас.

Энди юқоридагиларга асосланиб $2\cdot 2=4$ бўлишини кўрсатамиз:

$2\cdot 2=2\cdot(1+1)=2\cdot 1+2\cdot 1=2+2=2+(1+1)=(2+1)+1=3+1=4$.

Шу усулда $2\cdot 3=6$, ..., $9\cdot 9=81$ тенгликларни ҳам исбот қилиш мумкин.

Такрорлаш учун саволлар

1. Натурал сонлар тўпламида кўпайтириш амали қандай аниқланади?
2. Кўпайтириш амалининг қандай хоссаларини биласиз?
3. Кўпайтириш амалининг қўшиш амалига нисбатан ўнг ва чап дистрибутивлиги қонунларини тушунтиринг.

Машқлар

1. Қуйидагиларни исботланг:

1) $2\cdot 5=10$;

2)$9\cdot 7=63$;

3)$12\cdot 3=36$.

IV.4-§. Натурал сонлар тўпламида тартиб муносабати

IV.4.1-таъриф. *Агар a ва b натурал сонлар учун шундай k натурал сон топилиб $a = b + k$ тенглик ўринли бўлса a натурал сон b натурал сондан катта деймиз ва $a > b$ деб белгилаймиз.*

$1' = 1 + 1$ бўлгани учун $1' > 1$ деб ёзишимиз мумкин. Яъни $<$ бинар муносабат бўш бўлмаган тўплам.

IV.4.2-теорема. *Натурал сонлар тўпламида аниқланган "$<$" бинар муносабат тартиб муносабатдир, яъни "$<$" – антисимметрик ва тарнзитив муносабат.*

Исбот. Агар $a > b$ бўлса, у ҳолда $b > a$ бўла олмаслигини кўрсатамиз. $a > b$ бўлса, таърифга кўра $\exists k \in N$, $a = b + k(1)$.

Фараз қилайлик, $b > a$ бўлсин. У ҳолда шундай $l \in N$ топилиб, $b = a + l(2)$ бўлади. (1) ва (2) дан $a = a + (l + k)$ ҳосил бўлади, бунинг эса бўлиши мумкин эмас.

Ҳақиқатдан ҳам, 1. $a = 1$ бўлса, $1 = 1 + (k + b)$. Бу эса 2^0-аксиомага зид.

2. $a \neq a + (k + l)$ бўлсин.

3. $a + 1 \neq (a + 1) + (k + l)$ бўлишини кўрсатамиз. Тескарисини фараз қиламиз. $a + 1 = a + 1 + (k + l)$ бўлсин, у ҳолда $a + 1 = (a + (k + l)) + 1$. Энди 3^o-аксиомани қўлласак, $a = a + (k + l)$ ҳосил бўлади, бу эса индукция фаразига зид. Шундай қилиб "$<$" муносабат антисимметрик муносабат бўлишини исботладик. Энди "$<$" муносабат транзитив муносабат бўлишини исбот қиламиз. Фараз қилайлик, $(a < b) \wedge (b < c)$ бўлсин, у ҳолда шундай k ва l натурал сонлар мавжуд бўлиб $a = b + k$, $b = c + l$ тенгликлар ўринли бўлади. У ҳолда, $a = b + k = (c + l) + k = c + (l + k)$. Яъни $a = c + (l + k)$. Демак, $a > c$.

IV.4.3-теорема. *Ҳар қандай a, b натурал сонлар учун қуйидаги тасдиқлардан фақат биригина ўринли*

1. $a = b$;
2. $a > b$;
3. $b > a$.

Бу теоремани исбот қилиш учун олдин қуйидаги леммани исбот қилиб оламиз.

IV.4.4-лемма. *$\forall a \in N$ натурал сон учун $a \neq 1$ бўлса, у ҳолда $\exists k \in N$ бўлиб $a = 1 + k$ тенглик ўринли бўлади.*

Исбот. Агар $a = 1$ бўлса, теорема шарти бажарилмайди. Демак, хулоса ҳам бажаралиши мумкин эмас.

Фараз қилайлик, a учун теорема тўғри бўлсин. У ҳолда $a + 1 = (1 + k) + 1 = a + 1 = 1 + (k + 1)$. Яъни теорема тўғри.

Теорема исботи 1 $b = 1$ бўлсин. У ҳолда $a = 1$ бўлса, $a = b$. Агар $a \neq 1$ бўлса, леммага асосан $a = 1 + k$. У ҳолда $a > 1$.

2. b учун теорема тўғри бўлсин, яъни, $b = a$, $b > a$, ёки $a > b$ шартларнинг фақат бири бажарилсин.

3. $b+1$ учун ҳам теорема ўринли бўлишини исботлаймиз.

Агар $b=a$ бўлса, $b+1=a+1$ бўлиб $b+1>a$. Агар $b>a$ бўлса, шундай k топилиб $b=a+k$ ёки $b+1=a(k+1)$ эканлигидан $b+1>a$ бўлади. Агар $a>b$ бўлса, шундай l топилиб $a=b+l$. Бу ҳолда, агар $l=1$ бўлса $b+1=k$, агар $l\neq 1$ бўлса, шундай k топилиб $l=1+k$ бўлади. Бундан $a=b+(1+k)=(b+1)+k$, яъни, $a>b+1$ бўлиши равшан. Демак $b+1$ учун ҳам теорема тўғри экан.

Бундан кейин $a>b$ бўлса, bсони a сонидан кичик деб тушунишимиз ва $b<a$ ёзувни ишлатишимиз мумкин.

$(a<b)\vee(a=b)$ ўрнига $a\leq b$; $(a>b)\vee(a=b)$ ўрнига $a\geq b$ ёзув ишлатилади. Яъни таърифга кўра

$$a\leq b\equiv(a<b)\vee(a=b);$$

$$a\geq b\equiv(a>b)\vee(a=b).$$

Шунингдек,

$$a<b\wedge b<c\equiv a<b<c;$$

$$a>b\wedge b>c\equiv a>b>c.$$

IV.4.5-теорема. *Натурал сонлар тўпламида "<" муносабати яна қуйидаги хоссаларга эга:*

1^o. $\forall a,b\in N$ *учун* $a\neq b\Rightarrow a>b\vee b>a$.

2^o. $\forall a\in N$ *учун* $\rceil(a>a)$.

3^o. $\forall a,b\in N$ *учун* $a>b\Rightarrow\rceil(b>a)$.

4^o. $\forall a,b,c\in N$ *учун* $a>b\wedge b>a$

5^o. $\forall a\in N$ *учун* $a+a>a$, *яъни ҳар қандай натурал сон мусбат.*

6^o. $\forall a,b,c\in N$ *учун* $a>b\Rightarrow a\cdot c>b\cdot c$, яъни $>$ муносабат кўпайтириш амалига нисбатан монотон.

Такрорлаш учун саволлар

1. Тартиб муносабат таърифини айтинг.
2. Қатъий тартиб муносабати деб нимага айтилади?
3. Ноқатъий тартиб муносабати деб нимага айтилади?
4. Чизиқли тартиб муносабати деб нимага айтилади?
5. Қандай тўплам тўлиқ тартибланган тўплам дейилади?
6. Натурал сонлар тўпламига тартиб муносабати қандай киритилади?
7. Бинар муносабатга нисбатан монотон бинар амал деб қандай бинар амалга айтилади?

Машқлар

1. Ҳар қандай $a,b,c\in N$ учун $a+c>b+c\Leftrightarrow a>b$ эканлигини исботланг.
2. Ҳар қандай $a,b,c\in N$ учун $a\cdot c=b\cdot c\Leftrightarrow a=b$ эканлигини исботланг.

3. Ҳар қандай $a,b,c \in N$ учун $a\cdot c > b\cdot c \Leftrightarrow a > b$ эканлигини исботланг.

4. Ҳар қандай $a \in N$ учун $1 \le a$ эканлигини исботланг.

5. Ҳар қандай $a,b \in N$ учун $a \le ab$ эканлигини исботланг.

6. Ҳар қандай $a,b \in N$ ва шундай $c \in N$ учун $b\cdot c > a$ эканлигини исботланг.

7. Ҳар қандай $a,b \in N$ учун $a+1 \ge b \wedge b > a \Rightarrow b = a+1$ эканлигини исботланг.

8. Ҳар қандай $a,b \in N$ учун $a+1 > b \wedge b \ge a \Rightarrow b = a$ эканлигини исботланг.

9. Ҳар қандай $a,b \in N$ учун $2a \ne 2b+1$ эканлигини исботланг.

10. Ҳар қандай $a,b \in N$ учун $a^2 \ne 2b^2$ эканлигини исботланг

IV.5-§. Натурал сонлар аксиоматик назарияси хоссалари

Аксиомалар системасининг эркинлиги.

Аксиоматик назариянинг *(A)* аксиомаси қолган аксиомалардан келтириб чиқармаслигини исбот қилинса *(A)* қолганларидан *эркли* деб аталади. Агар аксиоматик назариянинг ҳар бир аксиомаси қолганларидан эркли бўлса бундай *аксиоматик назария эркли* дейилади.

Аксиоматик назариянинг бирор *(A)* аксиомасини қолганларидан келиб чиқмаслигини келтириш учун *(A)*- аксиома бажарилмай қолган барча аксиомалар бажариладиган *интерпретация* қуриш етарли.

Индукция аксиомасининг бошқа аксиомалардан келиб чиқмаслигини кўрсатайлик. $Z_2 = \{\bar{0},\bar{1}\}$ - 2 модул бўйича чегирмалар ҳалқаси берилган бўлсин. $N' = N \times Z_2$ тўпламда

$$(a,\bar{x})\oplus(b,\bar{y}) = (a+b,\overline{x+y})$$

$$(a,\bar{x})\otimes(b,\bar{y}) = (a\cdot b,\bar{x}\cdot\bar{y})$$

тенгликлар орқали N' тўпламда $\oplus$- қўшиш, $\otimes$- кўпайтириш амаллари аниқланган бўлсин. Ҳосил бўлган $(N',\otimes,\oplus)$ -алгебра натурал сонлар аксиоматик назарияси учун интерпретация бўлиб, бу интерпретацияда индукция аксиомаси бажарилмайди, қолган аксиомалар эса бажарилади.

Ҳақиқатдан ҳам,

1. $(1,1)$ элемент бирлик элемент бўлиб, $(a,\bar{x})+(b,\bar{y}) = (a+b,\bar{x}+\bar{y}) = (1,1)$ бўлса, у ҳолда $a+b=1$ бундай бўлиши мумкин эмас.

2. $a,\bar{x}+(1,1) = (a+1,\bar{x}+1)$ ягона элемент бўлиши равшан.

3. $(a,\bar{x})+(1,1) = (b,\bar{y})+(1,1)$ берилган бўлсин, у ҳолда $(a+1,\bar{x}+1) = (b+1,\bar{y}+1)$ бўлиб, $a+1 = b+1$, $\bar{x}+1 = \bar{y}+1$ бўлганда $a = b$, $\bar{x} = \bar{y}$ келиб чиқади. Яъни $(a,\bar{x}) = (b,\bar{y})$ бўлади.

4. $(a,\bar{x})+((b,\bar{y})+(1,1)) = ((a,\bar{x})+(b,\bar{y}))+(1,1)$.

5. $(a,\bar{x})\cdot(1,1) = (a\cdot 1,\bar{x}\cdot 1) = (a,\bar{x})$ бўлиши равшан.

6. $(a,\bar{x})\cdot((b,\bar{y})+1) = (a,\bar{x})\cdot(b,\bar{y})+(a,\bar{x})$ бўлиши равшан.

7. Индукция аксиомаси бажарилмаслиги равшан.

Ҳақиқатдан ҳам, $M=\{(2a,0)|\, a\in N\}\vee\{(2a-1,1)|\, a\in N\}$ тўплам учун $(1,1)\in M, (a,1)\in M$ бўлишидан $(a,\bar{x})+(1,1)=(a+1,\bar{x}+1)\in M$. Лекин, $(1,0)\in M$.

Натурал сонлар аксиоматик назариясининг қатъийлиги.

IV.5.1-таъриф. *Агар аксиоматик назарияларининг ихтиёрий 2та модели изоморф бўлса, бундай аксиоматик назария қатъий аксиоматик назария дейилади.*

IV.5.2-теорема. *Натурал сонлар аксиоматик назарияси қатъий аксиоматик назариядир.*

Исбот. N_1 ва N_2 натурал сонлар аксиоматик назарияси учун 2та интерпретация бўлсин, у холда $\varphi(1_1)=1_2$, $\varphi(n_1)=n_2$ бўлса, $\varphi(n_1+1)=n_2+1$ орқали $\varphi(N_1)\to N$ акслантириш теорема шартларини қаноатлантирувчи акслантиришдир.

φ- биектив акслантириш бўлиб, $\forall m,n\in N$ учун $\varphi(n+m)=\varphi(n)+\varphi(m)$, $\varphi(n\cdot m)=\varphi(n)\cdot\varphi(m)$ шартлар бажарилади.

Такрорлаш учун саволлар

1. Аксиоматик назария қачон эркин дейилади?
2. Натурал сонлар аксиоматик назариясининг эркинлигини тушунтиринг.
3. Натурал сонлар аксиоматик назариясининг қатъийлигини тушунтиринг

IV.6-§. Бутун сонлар ҳалқаси

IV.6.1-таъриф. *Натурал сонлар яримҳалқасининг минимал кенгайтмаси бўлган ҳалқа бутун сонлар ҳалқаси дейилади.*

Бизга натурал сонлар яримҳалқаси берилган бўлсин. Бутун сонлар ҳалқасини қуриш схемасини кўриб чиқамиз.

$N\times N$ –декарт кўпайтмада $\forall(a,b),(c,d)\in N\times N$ учун $((a,b)\sim(c,d))\leftrightarrow(a+b=b+c)$ бинар муносабат эквивалентлик муносабатидир. Ҳақиқатдан ҳам, $\forall(a,b)\in N\times N$ учун $(a,b)\sim(a,b)$ чунки, $a+b=b+a$ бўлиб, $\sim$ муносабат рефлексив муносабатдир. $\forall(a,b),(c,d)\in N\times N$ жуфтликлар учун $(a,b)\sim(c,d)\Rightarrow(c,d)\Rightarrow(a,b)$. Ҳақиқатдан ҳам, $a+d=b+c\Rightarrow c+b=d+a$. Демак, $(c,d)\sim(a,b)$, ниҳоят $(a,b)\sim(c,d)$ ва $(c,d)\sim(e,f)$ бўлса, $a+d=b+c$ ва $c+f=d+c$ бўлишидан $a+d+c+f=b+c+d+e$ ёки $a+f=b+e$ келиб чиқади, бундан $(a,b)\sim(e,f)$. Демак, $\sim$ транзитив муносабатдир.

Шундай қилиб, $N\times N/\sim$ фактор тўплам ҳақида гапириш мумкин. Бу тўпламни Z_1 орқали белгилаб оламиз. N да аниқланган “+” амалидан фойдаланган холда Z_1 тўпламда $\oplus$ амалини қуйидаги тенглик орқали аниқлаш мумкин:

$\forall\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)} \in Z_1$ учун $\overline{(a,b)} \oplus \overline{(c,d)} = \overline{(a+c,\, b+d)}$. Бу тенглик $\overline{(a,b)}$ ва $\overline{(c,d)}$ синфлардан олинган вакилларга боғлиқ эмас. Ҳақиқатдан, $(a,y) \in \overline{(a,b)}$ $(z,t) \in \overline{(c,d)}$ бўлсин, у ҳолда $x+b=a+y$ ва $z+d=c+t$. Бундан, $(x+z) \oplus (b+d) = (b+d) \oplus (y+t)$ келиб чиқади. Демак, $\overline{(x+z,\ y+t)} = \overline{(a+c,\ b+d)}$.

Шунга ўхшаш, $\forall\overline{(a,b)},\ \overline{(c,d)} \in Z_1$ учун

$\overline{(a,b)} \otimes \overline{(c,d)} = \overline{(ac+bd,\, ad+bc)}$ (1)

$\forall\overline{(a,b)} \in Z_1$ учун $\Theta\ \overline{(a,b)} = \overline{(b,a)}$ (2)

$\bar{0} = \overline{(1,1)}$, $\bar{1} = \overline{(2,1)}$ (3)

тенгликлар мос равишда синфларни кўпайтириш, синфга қарама-қарши синфни топиш, нол элемент, бирлик элементни аниқлайди.

$(Z_1; \oplus, \odot, \Theta, \bar{0}, \bar{1})$ – алгебра натурал сонлар яримҳалқасига изоморф бўлган ярим ҳалқанинг минимал кенгайтмаси бўлган ҳалқадир. Бу алгебра ҳалқа бўлиши бевосита текширилади.

$N_1 = ((N \times \{1\})/\sim) \setminus \{\bar{0}\}$ тўплам эса натурал сонлар яримҳалқасига изоморф бўлган яримҳалқадир. Демак, $N \cong N_1$ бўлиб, Z_1 ҳалқа N_1нинг минимал кенгайтмаси бўлган ҳалқа, у холда алгебраик кенгайтма ҳақидаги (II г) теоремадан натурал сонлар яримҳалқасининг минимал кенгайтмаси бўлган ҳалқа мавжудлиги келиб чиқади.

Такрорлаш учун саволлар

1. Яримҳалқага таъриф беринг.
2. Яримҳалқа кенгайтмаси нима?
3. Ҳалқага таъриф беринг.
4. Фактор-тўплам таърифини эсланг.
5. Бутун сонлар ҳалқаси деб нимага айтилади?
6. Натурал сонлар яримҳалқаси минимал кенгайтмасининг мавжудлигини исботланг

Машқлар

1. Бутун сонлар тўплами ҳалқа ташкил этишини исботланг.
2. $m \in N$ бўлсин. m га каррали бутун сонлар тўплами Z_m ҳалқа ташкил этишини исботланг.
3. Ҳар қандай $m \in Z, m > 0$ сон учун чегирмалар синфлари тўплами $Z/_{(m)}$ ҳалқа ташкил этишини исботланг.
4. К ҳалқа устида олинган кўпҳадлар тўплами К[x] учун қуйидагиларни исботланг:

K[x] – ҳалқа;
K бирлик элементга эга бўлса, K[x] ҳам бирлик элементга эга;
K коммутатив ҳалқа бўлса, K[x] ҳам коммутатив ҳалқа бўлади;
K бутунлик соҳаси бўлса, K[x] ҳам бутунлик соҳаси бўлади.

IV.7-§. Бутун сонлар системасининг аксиоматик назарияси

Бошланғич тушунчалар.

1. Z – бутун сонлар тўплами.
2. "$\oplus$" "$\odot$" - Z даги кўпайтириш ва қўшиш амаллари.
3. $\bar{0}$ – Z нинг натурал элементи.
4. N - натурал сонлар тўплами.
5. $+, \cdot$ – N даги қўшиш ва кўпайтириш амаллари.

IV.7.1. $(Z, \oplus, \odot, \Theta, 0, N, +, \cdot)$ *алгебраик система учун қуйидаги аксиомалар ўринли бўлса, уни бутун сонлар системаси дейилади:*

1. $\forall a,b \in Z$ *учун* $\exists! c \in Z\ a \oplus b = c$.

2. $\forall a,b,c \in Z$ *учун* $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$*-қўшишнинг ассоциативлиги хоссаси.*

3. $\forall a,b \in Z$ *учун* $a \oplus b = b \oplus a$ – *қўшишнинг коммутативлиги аксиомаси.*

4. $\forall\ z \in Z$ *учун* $z \oplus 0 = z$ *ноль элементнинг хоссасини ифодаловчи аксиома.*

5. $\forall\ a \in Z$ *учун* $\exists a' \in Z\ a + a' = 0$ *қарама-қарши элемент мавжудлигини кафолатлайдиган аксиома.*

6. $\forall\ a,b \in Z$ *учун* $\exists! p \in Z\ a \cdot b = p$ *кўпайтириш амалининг бажарилиши аксиомаси.*

7. $\forall\ a,b,c \in Z$ *учун* $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ – *кўпайтириш амалининг ассоцитивлиги.*

8. $\forall\ a,b,c \in Z$ *учун* $(a + b) \cdot c = ac + bc \wedge c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$.

9. $(N +, \cdot)$ – *натурал сонлар яримҳалқаси.*

10. $N \subset Z$.

11. $\forall a,b \in N$ *учун* $a \oplus b = a + b$.

12. $\forall a,b \in N$ *учун* $a \otimes b = a \cdot b$.

13. Агар бирор M *тўплам учун*

1). $M \subset Z$.

2). $\forall a,b \in M$ *ва* b' *элемент* $b + b' = 0$ *шартни қаноатлантирсин, у ҳолда* $a + b' \in M$.

3). $N \subset M$

шартлар бажарилса $M = Z$ *бўлади. Бу аксиома минималлик аксиомаси деб аталади.*

Кейинчалик, тушунмовчилик юзага келмайдиган ҳолларда ёзувни ихчамлаштириш учун $\oplus$ ўрнига "+", $\odot$ ўрнига эса " $\cdot$ " белгилар ишлатилади. $(Z;+,0)$ *бутун сонларнинг аддитив граппаси* $(Z;\cdot)$ алгебра эса *бутун сонларнинг мультипликатив яримгруппаси* деб аталади.

Бутун сонлар аксиоматик назариясининг зидсизлиги.

Юқорида кўрилган $(Z_1;\oplus,\odot,\Theta,\bar{0},\bar{1})$ алгебра бутун сонлар аксиоматик назариясидаги барча 13 та аксиомани қаноатлантиради. Яъни, бутун сонлар аксиоматик назарияси учун модель вазифасини бажаради. Демак, бутун сонлар аксиоматик назарияси зидсиздир.

Бутун сонлар ҳалқасининг баъзи хоссалари

$(Z;+,\cdot,0,N)$ бутун сонлар системаси бўлсин.

5-аксимага асосан $\forall a\in Z$ учун шунда a' мавжуд бўлиб, $a+a'=0$. Бундан кейин $\forall a_1 b\in Z$ учун $a+b'$ ни $a-b$ кўринишда ёзиб оламиз ва a ва b *натурал сонларнинг айирмаси* деб атаймиз.

IV.7.2-теорема. *Ҳар қандай бутун сон, иккита натурал сон айирмасига тенг.*

Исбот. M орқали иккита натурал сонлар айирмаси сифатида ифода қилинадиган барча бутун сонлар тўпламини белгилаймиз. У ҳолда, $\forall n\in N$ учун $n=(n+1)-1$ бўлганидан $N\subset M$. Бундан ташқари $\forall a,b\in M$ бўлса, $\exists m,n,k,l\in N$ $a=m-n, b=k-l$ ва $a-b=(m-n)+(k-l)^1=(m-n)+(l-k)=$ $=(m+1)-(n+k)$. Демак $a-b\in M$. У ҳолда $M=Z$.

IV.7.3-теорема. $(Z;+,\cdot)-$ *алгебра бирлик элементга эга бўлган коммутатив ҳалқадир.*

Исбот. Ҳалқа бўлиши юқоридаги аксиомалардан келиб чиқади. $\forall a\in Z$ учун $\exists m,n\in N$ $a=m-n$, $a=m+n'$, $a'\cdot 1=(m+n')\cdot 1=m\cdot 1+n'\cdot 1=m+n^1=a$.

$\forall a,b\in Z$ учун $\exists m,n,k,l\in Z$ $a=m-n$, $b=k-l$. $(m-n)\cdot(k-l)=(k-l)(m-n)$ тенглик бевосита текширилади.

Бутун сонлар аксиоматик назариясидаги аксиомалардан $N\subset Z$, $\forall n\in N$ учун $n'=-n\in Z$, $0\in Z$ бўлиши келиб чиқади.

Агар $a\in Z$ учун $\exists m,n\in N$ бўлиб $a=m-n=m+n'$,

агар $m=n$ бўлса, $a=0$;

агар $m>n$ бўлса, a натурал сон;

агар $n>m$ бўлса, $n+m'-$ натурал сон бўлиб, $a=(n+m')'$, яъни $n+m'-$ натурал сонга қарама-қарши бўлган сондир.

Бутун сонлар ҳалқасида тартиб муносабат.

Агар $\forall a,b\in Z, a-b\in N$ бўлса $a>b$ деймиз. $>$ муносабат қатъий тартиб муносабатдир. Бу муносабат антирефлексив муносабатдир. $\forall a\in Z, a-a=0\notin N$.

Бу муносабат антисимметрик муносабатдир. $\forall a,b\in Z$ учун $a>b$ яъни, $a-b\in N$ бўлса $b-a=-(a-b)\notin N$. $>$ муносабат транзитив муносабатдир.

Ҳақиқатдан ҳам, $a-b\in N$, $b-c\in N$ бўлса, $(a-b)+(b-c)\in N$ яъни, $a-c\in N$ бўлади.

$\forall a,b\in Z$ агар $a\neq 1$ бўлса, $a>b$ ёки $b>a$. Ҳақиқатдан ҳам, $a-b$ ёки натурал сон ёки 0 ёки натурал сонга қарама-қарши сондир. Шундай қилиб, ҳар қандай бутун сон ёки натурал сон ёки 0 ёки натурал сонга қарама-қарши бўлган сон экан.

Бутун сонлар аксиометрик назариясининг қатъийлиги.

Маълумки, аксиометрик назариянинг ихтиёрий иккита модели изоморф бўлса, бундай аксиоматик назария қатъий аксиоматик назария дейилади.

IV.7.4-теорема. *Бутун сонлар аксиоматик назарияси қатъий аксиоматик назариядир.*

Исбот. $(Z_1,+,\cdot,0_1,N_1)$; $(Z_2,\oplus,\odot,0_2,N_2)$ бутун сонлар аксиоматик назариясининг ихтиёрий иккита модели бўлсин. Натурал сонлар аксиоматик назарияси қатъий аксиоматик назария бўлганлиги учун, N_1 ва N_2 орасида изоморфизм ўрнатадиган акслантириш мавжуд. Биз ёзувни ихчамлаштириш мақсадида N_1даги қўшиш, кўпайтириш амалларини $+,\cdot$ орқали, яъни, Z даги амаллар символлари билан; N_2 даги қўшиш, кўпайтириш амалларини эса $\oplus,\odot$ орқали, яъни Z_1даги қўшиш ва кўпайтириш белгиланган символлар билан белгилаб оламиз. $\varphi:N_1->N_2$ изоморф акслантириш бўлсин, демак-ки φ–биектив ва $\forall a_1,b_1\in N_1$ учун $\varphi(a_1+b_1)=\varphi(a_1)\oplus\varphi(b_1)$; $\varphi(a_1\cdot b_1)=\varphi(a_1)\odot\varphi(b_1)$.

$\forall z_1\in Z_1$ учун шундай $m_1,n_1\in N_1$ топилиб $z_1=m_1-n_1$ бўлиши юқорида исботланган эди. Шунга асосланиб $\forall z_1\in Z_1$ учун $\Phi(z_1)=\varphi(m_1)\Theta\ \varphi(n_1)$ тенглик орқали Z_1 ни Z_2 га акслантирамиз.

Бу акслантириш бир қийматли акслантиришдир. Ҳақиқатдан ҳам, агар $z_1=m_1-n_1=k_1-l_1$ бўлса $\varphi(m_1)\Theta\ \varphi(n_1)=\varphi(k_1)\Theta\ \varphi(l_1)$. Чунки $m_1+l_1=k_1+n_1$ бўлгани учун $\varphi(m_1+l_1)=\varphi(k_1+n_1)=>\varphi(m_1)\oplus\varphi(l_1)=\varphi(k_1)\oplus\varphi(n_1)=>\varphi(m_1)\Theta$ $\varphi(n_1)=\varphi(k_1)\Theta\ \varphi(l_1)$. Φ - биектив акслантиришдир.

$\forall a_1,b_1\in Z$, $a_1\neq b_1$ учун $\exists m_1,n_1,k_1,l_1\in N$ $a_1=m_1-n_1$; $b_1=k_1-l_1$ бўлсин. $b_1\neq a_1$ бўлгани учун $m_1+l_1\neq k_1+n_1$, демак $\varphi(m_1)\oplus\varphi(l_1)\neq\varphi(k_1)\oplus\varphi(n_1)$. У ҳолда $\varphi(m_1)\Theta\varphi(n_1)\neq\varphi(k_1)\Theta\varphi(l_1)$. Яъни $\Phi(a_1)\neq\Phi(b_1)$. Агар $\forall a_2\in Z$ бўлса, $\exists m_2,n_2\in N_2$ бўлиб, $a_2=m_2\Theta n_2$. У ҳолда $\varphi-$ биектив бўлгани учун $\exists m_1,n_1\in N_1$, $\varphi(m_1)=m_2$, $\varphi(n_1)=n_2$.

Демак, $\Phi(m_1-n_1)=\varphi(m_1)\cup\varphi(n_1)=m_2\quad\Theta n_2=a_2$ Яъни, Φ -сюръектив акслантиришдир.

Φ акслантириш + ва $\cdot$ амалларини сақлайди. Φ араз қилайлик $\forall a_1,b_1\in Z$ учун $\exists m_1,n_1,k_1,l_1\in N$ бўлса $a_1=m_1-n_1$, $b_1=k_1-l_1$ бўлсин.

У ҳолда $\Phi(a_1+a_2)=\Phi((m_1-n_1)+(k_1-l_1))=\Phi((m_1+k_1)-(n_1+l_1))=$

$= \varphi(m_1 + k_1) \Theta \varphi(n_1 + l_1) = \varphi(m_1) + \varphi(k_1) \Theta (\varphi(n_1) + \varphi(l_1)) = (\varphi(m_1) \Theta \varphi(k_1) \Theta$ $\varphi(n_1)$ Θ $\varphi(l_1) = (\varphi(m_1) \Theta \varphi(n_1)) + (\varphi(k_1) \Theta \varphi(l_1)) = \Phi(a_1) + \Phi(b_1)$. Шундай қилиб, $\forall a_1, b_1 \in Z_1$ учун $\Phi(a_1 + b_1) = \Phi(a_1) \oplus \Phi(a_2)$.

$\forall a_1, b_1 \in Z_1$ учун $\Phi(a_1 \Theta b_1) = \Phi(a_1) \odot \Phi(b_1)$ тенгликни исбот қилишни ўқувчиларга мустақил вазифа сифатида қолдирамиз.

Бутун сонлар ҳалқасининг бутунлик соҳаси бўлиши

IV.7.5-теорема: $\forall m, n \in N$ *учун қуйидаги хоссалар ўринли:*

1°. $m \cdot 0 = 0$.

2°. $m(-n) = -mn$.

3°. $(-m) \cdot n = -mn$.

4°. $(-m) \cdot (-n) = mn$.

Исбот: 1°. $m \cdot 0 = m(0+0) = m \cdot 0 + m \cdot 0$ бундан $m \cdot 0 = 0$ келиб чиқади.

2°. $m \cdot 0 = m(n-n) = mn + m(-n) = 0$.

Демак, $m(-n) = -mn$.

3°-, 4°- тасдиқлар шунга ўхшаш исбот қилинди.

IV.7.6-теорема: $\forall a, b \in Z$ *учун* $(a \cdot b = 0) \Rightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$.

Исбот: Тескарисини фараз қиламиз. $a \neq 0 \wedge b \neq 0$ бўлсин, у ҳолда a ва b лар иккаласи ҳам натурал сонлар ёки иккаласи ҳам натурал сонларга қарама-қарши сонлар ёки бири натурал, иккинчиси натурал сонга қарама-қарши сон бўлади. Бундан юқорида исбот қилинган теоремага асосан $a \cdot b \neq 0$ келиб чиқади. Бу теорема шартига зид.

Такрорлаш учун саволлар

Бутун сонлар аксиоматик назариясининг бошланғич тушунчаларини айтинг.

Бутун сонлар аксиоматик назариясининг аксиомаларини шарҳланг.

Ҳар қандай бутун сон натурал сонлар айирмаси кўринишида ифодаланишини исботланг.

Бутун сонлар тўпламида тартиб муносабатини аниқланг.

Бутун сонлар аксиоматик назариясининг қатъийлигини исботланг.

Машқлар

Бутун сонлар ҳалқасида 2x=1 тенглама ечимга эга эмаслигини исботланг.

Бутун сонлар ҳалқасида $x^2 = 2y^2$ тенглама фақат (0,0) ечимга эга эканлигини исботланг.

Бутун сонлар мультипликатив яримгруппасини қатъий ва чизиқли тартиблаб бўлмаслигини исботланг.

Қуйидагиларни исботланг:

1) $(Z;+,\cdot,0,1)$ - бутун сонлар ҳалқасида «>»- чизиқли тартиб муносабати қуйидаги шартлар орқали аниқланади:

$\forall a,b\in Z$ учун $a>b\Rightarrow a\neq b$;

$\forall a,b,c\in Z$ учун $a>b\wedge b>c\Rightarrow a>c$;

$\forall a,b\in Z$ учун $a>b\Rightarrow a+1>b+1$;

$\forall a,b\in Z$ учун $a>b\Rightarrow a-1>b-1$;

$1>0$.

2) юқорида келтирилган шартларнинг ҳеч бири қолганлари орқали ифодаланмайди.

IV.8-§. Рационал сонлар майдони

IV.8.1-таъриф. *Бутун сонлар ҳалқасининг минимал кенгайтмаси бўлган майдон рационал сонлар майдони дейилади.*

Рационал сонлар майдонини қуриш схемасини берамиз. $Z^{*}=Z\setminus\{0\}$ бўлсин. ZxZ^{*} тўпламни P орқали белгилаб оламиз. P тўпламда "~" – эквивалентлик муносабатини қуйидагича аниқлаймиз:

$(a,b)\sim(c,d) <=> (ad=bc)$. Бу муносабат ҳақиқатдан ҳам эквивалентлик муносабатидир:

1. $\forall(a,b)\in P$ учун $((a,b)\sim(a,b) <=> (a\cdot b=b\cdot a)$

2. $\forall(a,b)\in P,\ (c,d)\in P$ учун $(a,b)\sim(c,d) => (a\cdot d=bc) =>$
$=> (bc=ad) => ((c,d)\sim(a,b))$.

3. $\forall(a,b)\in P,\ (c,d)\in P,\ (m,n)\in P,\ (a,b)\sim(c,d)\wedge(c,d)\sim(m,\ n) => ad=$
$=bc\wedge cn=dm => adcn=bcdm => an=bm => (a,b)\sim(m,n)$.

Демак, ~ муносабат P тўпламда рефлектив, симметрик, транзитив муносабат, яъни , ~ -эквивалентлик муносабати экан.

P/~ фактор тўпламни Q_1 орқали белгилаймиз. $\forall(a,b)\in P$ учун $\overline{(ab)}$ орқали P/~ фактор-тўпламдаги (a,b) элемент яратган эквивалентлик синфини белгилаймиз.

Q_1 да $\oplus$, $\odot$ амаллари қуйидагича аниқланади:

$\forall(a,b),(c,d)\in Q_1$ учун $\overline{(a,b)}\oplus\overline{(c,d)}=\overline{(ad+bc,bd)}$ $\overline{(a,b)}\odot\overline{(c,d)}=$
$=\overline{(a\cdot c,b\cdot d)}$. Бу ёзувлардаги $+,\cdot$ амаллари Z тўпламдаги қўшиш ва кўпайтириш амалларидир.

IV.8.2-теорема. *Q тўпламда*

1°. $\oplus$, $\odot$ кўпайтириш амаллари синфлардан олинган вакилларга боғлиқ эмас, яъни бир қийматли аниқланган.

2°. $\oplus$, $\odot$ амаллари Q_1 тўпламда коммутатив, ассоциатив бўлиб, $\odot$ амали $\oplus$ амалига нисбатан дистрибутивдир.

3°. $\overline{(1,1)}$ синф $\odot$ амалига нисбатан нейтрал элемент, яъни бирлик элементдир.

4°. $(\overline{0,1})$ *синф* $\oplus$ *амалига нисбатан нейтрал яъни ноль элементдир.*

5°. $\forall(\overline{a,b}) \in Q_1$ *синф учун* $(\overline{-a,b})$ *синф* $\oplus$ *га нисбатан қарама-қарши элемент бўлади, яъни* $(\overline{a,b}) + (\overline{-a,b}) = (\overline{0,1})$.

6°. $\forall(\overline{a,b}) \in Q_1 \wedge (a \neq 0)$, *яъни,* $(\overline{a,b}) \neq (\overline{0,1})$ *синф учун* $(\overline{b,a})$ *синф* $\odot$ *амалига нисбатан тескари элемент бўлади.*

7°. $(\overline{1,1}) \neq (\overline{0,1})$.

Исбот. Теоремадаги тасдиқлар бевосита текшриб чиқилади. Масалан, 4°: $(\overline{0,1}) + (\overline{a,b}) = (\overline{0 \cdot b + 1 \cdot a, 1 \cdot b}) = (\overline{a,b})$.

6°$\cdot (\overline{ab}) \neq (\overline{0,1})$ бўлса, у ҳолда $(\overline{ba}) \in Q_1$ бўлиб, $(\overline{a,b}) \cdot (\overline{b,a}) = (\overline{ab,a,b}) = (\overline{1,1})$.

Қолган тасдиқларни текшириб чиқишни ўқувчиларга ҳавола қиламиз.

Шундай қилиб, $(Q_1, \oplus, \odot, (\overline{1,1})(\overline{0,1}))$ алгебра, қисқача $(Q_1, \oplus, \odot)$-алгебра майдон бўлар экан. Бу майдон бутун сонлар ҳалқасига изоморф бўлган ҳалқаостига эга. Аниқроғи $Z \times \{1\}/\sim$ фактор-тўплам $\oplus$, $\odot$ амалларига нисбатан ёпиқ бўлиб, ҳалқа ҳосил қилади. Бу ҳалқа бутун сонлар ҳалқасига изоморф бўлган ҳалқадир. Фараз қилайлик, Q' майдон учун $Z \times \{1\}$ – ҳалқа, ҳалқаости бўлсин, у ҳолда $\forall(0,1) \in Z \times \{1\}, (b,1) \in Z \times \{1\}$ $b \neq 0$ элементлар учун $(a,1) \cdot (b,1)^{-1} = (a,1) \cdot (1,b) = (a,b) \in Q'$ бўлади. Демак, $Q_1 \subset Q'$. Яъни, Q_1 майдон $Z \times \{1\}$ – ҳалқанинг минимал кенгайтмаси бўлган майдондир. У ҳолда алгебрик кенгайтма ҳақидаги теоремага асосан Z бутун сонлар ҳалқасининг минимал кенгайтмаси бўлган майдон мавжуд. Бу майдон рационал сонлар майдони деб юритилади.

Такрорлаш учун саволлар

Ҳалқанинг кенгайтмаси деб нимага айтилади.
Майдон таърифини айтинг.
Рационал сонлар майдонини қуринг.

Машқлар

Берилган $(P;+,\cdot,0)$ майдоннинг ҳар қандай $a, b, a', b' \in P \wedge b \neq 0, b' \neq 0$ элементлари учун қуйидагиларни исботланг:

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + ba'}{bb'};$$

$$\frac{a}{b} - \frac{a'}{b'} = \frac{ab' - ba'}{bb'};$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{a \cdot a'}{bb'};$$

$$a' \neq 0 \Rightarrow \frac{\frac{a}{b}}{\frac{a'}{b'}} = \frac{a \cdot b'}{b \cdot a'};$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Leftrightarrow ab' = a'b.$$

Рационал сонлар жуфтликларидан иборат бўлган P тўпламда қўшиш ва кўпайтириш амаллари қуйидагича аниқланган:

$(a,b) \oplus (a',b') = (a + a', b + b');$

$(a,b) \otimes (a',b') = (aa'+2bb', ab'+a'b).$

$(P;\oplus,\otimes)$ майдон ташкил этишини исботланг.

Комплекс сонлар майдони устида қурилган иккинчи тартибли квадрат матрицалар тўплами матрицаларни қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан коммутатив бўлмаган, нолнинг бўлувчиларига эга ҳалқа ташкил этишини исботланг.

Агар ε сон $x^3 = 2$ тенгламанинг ихтиёрий комплекс илдизи ва $Q(\varepsilon) = \{a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in Q\}$ бўлса, у ҳолда комплекс сонларни қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан $Q(\varepsilon)$ тўплам майдон ташкил этишини исботланг.

IV.9-§. Рационал сонларнинг аксиоматик назарияси

Бошланғич тушунчалар

1. Q - рационал сонлар майдони.

2. $\oplus, \cdot$ мос равишда рационал сонлар майдонидаги қўшиш ва кўпайтириш амаллари.

3. $+$, $\cdot$ амаллари мос равишда Z- бутун сонлар ҳалқасидаги қўшиш ва кўпайтириш амаллари.

Аксиомалар:

1. $\forall a,b \in Q$ учун $\exists!$ $C \in Q$ бўлиб, $a \oplus b = c$ бўлади.

2. $\forall a,b,c \in Q$ учун $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ яъни, Q да + амали ассоциатив.

3. $\forall a,b \in Q$ учун $a \oplus b = b \oplus a$ қўшиш амали коммутатив.

4. $0 \in Q$ ва $\forall a \in Q$ учун $0 \oplus a = a$.

5. $\forall a \in Q$ учун шундай $\exists a' \in Q$ бўлиб $a \oplus a' = 0$.

6. $\forall a,b \in Q$ учун $\exists! p \in Q$ бўлиб $a \odot b = p$.

7. $\forall a,b,c \in Q$ учун $a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$.

8. $\forall a,b \in Q$ учун $a \odot b = b \odot a$.

9. $\forall a,b,c \in Q$ учун $a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c$.

10. $\forall a,b \in Q$ учун эса $a \neq 0$ бўлса $\exists x \in Q$ $a \odot x = b$.

11. $(Z+,\cdot)$ - бутун сонлар ҳалқаси.

12. $Z \subset Q$.

13. $\forall a,b \in Z$ учун $a \odot b = a \cdot b$.

14. $\forall a,b \in Z$ учун $a \oplus b = a + b$.

15. Минималлик аксиомаси. Ихтиёрий M тўплам учун

1. $M \subset Q$;

2. $Z \subset M$;

3. $\forall a,b,\ b \neq 0$ учун агар $bx = a$ эканлигидан $x \in M$ шартлар бажарилса, у ҳолда $M = Q$.

Рационал сонларнинг хоссалари

Ёзувни ихчамлаштириш мақсадида, тушунмовчилик юзага келмайдиган ҳолларда $\oplus$, $\odot$ символлари ўрнига мос равишда $+$, $\cdot$ символларини ишлатамиз.

10-аксиомага асосан $\forall a,b \in Q$ $a \neq 0$ рационал сонлар учун $ax = b$ тенглама ечимга эга. Хусусан $a = b$ бўлган ҳолда $\forall a \in Q_1$ $a \neq 0$ учун $a \cdot x = x \cdot a < a$. У ҳолда, таърифга кўра x кўпайтиришга нисбатан нейтрал элемент бўлади деб белгилаймиз. Демак 10-аксиомага нисбатан x рационал сондир.

IV.9.1-теорема. *Q тўпламда $\cdot$ амалига нисбатан нейтрал элемент ягона.*

Исбот. Фараз қилайлик иккита нейтрал элемент мавжуд бўлсин, яъни $\forall a \in Q$ $a \neq 0$ учун $ax_1 = x_1 \cdot a = a$ ва $ax_2 = x_2 a = a$ бўлсин. У ҳолда хусусан, биринчи тенгликдаги a ни x_2 билан, иккинчи тенгликдаги a ни x_1 билан алмаштирсак $x_2 \cdot x_1 = x_1 \cdot x_2 = x_2$ ва $x_1 x_2 = x_2 x_1 = x_1$ тенгликлар ҳосил бўлади. У ҳолда $x_1 = x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1 = x_2$.

Бундан кейин $x_1 = x_2$ ни e орқали белгилаймиз.

IV.9.2-теорема. *$\forall a \in Q$ учун $a \cdot 0 = 0$.*

Исботи равшан.

Хусусан, $e \cdot 0 = 0 \cdot e = 0$.

10-аксиомага асосан $\forall a \neq 0,\ a \in Q$ учун $ay = e$ тенглама ечимга эга. Яъни, $a \cdot y = y \cdot a = e$ тенгликни қаноатлантирадиган рационал сон мавжуд. х ни а га *тескари рационал сон* деб атаймиз.

IV.9.3-теорема. *$\forall a \in Q, a \neq 0$ рационал сон учун ягона тескари рационал сон мавжуд.*

Исбот. Фараз қилайлик, $ay_1 = y_1 a = e$ ва $ay_2 = y_2 a = e$ бўлсин. У ҳолда $y_1 = y_1 \cdot e = y_1 \cdot (ay_2) = (y_1 \cdot a) \cdot y_2 = e \cdot y_2 = y_2$.

Келгусида $a \neq 0$ рационал сонга тескари сонни a^{-1} ёки $\dfrac{1}{a}$ орқали белгилаймиз.

IV.9.4-теорема. *$\forall a \neq 0,\ a \in Q$ ва $\forall b \in Q$ элементлар учун $ax = b$ тенглама ягона ечимга эга.*

Исбот. $\forall a,b \in Q$ $a \neq 0$ рационал сонлар учун $ax = b$ тенглама ечими мавжудлиги 10-аксиомада кафолатланган. Ечим ягоналагини исботлаймиз. $ax_1 = b$, $ax_2 = b$ бўлсин, у ҳолда $ax_1 - ax_2 = 0 \Rightarrow (a(x_1 - x_2) = 0) \wedge (a \neq 0) \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$.

$\forall a,b \in Q$, $b \neq 0$ рационал сонлар учун $a \cdot b^{-1}$ сонни $\frac{a}{b}$ кўринишда белгилаймиз ҳамда уни *a ва b рационал сонларнинг нисбати* деймиз.

IV.9.5-теорема. *Ҳар бир рационал сон иккита бутун сон нисбатига тенг. Яъни $\forall a \in Q$ учун $\exists m,n \in Z$, $n \neq 0$ бўлиб, $a = \frac{m}{n}$.*

Агар $\exists l,k \in Z$, $k \neq 0$ бўлиб, $a = \frac{l}{k}$ бўлса, $m \cdot k = k \cdot n$.

Исбот. Иккита бутун сон нисбати кўринишида ифодалаш мумкин бўлган барча рационал сонлар тўпламини M орқали белгилаймиз. $\forall z \in Z$ учун $z = z \cdot 1 = z \cdot 1^{-1} = \frac{z}{1} \in M$. Демак, $M \subset Q$.

Агар $\frac{m}{n}, \frac{k}{l} \in M$, $\frac{k}{l} \neq 0$

$\frac{m}{n} \cdot (\frac{k}{l})^{-1} = \frac{m}{n} \cdot \frac{l}{k} = \frac{m \cdot l}{n \cdot k} \in M$. У ҳолда $M = Q$.

Энди $\frac{m}{n} = \frac{k}{l}$ бўлсин, у ҳолда $\frac{m}{n} \cdot n = \frac{k}{l} \cdot n \Rightarrow m = \frac{k \cdot n}{l} \Rightarrow ml = \frac{k \cdot n}{l} \cdot l \Rightarrow$
$\Rightarrow ml = kn$.

$\forall \frac{m}{n} \in Q$ учун $m \cdot n \in N$ бўлса, бу *рационал сон мусбат* дейилади. Барча мусбат рационал сонлар тўпламини Q^+ орқали белгилаб оламиз.

$\forall a,b \in Q$ учун $a - b \in Q^+$ бўлса, $a > b$ деймиз. Бу муносабат Q да *қатъий чизиқли тартиб муносабат* дейилади.

Ҳақиқатдан ҳам, $\forall a \in Q$ учун $a - a = 0 \notin Q^+$ демак, $\rceil(a > a)$.

$\forall a,b \in Q$ учун $a - b \in Q^+$ бўлса, шундан $m,n,k,l \in Z$ топилиб, $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{k}{l}$ ва $a - b = \frac{m \cdot l - n \cdot k}{n \cdot l}$ бўлиб, $(m \cdot l - n \cdot k) \cdot nl \in N$. У ҳолда $b - a = \frac{n \cdot k - ml}{n \cdot l}$, $(nk - ml) \cdot nl \notin N$. Яъни, $>$ муносабат антисимметрик муносабатдир. $>$ муносабат транзитив бўлиши ҳам бевосита текширилади.

$a - b = \frac{ml - n \cdot k}{n \cdot l}$ учун $(ml - n \cdot k) \cdot nl \in N$ бўлса, $b - a = \frac{mk - ml}{n \cdot l}$ учун $(n \cdot k - ml)nl = -(ml - n \cdot k) \cdot n \cdot l \notin N$.

Демак $a \neq b$ бўлса $a - b \in Q^+$ ёки $b - a \in Q^+$. Яъни, $a > b$ ёки $b > a$ бўлади.

Бу тартиб муносабат Q рационал сонлар майдонини архимедча тартиблайди ва бутун сонлар ҳалқасидаги тартиб муносабатнинг давоми бўлади.

Шундай қилиб қуйидаги теорема ўринли.

IV.9.6-теорема. $(Q;+,\cdot 0,1;>)$ *алгебраик система қатъий чизиқли, архимедча тартибланган майдон бўлиб, $>$ тартиб муносабат бутун сонлар ҳалқасидаги тартиб муносабатини давом эттирадиган тартиб муносабатдир.*

IV.9.7-таъриф. $(a \geq b) <=> (a > b) \vee (a = b)$;

агар $a > b$ бўлса $b < a$ деймиз;

$(b \leq a) <=> (b < a) \vee (b = a)$.

$\geq, \leq$ тартиб муносабатлар Q да *ноқатъий тартиб муносабат*дир.

Рационал сонлар аксиоматик назариясининг зидсизлиги

IV.9.8-теорема. *Рационал сонлар аксиоматик назарияси зидсиз аксиоматик назариядир.*

Юқорида бутун сонлар ҳалқасининг минимал кенгайтмаси бўлган майдон қуриш усулини кўриб чиққан эдик. Хосил бўлган майдонда рационал сонлар аксиоматик назариясининг барча аксиомалари ўринли бўлади. Яъни, майдон рационал сонлар аксиоматик назариясининг модели бўлади.

Рационал сонлар аксиоматик назариясининг қатъийлиги

IV.9.9-теорема. *Рационал сонлар аксиоматик назарияси қатъий аксиоматик назариядир.*

Исбот. $(Q_1;+,\cdot)(Q;\oplus,\odot)$ майдонлар рационал сонлар аксиоматик назарияси учун иккита турли моделлар бўлсин.

Фараз қилайлик, Z_1, Z_2 лар бутун сонлар аксиоматик назариясининг иккита ҳар хил моделлари бўлиб, $Z_1 \subset Q$ ва $Z_2 \subset Q_2$ бўлсин. $\varphi : Z_1 \to Z_2$ изоморфизм бўлсин. $\forall r \in Q_1$ учун $\exists p,q \in Z_1, q \neq 0,\ r = \frac{p}{q}$ бўлса $\Phi(r) = \Phi(\frac{p}{q}) = \frac{\varphi(p)}{\varphi(q)}$ акслантириш $(Q_1;+,\cdot)$ ни $(Q_2;+,\cdot)$ га изоморф акслантиради.

1) Φ – биектив акслантириш бўлиши φ нинг биектив акслантириш бўлишидан бевосита келиб чиқади.

2) $\forall r_1, r_2 \in Q$ учун $\exists m,n,l,k \in Z,\ n \neq 0,\ r_1 = \frac{m}{n},\ r_2 = \frac{l}{k}$ бўлсин.

У ҳолда $\Phi(\frac{m}{n} + \frac{l}{k}) = \Phi(\frac{mk + nl}{nk}) = \frac{\varphi(mk + nl)}{\varphi(nk)} = \frac{\varphi(mk) + \varphi(n \cdot l)}{\varphi(n)\varphi(k)} =$

$$= \frac{\varphi(m)\varphi(k) + \varphi(n)\varphi(l)}{\varphi(n)\varphi(k)} = \frac{\varphi(m)}{\varphi(n)} + \frac{\varphi(l)}{\varphi(k)} = \Phi(\frac{m}{n}) + \Phi(\frac{l}{k}).$$

$\Phi(r_1 \cdot r_2) = \Phi(r_1) \cdot \Phi(r_2)$ бўлиши ҳам юқоридагидек исбот қилинади.

Такрорлаш учун саволлар

Рационал сонлар аксиоматик назариясининг бошланғич тушунчаларини айтинг.

Рационал сонлар аксиоматик назариясининг аксиомаларини шарҳланг.

Рационал сонлар тўпламининг асосий хоссаларини баён қилинг.

Рационал сонлар аксиоматик назариясинингзидсизлигини исботланг.

Рационал сонлар аксиоматик назариясинингқатъийлигини исботланг.

Машқлар

Рационал сонлар майдонида $x^2 = 2$ тенглама

Ҳар қандай $\alpha \in Q$ сон учун ягона $a \in Z$ сон мавжудки, $a \le \alpha < a+1$ эканлигини исботланг.

Қуйидагиларни исботланг:

1) рационал сонлар майдонида «>»-тартиб муносабати қуйидаги шартлар орқали аниқланади:

$\forall a, b \in Q$ учун $a > b \Rightarrow a \ne b$;

$\forall a, b, c \in Q$ учун $a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$;

$\forall a, b, c \in Q$ учун $a > b \Rightarrow a + c > b + c$;

$\forall a, b \in Q$ учун $a \ne b \Rightarrow a > b \vee b > a$;

$1 > 0$.

2) юқорида келтирилган шартларнинг ҳеч бири қолганлари орқали ифодаланмайди.

IV.10-§. Ҳақиқий сонлар майдони.

IV.10.1-таъриф. *Ҳар қандай фундаментал кетма-кетлик яқинлашувчи бўладиган тартибланган майдон тўлиқ майдон дейилади.*

IV.10.2-таъриф. *Архимедчасига тартибланган тўлиқ майдон ҳақиқий сонлар майдони дейилади.*

Ҳақиқий сонлар майдонини рационал сонлар майдонидан фойдаланиб қуриш схемасини берамиз. Q- рационал сонлар майдони, N-натурал сонлар системаси бўлсин. Q^N тўплам ҳадлари рационал сонлардан иборат бўлган $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ кўринишдаги барча кетма-кетликлардан ҳосил қилинган тўпламдир.

Q^N тўпламдаги $\forall \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементлар учун $\forall \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \oplus \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \odot \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$

$\ominus \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$\{1\} = \{e_k\}_{k=1}^{\infty}, \forall k \in N$ учун $e_k = 1$ тенглик орқали мос равишда кетма-кетликларни қўшиш, кўпайтириш, карма-каршисини олиш, бирлик элементини ажратиш амаллари аниқланади.

P орқали Q^N тўпламдаги барча фундаментал кетма-кетликлар тўпламини белгилаймиз. Q –майдонда норма сифатида соннинг абсолют қиймати олинади. $(P,\oplus,\otimes,\Theta,1)$-алгебра коммутатив ҳалқа бўлиши бевосита текширилади. P тўпламдан $(\{a_n\}\sim\{b_n\})\Leftrightarrow(\{a_n-b_n\}\to 0)$ эквивалентлик муносабати орқали P/N фактор-тўплам ҳосил қиламиз.

Бу тўпламни R_1 орқали белгилаймиз. $\forall[\{a_n\}_{n=1}^{\infty}]$ $[\{b_n\}_{n=1}^{\infty}]\in R_1$ элементлари учун $[\{a_n\}_{n=1}^{\infty}]+[\{b_n\}_{n=1}^{\infty}]=[\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty}]$ $[\{a_n\}_{n=1}^{\infty}]\cdot[\{b_n\}_{n=1}^{\infty}]=[\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}]$, $-[\{a_n\}_{n=1}^{\infty}]=[\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}]$ $1=[1]$ орқали +, ·, -, бирлик элементни ажратиш амалларини аниқлаймиз. $(R_1;+,\cdot,-,1)$ алгебра майдон бўлади (исбот қилинг).

Агар $[\{a_n\}_{n=1}^{\infty}]$ $[\{b_n\}_{n=1}^{\infty}]\in R_1$ элементлар учун шундай $n_0\in N$ ва шундай мусбат ε рационал сон топилиб, барча $k>n_0, k\in N$ натурал сонлар учун $a_k-b_k>\varepsilon$ шарт бажарилса $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}<\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$. Агар $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}<\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ бўлса, $[\{a_n\}_{n=1}^{\infty}]<[\{b_n\}_{n=1}^{\infty}]$ деб ҳисоблаймиз. < муносабат R_1да тартиб муносабат бўлиб, $(R_1;+,\cdot,-,1;<)$ алгебраик система архимедча тартибланган тўлиқ майдон бўлади.

Такрорлаш учун саволлар

Фундаментал кетма-кетлик таърифини айтинг.
Яқинлашувчи кетма-кетлик нима?
Майдон таърифини айтинг.
Тўлиқ майдон деб нимага айтилади.
Ҳақиқий сонлар майдонини қуринг.

Машқлар

Ҳақиқий сонлар жуфтликларидан иборат бўлган P тўпламда қўшиш ва кўпайтириш амаллари қуйидагича аниқланган:
$(a,b)\oplus(a',b')=(a+a',b+b')$;
$(a,b)\otimes(a',b')=(aa'-bb',ab'+a'b)$.
$(P;\oplus,\otimes)$ майдон ташкил этишини исботланг.

Дедекинд усулида ҳақиқий сонлар майдонини қуринг.

Ҳақиқий сонлар майдонида тартиб муносабатини аниқланг.

Ҳар қандай ҳақиқий сон рационал сонлар кетма-кетлигининг лимити эканлигини исботланг.

Ҳар қандай фундаментал кетма-кетлик яқинлашувчи кетма-кетлик бўлишини исботланг.

Яқинлашувчи бўлмаган фундаментал кетма-кетликка мисол келтиринг.

IV.11-§. Ҳақиқий сонларнинг аксиоматик назарияси.

Асосий тушунчалар, белгилашлар

R –ҳақиқий сонлар тўплами.

$+, \cdot - R$ тўпламдаги бинар алгебраик амаллар.

$0, 1$ - R тўпламдаги ажратилган элементлар.

$<$ - R даги бинар муносабат.

Ҳақиқий сонлар назариясининг аксиомалари:

1. $\forall \alpha, \beta \in R$ учун $\exists! \ \gamma \in R \quad \alpha + \beta = \gamma$, яъни R да қўшиш амали бир қийматли аниқланган.
2. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in R$ учун $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$- қўшиш амали ассоциатив.
3. $\forall \alpha, \beta \in R$ учун $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ - қўшиш амали коммутатив.
4. $0 \in R$, $\forall \alpha \in R$ учун $\alpha + 0 = 0$ - нолни аниқлаш.
5. $\forall \alpha \in R$ учун $\exists \alpha' \in R$ бўлиб, $\alpha + \alpha' = 0$ бўлади, яъни ихтиёрий ҳақиқий сон учун унга қарама-қарши бўлган ҳақиқий сон мавжуд.
6. $\forall \alpha, \beta \in R$ учун $\exists! \gamma \in R \quad \alpha \cdot \beta = \gamma$ кўпайтириш амалини бир қийматли аниқлаш.
7. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in R$ учун $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ кўпайтириш амалининг ассоцативлиги.
8. $\forall \alpha, \beta \in R$ учун $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ - кўпайтириш амали коммутатив.
9. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in R$ учун $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ - кўпайтириш амалининг қўшиш амалига нисбатан дистрибутивлиги.
10. $1 \in R \wedge 1 \neq 0$ ҳақиқий сонлар майдонида камида иккита ҳар хил элемент мавжуд.
11. $\alpha \in R$ учун $\alpha \cdot 1 = \alpha$ -бирнинг хоссаси.
12. $\alpha \in R \wedge \alpha \neq 0$ учун $\exists \alpha' \in R \quad \alpha' \cdot \alpha = 1$ нолдан фарқли ҳар қандай хақиқй сонга тескари бўлган ҳақиқий сон мавжуд.
13. $\forall \alpha, \beta \in R$ учун $\alpha \neq \beta \Rightarrow \alpha < \beta \vee \beta < \alpha -$ $<$ - муносабатнинг чизиқлилиги.
14. $\forall \alpha \in R$ учун $\rceil(a < a)$– $<$ нинг антирефлексивлиги.
15. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in R$ учун $(\alpha < \beta) \wedge (\beta < \gamma) \Rightarrow \alpha < \gamma$ $-<$ муносабатнинг транзативлиги.
16. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in R$ учун $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma$ $-<$- муносабатнинг қўшиш амалига нисбатан монотонлиги.
17. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in R$ учун $\alpha < \beta \wedge 0 < \gamma$ бўлса, $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$ $-<$- муносабатнинг кўпайтириш амалига нисбатан монотонлиги .
18. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in R$, $0 < \alpha \wedge 0 < \gamma$ учун $\exists n \in N$ бўлиб, $a < nb$.

19. Элементлари ҳакикий сонлардан иборат бўлган ҳар кандай $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментал кетма-кетлик R да яқинлашувчи кетма-кетлик бўлади. Яъни, $\exists a \in R$ бўлиб, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Ҳақиқий сонлар аксиоматик назариясининг зидсизлиги.

Рационал сонлар майдони орқали ҳақиқий сонлар майдонини қуриш схемасини олдинги параграфларда кўриб чиққан эдик. Натижада ҳосил қилинган $(R_1;+,\cdot,-,1;<)$ алгебраик система ҳақиқий сонлар назарияси учун модел вазифасини бажаради. Демак, ҳақиқий сонлар аксиоматик назарияси зидсиз аксиоматик назариядир.

Ҳақиқий сонларнинг хоссалари.

Ҳар қандай ҳақиқий сонлар системаси рационал сонлар майдонига изоморф бўлган майдоностига эга эканлиги маълум. Бу майдоностида рационал сонлар майдонининг барча аксиомалари бажарилади. Демак, ҳақиқий сонлар майдонини рационал сонлар майдонининг ҳар қандай фундаментал кетма-кетлиги лимитга эга бўладиган кенгайтмаси сифатида қарашимиз мумкин.

IV.11.1-теорема. *Ҳар қандай ҳақиқий сон ҳадлари рационал сонлардан иборат кетма-кетлик лимитидан иборатдир.*

Исбот. $\forall r \in R$ учун $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}, \forall n \in N$ учун $r_n = r$ стационар кетма-кетликни мос қўямиз. У ҳолда, ҳадлари рационал сонлардан иборат шундай $\{\alpha_n\}$ кетма-кетлик мавжуд бўлиб, $\lim\limits_{n\to\infty}\{\alpha_n - r_n\}_{n=1}^{\infty} = 0$ бўлади. Демак, $\lim\limits_{n\to\infty}\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} = \lim\limits_{n\to\infty}\{r_n\}_{n=1}^{\infty} = r$.

IV.11.2-теорема. $\forall \alpha \in R, \forall n \in N$ *учун агар* $\alpha \geq 0$ *бўлса, шундай* $\beta \geq 0$, $\beta \in R$ *ҳақиқий сон мавжуд бўлиб,* $\beta^n = \alpha$ *бўлади.*

Исбот. α-ҳақиқий сон учун ҳадлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлган шундай $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментал кетма-кетлик мавжуд. $\lim\limits_{n\to\infty}\{\alpha^k{}_n\} = \alpha$, у ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty}\{\alpha_n\} = \beta$ бўлса, $\beta^n = \alpha$ бўлади.

IV.11.3-теорема. *Ҳақиқий сонлар майдонини фақат битта усулда қатъий чизиқли тартиблаш мумкин.*

Математик анализ курсида исботланган қуйидаги теоремани келтирамиз:

IV.11.4-теорема. (кесим ҳақидаги теорема). *Ҳақиқий сонлар тўплами қуйидаги шартларни қаноатлантирадиган иккита A ва B эквивалентлик синфларига ажралган бўлсин:*

1. $A = \varnothing \wedge B = \varnothing$;

2. $A \cup B = R$;

3. $A \cap B = \varnothing$;

4. $\forall \alpha \in A$ *ва* $\forall \beta \in B$ *учун* $\alpha < \beta$. *У ҳолда ёки A синфида энг катта элемент* γ *мавжуд ёки B синфида энг кичик элемент мавжуд.*

Ҳақиқий аксиоматик назариясининг қатъийлиги

IV.11.5-теорема. *Ҳақиқий сонлар аксиоматик назарияси қатъий назариядир.*

Исбот. $(R,+,\cdot,0,>)$ $(R,\oplus,\otimes,0,>_1)$ ҳақиқий сонлар аксиоматик назарияси учун иккита модел бўлсин. Q ва Q_1 лар мос равишда бу системалардаги рационал сонлар майдони бўлсин. Рационал сонлар аксиоматик назарияси қатъий аксиоматик назария бўлгани учун $Q \cong Q_1$.

$\phi : Q \rightarrow Q_1$ акслантириш улар орасидаги изоморфизм бўлсин. У ҳолда, агар $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетлик Q да фундаментал кетма-кетлик бўлса, унинг образи бўлган $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетлик ҳам фундаментал кетма-кетлик бўлиб, унинг лимити мавжуд. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ нинг лимитига $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ нинг лимитини мос қўйган R ва R_1 моделлар орасида изоморфизм ўрнатган бўламиз. Бу акслантириш ҳақиқатдан биектив акслантириш бўлиб, ҳамма амалларни ва $<$ муносабатни сақлайди (текшириб кўринг).

Такрорлаш учун саволлар

Ҳақиқий сонлар аксиоматик назариясининг асосий тушунчаларини айтинг.

Ҳақиқий сонлар аксиоматик назариясининг аксиомаларини баён қилинг.

Ҳақиқий сонларнинг хоссаларини айтинг.

Ҳақиқий сонлар аксиоматик назариясининг хоссаларини баён қилинг.

Машқлар

Ҳар қандай $\alpha,\beta,r,q \wedge \alpha>0,\beta>0$ ҳақиқий сонлар учун қуйидагиларни исботланг:

1) $\alpha^r > 0$;

2) $\alpha^r \cdot \alpha^q = \alpha^{r+q}$;

3) $(\alpha^r)^q = \alpha^{rq}$;

4) $(\alpha\beta)^r = \alpha^r \cdot \beta^r$.

Икки, тўрт, саккиз, тўққиз элементли майдонга мисоллар келтиринг.

Ихтиёрий p туб сон учун элементлари сони p га тенг майдон мавжудлигини исботланг.

p туб ва n натурал сон учун элементлари сони p^n га тенг бўлган майдон мавжудлигини исботланг.

$\alpha,\beta \in R, \alpha>0,\beta>0$ сонлар ва $r \in Q, r>0$ сон учун $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha^r > \beta^r$. Исботланг.

$\alpha \in R, \alpha>1 \wedge r,q \in Q$ сонлар $r>q \Leftrightarrow \alpha^r > \alpha^q$ бўлишини исботланг.

$a,b,c,d \in R \wedge a>0, b>0, n \in N$ сонлар учун $0<c<a^n<d$ ва $0<c<b^n<d$ бўлса, у ҳолда қуйидагиларни исботланг:

1) $a^n - b^n < (a-b)nd^{\frac{n-1}{n}}$;

2) $a - b < \dfrac{a^n - b^n}{nc^{\frac{n-1}{n}}}$.

IV.12-§. Систематик сонлар

Бутун систематик сонлар

Бирдан катта g натурал сонлар учун 0,1,2,3,4,....,g-1 натурал сонларни g *асосли саноқ системасининг рақамлари* деб атаймиз. Агар a натурал сон ва $a_0, a_1, a_2, ..., a_m \in \{0,1,2,3,..., g-1\}$ рақамлар учун $a = a_0 g^m + a_1 g^{m-1} + ... + a_{m-1} g + a_m$ тенглик ўринли бўлса, a натурал сон g асосли саноқ системасида ёзилган деймиз ва $a = (a_0, a_1, ..., a_m)_g$ кўринишда белгилаймиз.

Масалан, $a = (321)_{10} = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1$ - 10 асосли саноқ системада ёзилган. $b = (1011)_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 8 + 2 + 1 = (11)_2$ сон 2 лик саноқ системасида ёзилган.

IV.12.1-теорема. *Агар 0,1,2,3,4,....,g-1 бутун сонлар g асосли саноқ системасининг рақамлари бўлса, ҳар қандай натурал сон* $a = a_0 g^m + a_1 g^{m-1} + ... + a_{m-1} g + a_m$ *кўринишда бир қийматли ифодаланади.*

Исбот. Математик индукция билан исботлаймиз.

Агар $a<g$ бўлса, a g асосли саноқ системасининг рақами бўлиб, бу ифода бир қийматли аниқланади. Фараз қилайлик, барча a дан кичик сонлар учун теорема ўринли бўлсин, у ҳолда қолдиқли бўлиш ҳақидаги теоремага асосан шундай ягона бир жуфт b ва r манфиймас бутун сонлар мавжуд бўлиб, $a = g \cdot b + r$, $0 \le r < g$ шарт бажарилади. Индукция фаразига кўра, шундай $a_0, a_1, ..., a_{m-1}$ рақамлар топилиб, $b = a_0 g^{m-1} + a_1 g^{m-2} + ... + a_{m-2} g + a_{m-1}$ бўлади. У ҳолда $a = a_0 g^m + a_1 g^{m-1} + ... + a_{m-1} g + a_m + r$, $r < g$ бўлгани учун r рақам. Демак, r ни a_m орқали белгиласак, $a = a_0 g^m + a_1 g^{m-1} + ... + a_{m-1} g + a_m$. Бу ифода бир қийматли аниқланганлиги индукция фарази ва қолдиқли бўлиш ҳақидаги теоремадан келиб чиқади.

Агар $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетлик ҳақиқий сонлар майдони элементлари бўлса, $S_n = \sum_{x=0}^{n} a_x$ орқали $a_0 + a_1 + ... + a_n$ йиғинди белгиланади. $\sum_{x=0}^{\infty} a_x$ ифода эса *қатор* дейилади. Агар $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб, $\lim_{n\to\infty} S_n = \alpha$ бўлса, α сони *қаторнинг йиғиндиси* дейилади ва $\sum_{x=0}^{\infty} a_x = \alpha$ деб ёзилади.

IV.12.2-теорема. *Агар g бирдан катта бутун сон бўлса,* $1+\frac{1}{g}+\frac{1}{g^2}+\frac{1}{g^3}+\ldots=\sum_{x=0}^{\infty} g^{-x}=\frac{g}{g-1}$.

Исбот. $S=\frac{1}{1-\frac{1}{g}}=\frac{g}{g-1}$.

IV.12.3-теорема. *Агар g-бирдан катта бутун сон бўлиб, ҳадлари бутун сондан иборат бўлган $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетлик учун $0\le a_n$ шарт бажарилса, қуйидаги тасдиқлар ўринли:*

1. $\sum_{x=0}^{\infty} a_n g^{-n}$ *қатор яқинлашувчи қатор бўлади.*

2. Агар α юқорида айтилган қаторнинг йиғиндиси бўлса, $a_0\le 0\le a_0+1$.

3. $\alpha=a_0+1$ *бўлиши учун* $a_n=g-1$ $n=0,1,2,3\ldots$*тенглик ўринли бўлиши зарур ва етарли.*

Исбот.

$$\sum_{x=0}^{\infty} a_n g^{-n}=a_0+\frac{a_1}{g}+\frac{a_2}{g^2}+\ldots+\frac{a_n}{g^{-n}}+\ldots. \quad <a_0+\frac{g-1}{g}+\frac{g-1}{g^2}+\ldots+\frac{g-1}{g^{-n}}+\ldots.=$$

$$=a_0+\frac{\frac{g-1}{g}}{1-\frac{1}{g}}=a_0+1.$$

Демак, $\sum_{x=0}^{\infty} a_n g^{-n}$ қатор яқинлашувчи қатордир. Агар α бу қатор йиғиндиси бўлса, $a_0<\alpha<a_0+1$ бўлиши аён.

IV.12.4-теорема. *Агар g бирдан катта бутун сон бўлса, ҳар қандай α мусбат ҳақиқий сон* $\alpha=g^n\sum_{x\ge 0}^{\infty} a_x\cdot g^{-x}$ *кўринишда ягона усулда ифода қилинади.*

Исбот. Олдин исбот қилинган теоремага асосан

$$a_o<\sum_{x=0}^{\infty} a_x g^{-x}<a_0+1.$$

Фараз қилайлик $\alpha=g^n\sum_{x=0}^{\infty} a_x g^{-x}$ бўлсин. У ҳолда $g^n\le\alpha<g^{n+1}$. Агар α ҳақиқий сон берилган бўлса бу тенгсизлик орқали n бир қийматли аниқланади, демак a_0 ҳам бир қийматли аниқланган.

Агар $g^m(g^{-n}\alpha-\sum_{x=0}^{\infty} a_x g^{-x})=\sum_{x=m}^{\infty} a_x g^{-x+m}$ тенглик тўғрилигини эътиборга олсак

$$a_m\le g^m(g^{-n}\alpha-\sum_{x=0}^{m-1} a_x g^{-x})<a_m+1$$

келиб чиқади. Бундан эса $a_0,...,a_{m-1}$ аниқланган деб фараз қилсак a_m ҳам бир қийматли аниқланиши келиб чиқади. Фараз қилайлик $n,a_0,a_1,...$ сонлар аниқланган бўлсин. У ҳолда

$$a_m g^{-m+n} \le (\alpha - g^n \sum_{x=0}^{m-1} a_x g^{-x}) < a_m + 1 .$$

Демак,

$$\alpha = g^n \sum_{x=0}^{\infty} a_x g^{-x} .$$

IV.12.5-натижа. *Агар* α *– манфий сон бўлса,* $\alpha = -g^n \sum_{x=0}^{\infty} a_x g^{-x}$, *агар* $\alpha = 0$ *бўлса,* $n = 0$ *ва* $a_0 = a_1 = a_2 = ... = 0$.

Агар $\alpha \ne 0, n$ ва a_x лар бутун сонлардан иборат бўлиб, $a_0 > 0$ ва $\forall x \in \{0,1,2,...\}$ учун $0 \le a_x \le g-1$. Ундан ташқари, шундай n_0 натурал сон топилиб, ҳар қандай $x > n_0$ учун $a_x = g-1$ бўлади.

Такрорлаш учун саволлар

g асосли систематик сон деб нимага айтилади?

g асосли систематик сонни ифодалашда қандай рақамлар қатнашади?

Ҳар қандай натурал сон g асосли систематик сон сифатида бир қийматли ифодаланишини исботланг.

Қаторнинг йиғиндиси деб нимага айтилади?

Машқлар

Еттилик саноқ системасида қўшиш ва кўпайтириш амалларининг жадвалини тузинг.

5378 сонни 6 асосли саноқ системасида ёзинг.

а натурал сонни n асосдан m ва k асосга ўтказинг:

a = 124352 ; n = 6 ; m = 7 ; k = 12 .
a = 675438 ; n = 9 ; m = 5 ; k = 11 .
a = 8709546 ; n = 11 ; m = 3 ; k = 13 .
a = 6738(10)4 ; n = 12 ; m = 2 ; k = 14 .

IV.13-§. p-адик сонлар системаси

p-адик сонлар майдони

Ихтиёрий бирдан катта натурал n сон учун барча бирдан чиқарилган n– даражали комплекс илдизлар тўплами мультипликатив группа бўлиши алгебра курсидан маълум. Агар бирорта туб сон p учун бирдан чиқарилган p^n даражали илдизлар тўплами, яратувчи элементи $a_n = \cos\frac{2\pi}{p^n} + i\sin\frac{2\pi}{p^n}$ дан

иборат циклик группа бўлади. Биз циклик группани $< a_n >$ орқали белгиласак $\bigcup_{n=1}^{\infty} < a_n >$ йиғинди ҳам мультпликатив группа бўлиб, бу *группа p^{∞} типда* дейилади. a_n – сонлар системаси бу группанинг яратувчи элементлари системаси бўлади. У ҳолда $a_1^{p^1} = 1,\ a_2^{p^2} = 1, \ldots a_n^{p^n} = 1$ ва демак
$$a_{n+1}^p = (\cos\frac{2\pi}{p^{n+1}} + i\sin\frac{2\pi}{p^{n+1}})^p = \cos\frac{2\pi \cdot p}{p^{n+1}} + i\sin\frac{2\pi \cdot p}{p^{n+1}} = \cos\frac{2\pi}{p^n} + i\sin\frac{2\pi}{p^n} = a_n,$$
яъни $a_{n+1}^p = a_n$ (1)

Бу группани G_{p^∞} орқали белгилаб оламиз.

G_{p^∞} группанинг барча эндоморфизмлари тўпламини топамиз. Агар $\varphi : G_{p^\infty} \to G_{p^\infty}$ эндоморфимз бўлса, бу эндоморфизм яратувчи элементлар образлари орқали тўлиқ аниқланади. Ҳақиқатдан ҳам, $\varphi(a_n^k) = k\varphi(a_n)$(2)

a_n -яратувчи элементнинг тартиби p^n бўлганидан $\varphi(a_n)$ нинг тартиби ҳам p^n – дан ошмаслиги келиб чиқади. Лекин тартиби p^n дан ошмайдиган элементлар $< a_n >$ га тегишли, у ҳолда, шундай k_n бутун сон мавжуд бўлиб $\varphi(a_n) = a_n^{k_n}$, $n = 1, 2 \ldots$, $0 \le k_n < p^n$ (3)

φ – эндоморфизм бўлгани учун (1) тенгликдан $\varphi(a_{n+1})^p = \varphi(a_n)$(4) келиб чиқади. У холда $(a_{n+1}^{k_{n+1}})^p = a_n^{k_{n+1}} = a_n^{k_n}$. Бундан эса $(k_{n+1} - k_n) \vdots p^n$ келиб чиқади. Яъни $k_{n+1} \equiv k_n \bmod(p^n)$ (5).

Шундай қилиб, ҳар бир эндоморфизм учун (3) ва (5) шартни қаноатлантирувчи манфий бўлмаган $(k_1, k_2 \ldots, k_n, \ldots)$ (6)
кетма-кетликни мос қўйиш мумкин. Бу мослик биектив мосликдир (исбот қилиб кўринг).

(3) ва (5) шартларни қаноатлантирувчи бундай кетма-кетликлар тўплами кетма-кетликларни мос элементларини ҳадма-ҳад қўшиш ва ҳадма-ҳад кўпайтириш амалларига нисбатан халқа ҳосил қилади.

Ҳақиқатдан ҳам, шу тоифадаги иккита $(k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots)$ $(m_1, \ldots, m_k, \ldots)$ кетма-кетликлар берилган бўлсин. $(k_1 + m_1,\ k_2 + m_2, \ldots, k_n + m_n, \ldots)$ кетма-кетлик ҳам (3) ва (5) шартларни қаноатлантиришини кўрсатамиз.

$0 \equiv k_n + m_n \le p^{k_n + m_n}$; $k_{n+1} \equiv k_n (\bmod p^n)$ ва $m_{n+1} \equiv m_n (\bmod p^n)$, у ҳолда, $k_{n+1} + m_{n+1} \equiv k_n + m_n (\bmod p^n)$.

Шунга ўхшаш $(k_1 \cdot m_1, k_2 \cdot m_2, \ldots, k_n \cdot m_n, \ldots)$ кетма-кетлик учун $k_{n+1} \cdot m_{n+1} \equiv k_n \cdot m_n (\bmod p^n)$ ўринли.

(1, 1, ...) кетма-кетлик халқанинг бирлик элементи, (0, 0, ...) кетма-кетлик эса халқанинг ноли бўлади. Бу халқа ассоциатив, коммутатив, бирлик элементга эга, нолнинг бўлувчилари йўқ бўлган халқадир.

p-адик сонларни ўзимизга қулай бўлган бошқа кўринишда ёзиб олишимиз мумкин.

Агар $a_0 = k_1, a_n = \dfrac{k_{n+1} - k_n}{p^n}$, $n = 1,2,...$ (8)

деб олсак, барча a_n лар $p-$ модул бўйича мусбат чегирмалардан иборат, яъни

$$0 \le a_n < p, \ n = 0,1,... \ (9)$$

(8) га асосан

$$k_n = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + ... + a_{n-1} p^{n-1}, n = 1,2,... \ (9)$$

У ҳолда ихтиёрий α p-адик сонга (8), (9) шартларни қаноатлантирадиган $a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + ... + a_n p^\alpha + ...$ чексиз қаторни мос қўйишимиз мумкин. Бу мослик биектив мослик бўлиб, бундай қаторлар устида + ва $\cdot$ амаллари қуйидагича аниқланиши мумкин.

Агар $\beta = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + ... + \beta_n p^n + ...$ бўлса, у ҳолда $\alpha + \beta = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + ... + c_n p^n + ...$ бўлса,

$$c_0 = a_0 + b_0 - pg_0$$

$$c_n = a_n + b_n + g_{n-1} - pg_n, \ n = 1,2,...$$

$$\alpha \cdot \beta = d_0 + d_1 p + d_2 p^2 + ... + d_n p^n + ...$$

$$d_0 = a_0 b_0 - ps_0, \ d_n = \sum_{k+l=n} a_k b_l + s_{n-1} - ps_n, n = 1,2,...$$

p-адик сонларнинг бундай ифодаланишида $\alpha \cdot \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \vee \beta = 0$ келиб чиқади.

Яъни p-адик сонлар халқасида нолнинг бўлувчилари йўқ. Демак, p-адик сонлар халқаси бутунлик соҳаси бўлиб, унинг нисбатлар майдонини тузиш мумкин. Бу майдон *p-адик сонлар майдони* дейилади.

Бу майдонни қуриш схемасини келтирамиз

$$a_k p^k + a_{k+1} p^{k+1} + ... + a_n p^n + ..., \ k \in \mathrm{Z}, \quad a_n \in \mathrm{Z}p. \ (10)$$

кўринишдаги барча қаторларни қарайлик, бу қаторда чекли сондаги манфий даражали илдизлар бўлиши мумкин. Агар (10) даги ҳамма коэффициентлар нолга тенг бўлса, бу элементни майдоннинг ноли деб ҳисоблаймиз акс ҳолда $a_k \neq 0$ деб ҳисоблаймиз.

(10) кўринишдаги қаторлар устида юқоридагидек + , $\cdot$ амалларини аниқлаймиз. Натижада ҳосил бўлган қаторлар тўплами + , $\cdot$ амалларига нисбатан майдон ҳосил қилади. Бу майдон *p-адик сонлар майдони* дейилади.

$a_k p^k + a_{k+1} p^{k+1} + ... + a_n p^n + ...$ элементга $b_{-k} p^{-k} + b_{-k+1} p^{-k+1} + ... + b_n p^n$ элемент тескари бўлса

$$a_k b_{-k} - p \cdot s_{-k} = 1,$$

$$a_k b_{-k+1} + a_{k+1} b_{-k} + s_{-k} - ps_{-k+1} = 0,$$

$$a_k b_n + a_{k+1} b_{n-1} + ... + a_{n+2k} b_{-k} + s_{n-1} - ps_n = 0$$

тенгликлардан топилади. p туб сон бўлгани учун бу тенгламалар ечимга эга.

$k \geq 0$ бўлган (10) кўринишдаги қаторлар тўплами р-адик сонлар майдонининг р-адик сонлар халқасига изоморф бўлган халқаости бўлади.

Такрорлаш учун саволлар

Группанинг яратувчи элементи деб нимага айтилади?
Циклик группа таърифини айтинг.
p^{∞} типдаги группа қандай группа?
p^{∞} типдаги группанинг яратувчи элементларини кўрсатинг.
p^{∞} типдаги группанинг эндоморфизми қандай аниқланади?
p-адик сонлар қандай ҳосил қилинади?
p-адик сонлар майдонини қуриш схемасини баён этинг.

Машқлар

Бирдан чиқарилган барча комплекс илдизлар тўплами группа ташкил этишини исботланг.

Амалларни бажаринг:

$((351_6 \cdot 14_6 - 1153_6 : 31_6 - 150_6) : 205_6) : 25_6$;
$((215_8 + 532_8) \cdot 16_8 - (11031_8 - 527_8) : 32_8) : 14775_8$;
$(3333_4 + 2222_4) \cdot 12_4 - (231020_4 + 3333333_4) : 23_4$;
$3215_7 \cdot 24_7 - 11461_7 : 25_7 + 1532_7 - 115044_7$;
$120111_3 : 102_3 + (201_3 \cdot 12_3 - 11220_3) \cdot 20110_3$;
$232011_5 : 104_5 + 1234_5 \cdot 322_5 - 122334_5$;
$11111101_2 : 10111_2 + 1100101_2 \cdot 1011_2 - 1010101_2$;
$1141043_5 : 23_5 + 23411_5 \cdot 32_5 - 34231_5$;
$51(10)3406_{11} : 548_{11} + 98(10)12_{11} \cdot 1232_{11} - 234219_{11}$;
$(2032_4 : 22_4 + 33211_4 \cdot 3221_4 - 321121_4) \cdot 21_4$

IV.14-§. р-адик сонлар аксиоматик назарияси

Бошланғич терминлар

1. Q, R, Q_p – мос равишда рационал, ҳақиқий, р-адик сонлар тўплами.
2. $+$ ва $\cdot$ бинар алгебраик амаллар.
3. $>$ бинар муносабат.
4. $0, e$ $p * e - Q$ нинг элементлари, p – туб сон.
5. v, θ мос равишда Q ва Q_p тўпламларни R га акслантиришлар.

Аксиомалар

1. $(R+,\cdot,0,1)$ – ҳақиқий сонлар системаси.
2. $(Q,+,\cdot,0,e)$ – рационал сонлар майдони $p * e - Q$ нинг туб элементи.

3. $(Q,R,v)-$ нормаланган майдон бўлиб, $v-$ р-адик норма, $\{p^n * e\}_n -$ кетма-кетлик v норма бўйича нол кетма-кетликдир.

4. $(Q_p,+,\cdot)-$ майдон.

5. $(Q_p,R,\theta)-$ нормаланган майдон.

6. Q_p майдон Q нинг кенгайтмаси.

7. θ норма v норманинг давоми, яъни $\forall a \in Q$ учун $v(a)=\theta(a)$.

8. Q нинг v норма бўйича фундаментал бўлган ҳар қандай кетма-кетлиги θ норма бўйича Q_p нинг элементига яқинлашади.

9. Минималлик аксиомаси.

Агар $M \subset Q_p$ бўлиб, v норма бўйича Q да фундаментал бўлган ҳар қандай кетма-кетлик θ норма бўйича Q_p нинг элементига яқинлашса, у ҳолда $M=Q_p$ бўлади.

IV.14.1-теорема. *p-адик сонлар аксиоматик назарияси зидсиз аксиоматик назариядир.*

Исботи. Олдинги параграфда р-адик сонлар майдонини қуриш схемаси кўрсатилди. Демак, р-адик сонлар аксиоматик назарияси зидсиз назария экан.

IV.14.2-теорема. *p-адик сонлар аксиоматик назарияси қатъий аксиоматик назариядир.*

Такрорлаш учун саволлар

p-адик сонлар аксиоматик назариясининг бошланғич терминларини айтинг.

p-адик сонлар аксиоматик назариясининг аксиомаларини айтинг.

p-адик сонлар аксиоматик назариясининг минималлик аксиомасини баён этинг.

p-адик сонлар аксиоматик назариясининг қандай хоссаларини биласиз?

Машқлар

p-адик сонлар аксиоматик назариясининг зидсизлигини исботланг.

p-адик сонлар аксиоматик назариясининг қатъийлигини исботланг.

p-адик сонларни қўшиш, кўпайтириш амалларини тушунтиринг.

IV.15-§. Комплекс сонлар системаси

1. Комплекс сонлар майдонини қуриш

Ҳақиқий сонлар майдонининг $x+1=0$ тенглама ечимга эга бўладиган минимал кенгайтмаси *комплекс сонлар майдони* деб тушунилади.

R ҳақиқий сонлар майдони бўлсин, у ҳолда $R^2=R\cdot R$ тўпламда + ва $\cdot$ амалларини қуйидагича аниқлаймиз:

$\forall (a,b), (c,d) \notin R^2$ учун $(a,b)+(c,d)=(a+c, b+d)$,

$$(a,b)\cdot(c,d)=(a\cdot c-b\cdot d,\ ad+bc)$$

бу амалларга нисбатан R^2 тўплам майдон ҳосил қилади. Бу майдон комплекс сонлар майдони.

(1, 0) комплекс сонлар майдонининг бирлик элементи, $(0,1)^2=(-1,0)$. $R*(0)$ тўплам $R\cdot R$ майдоннинг майдоностиси бўлиб, $R-$ ҳақиқий сонлар майдонига изоморфдир. Ҳар қандай $(a,b)\in R\cdot R$ учун $(a,b)=a\cdot(1,0)+b(0,1)$.

Агар $(1,0)$ ни 1 билан $(0,1)$ ни i билан белгиласак $(a,b)=a\cdot 1+bi=a+bi$ бўлади.

Такрорлаш учун саволлар

Комплекс сон деб нимага айтилади?

Майдон таърифини эсланг.

Комплекс сонлар майдонини ҳақиқий сонлар майдонининг кенгайтмаси сифатида қуринг.

Комплекс сонлар майдонида ҳақиқий сонлар майдонига изоморф майдон мавжудлигини исботланг.

М а ш қ л а р

1. Тенгламани ечинг:

1.1. $\bar{z}=5-z$.

1.2. $\bar{z}=-3z-1+2i$.

1.3. $z^2+\bar{z}=1$.

1.4. $z^2-2z\bar{z}-3=3i$.

2. Қуйидаги тенгсизликларни ечинг ва ечимлар тўпламини Декарт координаталар текислигида ифодаланг:

2.1. $|z+2|\geq|z|$.

2.2. $|z-1+i|<|z+1|$.

2.3. $|z-5+i|<4$.

2.4. $|z+1-i|\leq|z-2|$.

3. Ҳисобланг:

3.1. $\sqrt{5+12i}$.

3.2. $\sqrt{5-17i}$.

3.3. $\sqrt{4+11i}$.

3.4. $\sqrt{-22-15i}$.

4. Илдизларни ҳисобланг :

4.1. $\sqrt[8]{\left(\frac{-5+7i}{i}\right)^3}$.

4.2. $\sqrt[3]{-1-2i}$.

4.3. $\sqrt[6]{\dfrac{1-i}{-\sqrt{3}+i}}$.

4.4. $\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}((\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)i)}$.

4.5. $\sqrt[5]{4-5i}$.

IV.16-§. Комплекс сонлар аксиоматик назарияси

Бошланғич терминлар

1. C – комплекс сонлар тўплами.
2. $\oplus$, $\odot$, C даги бинар алгебраик амаллар.
3. $0, 1, i \in C$.
4. $+$, $\cdot$ R - даги алгебраик амаллар.

Комплекс сонлар аксиоматик назариясининг аксиомалари

1. $\forall a,b \in C$ учун $\exists! c \in C$ бўлиб $a \oplus b = c$, яъни комплекс сонлар майдонида $\oplus$ амали бажарилади.

2. $\forall a,b,c \in C$ учун $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$ -комплекс сонларни қўшиш амали ассоциатив амалдир.

3. $\forall a,b \in C$ учун $a \oplus b = b \oplus a$ – комплекс сонларни қўшиш коммутатив.

4. $0 \in C$ бўлиб, ихтиёрий $a \in C$ учун $a + 0 = 0$ – қўшишга нисбатан нейтрал элементнинг ҳоссаси.

5. $\forall a \in C$ учун $\exists a' \in C$ бўлиб, $a + a' = 0$, яъни ихтиёрий комплекс сон учун қарама-қарши комплекс сон мавжуд.

6. $\forall a,b \in C$ учун шундай $\exists! c \in C$ бўлиб, $a \odot b = p$, яъни комплекс сонлар тўпламида комплекс сонларни кўпайтириш амали аниқланган.

7. $\forall a,b,c \in C$ учун $a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$ – кўпайтиришнинг ассоциативлиги.

8. $\forall a,b \in C$ учун $a \cdot b = b \cdot a$ – кўпайтиришнинг коммутативлиги.

9. $\forall a,b,c \in C$ учун $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) + (a \odot c)$ – кўпайтириш амалининг $\oplus$ амалига нисбатан дистрибутивлиги.

10. $1 \in C \wedge 1 \neq 0$ ва $\forall a \in C$ $a \cdot 1 = a$ кўпайтириш амалига нисбатан 1 нейтрал элементдир.

11. $(R\ +, \cdot, 0, 1)$ – ҳақиқий сонлар майдони.

12. $\forall a,b \in R$ учун $a \oplus b = a + b$ – C даги қўшиш амали R даги қўшиш амалининг давоми.

13. $\forall a,b \in R$ учун $a \odot b = a \cdot b$ – C даги кўпайтириш амали R даги кўпайтириш амалининг давоми.

14. $i \in C$ ва $i^2 = -1$.

15. (минималлик аксиомаси). Агар $M \subset C$ учун

1) $R \subset M$; 2) $i \in M$; 3) $a,b \in M$ учун $a + b \in M$ ва $a \cdot b \in M$ келиб чиқса, $M = C$.

Комплекс сонларнинг хоссалари

Ҳар доимгидек, тушунмовчилик юзага келмайдиган ҳолларда C тўпламда ҳам қўшиш ва кўпайтириш амалларини $+, \cdot$ символлари орқали белгилаймиз.

IV.16.1-теорема. *Ҳар қандай z комплекс сон учун $\exists! a,b \in R$, $z = a+bi$ бўлади, z учун бу ифода ягона.*

Исбот. Минималлик аксиомасидан фойдаланамиз. $M - a+bi$ кўринишда ифода қилиниши мумкин бўлган барча комплекс сонлар тўплами бўлсин. У ҳолда $i = 0+1\cdot i$ бўлгани учун $R \subset M$.

$\forall z_1, z_2 \in M$ бўлсин, у ҳолда $\exists\, a,b,c,d \in R$ бўлиб, $z_1 = a+bi$, $z_2 = c+di$ бўлади, у ҳолда $z_1 + z_2 \in M$, $z_1 \cdot z_2 \in M$ бўлишини кўрсатиш қийин эмас.

Демак, $M = C$.

$z = a+bi = c+di$ бўлсин у ҳолда, $(a-c)+(b-d)i = 0$ ёки $a-c = 0 \wedge b-d = 0$ ёки $a = c$ ва $b = d$.

Олий алгебра курсида қуйидаги теорема исбот қилинган:

IV.16.2-теорема. *Комплекс сонлар майдонида n- даражали кўпҳад роппа-роса n та комплекс илдизга эга.*

Бу тасдиқда $n \in N$, яъни комплекс сонлар майдони алгебраик майдондир.

IV.16.3-теорема. *Комплекс сонлар майдонини чизиқли тартиблаш мумкин эмас.*

Исботи. Комплекс сонлар майдонида $i^2 > 0$ бажарилмайди.

IV.16.4-теорема. *Комплекс сонлар майдонининг аддитив группасини қатъий, чизиқли тартиблаш мумкин.*

Комплекс сонлар аксиоматик назариясининг зидсизлиги

IV.16.5-теорема. *Комплекс сонлар аксиоматик назарияси зидсиз назариядир.*

Исбот. Олдин кўрганимиздек, комплекс сонлар майдонини қуриш мумкин. Бу майдонда комплекс сонлар аксиоматик назариясининг барча аксиомалари бажарилади. Демак, комплекс сонлар майдони комплекс сонлар аксиоматик назариясининг моделидир.

Комплекс сонлар аксиоматик назарияси учун яна битта модел кўрсатамиз.

Элементлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлган барча $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ кўринишдаги матрицалар тўпламини K орқали белгилаймиз.

K тўпламда матрицаларни қўшиш, матрицага карама-қарши матрица топиш ва кўпайтириш амаллари аниқланган:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd, & ad+bc \\ -(ad+bc), & ac-bd \end{pmatrix},$$

$$-\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -(-b) & -a \end{pmatrix}.$$

Матрицаларни қўшиш, кўпайтириш амаллари ассоциатив, матрицаларни кўпайтириш амали эса матрицаларни қўшиш амалига нисбатан дистрибутив. Ундан ташқари

$$\tilde{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0 & 0 \end{pmatrix} \in K, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0 & 1 \end{pmatrix} \in K, \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Агар $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0$; $a^2 + b^2$ йиғиндини

Δ орқали белгиласак, $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\Delta} & \frac{-b}{\Delta} \\ \frac{b}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{pmatrix} \in K$.

Шундай қилиб, K тўплам $+, \cdot$ амалларига нисбатан майдон ҳосил қилади. Бу майдонда $P = \{aE \mid \forall a \in R\}$ тўплам ҳақиқий сонлар майдонига изоморф бўлган майдоностидир.

Агар $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0 & 1 \end{pmatrix}$ бўлса, $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$J^2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ҳосил бўлган майдон комплекс сонлар аксиоматик назариясининг яна битта модели бўлади.

Комплекс сонлар аксиоматик назариясининг қатъийлиги

IV.16.6-теорема. *Комплекс сонлар аксиоматик назарияси қатъий аксиоматик назариядир.*

Исбот. $(K +, \cdot, R)$ $(P; \oplus, \odot, e, R')$ комплекс сонлар аксиоматик назариясининг иккита модели, R ва R' лар эса ҳақиқий сонлар аксиоматик назариясининг моделлари бўлсин. У ҳолда R ни R' га акслантирадиган φ-изоморф акслантириш мавжуд.

$\forall a,b \in R$ учун $\varphi(a+b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b)$, $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \odot \varphi(b)$ бўлсин. У ҳолда $\forall a + bi \in R$ учун $f(a+bi) = \varphi(a) \oplus \varphi(b)i$ тенглик билан аникланган акслантириш R ни P га изоморф акслантиради. Ҳақиқатдан ҳам, φ – биетив акслантириш бўлиб $\forall a + bi;\ c + di \in K$ учун

$$\varphi((a+bi)+(c+di)) = \varphi((a+c)+(b+d)i) = \varphi(a+c) \oplus i\varphi(b+d) =$$
$$= (\varphi(a) \oplus \varphi(c)) \oplus (\varphi(b) \oplus \varphi(d))i = (\varphi(a) + \varphi(b)i) + (\varphi(c) + \varphi(c)i) =$$
$$= \varphi(a+bi) \oplus \varphi(c+di).$$

Шунга ўхшаш $\varphi((a+bi) \cdot (c+di)) = \varphi(a+bi) \odot \varphi(c+di)$ тенглик ўринли бўлиши кўрсатилади.

Такрорлаш учун саволлар

Комплекс сонлар аксиоматик назариясининг бошланғич терминларини айтинг.

Комплекс сонлар аксиоматик назариясининг аксиомаларини изоҳланг.

Комплекс сонлар аксиоматик назариясидан комплекс сонлар тўплами майдон ташкил қилиши келиб чиқишини асосланг.

Комплекс сонлар аксиоматик назариясидан ҳақиқий сонлар майдони комплекс сонлар майдонининг кенгайтмаси бўлиши келиб чиқадими?

Комплекс сонлар аксиоматик назариясининг хоссаларини айтинг.

Машқлар

Ҳар қандай z комплекс соннинг $a,b \in R$ сонлар орқали $z = a + bi$ кўринишда ягона усулда ифодаланишини исботланг.

Комплекс сонлар майдони алгебраик ёпиқлигини исбот қилиш схемасини келтиринг.

Комплекс сонлар майдонини чизиқли тартиблаш мумкин эмаслигини исботланг.

Комплекс сонлар майдонининг аддитив группасини қатъий чизиқли тартиблаш мумкинлигини исботланг.

Комплекс сонлар аксиоматик назариясининг зидсизлигини исботланг.

Комплекс сонлар аксиоматик назариясининг қатъийлигини исботланг.

IV.17-§. Чекли рангли алгебралар

IV.17.1-таъриф. *F майдон устида берилган V вектор фазо учун қуйидаги шартлар бажарилсин:*

1. V да векторларни кўпайтириш амали аниқланган, яъни $\forall a,b \in V$ учун $a \cdot b \in V$.

2. $\forall a,b,c \in V$ элементлар учун $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \wedge (b+c) \cdot a = ba + ca$.

3. $\forall \lambda \in F$ ва $\forall a,b \in V$ учун $\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$.

У ҳолда V чизиқли алгебра дейилади.

V чизиқли фазонинг базиси чизиқли алгебранинг ҳам *базиси* дейилади. Чизиқли фазонинг ўлчови эса *чизиқли алгебранинг ранги* дейилади.

IV.17.2-мисол. $C = \{a + bi \mid \forall a,b \in R\}$ комплекс сонлар майдони R майдон устида аниқланган, ранги 2 га тенг чизиқли алгебра бўлади.

IV.17.3-мисол. $F^{n \times n}$ – элементлари F майдонга тегишли барча квадрат матрицалар тўплами чизиқли алгебра бўлади, бу алгебра *матрицали тўлиқ алгебра* дейилади. Бу алгебранинг ранги n^2 га тенг.

IV.17.4-мисол. Фараз қилайлик, $\gamma, \gamma^3 = 2$ шартни қаноатлантирувчи бирорта комплекс сон бўлсин. У ҳолда,

$Q(\gamma)=\{a_o+a_1\gamma+a_2\gamma^2 \mid \forall a_o, a_1, a_2 \in Q\}$ тўплам ранги 3 га тенг бўлган чизиқли алгебрадир.

IV.17.5-мисол. $\forall z=a+bi$ комплекс сон учун $\bar{z}$ орқали бу комплекс сонга қўшма бўлган $a-bi$ комплекс сонни белгилаймиз, у ҳолда z_1, z_2 комплекс сонлар учун $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ хоссаларнинг бажарилишини текшириб чиқиш қийин эмас.

K орқали барча $q=\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix}$ кўринишдаги матрицалар тўпламини белгилаймиз. K тўплам ранги 4 га тенг бўлган алгебрадир. K га изоморф бўлган ҳар қандай алгебра *кватернионлар алгебраси* дейилади. Бундан кейин q ларни *кватернионлар* деб атаймиз. Агар $e=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $i=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $j=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $k=\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ белгиларни киритсак e, i, j, k элементлар чизиқли эркли бўлиб, $q=a_oe+a_1i+a_2j+a_3k$ тенглик бажарилади. Демак, $\{e, i, j, k\}$ векторлар системаси бу алгебранинг базиси бўлади. Базис элементларидан i, j, k ларни кўпайтириш

$$\begin{tikzcd} i \arrow[dr] & \\ & j \arrow[dl] \\ k \arrow[uu] & \end{tikzcd}$$

схема асосида бажарилиши ўринли бўлишини текшириш қийин эмас. Яъни, $i\,j=k$, $j\,k=i$, $ki=j$, $ik=-j$, $kj=-i$, $ji=-k$, $i^2=j^2=k^2=-e$ бўлишини текшириш қийин эмас, ундан ташқари e ни кўпайтиришга нисбатан бирлик элемент бўлишини эътиборга олсак,

$$q_1=a_o+a_1i+a_2j+a_3k, \quad q_2=b_o+b_1i+b_2j+b_3k$$

кватернионлар учун кватернионларни кўпайтиришни дистрибутивлик хоссасидан фойдаланиб ҳадма-ҳад бажариш мумкин:

$$q_1\cdot q_2=(a_ob_o+a_ob_1i+a_ob_2j+a_ob_3k)+(a_1b_oi+a_1b_1i^2+a_1b_2ij+a_1b_3ik)+(a_2b_0j+$$
$$+a_2b_1ji+a_2b_2j^2+a_2b_3jk)+(a_3b_ok+a_3b_1ki+a_3b_2kj+a_3b_3k^2)=$$
$$=(a_ob_o-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3)+(a_ob_o+a_1b_0+a_2b_3-a_3b_3)i+(a_ob_2-a_1b_3+a_2b_o+$$
$$+a_3b_1)j+(a_ob_3+a_1b_2-a_2b_1+a_3b_2)k.$$

$\overline{q_1}=a_oe-a_1i-a_2j-a_3k$ кватернион q_1 кватернионга *қўшма кватернион* дейилади.

$q_1\cdot\overline{q_1}=a_o^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2$ сон q_1 *кватернионнинг нормаси* дейилади.

Агар e бирлик элементга эга бўлган алгебрада $\forall a\neq 0$ элемент учун шундай a' элемент топилиб $a\cdot a'=a'\cdot a=e$ шарт бажарилса, бундай алгебра *бўлиш амали бажариладиган алгебра* дейилади. 1-,3-,4- мисоллардаги алгебралар бўлиш амали бажариладиган алгебралардир.

Келгусида фақат бўлиш амали бажариладиган ассоциатив алгебралар қаралади.

Агар A алгебра P майдон устида, бўлиниш амали бажариладиган ассоциатив алгебра бўлса, P-майдон A нинг алгебраости ёки A нинг P га изоморф алгебраости мавжуд бўлади.

IV.17.6-теорема. *Агар A ранги n га тенг бўлган P майдон устидаги алгебра бўлса, $\forall\alpha\in P$ учун $1,\alpha,\ldots,\alpha^{n-1},\alpha^{n}$ чизиқли боғлиқ бўлиб, α – элемент коэффициентлари P дан олинган бирорта n - даражали кўпҳад илдизидан иборат.*

Такрорлаш учун саволлар

Майдон таърифини айтинг.
Чизиқли фазо деб нимага айтилади?
Чизиқли алгебрага таъриф Беринг.
Чизиқли фазонинг базиси нима?
Чизиқли фазонинг ўлчови нима?
Чизиқли алгебранинг ранги таърифини айтинг.

М а ш қ л а р

Ҳақиқий сонлар тўплами ранги 1 га тенг чизиқли алгебра бўлишини исботланг.

Комплекс сонлар майдони ранги 2 га тенг чизиқли алгебра бўлишини исботланг.

F майдон устида олинган 2-тартибли квадрат матрицалар тўплами ранги 4 га тенг чизиқли алгебра бўлишини исботланг.

Кватернионлар алгебрасини қуринг.

IV.18-§. Фробениус теоремаси

IV.18.1-теорема. $(A;+,\cdot,R)$ *ҳақиқий сонлар майдони устида бўлиш амали бажариладиган ранги n га тенг ассоциатив алгебра бўлсин. Агар*

n=1 бўлса, у ҳолда $A\cong R$ бўлади;

n=2 бўлса, у ҳолда $A\cong C$ бўлади;

n≠3;

n=4 бўлса, у ҳолда $A\cong K$ бўлади;

n≤4.

Бу ерда R – ҳақиқий сонлар майдони, C – комплекс сонлар майдони, K – кватернионлар алгебраси.

Исбот. 1. n=1 бўлиб, $\{u\}$ A нинг базиси бўлсин. У ҳолда $A=u\cdot R$. Демак, $A\cong R$ (исбот қилинг).

2. n=2 бўлиб, $\{1,u\}$ векторлар системаси Анинг базиси бўлсин. У ҳолда ҳар қандай $\alpha\in A$ учун $\alpha=a_0+a_1u\wedge a_0,a_1\in R\wedge u\notin R$, акс ҳолда А- бир ўлчовли бўлиб қолади. Бундан $1,u,u^2$ векторлар системаси чизиқли боғлиқлигидан шундай $a_0,a_1,a_2\in R$ ҳақиқий сонлар мавжуд ва

$$a_0 + a_1u + a_2u^2 = 0 \ (1)$$

тенглик ўринли, яъни u - коэффициентлари ҳақиқий сонлардан иборат $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ квадрат учҳад илдизи бўлади. $u \notin R$ бўлганлиги учун $u \in C$. У ҳолда $\bar{u}$ ҳам (1) тенгламанинг илдизи бўлади. Фараз қилайлик, $u = a + bi$ бўлсин, у ҳолда $\bar{u} = a - bi$. Бундан $a_0 + a_1u + a_2u^2 = a_2(x-(a+bi))(x-(a-bi)) = a_2((x-a)^2 + b^2)$. Демак, u вектор R майдонда келтирилмайдиган $(x-a)^2 + b^2$ квадрат учҳаднинг илдизи экан. У ҳолда ҳар қандай $\alpha \in A$ учун шундай $a_0, a_1 \in R$ мавжуд бўлиб,

$\alpha = a_0 + a_1u$. Агар $u = a + bi$ бўлса, у ҳолда

$a_0 + a_1(a+bi) = a_0 + a_1a + a_1bi = (a_0 + a_1a) + (a_1b)i$. Ҳар қандай $\alpha = a_0 + a_1u \in A$ учун $z = (a_0 + a_1a) + (a_1b)i$ комплекс сони мос қўйсак, у ҳолда бу акслантириш Ани комплекс сонлар майдонига изоморф акслантиради. Бу акслантиришни φ орқали белгиласак, $\varphi: A \to C$ ва $\varphi(a_0 + a_1u) = (a_0 + a_1a) + (a_1b)i, u = a + bi$. Бу акслантириш биектив акслантиришдир. Ҳақиқатдан ҳам, агар $\alpha = a_0 + a_1u \neq a_0' + a_1'u = \alpha'$ бўлса, у ҳолда $(a_0 + a_1a) + (a_1b)i \neq (a_0' + a_1'a) + (a_1'b)i$. Акс ҳолда

$$\begin{cases} a_0 + a_1a = a_0' + a_1'a \\ a_1b = a_1'b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_0 - a_0') + a(a_1 - a_1') = 0 \\ a_1 = a_1' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = a_0' \\ a_1 = a_1' \end{cases} \Rightarrow \alpha = \alpha'$$ зиддият

келиб чиқади.

Ҳар қандай $c + di \in C$ учун $\varphi(x + yu) = c + di$ бўлсин. У ҳолда

$$x + y(a+bi) = c + di \Rightarrow (x + ya) + ybi = c + di \Rightarrow \begin{cases} x + ya = c \\ ybi = di \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = c - \dfrac{ad}{b}, \\ y = \dfrac{d}{b}. \end{cases}$$

Ҳар қандай $\alpha = a_0 + a_1u$ ва $\alpha' = a_0' + a_1'u$ лар учун $\varphi(\alpha + \alpha') = \varphi((a_0 + a_0') + (a_1 + a_1')u) = (a_0 + a_0' + (a_1 + a_1')a) + (a_1 + a_1')bi =$

$$= ((a_0 + a_1a) + a_1bi) + ((a_0' + a_1'bi) = \varphi(\alpha) + \varphi(\alpha').$$

Шунга ўхшаш $\varphi(\alpha \cdot \alpha') = \varphi(\alpha) \cdot \varphi(\alpha')$ тенглик ўринли эканлиги исботланади.

А алгебранинг базиси $1, \alpha$ бўлса, φ акслантиришни шундай танлаб олиш мумкин-ки, натижада $u^2 = -1$ тенглик ўринли бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, $u = a + bi \Rightarrow u^2 = -1$ бўлса, $u = i$ бўлиши келиб чиқади.

3. Фараз қилайлик А ранги учга тенг бўлган алгебра бўлиб, $1, u, v$ векторлар системаси бу алгебранинг базиси бўлсин. У ҳолда $u^2 = -1$ деб ҳисоблашимиз мумкин. Агар $1, u, v$ система чизиқли эркли бўлса, $1, u, v, uv$ система ҳам чизиқли эркли бўлишини кўрсатамиз.

$$a_0 + a_1u + a_2v + a_3uv = 0 \ (2)$$

бўлсин. Тенгламанинг иккала томонини ҳам u га ўнг томондан кўпайтирсак,

$$a_0u - a_1 + a_2v - a_3v = 0 \Rightarrow -a_1 + a_0u + (a_2 - a_3)v = 0 \Rightarrow a_1 = 0, a_0 = 0, a_2 = a_3.$$

У ҳолда $(2) \Rightarrow a_2v + a_3uv = 0 \Rightarrow a_3(v + uv) = 0$. Бундан A бўлиниш амали бажариладиган алгебра бўлгани учун $a_3 = 0 \vee uv = -v \Rightarrow u = -1$ келиб чиқади, лекин, $u \notin R$, демак, $a_3 = 0$.

Шундай қилиб, $a_0 + a_1u + a_2v + a_3uv = 0 \Rightarrow a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Демак, бўлиниш амали бажариладиган ҳақиқий сонлар майдони устида аниқланган ассоциатив алгебра ранги ≥ 4 экан.

4. A-ҳақиқий сонлар майдони устида бўлинишга эга бўлган ранги $n(n \geq 4)$ га тенг алгебра бўлсин. Юқорида кўрганимиздек, бу алгебрада камида 4 та чизиқли эркли векторлар бор. $1, u, v, uv$ -чизиқли эркли элементлар бўлсин. $1, u$ элементлар яратган алгебра комплекс сонлар майдонига изоморф бўлиши ҳам исботланган эди. Ҳудди шундай, $1, v$ элементлар яратган чизиқли алгебра ҳам комплекс сонлар майдонига изоморф бўлишини кўрсатиш мумкин. У ҳолда u, v элементларни шундай танлаб олиш мумкин-ки, натижада $u^2 = v^2 = -1$ бўлади. Демак, u ва v элементлар ҳақиқий сонлар майдонига тегишли эмас. У ҳолда $u + v \wedge u - v$ элементлар ҳам ҳақиқий сонлар майдонига тегишли эмас. Демак, бу элементлар ҳақиқий сонлар майдонида келтирилмайдиган, коэффициентлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлган квадрат тенгламанинг илдизлари бўлади. Бундан уларнинг квадратлари мос равишда шу элементлар ва 1 нинг чизиқли комбинациясидан иборат:

$$(u + v)^2 = a_0 + a_1(u + v), a_0, a_1 \in R;$$

$$(u - v)^2 = b_0 + b_1(u - v), b_0, b_1 \in R;$$

ёки

$$\begin{aligned} -2 + (uv + vu) &= a_0 + a_1(u + v); \\ -2 - (uv + vu) &= b_0 + b_1(u - v), \end{aligned} \quad (3)$$

Ҳосил бўлган тенгликларни ҳадма-ҳад қўшсак,
$-4 = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)u + (a_1 - b_1)v$ га эга бўламиз. $1, u, v$ лар чизиқли эркли бўлганлиги учун $a_1 + b_1 = a_1 - b_1 = 0 \wedge a_0 + b_0 = -4$. У ҳолда (3) дан $uv + vu$ элемент ҳақиқий сон бўлиши келиб чиқада. Уни $2r$ орқали белгиласак,

$$uv + vu = 2r = a_0 + 2 = -(b_0 + 2) \quad (4)$$

тенгликка эга бўламиз. $u + v \wedge u - v$ элементлар мос равишда илдиз бўладиган иккита квадрат учҳадлар ҳақиқий сонлар майдонида келтирилмайдиган кўпҳадлар бўлганлиги учун $a_0 = b_0 = 0$ дан $a_0 < 0 \wedge b_0 < 0$ бўлиши келиб чиқади. У ҳолда (4) тенгликка асосан $-1 < r < 1$. Демак,

$$p = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} \quad (5)$$

сон нолдан фарқли ҳақиқий сон бўлади. Агар $j = r \cdot p \cdot u + p \cdot v$ белгилашни киритсак, $p \neq 0$ дан $1, u, j$ элементлар чизиқли эркли бўлиб (4), (5) дан $j^2 = -1 \wedge uv + ju = 0$ бўлиши келиб чиқади.

Агар u ни i орқали, $ij = -ji$ ни k орқали белгиласак, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ бўлиб, $1, i, j, k$ лар чизиқли эркли система ҳосил қилади. Ҳақиқатдан ҳам, агар $c_0, c_1, c_2 \in R$ сонлар мавжуд бўлиб, $k = c_0 + c_1 i + c_2 j$ деб фараз қилсак, тенгликнинг иккала томонини ўнг томондан i га кўпайтириб $j = c_0 i - c_1 - c_2 k = c_0 i - c_1 - c_2(c_0 + c_1 i + c_2 j)$ тенгликка эга бўламиз. Бу тенгликдаги j элемент коэффициентларини тенглаштирсак $-c_2^2 = 1$ келиб чиқади. Бу эса $c_2 \in R$ шартга зид.

Шундай қилиб, $1, i, j, k$ лар чизиқли эркли.

Ҳосил бўлган чизиқли эркли элементлар яратган алгебра кватернионлар алгебрасига изоморф бўлиши равшан.

5. $n \geq 5$ бўлсин деб фараз қилсак, $1, i, j, k, l$ чизиқли эркли векторлар системаси бўлса, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ деб юқоридаги усулда $il + li$, $jl + lj$, $kl + lk$ ифодалар ҳақиқий сонлар майдонига тегишли бўлишини кўрсатиш мумкин. Бу ифодаларни мос равишда $a, b, c \in R$ ҳақиқий сонларга тенг бўлсин. Яъни, $il + li = a$, $jl + lj = b$, $kl + lk = d$ бўлсин. У ҳолда

$$ai + bj + ck = (aj - bi + c)k = (aj - bi + kl + lk)k = (aj - bi + ijl + lk)k =$$

$$= (aj - i(b - jl)lk)k = (aj - ilj + lk)(-k) = ((a - il)j + lk)k =$$

$$= (lij + lk)k = (lk + lk)k = -2l.$$

Бу эса $1, i, j, k, l$ векторлар чизиқли эркли деган фаразимизга зид.

Такрорлаш учун саволлар

Бўлиниш амали бажариладиган алгебра таърифини айтинг.

Ассоциатив алгебра таърифини айтинг.

Ҳақиқий сонлар майдони устида бўлиш амали бажариладиган чекли рангли ассоциатив алгебранинг ранги 1 га тенг бўлса, у ҳақиқий сонлар чизиқли алгебрасига изоморф бўладими?

Ҳақиқий сонлар майдони устида бўлиш амали бажариладиган чекли рангли ассоциатив алгебранинг ранги 2 га тенг бўлса, у комплекс сонлар чизиқли алгебрасига изоморф бўладими?

Ҳақиқий сонлар майдони устида бўлиш амали бажариладиган чекли рангли ассоциатив алгебранинг ранги 4 га тенг бўлса, у кватернионлар чизиқли алгебрасига изоморф бўладими?

Машқлар

Ранги 1,2,4га тенг чизиқли алгебраларга мисоллар келтиринг.

Ҳақиқий сонлар, комплекс сонлар майдони, кватернионлар алгебраси бўлиниш амали бажариладиган ҳақиқий сонлар майдони устида чекли рангли ассоциатив алгебра бўлишини исботланг.

Ҳақиқий сонлар майдони устида бўлиш амали бажариладиган чекли рангли ассоциатив алгебра ранги 3 га тенг бўлмаслигини исботланг.

Ҳақиқий сонлар майдони устида бўлиш амали бажариладиган чекли рангли ассоциатив алгебра ранги 4дан катта бўлмаслигини исботланг.

Ранги 3 га тенг бўлган чизиқли алгебрага мисол келтиринг.

Адабиётлар

1. Азларов Т., Мансуров Ҳ. Математик анализ, 1 ва 2-томлар. Т., «Ўқитувчи», 1994, 1995.
2. Бурбаки Н. Теория множеств. М., «Мир», 1965.
3. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. М., «Наука», 1972.
4. Кострикин А.И. Введение в алгебру. М., «Наука», 1977.
5. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. М., «Высшая школа», 1979.
6. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. М., «Наука», 1973.
7. Нечаев В.И. Числовые системы. М., «Просвешение», 1975.
8. Новиков П.С. Элементы математической логики. М., «Наука», 1973.
9. Стол Р.Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. М., «Просвещение», 1968.
10. Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические ситемы. М., «Мир», 1965.
11. Хинчин А.Я. Цепные дроби. М., Физматгиз, 1961.
12. Юнусов А.С. Математик мантиқ ва алгоритмлар назарияси элементлари. Т., «Янги аср авлоди», 2006.

МУНДАРИЖА

Сўз боши..3

I-БОБ. ТЎПЛАМЛАР НАЗАРИЯСИ ВА МАТЕМАТИК МАНТИҚ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

I. 1-§. Тўплам. Тўпламлар устида амаллар....................................4
I.2-§. Мулоҳаза. Мулоҳазалар устида амаллар.................................8
I.3 -§. Мулоҳазалар алгебраси. Мулоҳазалар алгебраси алфавити, формула тушунчаси..10
I.4 - § . Тенг кучли формулалар. Тавтология – мантиқ қонуни...................13
I.5- §. Предикат тушунчаси. Предикатлар устида амаллар......................15
I.6-§. Предикатлар алгебрасининг формулалари.................................18
I.7-§. Декарт кўпайтма. n-ар муносабат. Эквивалентлик муносабати.........19
I.8-§. Акслантириш (функция). Тартиб муносабати..............................24

II БОБ. АЛГЕБРАЛАР ВА АЛГЕБРАИК СИСТЕМАЛАР

II.1-§. Бинар алгебраик амаллар турлари, хоссалари. Нейтрал, симметрик элементлар. Конгруэнция...30
II.2-§. Алгебра. Алгебралар гомоморфизми. Алгебраости ва унинг хоссалари. Фактор-алгебра..33
II.3-§. Группа. Ҳалқа. Хоссалари. Группалар, ҳалқалар гомоморфизми......41
II.4-§. Алгебраик системалар. Системаости. Алгебраик системалар гомоморфизми..48
II.5-§. Тартибланган алгебралар..50
II.6-§. Нормаланган майдонлар. 57

III БОБ. АКСИОМАТИК НАЗАРИЯЛАР ҲАҚИДА ТУШУНЧА

III.1-§. Математик назариялар ҳақида тушунча..................................63
III.2-§. Биринчи тартибли тил..64
III.3-§. Математик назарияларнинг зидсизлик, тўлиқлик, ечилиш муаммолари..67
III.4-§. Математик назарияларга наъмуналар.......................................68

IV БОБ. СОНЛИ СИСТЕМАЛАР

IV.1-§. Натурал сонлар назариясининг мазмунли аксиоматик назарияси.....70
IV.2-§. Натурал сонлар тўпламида қўшиш амалини аниқлаш ва унинг хоссалари..72
IV.3-§. Натурал сонлар тўпламида кўпайтириш амалининг ҳоссалари........74
IV.4-§. Натурал сонлар тўпламида тартиб муносабат...........................76
IV.5-§. Натурал сонлар аксиоматик назариясини хоссалари...................78

IV.6-§. Бутун сонлар халқаси..........79
IV.7-§. Бутун сонлар системасининг аксиоматик назарияси..........81
IV.8-§. Рационал сонлар майдони..........85
IV.9-§. Рационал сонларнинг аксиоматик назарияси..........87
IV.10-§. Ҳақиқий сонлар майдони..........91
IV.11-§. Ҳақиқий сонларни аксиоматик назарияси..........93
IV.12-§. Систематик сонлар..........96
IV.13-§. p-адик сонлар системаси..........98
IV.14-§. p-адик сонлар аксиоматик назарияси..........101
IV.15-§. Комплекс сонлар системаси..........102
IV.16-§. Комплекс сонлар аксиоматик назарияси..........104
IV.17-§. Чекли рангли алгебралар..........107
IV.18-§. Фробениус теоремаси..........109

Адабиётлар..........113

А.ЮНУСОВ, Д.ЮНУСОВА

СОНЛИ СИТЕМАЛАР

Мухаррир Э. Бозоров

Босишга рухсат этилди 08.04.08. Қоғоз бичими 60х84 $^{1}/_{8}$
Ҳисоб-нашр табоғи 7,25. Адади 100.
Буюртма рақами № 97.

«IQTISOD-MOLIYA» нашриётида тайёрланди
100084, Тошкент ш., Кичик халқа йўли кўчаси, 7-уй.

Низомий номидаги ТДПУ босмахонасида чоп этилди.
Тошкент ш. Юсуф Хос Ҳожиб кўчаси, 103-уй