МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УО «Белорусский государственный экономический университет»

М.П. Дымков

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Второй семестр

Курс лекций
для студентов экономических
специальностей вузов

Минск 2014

Глава I. Основные теоремы дифференциального исчисления

Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши
Раскрытие неопределенностей (правило Лопиталя)
Сравнение функций по скорости роста
Формулы Маклорена и Тейлора
Ряды Маклорена для элементарных функций

Теорема Ферма (о равенстве нулю производной)

Пусть функция $y = f(x)$*:*

1) дифференцируема на интервале (a;b),

2) достигает экстремума в точке $x_0 \in (a;b)$.

Тогда производная в этой точке $f'(x_0) = 0$.

◄Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и в точке x_0 принимает наибольшее значение при $x_0 \in (a;b)$. По определению производной $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, причем предел не зависит от того, будет ли $x \to x_0$ справа или слева. Но при $x > x_0$ $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0$, откуда следует, что $f'(x_0) \le 0$. При $x < x_0$ имеем $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$, следовательно, $f'(x_0) \ge 0$.

По условию функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, следовательно, ее предел при $x \to x_0$ не должен зависеть от выбора направления приближения аргумента x к точке x_0, т.е.

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Получаем $\begin{cases} f'(x_0) \le 0 \\ f'(x_0) \ge 0 \end{cases}$, или $f'(x_0) = 0$. Аналогично рассматривается другой случай.►

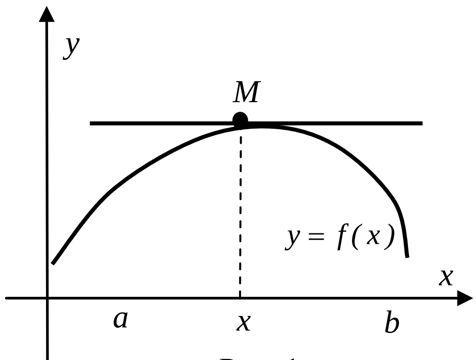


Рис. 1.

Геометрический смысл теоремы Ферма очевиден: *в точке наибольшего или наименьшего значения касательная к графику функции параллельна оси абсцисс.*

Теорема Ролля. (о производной функции, принимающей на концах отрезка равные значения). *Пусть функция* $y = f(x)$

1) непрерывна на отрезке [a;b]*;*

2) дифференцируема на интервале $(a;b)$*;*

3) на концах отрезка [a;b] *принимает равные значения:* $f(a) = f(b)$.

Тогда на интервале $(a;b)$ *найдется по крайней мере одна точка* x_0, *в которой* $f'(x_0) = 0$.

◀Функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. В силу второй теоремы Вейерштрасса она на этом отрезке принимает наименьшее и наибольшее значения. Пусть это будут значения *m* и *M.* Могут представиться два случая:

1) $\mathrm{M} = \mathrm{m}$. В этом случае $\mathrm{m} \le f(x) \le m$, функция $y = f(x)$ является постоянной на отрезке $[a;b]$. Поэтому $f'(x) = 0$ во всем интервале $(a;b)$, теорема верна.

2) $\mathrm{M} > \mathrm{m}$. Тогда для функции $y = f(x)$ даже в том крайнем случае, когда, например, наибольшее значение функции принимается на конце отрезка $f(a) = f(b) = M$, наименьшее значение будет приниматься уже внутри отрезка. Следовательно, найдется точка $x_0 \in (a;b)$, в которой $f(x_0) = m$.

Но тогда по теореме Ферма $f'(x_0) = 0$.▶

Теорема Ролля имеет простой ***геометрический смысл:*** *найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции будет параллельна оси абсцисс.*

Если $f(a) = f(b) = 0$, то теорему Ролля можно сформулировать так:

между двумя последовательными нулями дифференцируемой функции имеется хотя бы один нуль производной.

Ж. Лагранж

Теорема Лагранжа (о конечных приращениях).

Пусть функция $y = f(x)$*:*

1) непрерывна на отрезке [a;b]*;*

2) дифференцируема на интервале $(a;b)$.

Тогда на интервале $(a;b)$ *найдется по крайней мере одна точка* x_0 *такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

◀Введем вспомогательную функцию $L(x)$ на отрезке $[a;b]$, определив ее так:

$$L(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Эта функция на $[a;b]$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля:

1) она непрерывна на $[a;b]$, поскольку непрерывны все слагаемые $L(x)$;

2) на $(a;b)$ функция $L(x)$ имеет производную;

3) $L(a)=L(b)=0$.

Из теоремы Ролля следует, что существует точка $x_0 \in (a;b)$, в которой $L'(x_0)=0$. Следовательно, $L'(x_0)=f'(x_0)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$.

Отсюда $f'(x_0)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, $x_0 \in (a;b)$.►

Геометрический смысл теоремы Лагранжа. Отношение $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ есть угловой коэффициент хорды AB, а $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент касательной к кривой $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 (рис.2). Утверждение теоремы Лагранжа сводится к следующему:

на кривой $y=f(x)$ точка $M(x_0; f(x_0))$ такая, что через эту точку можно провести касательную, параллельную хорде AB.

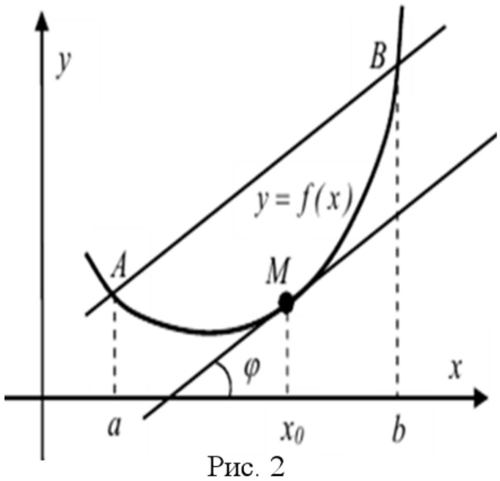


Рис. 2

Доказанная формула называется ***формулой Лагранжа или формулой конечных приращений.*** Она может быть переписана в виде:

$$f(b)-f(a)=f'(x_0)\cdot(b-a).$$

Теорема Коши (об отношении приращений двух функций).

Если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$

1) непрерывны на отрезке $[a;b]$;

2) дифференцируемы на интервале $(a;b)$;

3) производная $g'(x)\neq 0$ на интервале $(a;b)$.

Тогда на интервале $(a;b)$ найдется по крайней мере одна точка x_0 такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

О. Коши

◄Из условия теоремы следует, что $g'(x)\neq 0$. Это означает, что разность $g(b)-g(a)\neq 0$. Действительно, если бы $g(b)-g(a)=0$, то функция $y=g(x)$, являясь непрерывной и дифференцируемой, удовлетворяла бы условиям теоремы Ролля и в таком случае $g'(x)$ была бы равна нулю по крайней мере в одной точке x_0 интервала $(a;b)$, что противоречит условию. Введем вспомогательную функцию

$$K(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\big(g(x) - g(a)\big).$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля:

1) $K(x)$ непрерывна на отрезке [a;b], так как непрерывны функции $y = f(x)$ и $y = g\left(x\right)$;

2) функция *K(x)* имеет производную всюду в интервале $(a;b)$, поскольку каждое слагаемое в правой части функции *K(x)* имеет производную на этом интервале;

3) $K(a) = K(b) = 0$, в чем убеждаемся непосредственной проверкой.

Из теоремы Ролля делаем вывод о существовании точки x_0, что $K'(x_0) = 0$.

Поэтому $K'(x_0) = f'(x_0) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x_0) = 0$.

Отсюда следует $\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.►

Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши: достаточно в теореме Коши взять $g(x) = x$.

Теорема (правило Лопиталя) (нахождения предела отношения функций через предел отношения их производных).

Пусть функции $y = f(x)$ *и* $y = g(x)$

1) дифференцируемы в окрестности точки a *, кроме, быть может, самой точки* a *;*

2) $g(x) \neq 0$ *и* $g'(x) \neq 0$ *в этой окрестности;*

3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$*;*

4) существует $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *(конечный или бесконечный)*

Тогда существует $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$*, причем* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

◄В теореме ничего не сказано о значениях $y = f(x)$ и $y = g(x)$ в точке $x = a$. Положим $f(a) = g(a) = 0$. Так как теперь $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$, то функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ будут непрерывны в точке a. Поэтому на отрезке $[a;x]$, где x - какая угодно точка окрестности точки a, функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы Коши. Следовательно, между a и x найдется по крайней мере одна точка x_0 такая, что

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

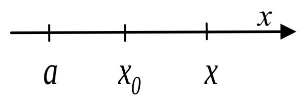


Рис. 3

Величина x_0 зависит от x, причем при $x \to a$ точка x_0 также будет стремиться к a (см. рис. 3).

Поэтому $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x_0 \to a} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ и $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x_0 \to a} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Из последних двух соотношений следует, что $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. ►

Последнее равенство выражает **правило Лопиталя**, по которому вычисление предела отношения двух функций может быть заменено при выполнении условий теоремы вычислением предела отношения производных этих функций.

Это один из наиболее мощных методов нахождения пределов.

Замечание 1. Правило Лопиталя распространяется на случай неопределенности типа $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ при $x \to a$, поскольку можно доказать теорему Лопиталя при условии $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

Решение: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = -\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = -\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \sin x = 1 \cdot 0 = 0$.

Замечание 2. Правило Лопиталя распространяется на случай $x \to \infty$. Чтобы убедиться в этом, достаточно сделать замену $x = 1/t$ и воспользоваться результатом теоремы.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

Решение: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}} = 3 \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$.

Замечание 3. Иногда приходится применять правило Лопиталя последовательно несколько раз (делать несколько шагов), если от неопределенности не удается избавиться на первом шаге. Однако условия теоремы на каждом шаге должны оставаться справедливыми.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{5x^4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{20x^3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{60x^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{120x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{120}=+\infty$$

Замечание 4. Хотя правило Лопиталя работает только с неопределенностями $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, неопределенности других типов могут быть раскрыты с помощью этого правила, если путем преобразований удастся привести изучаемую неопределенность к типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot\sin\dfrac{a}{x}\right)$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\sin\frac{a}{x}\right)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{a}{x}}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{a}{x}\cdot\frac{-a}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}=a\lim_{x\to\infty}\cos\frac{a}{x}=a$$

Сравнение функций по скорости роста

Рассмотрим некоторые функции, возрастающие при $x\to+\infty$. Составим из них ряд

$$y=\log_a x,\ a>1;\quad y=x^k,\ k>0;\quad y=a^x,\ a>1;\quad y=x!;\quad y=x^x$$

и докажем, что чем правее в ряду находится функция, тем быстрее она растет. Найдем пределы отношения во всех парах рядом стоящих функций при $x\to+\infty$.

1) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^k}=\left[\begin{matrix}\text{правило}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}\cdot\ln a}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln a}{kx^k}=0,$$

следовательно, функция $y=x^k,\ k>0$, растет быстрее при $x\to+\infty$, чем $y=\log_a x,\ a>1$.

2) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}=\begin{bmatrix}\text{правило}\\ \text{Лопиталя}\end{bmatrix}=\lim_{x\to+\infty}\frac{kx^{k-1}}{a^x\ln a}.$$

Для любого $k>1$, в том числе и сколь угодно большого, справедливо неравенство $n\text{-}1<k\le n$, где n – натуральное число. Применив правило Лопиталя *n* раз, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{k(k-1)...(k-n+1)}{a^x\cdot\ln^n a\cdot x^{n-k}},$$

где величина $n-k>0$. Числитель дроби – постоянное число, знаменатель неограниченно возрастает, предел этой дроби равен нулю. Итак, функция $y=a^x$, $a>1$ растет быстрее при $x\to+\infty$, чем $y=x^k$, $\mathrm{k}>0$.

3) Найдем $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{x!}$. Аналогично случаю 2) для любого $a>1$ верно неравенство $n<a\le n+1$. Запишем дробь следующим образом

$$\frac{a^x}{x!}=\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}...\frac{a}{n}\cdot\frac{a}{n+1}...\frac{a}{x}<\frac{a^n}{n!}\cdot\left(\frac{a}{n+1}\right)^{x-n},$$

где произведение последних правильных $(x-n)$ дробей заменено на наибольшую из них в степени $x-n$.

Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{x!}\le\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^n}{n!}\cdot\left(\dfrac{a}{n+1}\right)^{x-n}=\dfrac{a^n}{n!}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a}{n+1}\right)^{x-n}=0$, так как $\dfrac{a}{n+1}<1$.

С другой стороны, отношение $\dfrac{a^x}{x!}$ не может быть отрицательным. Итак, предел рассматриваемого отношения функций ограничен сверху нулем и не может быть меньше нуля. Поэтому $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{x!}=0$.

4) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x!}{x^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\frac{2}{x}\cdot\,...\,\cdot\frac{x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}\cdot\,...\,\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}.$$

Первый из этих пределов $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$. Величина всех остальных пределов заключена между нулем и единицей. Следовательно, произведение этих пределов есть нуль. Итак, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x!}{x^x}=0$. Функция $y=x^x$ самая быстрорастущая из перечисленных функций при $x\to+\infty$.

Формулы Маклорена и Тейлора

Эти формулы являются одними из основных формул математического анализа и имеют многочисленные приложения.

Рассмотрим многочлен *n*-й степени

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n.$$

Б. Тейлор

Его можно представить в виде суммы степеней переменной *x,* взятых с некоторыми коэффициентами. Продифференцируем его n раз по *x,* найдем значения многочлена и его производных в точке $x = 0$, выразим из каждого полученного выражения коэффициенты $a_0, a_1, ...a_n$, разместив результаты в трех столбцах соответственно:

$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$	$P(0) = a_0$	$a_0 = P(0)$
$P'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 ... + na_n x^{n-1}$	$P'(0) = a_1$	$a_1 = \dfrac{P'(0)}{1!}$
$P''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 x ... + n \cdot (n-1) \cdot a_n x^{n-2}$	$P''(0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2$	$a_2 = \dfrac{P''(0)}{2!}$
$P'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3 ... + n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a_n x^{n-3}$	$P'''(0) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3$	$a_3 = \dfrac{P'''(0)}{3!}$
……..	……..	

Вернемся к нашему многочлену, подставив вместо его коэффициентов $a_0, a_1, ...a_n$ выражения из 3-го столбца. Получим

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!} x + \frac{P''(0)}{2!} x^2 + \frac{P'''(0)}{3!} x^3 + ... + \frac{P^{(n)}(0)}{n!} x^n .$$

Это *формула Маклорена* для многочлена $P(x)$ степени n. Рассуждая аналогичным образом, можно разложить многочлен $P(x)$ по степеням разности $(x - a)$, где a – любое число.

Будем иметь

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x - a) + \frac{P''(a)}{2!}(x - a)^2 + ... + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n .$$

Это выражение называется *формулой Тейлора* для многочлена $P(x)$, или разложением многочлена $P(x)$ по степеням $(x - a)$.

Пусть теперь в окрестности точки $x = 0$ задана функция $y = f(x)$, не являющаяся многочленом, но имеющая в этой окрестности производные до n-го порядка включительно.

Вычислим величины $f(0), \ f'(0), \ f''(0), \ ... , f^{(n)}(0)$ и зададим функцию

$$Q_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n .$$

$Q_n(x)$ есть многочлен степени n. Он называется *приближающим многочленом* для функции $y = f(x)$. Если бы исходная функция $y = f(x)$ являлась многочленом степени n, то выполнялось бы тождество $f(x) \equiv Q_n(x)$ для всех значений x из рассматриваемой окрестности. Поскольку это не так, положим

$$f(x) = Q_n(x) + R_n(x),$$

где $R_n(x)$ называется остаточным членом. В курсе математического анализа доказывается, что $R_n(x) = o(x^n)$.

Тогда формула разложения функции $f(x)$ в ряд по степеням x принимает вид:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Эту формулу называют формулой Маклорена разложения функции $f(x)$ по степеням x *с остаточным членом в форме Пеано*. Для остаточного члена получены выражения, позволяющие дать оценку его величине. Данная формула показывает, что, заменив $f(x)$ в окрестности точки $x = 0$ приближающим многочленом *n*-й степени, мы совершим ошибку, которая при $x \to 0$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем x^n.

Проводя аналогичные рассуждения при разложении функции $f(x)$ в окрестности точки $x = a$, получим формулу Тейлора

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Отсюда вывод: *поведение любой n раз дифференцируемой функции в окрестности точки $x = a$ (в частности, $x = 0$) можно описать многочленом достаточно точно, а при $n \to +\infty$ – со сколь угодно высокой степенью точности.*

Разложение в ряд Маклорена элементарных функций

Хотя формула Маклорена есть частный случай формулы Тейлора, в наших приложениях именно формула Маклорена будет определяющей. Формула Тейлора может быть приведена к формуле Маклорена подстановкой $x - a = y$.

Разложим в ряд Маклорена элементарные функции:

$$e^{x};\quad \sin x;\quad \cos x;\quad \ln(1+x),\ x > -1;\quad (1+x)^{\alpha},\ x > -1.$$

С этой целью составим таблицу производных этих функций и значений производных в точке $x = 0$.

$f(x)$	$f(0)$	$f'(x)$	$f'(0)$	$f''(x)$	$f''(0)$	$f'''(x)$	$f'''(0)$
e^x	1	e^x	1	e^x	1	e^x	1
$\ln(1+x)$	0	$\frac{1}{1+x}$	1	$-\frac{1}{(1+x)^2}$	-1	$\frac{1\cdot 2}{(1+x)^3}$	2!

Подставляя в формулу Маклорена значения производных, взятые из четных столбцов таблицы, получим разложения в ряд для каждой функции

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o\left((x)^3\right).$$

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + o\left((x^4)\right) = x - \frac{x^3}{3!} + o\left((x^4)\right).$$

$$\cos x = 1 + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 + o\left((x^5)\right) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o\left((x^5)\right)$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left((x^3)\right).$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + o\left((x^2)\right)$$

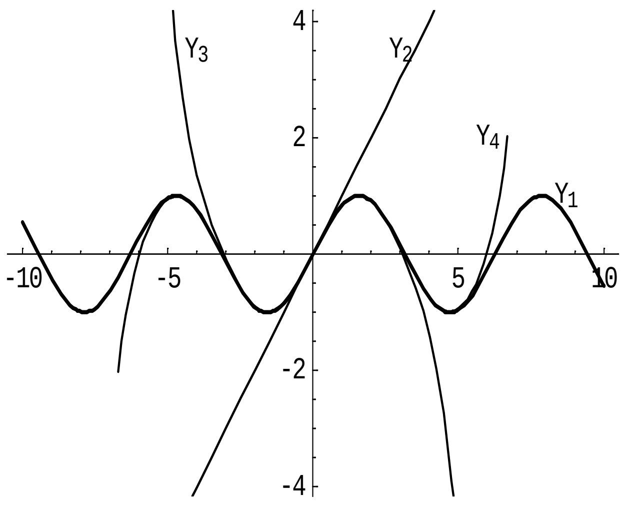
Замечание 1. Анализируя ряд разложения функции, легко заметить закономерности образования ряда и выписать следующие члены разложения.

Пример 5. Разложить по формуле Маклорена функцию $\sin x$.

Решение. $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots$$

На рисунке изображен жирной линией график функции $Y_1 = \sin x$, тонкими линиями его приближение одним членом ряда Маклорена $Y_2 = x$, приближение четырьмя отличными от нуля членами ряда $Y_3 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$ и, наконец, приближение семью членами ряда

$$Y_4 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!}.$$



Замечание 2. Эти формулы дают возможность производить разложения в ряд некоторых функций без использования общей схемы с нахождением производных высокого порядка.

Пример 6. Разложить по формуле Маклорена функцию e^{2x+1} до $o\left((x^4)\right)$.

Решение. Разложим функцию e^{2x+1} в окрестности $x=0$ до $o\left((x^4)\right)$. Воспользуемся разложением функции e^x в ряд, заменив в правой части этого ряда величину x на $2x$:

$$e^{2x+1}=e^1\left[1+\frac{2x}{1!}+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(3x)^3}{3!}+o\left((x^4)\right)\right]=$$

$$e\left[1+2x+2x^2+\frac{9}{2}x^3+o\left((x^4)\right)\right]=e+2ex+2ex^2+\frac{9}{2}ex^3+o\left((x^4)\right)$$

Замечание 3. Ранее мы установили асимптотические формулы для некоторых элементарных функций, например, $\sin x = x+o(x)$. Мы пользовались ими при вычислении простейших пределов. Для нахождения некоторых более сложных пределов такого асимптотического приближения может оказаться недостаточно и следует брать следующие члены разложения.

Пример 7. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$.

Решение. Если ограничиться разложением $\sin x = x+o(x)$, то в пределе получается выражение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-(x+o(x))}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot o(1)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{o(1)}{x^2}.$$

Чему равен такой предел, сказать невозможно. Неизвестно, какая бесконечно малая функция скрывается под $o(1)$. Поэтому правильное решение выглядит так:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\left(\dfrac{1}{3!}+o(x)\right)}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

Замечание 4. Если в разложении для функции $(1+x)^\alpha$ положить $\alpha=n$, где n - натуральное число, то все члены этой формулы начиная с (n+1)-го исчезают, и формула Маклорена превращается в известную формулу бинома Ньютона

$$(1+x)^n=1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots+x^n,$$

т.е. бином Ньютона является частным случаем разложения функции $(1+x)^\alpha$ в ряд Маклорена.

Вопросы для повторения

1. Сформулировать и доказать теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши.
2. В чем геометрический смысл теоремы Ролля?
3. Привести геометрический смысл теоремы Лагранжа.
4. Как в смысле общности соотносятся между собой теоремы Роля, Лагранжа и Коши?
5. Сформулировать и доказать правило Лопиталя при $x \to a$.
6. Можно ли распространить правило Лопиталя на случай $x \to +\infty$? Как это обосновать?
7. На какие типы неопределенностей распространяется правило Лопиталя?
8. Провести сравнение степенной, показательной и логарифмической функций по скорости роста при $x \to +\infty$.
9. Назвать наиболее медленно растущую функцию из известных вам и наиболее быстро растущую при $x \to +\infty$.
10. Привести разложение многочлена n-й степени в ряд, используя формулу Маклорена.
11. Привести в общем виде формулы Тейлора и Маклорена разложения функции в степенной ряд.
12. Получить разложение в ряд Маклорена функций $e^x,\ \sin x,\ \cos x,\ \ln(1+x),\ (1+x)^\alpha$.
13. Как соотносятся между собой асимптотические формулы и формула Маклорена разложения функции в степенной ряд?

Глава II. Исследование функций с помощью производных

- Условия возрастания и убывания функции
- Понятие экстремума
- Необходимое условие экстремума
- Первое достаточное условие экстремума
- Схема исследования функции на экстремум
- Второе достаточное условие экстремума
- Наибольшее и наименьшее значение функции, непрерывной на отрезке
- Выпуклость функции. Точки перегиба
- Схема исследования функции на выпуклость
- Асимптоты графика функции
- Исследование функций и построение их графиков
- Приложение. Эластичность функции

Условия возрастания и убывания функции

Изучим условия возрастания (не убывания) и убывания (не возрастания) функций. Напомним, что функция $y = f(x)$ называется *возрастающей на промежутке*, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции, т.е. из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Функция называется *убывающей* на промежутке, если из $x_2 > x_1$ следует $f(x_2) < f(x_1)$.

Функция $y = f(x)$ называется *неубывающей на промежутке*, если из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) \geq f(x_1)$, и *невозрастающей*, если из условия $x_2 > x_1$ следует $f(x_2) \leq f(x_1)$.

Теорема 1. (условия возрастания (убывания) монотонной функции).
Если $f'(x) > 0$ на промежутке X, то функция $y = f(x)$ возрастает на этом промежутке, если $f'(x) < 0$ на промежутке X, то функция $y = f(x)$ убывает на этом промежутке.

◄Для функции $y = f(x)$ выполняются условия теоремы Лагранжа на отрезке $[x_1; x_2] \in X$, поэтому существует точка $x_0 \in (x_1; x_2)$, в которой $f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0) \cdot (x_2 - x_1)$. Анализируем это равенство: если $f'(x_0) > 0$, то из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ и обратно. Если же $f'(x_0) < 0$, то из $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.►

Замечание 1. Обратное утверждение звучит несколько иначе. Если функция возрастает на промежутке, то $f'(x_0) \geq 0$ или не существует.

Пример 1. Функция $y = x^3$ возрастает на всей числовой оси, соответственно $f'(x) > 0$, но в точке $x = 0$ производная $f'(0) = 0$.

Пример 2. Функция $y = \begin{cases} 2x, & x \geq 0, \\ x, & x < 0 \end{cases}$ не имеет производной в точке x=0 (левая и правая производная различны), однако она возрастает при всех значениях x, в том числе и в точке $x = 0$.

Замечание 2. Опираясь на более «мягкие» условия, можно сформулировать прямую теорему: если производная функции, непрерывной на промежутке, неотрицательна, то функция на этом промежутке не убывает. Тогда прямая и обратная теоремы на формализованном языке звучат так:

для того, чтобы непрерывная на промежутке функция $y = f(x)$ была неубывающей на этом промежутке, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x_0) \geq 0$.

Понятие экстремума

Определение. *Точка x_0 называется точкой локального максимума функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности $f(x) \leq f(x_0)$.*

Определение. *Точка x_0 называется точкой локального минимума функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности $f(x) \geq f(x_0)$.*

Значение функции в точке максимума называется локальным максимумом, значение функции в точке минимума - локальным минимумом данной функции. Максимум и минимум функции называются ее локальными *экстремумами* (extremum – крайний).

Определение. *Точка x_0 называется точкой строгого локального максимума (минимума) функции $y = f(x)$, если для всех x из окрестности точки x_0 верно строгое неравенство $f(x) < f(x_0)$ (соответственно $f(x) > f(x_0)$).*

Замечание. В приведенном определении локального экстремума мы не предполагаем непрерывности функции в точке x_0.

Пример 3. Функция $y = \begin{cases} x^2, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ разрывна в точке $x = 0$, но имеет в этой точке максимум, поскольку существует окрестность точки $x = 0$, в которой $f(x) < f(x_0)$.

Наибольшее (наименьшее) значение функции на промежутке называется *глобальным экстремумом.* Глобальный экстремум может достигаться либо в точках локального экстремума, либо на концах отрезка.

Необходимое условие экстремума

Теорема 2. (о необходимом условии экстремума).

Если функция $y = f(x)$ *имеет экстремум в точке* x_0, *то ее производная* $f'(x_0)$ *в этой точке либо равна нулю, либо не существует.*

◄Если в точке x_0 функция имеет экстремум и дифференцируема, то в некоторой окрестности этой точки выполнены условия теоремы Ферма, следовательно, производная функции в этой точке равна нулю.

Но функция $y = f(x)$ может иметь экстремум и не быть дифференцируемой в этой точке. Достаточно указать пример. Примером может служить функция $y = |x|$, которая имеет минимум в точке $x = 0$, однако не дифференцируема в этой точке. ►

Замечание 1. Геометрическую иллюстрацию теоремы дает Рис.1. Функция $y = f(x)$, график которой представлен на этом рисунке, имеет экстремумы в точках x_1, x_3, x_4, при этом в точке x_1 производная не существует, в точке x_3 она равна нулю, в точке x_4 обращается в бесконечность. В точках x_2, x_5 функция экстремума не имеет, причем в точке x_2 производная обращается в бесконечность, в точке x_5 производная равна нулю.

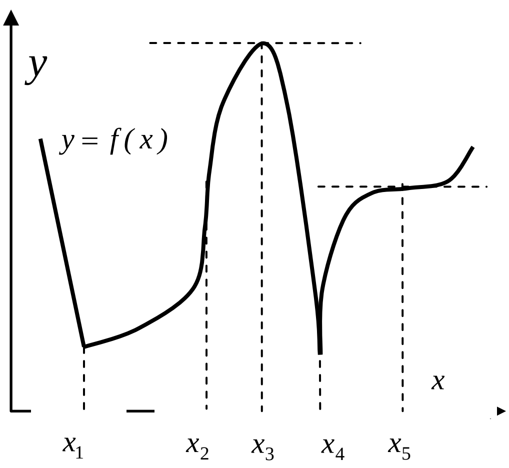


Рис. 1

Замечание 2. Точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума для непрерывной функции, называются ***критическими точками*** этой функции. Они определяются из уравнения $f'(x) = 0$ (*стационарные точки*) или $f'(x) = \infty$.

Замечание 3. Не в каждой своей критической точке функция обязательно имеет максимум или минимум.

Пример 4. Рассмотрим функцию $y = x^3$. Критической для этой функции является точка $x = 0$, что следует из уравнения $f'(x) = 3x^2 = 0$. Однако эта функция при всех *x* является возрастающей и экстремума не имеет.

Теорема 3. (о достаточных условиях экстремума).

Пусть для $y = f(x)$ *выполнены следующие условия:*

1) $y = f(x)$ *непрерывна в окрестности точки* x_0*;*

2) $f'(x) = 0$ *или* $f'(x) = \infty$ *в точке* x_0*;*

3) $f'(x)$ *при переходе через точку* x_0 *меняет свой знак.*

Тогда в точке $x = x_0$ *функция* $y = f(x)$ *имеет экстремум:*

минимум*, если при переходе через точку* x_0 *производная меняет свой знак с минуса на плюс;*

максимум*, если при переходе через точку* x_0 *производная меняет свой знак с плюса на минус.*

Если производная $f'(x)$ *при переходе через точку* x_0 *не меняет своего знака, экстремума в точке* $x = x_0$ *нет.* ◄

Условия теоремы можно свести в следующую таблицу

Знак производной		Экстремум
-	+	Минимум
+	-	Максимум
-	-	Нет
+	+	Нет

Так как по условию $f'(x) < 0$ при $x < x_0$, то на левом относительно точки x_0 интервале функция $y = f(x)$ убывает. Так как $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то на правом относительно точки x_0 интервале функция $f(x)$ возрастает. Следовательно, $f(x_0)$ есть наименьшее значение функции $f(x)$ в окрестности точки x_0, а это означает, что $f(x_0)$ есть локальный минимум функции $f(x)$. Если при переходе с левого интервала на правый функция продолжает убывать, то в точке x_0 не будет достигаться минимальное значение функции (экстремума нет).

Аналогично доказывается существование максимума.►

На рис. 2 a-h представлены возможные случаи наличия или отсутствия экстремума непрерывной функции, производная которой в критической точке равна нулю или обращается в бесконечность.

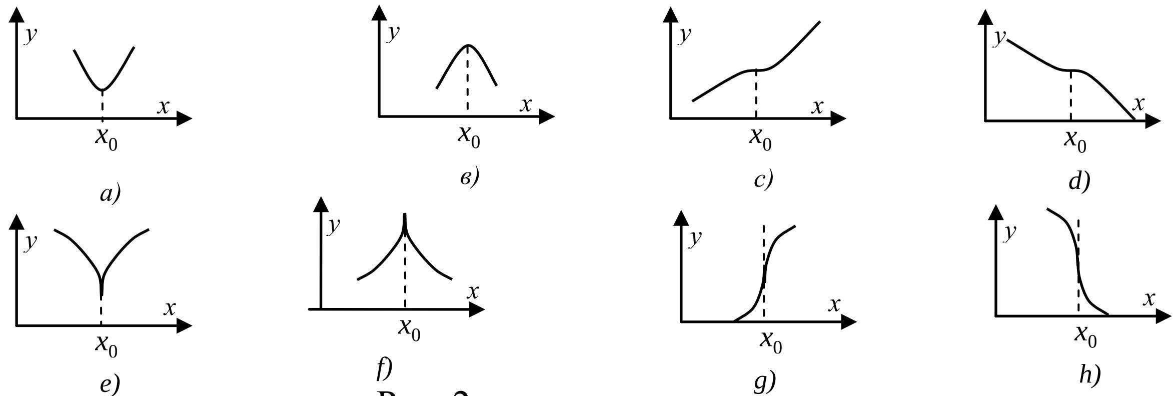


Рис. 2

Замечание. Если условие непрерывности функции в самой точке x_0 не выполнено, то вопрос о наличии экстремума остается открытым.

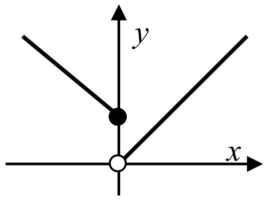


Рис. 3

Пример 5.

Рассмотрим разрывную в точке x_0 функцию $f(x)=\begin{cases}-x+1, & x\le 0,\\ x, & x>0\end{cases}$ (рис.3). Производная этой функции меняет знак при переходе через точку $x_0=0$, однако функция в точке $x_0=0$ экстремума не имеет.

Пример 6. Пусть дана функция

$$f(x)=\begin{cases}x^2, x\ne 0,\\ 1, \quad x=0\end{cases}$$

(рис.4). Как видно из рисунка, $f(x)$ имеет локальный максимум в точке $x_0=0$, однако функция имеет разрыв в точке $x_0=0$.

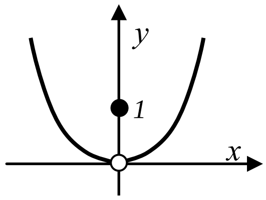


Рис. 4

Замечание 3. Если функция имеет в точке x_0 экстремум, например, минимум, то необязательно слева от точки x_0 функция монотонно убывает, а справа от x_0 монотонно возрастает.

Пример 7. Пусть дана функция

$$f(x)=\begin{cases}x^2\left(2-\cos\dfrac{1}{x}\right), & x\ne 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

(рис. 5).

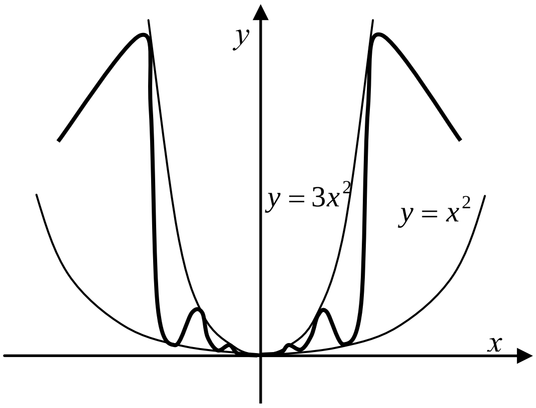


Рис. 5

Можно показать, что в точке $x=0$ данная функция непрерывна и имеет минимум. Производная функции

$$f'(x)=2x\left(2-\cos\frac{1}{x}\right)-\sin\frac{1}{x}$$

в любой окрестности точки $x=0$ меняет знак бесконечно много раз. Поэтому функция $f(x)$ не является монотонно убывающей или возрастающей ни слева, ни справа от точки $x=0$.

Схема исследования функции на экстремум:

1) найти производную $f'(x)$;

2) найти критические точки, т.е. такие значения *x*, в которых $f'(x)=0$ или $f'(x)=\infty$;

3) исследовать знак производной слева и справа от каждой критической

точки. Если при переходе через критическую точку производная $f'(x)$ меняет свой знак с плюса на минус, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум, если знак $f'(x)$ меняется с минуса на плюс, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет минимум Если при переходе x через критическую точку x_0 знак $f'(x)$ не меняется, то в точке x_0 функция $f(x)$ не имеет ни максимума, ни минимума;

4) найти значения функции в экстремальных точках.

Теорема 4. (2 -ое достаточное условие экстремума).
Пусть для функции $y = f(x)$ выполнены следующие условия:

1. $y = f(x)$ непрерывна в окрестности точки x_0,
2. $f'(x) = 0$ в точке x_0
3. $f''(x) \neq 0$ в точке x_0.

Тогда, в точке x_0 достигается экстремум, причем: если $f''(x_0) > 0$, то в точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ имеет минимум, если $f''(x_0) < 0$, то при $x = x_0$ функция $y = f(x)$ имеет максимум.

◀ По определению 2-й производной $f''(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$.

Но по условию $f'(x_0) = 0$. Поэтому $f''(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{x - x_0}$. Если $f''(x_0) > 0$, то дробь $\dfrac{f'(x)}{x - x_0} > 0$ в некоторой окрестности точки $x = x_0$. При $x < x_0$ дробь положительна, если $f'(x) < 0$. При $x > x_0$ дробь положительна, при условии $f'(x) > 0$. Следовательно, $f'(x)$ при переходе через точку $x = x_0$ меняет знак, поэтому есть экстремум. Знак производной меняется с минуса на плюс, значит, это минимум. Аналогично доказывается случай $f''(x_0) < 0$.▶

Пример 8. Исследовать на экстремум функцию $y = x^2 + 2x + 3$.

Находим производную $y' = 2x + 2$.

1) Находим критические точки, для чего приравниваем к нулю производную: $y' = 2x + 2 = 0$, $\to$ $x_0 = -1$.

2) Изучаем знак производной слева и справа от этой точки (рис. 6). Поскольку знак производной меняется с минуса на плюс, в точке $x = -1$ достигается минимум.

3) Находим величину минимума: $y_{\min}(-1) = 2$.

Пример 9.

Исследовать на экстремум функцию $y = \sqrt[3]{x^2} + 1$.

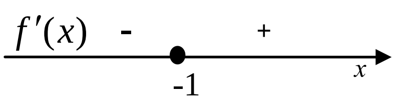


Рис. 6

1) Находим производную $y' = \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

2) Критической точкой является $x = 0$, т.к. в этой точке $f'(0) = \infty$.

3) Исследуем знак y' слева и справа от точки $x = 0$. Очевидно, $f'(x) < 0$, если $x < x_0$, и $f'(x) > 0$, если $x > x_0$. Таким образом, точка $x = 0$ есть точка минимума данной функции.

4) $y_{\min}(0) = 1$.

Пример 10.

Исследовать на экстремум функцию $y = e^{-x^2}$.

1) Находим первую производную: $y' = -2xe^{-x^2}$.

2) Приравнивая производную нулю, находим единственную критическую точку $x = 0$.

3) Далее находим вторую производную: $y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$. Ее значение в точке $x = 0$ равно -2.

4) Делаем вывод о наличии максимума функции и вычисляем: $y_{\max}(0) = 1$.

Наибольшее и наименьшее значение функции, непрерывной на отрезке

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$, то, согласно 2-й теореме Вейерштрасса, она на этом отрезке достигает своего наибольшего и наименьшего значения.

Если свое наибольшее значение M функция $f(x)$ принимает во ***внутренней точке*** x_0 отрезка $[a; b]$, то $M = f(x_0)$ будет локальным максимумом функции $f(x)$, т. к. в этом случае существует окрестность точки x_0 такая, что значения $f(x)$ для всех точек x из этой окрестности будут не больше $f(x_0)$.

Однако свое наибольшее значение M функция $f(x)$ ***может принимать и на концах отрезка*** $[a; b]$. Поэтому, чтобы найти наибольшее значение M непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$, надо найти все максимумы функции в интервале $(a; b)$ и значения $f(x)$ на концах отрезка $[a; b]$ и выбрать среди них наибольшее число. Вместо исследования на максимум можно ограничиться нахождением значений функции в критических точках. Наименьшим значением m непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$ будет наименьшее число среди всех минимумов функции $f(x)$ в интервале $(a; b)$ и значений $f(a)$ и $f(b)$.

Выпуклость функции. Точки перегиба

Определение. *График функции* $y = f(x)$, *дифференцируемой на интервале* $(a; b)$, *имеет на этом интервале выпуклость, направленную вверх (вниз), если график этой функции в пределах интервала (a;b) лежит не выше (не ниже) любой своей касательной (рис. 7).*

Теорема 5. (об условиях выпуклости вверх или вниз).

Пусть функция $y = f(x)$ *определена на интервале* $(a;b)$ *и имеет непрерывную, не равную нулю в точке* $x_0 \in (a;b)$ *вторую производную. Тогда, если* $f''(x) > 0$ *всюду на интервале* $(a;b)$, *то функция имеет выпуклость вниз на этом интервале, если* $f''(x) < 0$, *то функция выпукла вверх.*

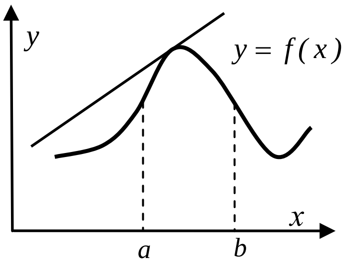


Рис. 7

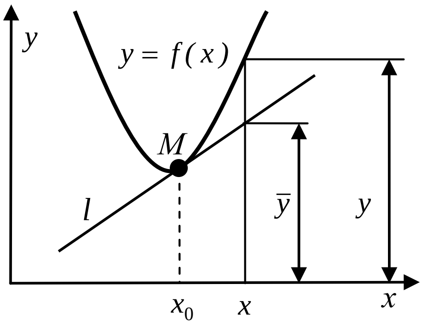


Рис. 8

◄Пусть в точке $M\left(x_0, f(x_0)\right)$ (рис. 8) прямая *l* касается кривой $y = f(x)$. Обозначим через $\bar{y}$ переменную ординату точки прямой *l*. Тогда уравнение прямой *l*, касательной к кривой $y = f(x)$, имеет вид:

$$\bar{y} = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Функцию $y = f(x)$ разложим в ряд Тейлора в окрестности точки x_0:

$$y = f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right)$$

Возьмем произвольное значение *x* из окрестности точки x_0 и найдем разность $y - \bar{y}$

$$y - \bar{y} = f(x) - \left(f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) \right).$$

Заменим функцию $y = f(x)$ рядом Тейлора. Получим:

$$y - \bar{y} = \left(f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right) \right) -$$
$$-\left(f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) \right)$$

После раскрытия скобок будем иметь

$$y - \bar{y} = \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right).$$

В полученном выражении первое слагаемое в правой части определяет величину и знак разности $y - \bar{y}$, второе слагаемое является бесконечно малой величиной.

Из равенства следует, что знак разности $y - \bar{y}$ совпадает со знаком $f''(x_0)$. Поэтому, если $f''(x_0) > 0$, то $y - \bar{y} > 0$ для всех точек $x \neq x_0$, достаточно близких к точке x_0. Точки кривой расположены выше своей касательной и, в соответствии с определением, кривая выпукла вниз. Если $f''(x_0) < 0$, то $y - \bar{y} < 0$. Точки кривой расположены ниже своей касательной и кривая выпукла вверх.▶

Определение. Точкой перегиба графика функции $y = f(x)$ называется точка $M(x_1, f(x_1))$, разделяющая промежутки выпуклости вверх и вниз. Иными словами, точка $M(x_1, f(x_1))$ - точка перегиба кривой, если в этой точке кривая переходит с одной стороны касательной на другую, меняя направление выпуклости (рис. 9).

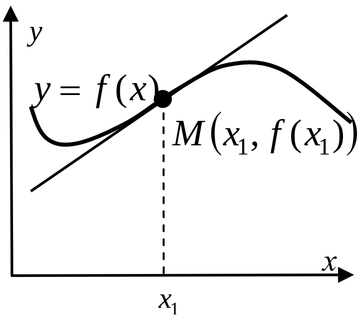


Рис. .9

Теорема 6. (о необходимом условии точки перегиба).

Если $M(x_1, f(x_1))$ *есть точка перегиба дважды дифференцируемой функции* $y = f(x)$, *то* $f''(x_1) = 0$ *или* $f''(x_1) = \infty$.

Теорема 7. (о достаточном условии точки перегиба).

Если вторая производная $f''(x)$ *дважды дифференцируемой функции при переходе через некоторую точку* x_1 *меняет знак, причем* $f''(x_1) = 0$, *то точка* $M(x_1, f(x_1))$ *есть точка перегиба кривой* $y = f(x)$.

Схема исследования функции на выпуклость

1) Найти вторую производную функции;

2) найти точки, в которых вторая производная равна нулю или обращается в бесконечность;

3) исследовать знак производной слева и справа от каждой найденной точки и сделать вывод об интервалах выпуклости и точках перегиба;

4) найти значения функции в точках перегиба.

Пример 11. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $y = x^3 - 3x^2 + x - 1$.

Находим вторую производную:

$y' = 3x^2 - 6x + 1$, $y'' = 6x - 6$.

Находим точку, где вторая производная равна нулю: $y'' = 0$ при x=1.

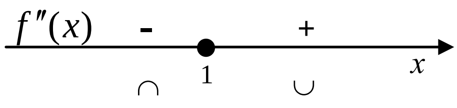


Рис. 10

Исследуем знак второй производной слева и справа от найденной точки. Для этого рисуем числовую ось и указываем на ней знаки второй производной (рис.10). Делаем заключение об интервале выпуклости вверх слева от точки x=1 и интервале выпуклости вниз справа от этой точки.

Делаем вывод о наличии перегиба в точке (1;2).

Асимптоты графика функции

Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

Прямая $y = y_0$ называется *горизонтальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ равно *b*.

График функции может иметь только правую горизонтальную асимптоту или только левую.

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если

$$\lim_{x \to \infty} \big(f(x) - kx - b \big) = 0,$$

т.е. когда функция при $x \to \infty$ представима в виде

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \text{ где } \lim_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0.$$

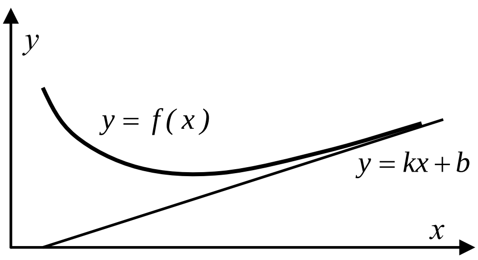


Рис. 11

Существование асимптоты $y = kx + b$ у кривой $y = f(x)$ при $x \to \infty$ означает, что при $x \to \infty$ функция ведет себя «почти как линейная», т. е. отличается от линейной функции $y = kx + b$ бесконечно мало (рис. 11). Наклонная асимптота может быть как правой, так и левой.

Теорема 8. (об условиях существования наклонной асимптоты)

Если для функции $y = f(x)$ *существуют пределы*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k \; \textit{и} \; \lim_{x \to \infty} \big(f(x) - kx \big) = b,$$

то функция имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ *при* $x \to \infty$.

◄Из существования первого предела следует, что $\dfrac{f(x)}{x} - k = \beta(x)$, где $\beta(x)$ - бесконечно малая функция. Тогда $f(x) = kx + x \cdot \beta(x)$. Отнимем от обеих частей величину kx и найдем предел при $x \to \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\beta(x)$.

Из $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=b$ следует $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\beta(x)=b$. Поэтому $x\cdot\beta(x)=b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция.

Следовательно, $f(x)=kx+x\cdot\beta(x)=kx+b+\alpha(x)$.►

Пример 12. Найти асимптоты графика функции $y=\sqrt{x(x-2)}$.

Решение. Найдем последовательно пределы $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)$.

Второй предел находится при условии, что первый из них конечен.

Тогда $$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x(x-2)}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{x}.$$

Если $x>0$, то модуль раскрываем со знаком плюс, и получаем

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{2}{x}}=1.$$

Если $x<0$, то $$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)=-1.$$

Найдем величину второго предела, домножив числитель и знаменатель (который равен единице) на сопряженное выражение:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x(x-2)}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x-2)-x^2}{\sqrt{x(x-2)}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1}=-1$$

Таким образом, правая наклонная асимптота имеет вид $y=x-1$.

Аналогично рассматривается случай $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x(x-2)}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(x-2)-x^2}{\sqrt{x(x-2)}-x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{-x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1}=1$$

Тогда получим левую наклонную асимптоту $y=-x+1$. График исходной функции со своими асимптотами представлен на рис. 12.

Значительно короче можно решить пример, используя «o»-малое.

$$y=\sqrt{x(x-2)}=\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}=|x|\cdot\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Поскольку $x\to\infty$, заменим скобку асимптотическим равенством. Получим

$$y=|x|\cdot\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=|x|\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=|x|-\frac{|x|}{x}+o(1).$$

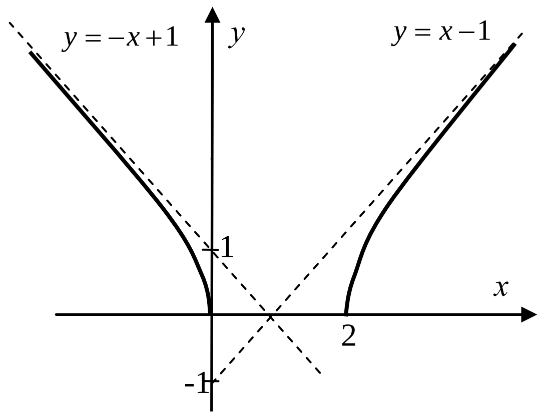


Рис. 12

Пусть $x\to+\infty$.

Тогда $y=|x|-\dfrac{|x|}{x}+o(1)=x-1+o(1)$.

Пусть $x\to-\infty$. Тогда $y=|x|-\dfrac{|x|}{x}+o(1)=-x+1+o(1)$.

Как известно, $o(1)$ есть бесконечно малая величина. Правая $y=x-1$ и левая $y=-x+1$ наклонные асимптоты получены.

Замечание 1. Прямая $x=x_0$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке $x=x_0$. Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.

Замечание 2. Горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной при k=0.

Замечание 3. Если при нахождении горизонтальной асимптоты получается $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, то функция может иметь наклонную асимптоту.

Замечание 4. Кривая $y=f(x)$ может пересекать свою асимптоту, причем многократно.

Исследование функций и построение их графиков

При построении графика функции необходимо провести ее предварительное исследование. Построение сразу по точкам, за исключением элементарных случаев, *может привести к потере* на графике важных свойств функции. Примерная схема исследования функции с целью построения ее графика представлена ниже.

1. Область определения $D(y)$ и область допустимых значений $E(y)$ функции.

2. Симметрия и периодичность.

3. Точки разрыва и промежутки непрерывности функции.

4. Нули функции и промежутки постоянного знака.

5. Экстремумы и промежутки монотонности.

6. Точки перегиба и промежутки выпуклости.

7. Асимптоты.

Замечание 1. Схема представлена как примерная. Пункты исследования можно опускать, если они дают банальную информацию, или переставлять, если обнаруживаются интересные особенности поведения графика. Однако без нахождения разрывов, экстремумов, асимптот и исследования на выпуклость часто невозможно получить график, правильно отражающий поведение функции.

Замечание2. Для уточнения графика можно найти некоторые дополнительные точки, но иногда удается обойтись и без них.

Замечание 3. Рекомендуется строить график одновременно с исследованием функции, нанося на координатную плоскость информацию по завершении каждого пункта исследования.

Пример 13. Провести полное исследование функции $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ и построить график.

1. Областью определения является вся числовая ось.

2. Функция четная: $f(-x) = f(x)$, так что ее график симметричен относительно оси ординат. Из четности функции следует, что достаточно построить ее график в правой полуплоскости, а затем отразить его в левую полуплоскость.

3. Точек разрыва нет, функция непрерывная на всей числовой оси.

4. При $x = 0$ имеем $y = 1$. Функция положительна при всех *x*, так что график функции лежит в верхней полуплоскости.

5. $y' = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$. Функция возрастает при $x < 0$ и убывает при $x > 0$. Точка $x = 0$ – критическая. При переходе *x* через точку $x = 0$ производная $y'(x)$ меняет знак с плюса на минус (рис.13). Следовательно, точка $x = 0$ – точка максимума, $y(0) = 1$.

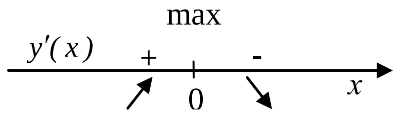


Рис. 13

6. $y'' = -2\dfrac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}$. Вторая производная обращается в нуль в точках $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Исследуем точку $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. При $x > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ имеем $y'' > 0$, т.е. кривая выпукла

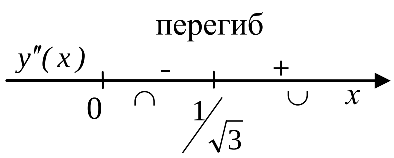


Рис. 14

вниз; при $x < \frac{1}{\sqrt{3}}$ получаем $y''<0$ (кривая выпукла вверх) (рис.14). Следовательно, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ - точка перегиба

7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$. График имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$, наклонных асимптот нет.

Строим график в правой полуплоскости и симметрично отражаем его в левую полуплоскость. График функции изображен на рис. 15.

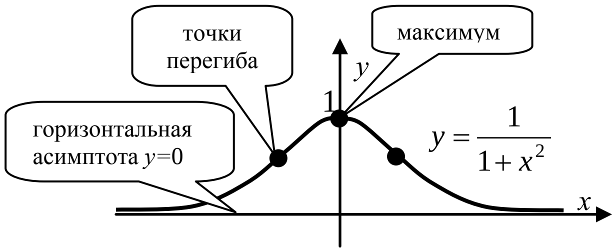


Рис. 15

Пример 14. Провести полное исследование функции $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ и построить график.

1. Область определения функции $x \neq 1$, т.е. $D(y) = (-\infty, 1) \cup (1; +\infty)$.

Так как при $x < -1$ $y < 0$, а при $x > -1$ $y > 0$, и $\lim\limits_{x \to -\infty} y(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$, то множество значений функции $E(y) = (-\infty; +\infty)$.

2. Функция $y(x)$ не является периодической. Она ни четная, ни нечетная, т.е. ее график не обладает симметрией. (Этот очевидный для данной функции пункт можно было опустить).

3. В точке x=1 функция имеет разрыв второго рода, т.к. $\lim\limits_{x \to 1-0} y(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 1+0} y(x) = +\infty$.

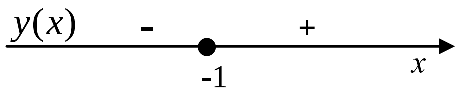


Рис. 16

4. Точки пересечения с осями координат: $x = 0$, $y = 1$, и $x = -1$, $y = 0$. Промежутки постоянного знака представлены на рис. 16.

5. Найдем интервалы возрастания, убывания и экстремумы функции. Для этого вычислим первую производную:

$$y' = \frac{3(x+1)^2(x-1)^2 - 2(x-1)(x+1)^3}{(x-1)^4} = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}.$$

Отсюда получим

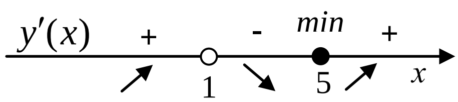


Рис. 17

а) $y' > 0$ при $x < 1$ и $x > 5$, следовательно, на этих промежутках функция возрастает, а при $x \in (1,5)$ $y' < 0$ и функция убывает. (рис. 17).

б) $y'=0$ при x=5 и в точке (5; 27/2) функция имеет локальный минимум. Точка $x=-1$ тоже является критической точкой $y'(-1)=0$, но локального экстремума функции в этой точке нет.

6. Найдем интервалы выпуклости функции. Для этого вычислим вторую производную: $y''==\dfrac{24(x+1)}{(x-1)^4}$. Тогда $y''<0$ при $x<-1$ и функция выпукла вверх, а на промежутках $-1<x<1$ и $x>1$ $y''>0$ и функция выпукла вниз. Точка $\left(-1,\,0\right)$ - точка перегиба графика функции (рис. 18).

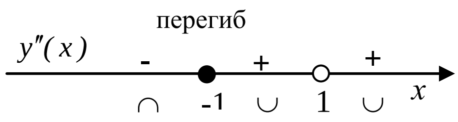


Рис. 18.

7. Прямая x=1 будет вертикальной асимптотой графика функции. Наклонными асимптотами графика функции будут прямые, заданные уравнением $y=kx+b$, где коэффициенты k и b определяются равенствами

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},\qquad b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx).$$

Поскольку

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2x}=1,\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}-x\right)=5,$$

то единственной наклонной асимптотой будет прямая $y=x+5$.

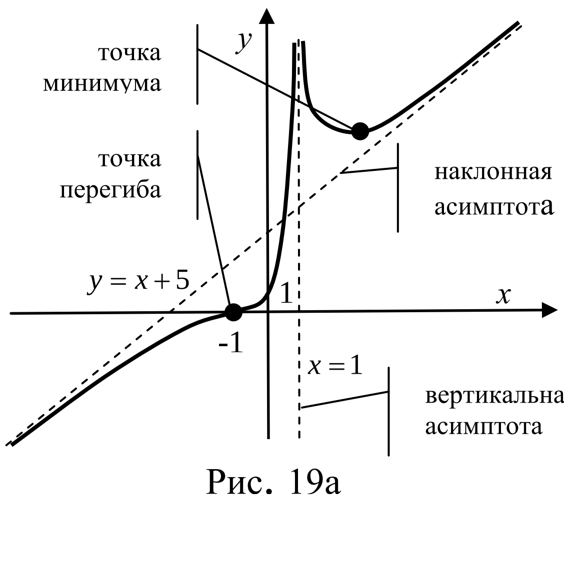


Рис. 19а

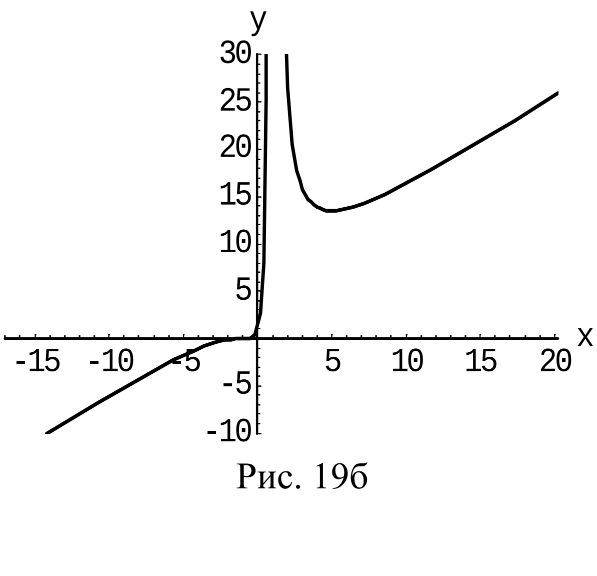


Рис. 19б

График данной функции, построенный по результатам исследования, представлен на рис. 19а. На другом рисунке (рис. 19б) представлен график этой же функции, рассчитанный и построенный компьютерной программой «Mathematica 5.0».

Приложение. Эластичность функции.

В экономических исследованиях часто используется понятие эластичности функциии.

Определение. *Эластичностью функции* $\mathrm{E}_x(y)$ *называется предел отношения относительного приращения функции* $y = f(x)$ *к относительному приращению аргумента x при* $\Delta x \to 0$*:*

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} y'.$$

Если эластичность функции представить в виде

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y} \cdot 100\%}{\frac{\Delta x}{x} \cdot 100\%},$$

то легко увидеть, что *эластичность функции показывает приближенно, на сколько процентов изменится функция* $y = f(x)$ *при изменении независимой переменной x на 1%.*

Пользуясь понятием дифференциала, эластичность можно представить иначе:

$$\mathrm{E}_x(y) = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = \frac{d(\ln y)}{d(\ln x)}.$$

Геометрическая интерпретация

Эластичность функции $y = f(x)$ можно найти из графика этой функции. По определению эластичности $E_x(y) = \frac{x}{y} y' = \frac{x}{y} \operatorname{tg}\alpha$, где α - угол наклона касательной к функции $y = f(x)$ в точке $C(x_0, y_0)$ (рис. 20).

Из треугольника ACD :

$$\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AC}} = \frac{y_0}{AC} = \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha .$$

Из треугольника *BCL:*

$$\frac{LC}{BC} = \frac{x_0}{BC} = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

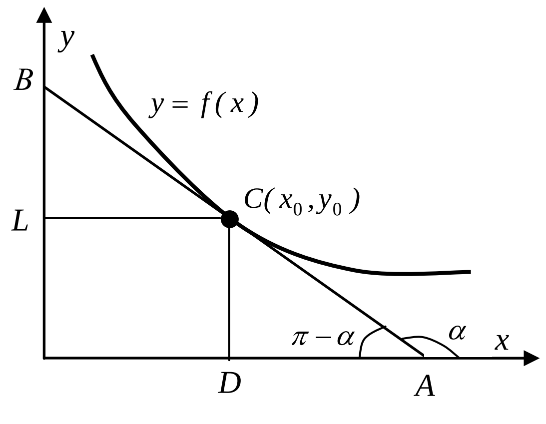


Рис. 20.

Откуда,

$$\frac{BC}{AC} = \frac{\frac{x_0}{-\cos\alpha}}{\frac{y_0}{\sin\alpha}} = -\frac{x_0}{y_0} f'(x_0) = -E_x(y)$$

т.е. *эластичность убывающей функции равна отношению расстояний по касательной от точки C с координатами* (x_0, y_0) *до ее пересечения с осями ординат и абсцисс, взятому со знаком минус*. Таким образом, если аккуратно построить график функции $y = f(x)$ и провести касательную к кривой в исследуемой точке $C(x_0, y_0)$, можно приблизительно определить величину эластичности функции в этой точке.

Свойства эластичности функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет конечную или бесконечную производную на промежутке. Вспомним, что производная есть отношение дифференциалов $y' = \frac{dy}{dx}$.

1. *Эластичность есть безразмерная величина* $\mathrm{E}_{\mathrm{x}}(y) = E_{ax}(by)$.

◀Доказательство очевидно: $E_{ax}(by) = \frac{ax}{by}\frac{d(by)}{d(ax)} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}y'$.▶

2. *Эластичности взаимно обратных функций есть взаимно обратные величины*

$$\mathrm{E}_{\mathrm{x}}(y) = \frac{1}{E_y(x)}.$$

◀ $\mathrm{E}_{\mathrm{x}}(y) = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{y}{x}\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{E_y(x)}$.▶

3. *Эластичность произведения функций* $u = u(x)$ *и* $v = v(x)$ *равна сумме их эластичностей* $E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v)$.

◀При доказательстве свойства воспользуемся следующим свойством дифференциала $d(uv) = v \cdot du + u \cdot dv$. Тогда

$$E_x(uv) = \frac{x}{uv}\frac{d(uv)}{dx} = \frac{x}{uv}\frac{vdu + udv}{dx} = \frac{x}{u}\frac{du}{dx} + \frac{x}{v}\frac{dv}{dx} = E_x(u) + E_x(v).▶$$

4. *Эластичность отношения функций* $u = u(x)$ *и* $v = v(x)$ *равна разности их эластичностей*

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v).$$

◀Доказательство аналогично:

$$E_x(\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{v}}) = \frac{x}{\frac{u}{v}}\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{x}{\frac{u}{v}}\frac{vdu - udv}{v^2dx} = \frac{x}{u}\frac{du}{dx} - \frac{x}{v}\frac{dv}{dx} = E_x(u) - E_x(v).▶$$

5. *Эластичность суммы функций* $u = u(x)$ *и* $v = v(x)$ *равна сумме их эластичностей, взятых с соответствующими весами*:

$$\mathrm{E_x}(u+v) = \frac{u}{u+v}E_x(u) + \frac{v}{u+v}E_x(v).$$

◀Доказательство

$$\mathrm{E_x}(u+v) = \frac{x}{u+v}\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{x}{u+v}\frac{du}{dx}\frac{u}{u} + \frac{x}{u+v}\frac{dv}{dx}\frac{v}{v} =$$

$$\frac{u}{u+v}\cdot\frac{x}{u}\frac{du}{dx} + \frac{v}{u+v}\cdot\frac{x}{v}\frac{dv}{dx} = \frac{u}{u+v}E_x(u) + \frac{v}{u+v}E_x(v)$$ ▶

Эластичность элементарных функций

Вычислим эластичности некоторых функций.

1. Степенная функция $\mathrm{y} = \mathrm{x}^{\alpha}$. Ее эластичность:

$$\mathrm{E_x}(x^{\alpha}) = \frac{x}{x^{\alpha}}\frac{d(x^{\alpha})}{dx} = \frac{x}{x^{\alpha}}\frac{\alpha x^{\alpha-1}dx}{dx} = \alpha.$$

2. Показательная функция $y = a^x$.

$$\mathrm{E_x}(a^x) = \frac{x}{a^x}\frac{d(a^x)}{dx} = \frac{x}{a^x}\frac{a^x \ln a \cdot dx}{dx} = x\ln a.$$

3. Логарифмическая функция $y = \ln x$.

$$E_x(\ln x) = \frac{x}{\ln x}\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{\ln x}.$$

4. Линейная функция $y = ax + b$.

$$E_x(ax+b) = \frac{x}{ax+b}\frac{d(ax+b)}{dx} = \frac{ax}{ax+b}.$$

Функция в зависимости от величины своей эластичности может быть

совершенно эластичная	$\lvert\mathrm{E_x}(y)\rvert = +\infty$
эластичная	$1 < \lvert\mathrm{E_x}(y)\rvert < +\infty$
неэластичная	$0 < \lvert\mathrm{E_x}(y)\rvert < 1$
совершенно неэластичная	$\mathrm{E_x}(y) = 0$

Эластичность функций применяется, например, при анализе спроса и потребления, в процессе анализа проектных рисков в ходе исследования изменений критериев оценки проектной эффективности в зависимости от изменений факторов риска.

Так, эластичность спроса Q по цене P

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}}(Q) = \frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP}$$

показывает величину относительного изменения спроса на какой-либо товар при изменении цены этого товара. Она характеризует «чувствительность» потребителей к изменению цен на продукцию.

Вопросы для повторения

1. Сформулировать и доказать теорему о производной монотонной функции.
2. Сформулировать определение локального максимума и минимума функции.
3. Сформулировать и доказать теорему о необходимом условии экстремума.
4. Сформулировать и доказать теорему о первом достаточном условии экстремума.
5. Сформулировать и доказать теорему о втором достаточном условии экстремума.
6. Привести схему исследования функции на экстремум.
7. Сформулировать определение наибольшего и наименьшего значения функции.
8. Сформулировать определение выпуклости функции.
9. Сформулировать и доказать теорему об условиях направленности выпуклости функции вверх или вниз.
10. Дать определение точки перегиба и сформулировать необходимое и достаточное условия существования точки перегиба.
11. Привести определения вертикальной, горизонтальной и наклонной асимптот графика функции.
12. Привести схему полного исследования функции с целью построения ее графика.
13. Сформулировать определение эластичности функции, дать геометрическую интерпретацию.
14. Перечислить и доказать свойства эластичности функции.

ГЛАВА 4: Функции многих переменных

Предел и непрерывность функций многих переменных
Дифференцируемость функции многих переменных
Экстремум функции многих переменных
Метод наименьших квадратов

4.1. Предел и непрерывность функций многих переменных

На случай функций нескольких переменных можно распространить многие понятия и утверждения, установленные выше для функций одной переменной.

4.1.1. *Понятие функции многих переменных.*

Определение 4.1. Если каждой точке $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ некоторой области D из пространства R^n соответствует вполне определенное число $z \in R$, то говорят, что задана функция n переменных $z = f(x_1, x_2 ... x_n)$ $\quad (z = f(M))$.

Множество D называется *областью определения* функции и обозначается $D(f)$. Обычно под областью определения аналитически заданной функции подразумевается ее естественная область определения.

Множество $E(f) = \{z \in R \mid z = f(M), M \in D(f)\}$ называется *областью значений* функции f. Если $n = 2$, то функция $z = f(M)$ переходит в функцию двух независимых переменных $z = f(x, y)$, где $(x, y) \in D \subset R^2$.

4.1.2. *Геометрическая иллюстрация функции двух переменных.*

Определение 4.2. Пусть на множестве D задана функция двух переменных $z = f(x, y)$. Множество точек $P\{(x, y, f(x, y)),\quad (x, y) \in D\}$ называется *графиком* функции $z = f(x, y)$.

С геометрической точки зрения данное множество представляет собой некоторую поверхность в пространстве R^3.

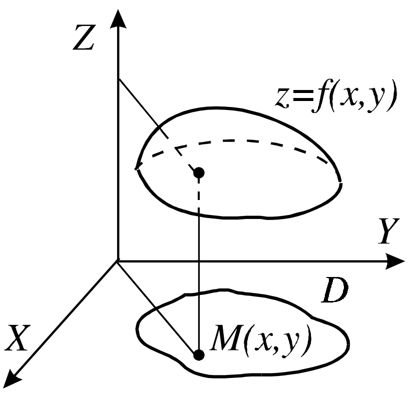
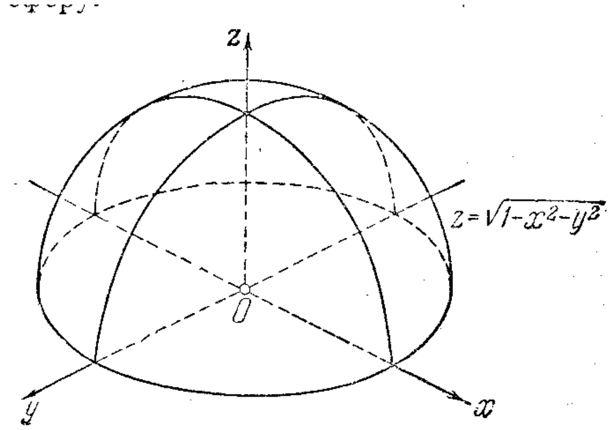


Рис. 1

Пример 4.1. Найти область определения и область значений функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ и изобразить ее график.

Решение. Естественная область определения функции задается неравенством $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ или $x^2 + y^2 \leq 1$ и представляет собой внутренность круга радиуса 1 с центром в начале координат. Поскольку $0 \leq 1 - x^2 - y^2 \leq 1, \quad 0 \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2} \leq 1,$ то множество значений $E(f) = [0,1]$. Графиком этой функции является верхняя половина сферы, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, причем центр сферы $0(0,0,0)$ находится в начале координат, а радиус ее равен 1.



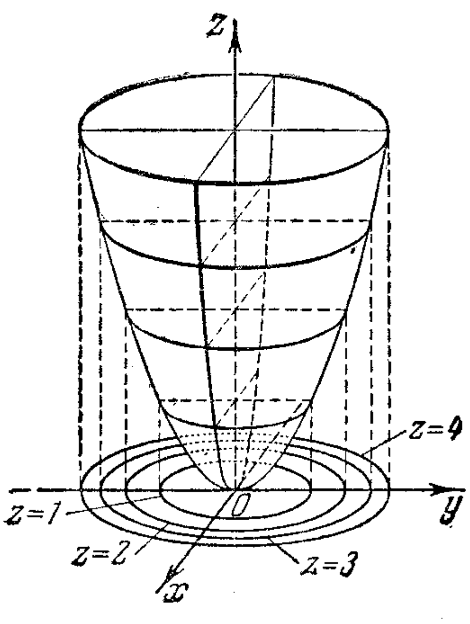
В некоторых случаях наглядное представление о функции двух переменных может дать картина ее линий уровня.

Определение 4.3. Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называется множество точек (x, y) плоскости $x0y$, удовлетворяющих равенству $f(x, y) = C$, где C – постоянная, т.е. такая линия плоскости $x0y$, в точках которой функция принимает одно и то же значение $z = C$.

Пусть, например, $y = f(x_1, x_2)$ есть производственная функция, зависящая от двух факторов x_1 и x_2. Линии уровня задаются уравнением $f(x_1, x_2) = C$, где C — постоянная. Эти линии в экономической литературе называют *изоквантами* (кривые постоянного выпуска).

Таким образом, изокванта — это геометрическое место точек (x_1, x_2) из R^2, которым соответствует один и тот же уровень продукции. Иногда эти линии называют кривыми *взаимозаменяемости ресурсов*.

Линию уровня можно построить, спроектировав на плоскость $x0y$ множество точек пространства R^3, лежащих в пересечении поверхности $z = f(x, y)$ и плоскости $z = C$. Придавая постоянной C различные значения, $C_1, C_1 + h, C_1 + 2h, ..$, получим ряд линий уровня, которые дают наглядное представление о поведении рассматриваемой функции. Там, где линии расположены гуще, поверхность, изображающая функцию, будет круче (это означает, что функция изменяется быстрее), а там, где линии реже, функция изменяется медленнее.



4.1.3. ***Предел функции двух переменных в точке.***

Определение 4.4. Говорят, что последовательность точек $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2),\cdots$, $M_n(x_n, y_n),\cdots$ плоскости $x0y$ сходится к точке $M_0(x_0, y_0)$, если расстояние $d_n = |M_0M_n| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}$ стремится к нулю когда $n \to \infty$.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки M_0, за исключением быть может самой точки M_0.

Определение 4.5. Число A называется пределом функции $f(x, y)$ в точке M_0, если для любой последовательности точек $M_1, M_2, ...M_n, ...,$ сходящейся к точке M_0, соответствующая последовательность значений функции $f(M_1),\ f(M_2),\ldots f(M_n),\ldots$, сходится к числу A :

$$A = \lim_{M \to M_0} f(M).$$

Важно, что предел функции существует, если он не зависит от пути устремления точек $M_1, M_2, ...M_n, ...,$ ***к точке*** M_0.

Пример 4.2. Показать, что функция $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ не имеет предела в точке $M_0(0,0)$.

Решение. Выберем последовательность точек $M_1(x_1,0)$, $M_2(x_2,0),\ldots,M_n(x_n,0),\ldots$, такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $x_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Тогда $\lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{{x_n}^2 - 0^2}{{x_n}^2 + 0^2} = 1$. Выбирая затем последовательность $N_1(0, y_1)$, $N_2(0, y_2),\ldots,N_n(0, y_n),\ldots$, так что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, получим, что $\lim\limits_{N \to M_0} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{0^2 - {y_n}^2}{0^2 + {y_n}^2} = -1$.

Поскольку пределы последовательностей различны, то данная функция не имеет предела в точке $M_0(0,0)$.

Определение 4.5 предела функции $z = f(x, y)$ эквивалентно определению предела на языке « $\varepsilon - \delta$»:

Определение 4.6. Число A называется пределом функции $z = f(x, y)$ в точке M_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать число $\delta > 0$, такое, что для всех точек $M(x, y)$, удовлетворяющих неравенству $d(M_0, M) < \delta$, $M \neq M_0$, выполняется неравенство $|f(M) - A| < \varepsilon$.

Теорема 4.1 (арифметические операции над пределами). Если функции $f(M)$ и $g(M)$ имеют пределы в точке M_0: $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$, $\lim\limits_{M \to M_0} g(M) = B$, то и функции $f(M) \pm g(M)$, $f(M) \cdot g(M)$, $\dfrac{f(M)}{g(M)}$ имеют пределы в точке M_0, причем $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) \pm g(M) = A \pm B$; $\lim\limits_{M \to M_0} (f(M) \cdot g(M)) = A \cdot B$;

$$\lim_{M \to M_0} \frac{f(M)}{g(M)} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0.$$

Теорема 4.2 (ограниченность функций, имеющих предел). Если функция $z = f(M)$ имеет в точке M_0 конечный предел, то существует окрестность точки M_0, в которой функция ограничена.

Теорема 4.3. Если функция $z = f(M)$ имеет в точке M_0 предел $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$ и $A > 0$ $(A < 0)$, то существует окрестность точки M_0 такая, что для всех точек $M(x, y)$ этой окрестности выполняется неравенство $f(M) > 0$ $(f(M) < 0)$.

Упр.* ***Понятие повторных пределов***

4.1.3. *Непрерывность функции двух переменных.*

Определение 4.7. Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_{0,} y_0)$, если она определена в самой точке M_0 и некоторой ее окрестности и выполняется равенство $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$, т.е. предел функции в точке равен значению функции в этой точке.

Теорема 4.4. Сумма, разность и произведение непрерывных функций в точке M_0 есть непрерывная функция в точке M_0; частное непрерывных функций есть непрерывная функция, при условии, что знаменатель в точке M_0 не обращается в нуль.

Определение 4.8. Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в области R, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Теорема 4.5 (Вейерштрасса). Если функция $z = f(M)$ непрерывна на ограниченной замкнутой области D, то она ограничена на этой области $\left(|f(M)| < K\right)$ и достигает в некоторых точках $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ своих наибольшего и наименьшего значений:

$$f(M_1) = \max_{M \in D} f(M) \quad \text{и} \quad f(M_2) = \min_{M \in D} f(M).$$

Замечание. Можно говорить о непрерывности $f(x, y)$ по каждой переменной и по совокупности двух переменных. Взаимоотношение этих понятий сложное. Например, может быть непрерывность по каждой переменной в отдельности, а по совокупности переменных — нет.

Пример. $f(x, y) = \begin{cases} 2xy/(x^2 + y^2), \text{ если } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, \text{ если } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

4.2. Дифференцируемость функции многих переменных

Частные производные.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в области $D \subset R^2$ и точка $M_0(x_0, y_0) \in D$.

Определение 4.9. Частным приращением функции z по переменной x в точке M_0 называется разность

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \tag{4.1}$$

Определение 4.10. Частной производной функции $z = f(x, y)$ по переменной x в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется предел (если он существует) отношения частного приращения функции z по x к вызвавшему его приращению независимой переменной Δx, когда $\Delta x \to 0$:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \tag{4.2}$$

Частная производная по x в точке $M_0(x_0, y_0)$ обозначается любым из следующих способов:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad z'_x\Big|_{x = x_0, y = y_0}, \quad f'_x(x_0, y_0).$$

Аналогично определяется частная производная функции $z = f(x, y)$ по переменной y:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y},$$

где

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0). \tag{4.3}$$

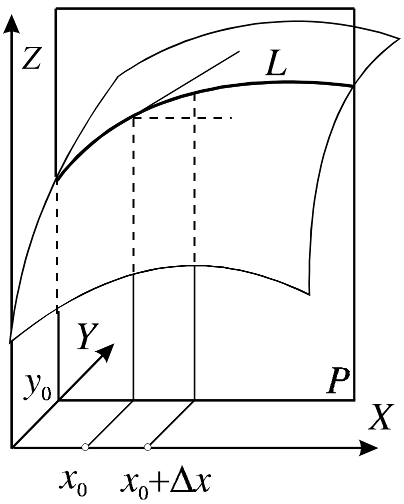


Рис. 1

В пространстве XYZ условие $y = y_0$ описывает плоскость P, перпендикулярную оси OY и пересекающую эту ось в точке y_0. Плоскость P пересекается с графиком функции $z = f(x,y)$, вдоль некоторой линии L, как показано на рисунке 1. Тангенс угла между плоскостью XOY и касательной к линии L в точке с координатами x_0,y_0 равен частной производной по x функции $z = f(x,y)$ в этой точке. В этом состоит ***геометрический смысл*** частной производной.

Пример 4.3. Вычислить по определению частные производные функции $z = x^2 - 3xy + 2y^2$ в точке $M_0(1,2)$.

Решение. Имеем $f(x,y) = x^2 - 3xy + 2y^2$, $f(x_0,y_0) = f(1,2) =$ $=1^2 - 3\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 2^2 = 3$; $f(x_0+\Delta x, y_0) = f(1+\Delta x, 2) = (1+\Delta x)^2 +$ $3(1+\Delta x)2 + 2 \cdot 2^2 = 3 - 4\Delta x + (\Delta x)^2$;

$\Delta_x z = f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0) = 3 - 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 3 = -4\Delta x + (\Delta x)^2$

Тогда, согласно (4.2), имеем:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(-4+\Delta x) = -4 .$$

Аналогично вычисляем

$\Delta_y z = f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = f(1, 2+\Delta y) - 3 = 1^2 - 3\cdot 1(2+$ $\Delta y) + 2\cdot(2+\Delta y)^2 - 3 = 1 - 6 - 3\Delta y + 8 + 8\Delta y + 2(\Delta y)^2 - 3 = 5$ $\Delta y + 2(\Delta y)^2$.

Тогда, согласно (4.3) , имеем:

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{5\Delta y + 2(y)^2}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}(-5 + 2\Delta y) = 5.$$

Для нахождения частных производных функции $z = f(x, y)$ следует запомнить правило: при вычислении частной производной по x считаем y постоянной и пользуемся правилом дифференцирования функции одной независимой переменной; при вычислении частной производной по y считаем x постоянной и пользуемся этими же правилами дифференцирования (производная постоянной равна нулю; постоянный множитель выносится за знак производной и т.д.).

П*ример 4.4.* Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в произвольной точке $M(x, y)$ для функции $f(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2$ и затем найти их значения $\frac{\partial z(M_0)}{\partial x}$ и $\frac{\partial z(M_0)}{\partial y}$, если $M_0(1,2)$.

Решение. Имеем : $\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2 - 3xy + 2y^2)'_{x, y-const} =$

$= (x^2)'_{x,y-const} - (3xy)'_{x,y-const} + (2y^2)'_{x,y-const} = 2x - 3y(x)' + 0 = 2x - 3y$.

Тогда $\frac{\partial z}{\partial x}(1,2) \quad = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -4$. Далее:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 - 3xy + 2y^2)'_{y,x-const} = (x^2)'_{y,x-const} - (3xy)'_{y,x-const} +$$

$+ (2y^2)'_{y,x-const} = 0 - 3x + 4y$. Значит, $\frac{\partial z}{\partial y}(1,2) = -3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 5$.

Аналогично (4.2) и (4.3) определяются частные производные $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$ для многих переменных $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Например, $$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta_{x_1} z}{\Delta x_1} \qquad (4.4)$$

Отметим очень важное отличие функции двух переменных от функции одной переменной. ♣

Из существования первых частных производных в точке не следует непрерывность функции в этой точке. Рассмотрим, например, функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ при } xy = 0 \\ 1 \text{ при } xy \neq 0 \end{cases}.$$

График этой функции во всех точках, не принадлежащих осям координат *OX* и *OY*, представляет собой плоскость, параллельную плоскости *XOY*, поднятую на 1. Сами эти оси координат также принадлежат графику рассматриваемой функции. Очевидно, что в точке (0,0) функция имеет частные производные по обоим аргументам, обе равные нулю. Очевидно также, что в любой окрестности точки (0,0) можно найти точку *M* такую, что $f(M) = 1$, в то время как $f(0, 0) = 0$. Это означает существование разрыва функции в точке (0,0).

4.2.2. *Дифференцируемые функции.*

Определение 4.11. Полным приращением функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется разность

$$\Delta z(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \qquad (4.5)$$

Определ*ение 4.2.* Функция $z = f(x,y)$ называется *дифференцируемой в точке* M_0, если в некоторой окрестности этой точки полное приращение функции можно представить в виде :

$$\Delta z(M_0) = A(x_0, y_0)\,\Delta x + B(x_0, y_0)\,\Delta y +$$

$$+\alpha_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \alpha_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y \qquad (4.6)$$

где коэффициенты $A(x_0, y_0)$ и $B(x_0, y_0)$ не зависят от Δx и Δy, а функции $\alpha_1(\Delta x, \Delta y)$ и $\alpha_2(\Delta x, \Delta y)$ являются бесконечно малыми при условии, что величина $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ стремится к нулю.

Пример 4.5. Показать, что функция $z = x^2 + 3xy$ является дифференцируемой в любой точке $M_0(x_0, y_0)$.

Решение. Имеем: $f(x,y) = x^2 + 3xy$, $f(x_0, y_0) = x_0^2 + 3x_0 y_0$,

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = (x_0 + \Delta x)^2 + 3(x_0 + \Delta x)\cdot(y_0 + \Delta y) =$$

$$= x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x_0 y_0 + 3x_0\Delta y + 3\Delta x y_0 + 3\Delta x\Delta y.$$

Тогда по (4.5) полное приращение Δz имеет вид :

$$\Delta z(x_0, y_0) = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 + 3x_0 y_0 + 3x_0\Delta y + 3\Delta x y_0 + 3\Delta x\Delta y -$$

$$- x_0^2 - 3x_0 y_0 = (2x_0 + 3y_0)\Delta x + 3x_0\,\Delta y + \Delta x\cdot\Delta x + 3\Delta x\Delta y.$$

Сравнивая с (4.6), заключаем, что

$$A(x_0, y_0) = 2x_0 + 3y_0, \qquad B(x_0, y_0) = 3x_0,$$

$$\alpha_1(\Delta x, \Delta y) = \Delta x, \qquad \alpha_2(\Delta x, \Delta y) = 3\Delta x.$$

Значит, функция является дифференцируемой в т. $M_0(x_{0,}y_0)$.

Теорема 4.7. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_{0,}y_0)$, то она непрерывна в этой точке и имеет в ней частные производные по всем аргументам : $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \dfrac{\partial f(M_0)}{\partial y}$.

Приведенная теорема показывает, что взаимоотношение непрерывности и дифференцируемости функции в многомерном случае такое же, как в одномерном. Совсем иначе обстоит дело во взаимоотношениях частных производных и дифференцируемости. *В случае одной переменной дифференцируемость и наличие производной были условиями равносильными*.

Для функций многих переменных ***наличие частных производных не гарантирует дифференцируемость.*** ♣

Однако уже непрерывность частных производных обеспечивает дифференцируемость.

Теорема 4.8. Если в некоторой окрестности точки $M_0(x_{0,}y_0)$ существуют частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x, y)$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x, y)$ и они непрерывны в точке $M_0(x_{0,}y_0)$, то функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_{0,}y_0)$.

4.2.3. *Полный дифференциал функции многих переменных.*

Определение 4.13. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_{0,}y_0)$, то линейная относительно приращений Δx и Δy часть полного приращения функции называется полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_{0,}y_0)$ и обозначается $dz(M_0)$:

$$dz(M_0)=\frac{\partial z(M_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z(M_0)}{\partial y}\Delta y \qquad (4.7)$$

Если принять по определению за дифференциалы независимых переменных x и y их приращения Δx и Δy, т.е. положить $dx=\Delta x$ и $dy=\Delta y$, то (4.7) примет вид :

$$dz(M_0)=\frac{\partial z(M_0)}{\partial x}d\,x+\frac{\partial z(M_0)}{\partial y}d\,y \qquad (4.8)$$

Пример 4.6.

Найти полный дифференциал функции $z=\ln(x^2+y^2)$ в точке $M_0(1,2)$.

Решение. Имеем $\dfrac{\partial z}{\partial x}=(\ln(x^2+y^2))'_{x,y-const}=$ $\dfrac{1}{x^2+y^2}(x^2+y^2)'_x=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$. Тогда $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=\dfrac{2\cdot 1}{1^2+2^2}=\dfrac{2}{5}$. Далее находим

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=(\ln(x^2+y^2))'_{y,x-const}=\dfrac{1}{x^2+y^2}(x^2+y^2)'_y=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$. Тогда $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}=\dfrac{2\cdot 2}{1^2+2^2}=\dfrac{4}{5}$. Согласно (4.8) получаем полный дифференциал

$$dz(M_0)=0{,}4dx+0{,}8dy.$$

На рисунке график функции $z = f(x,y)$ представляет собой поверхность F. Длина отрезка P_0P равна значению функции z в точке P_0, то есть $|P_0P| = f(x_0,y_0)$

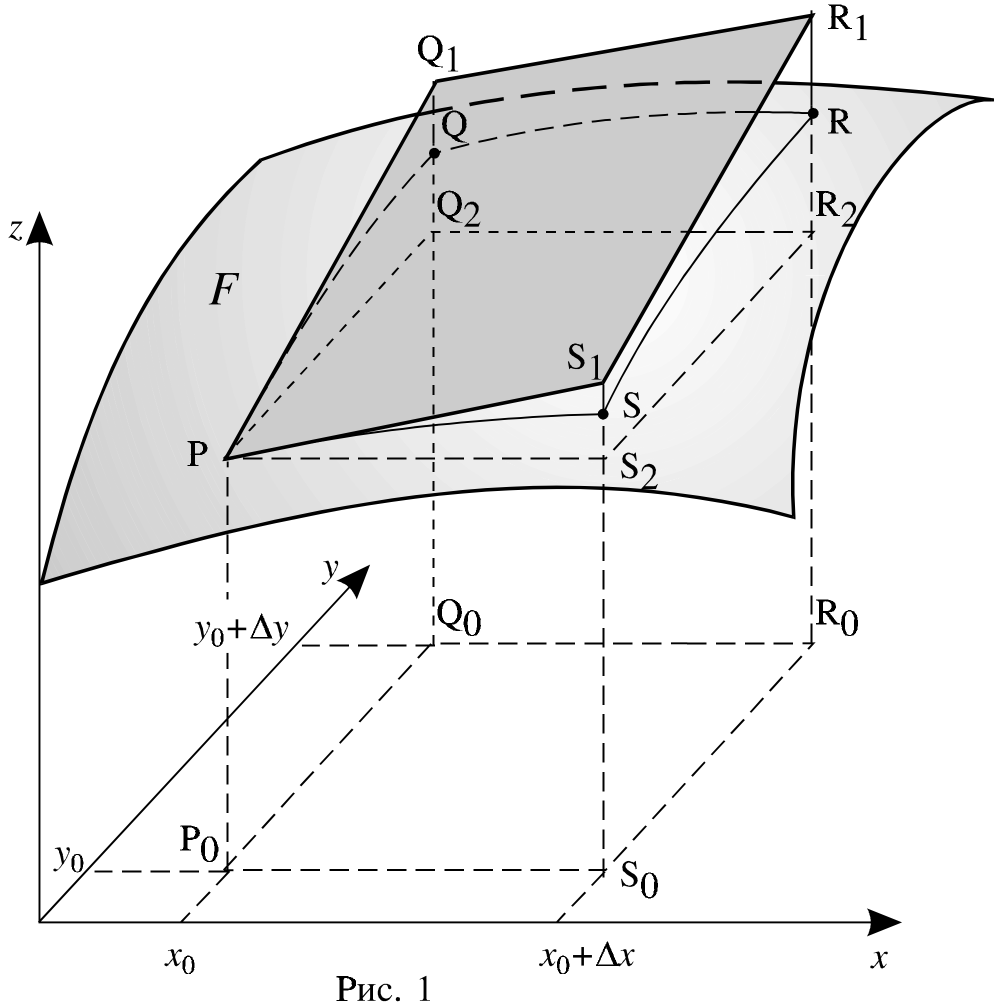


Рис. 1

Координатами точек Q_0, S_0 и R_0 являются $(x_0,y_0+\Delta y)$; $(x_0+\Delta x,y_0)$ и $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$, причём $|Q_0Q| = f(Q_0)$, $|S_0S| = f(S_0)$ и $|R_0R| = f(R_0)$. Приращение $\Delta f(x_0,y_0)$ функции в точке P_0 равно $|RR_2|$. Параллелограмм $PQ_1R_1S_1$ лежит в плоскости, которая касается поверхности F в точке P. Прямоугольник $PQ_2R_2S_2$ расположен в горизонтальной плоскости. Очевидно: $|Q_2Q_1| = f'_y(x_0,y_0)\Delta y$ и $|S_2S_1| = f'_x(x_0,y_0)\Delta x$. Из легко доказываемого равенства $|R_2R_1| = |S_2S_1| + |Q_2Q_1|$ и формулы (4.8) следует, что дифференциал функции в точке P_0 равен отрезку $|R_2R_1|$, т.е . $df(x_0,y_0) = |R_2R_1|$.

4.2.4. *Приложения полного дифференциала в приближенных вычислениях*

Справедлива формула приближенного вычисления значений функции:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,\Delta y$$

или

$$df(x_0,y_0) \approx \Delta f(x_0,y_0).$$

Пример. 4.7. Вычислить приближенно $\sqrt{4{,}03^2+2{,}99^2}$.

Решение. Рассмотрим функцию $z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Тогда искомое число есть значение этой функции в точке $x = x_0 + \Delta x = 4{,}03$, $y = y_0 + \Delta y = 2{,}99$. Выбирая $x_0 = 4$, $y_0 = 3$, получим $\Delta x = 0{,}03$; $\Delta y = -0{,}01$. Далее находим значения функции и ее частных производных в точке $M(x_0,y_0)$:

$$f(x_0,y_0) = \sqrt{4^2+3^2} = 5,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \left.\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{\substack{x=4,\\ y=3}} = \frac{4}{5},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \left.\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{\substack{x=4,\\ y=3}} = \frac{3}{5}.$$

Тогда $$\sqrt{4{,}03^2+2{,}99^2} \approx 5 + \frac{4}{5}\cdot 0{,}03 + \frac{3}{5}(-0{,}01) = 5{,}018.$$

4.2.5. *Производные высших порядков.*

Пусть функция $z = f(x,y)$ имеет частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = f_x'(x,y)$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = f_y'(x,y)$, где $(x,y) \in D_1,\ D_1 -$ некоторая подобласть области D, на которой определена функция

$z = f(x, y)$. Значит, на D_1 заданы две новые функции двух переменных, а именно $u = \dfrac{\partial z}{\partial x}(x, y)$ и $v = \dfrac{\partial z}{\partial y}(x, y)$ и можно находить их частные производные по переменным x и y. Эти частные производные и называются *частными производными второго порядка* или вторыми частными производными функции $z = f(x, y)$. Итак, по определению:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xx}(x, y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{xy}(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{yx}(x, y), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yy}(x, y)$$

причем, частные производные $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ называются *смешанными частными производными*.

Пример 4.8. Найти все частные производные второго порядка функции $z = x^3 y^3$.

Решение. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = (x^3 y^2)'_{x, y-const} = y^2 (x^3)'_x = 3x^2 y^2$;

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^3 y^2)'_{y, x-const} = x^3 (y^2)'_y = x^3 \cdot 2y = 2x^3 y \ ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 y^2) = y^2 (3x^2)'_x = y^2 \cdot 6x = 6xy^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2x^3 y) = 2x^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = = \frac{\partial}{\partial x}(2x^3 y) = y \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^2 = 6x^2 y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 y^2) = 3x^2 \cdot 2y = 6x^2 y = 6x^2 y;$$

Условия, при которых результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.♣

Теорема 4.9. Если функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M(x, y)$ ***непрерывные смешанные частные*** производные второго порядка, то они равны между собой :

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

4.3. Экстремум функции многих переменных

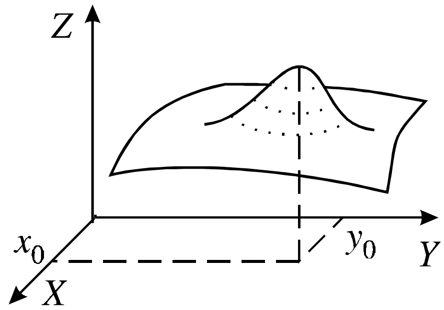
Одним из важнейших применений дифференциального исчисления, как и в случае функций одной переменной, так и для функций многих переменных является его использование для отыскания и исследования экстремумов функций.

4.3.1. *Необходимое условие экстремума.*

Определение 4.14. Говорят, что функция $z = f(M)$, определенная и непрерывная в области D, имеет в точке $M_0 \in D$ *строгий максимум (строгий минимум),* если для всех точек M из некоторой окрестности точки M_0 выполняется неравенство

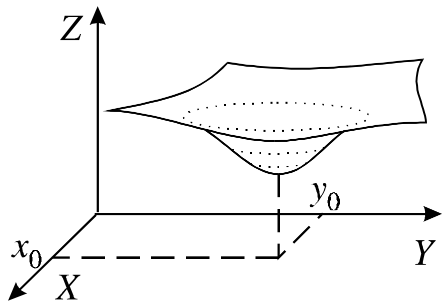
$$f(M) < f(M_0) \qquad (f(M) > f(M_0)) \qquad (4.10)$$

Данное определение носит локальный характер, причем, если неравенства (4.10) выполняются, как нестрогие неравенства со знаками $\leq (\geq)$ соответственно, то максимум и минимум называются *нестрогими* или несобственными. Для обозначения максимума и минимума употребляется и общий термин – *экстремум*.



$M_0(x_0,y_0)$ - точка максимума.

Рис.1



$M_0(x_0,y_0)$ - точка минимума.

Рис. 2

Теорема 4.10 (*необходимое условие экстремума*). Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$ и имеет в ней экстремум, то обе частные производные функции в этой точке равны нулю:

$$\begin{cases} f_x'(x_0, y_0) = 0, \\ f_y'(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \tag{4.11}$$

Определение 4.14. Все точки $M_0(x_0, y_0)$, координаты которых удовлетворяют системе уравнений (4.11), называются *стационарными точками* функции $z = f(x, y)$.

Заметим также, что функция $z = f(x, y)$ может иметь экстремум и в тех точках, где она является непрерывной, но хотя бы одна из частных производных не существует или равна бесконечности. Объединение таких точек и стационарных точек принято называть *критическими точками* функции многих переменных.

В ***некоторых случаях*** вопрос о наличии экстремума функции многих переменных можно решить на основании лишь необходимого условия экстремума.

Пример 4.10. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + y^2$.

Решение. Найдем частные производные и приравняем их к нулю: $z_x' = (x^2 + y^2)_x' = 2x$; $z_y' = (x^2 + y^2)_y' = 2y$.

Составим систему $\begin{cases} 2x = 0, \\ 2y = 0. \end{cases}$. Отсюда $x_0 = 0, \quad y_0 = 0,$ и, следовательно, точка $M_0(0,0)$— стационарная точка. Так как для функции $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ имеем $z = f(0,0) = 0$, а для любых других точек , таких что $M(x,y) \neq M_0(0,0)$, выполняется неравенство $f(M) > f(M_0)$, то в точке M_0 данная функция имеет строгий минимум (рис.4.3) $z_{\min} = f(0,0) = 0$

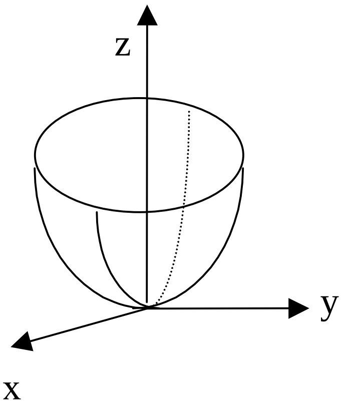


Рис. 4.3

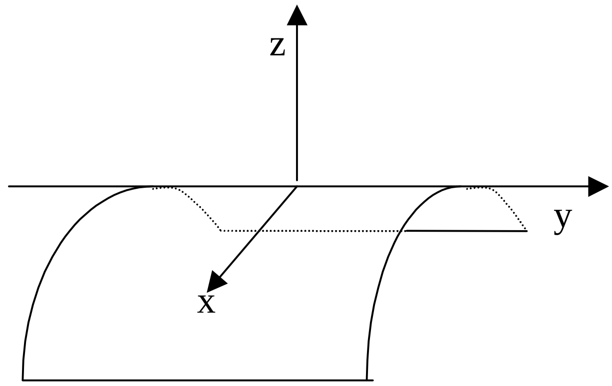


Рис. 4.4

Пример.4.11. Исследовать на экстремум функцию $z = f(x,y) = -x^2$.

Решение. Найдем частные производные:

$z_x' = f_x'(x,y) = (-x^2)_x' = -2x$; $\qquad z_y' = f_y'(x,y) = (-x^2)_y' = 0.$

Составим систему: $\begin{cases} -2x = 0, \\ 0 = 0 \end{cases}$. Отсюда заключаем, что решением системы являются: $x_0 = 0$, $y -$ любое действительное число. Значит, все точки оси $0y$ вида $M_0(0,y)$ $-$стационарные. Поскольку для любых точек , таких что $M(x,y) \neq M_0(0,y)$, имеем $f(M) = -x^2$, а $f(M_0) = 0$, то выполняется неравенство $f(M) \leq f(M_0)$. Следовательно, в любой точке оси $0y$ функция имеет нестрогий максимум (см. рис.4.4). Ответ: $z_{\max} = f(0,y) = 0$.

***В общем случае использование только необходимого условия экстремума не позволяет решить вопрос о наличии экстремума функции многих переменных*.**

Пример 4.13. Исследовать на экстремум функцию $z = xy$.

Решение. Найдем частные производные z_x' и z_y':

$$z_x' = (xy)_x' = y, z_y' = (xy)_y' = x$$

и составим систему (4.11), решением которой являются $y_0 = 0,$ $x_0 = 0.$ Следовательно, точка $M_0(0,0)$ – стационарная точка. Выберем теперь два типа точек: вначале точки $M(x, y)$ вида $M(x, y) = (\varepsilon, \varepsilon)$, где $\varepsilon \neq 0$, и для них имеем $f(M) = \text{å} \cdot \text{å} = \text{å}^2 > 0$; а затем точки $M(x, y)$ вида $M(x, y) = (\varepsilon, -\varepsilon)$, где $\varepsilon \neq 0$, для которых уже имеем $f(M) = \text{å} \cdot (-\text{å}) = -\text{å}^2 < 0$. Поскольку $f(M_0) = 0 \cdot 0 = 0,$ то данная функция в точке $M_0(0,0)$ экстремума не имеет.

Приведенный пример показывает, что найденные критические точки функции требуют, вообще говоря, дальнейшего анализа в отношении того, являются они точками экстремума или нет.

4.3.2. ***Достаточные условия экстремума*.**

Теорема 4.11 Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и имеет в этой окрестности непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Если выполняются условия:

1) $f_x'(x_0, y_0) = 0,$ $f_y'(x_0, y_0) = 0$;

2) для чисел $A = f_{xx}''(x_0, y_0),$ $B = f_{xy}''(x_0, y_0),$ $C = f_{yy}''(x_0, y_0)$ выполняется неравенство:

а) $\Delta = AC - B^2 > 0,$ то в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция имеет экстремум (***минимум***, если $A > 0$ и ***максимум***, если $A < 0$);

б) $\Delta = AC - B^2 < 0$, то в этой точке экстремума нет.

Если $\Delta = 0$, то нужны дополнительные исследования.

Пример 4.14. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Решение. Находим частные производные первого и второго порядков: $z'_x = f'_x(x,y) = (x^3 + y^3 - 3xy)'_x = 3x^2 - 3y$;
$z'_y = f'_y(x,y) = (x^3 + y^3 - 3xy)'_y = 3y^2 - 3x$;
$z''_{xx} = (3x^2 - 3y)'_x = 6x$; $z''_{xy} = (3x^2 - 3y)'_y = -3$;
$z''_{yy} = (3x^2 - 3y)'_y = 6y$. Составляем систему: $\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y = x^2, \\ x = y^2, \end{cases}$ из которой находим две стационарные точки $M_0(0,0)$ и $M_1(1,1)$. В точке M_0 имеем $A = 6x\big|_{(0,0)} = 0$, $C = 6y\big|_{(0,0)} = 0$

$B = -3$, $\Delta = AC - B^2 = 0 - (-3)^2 = -9$.

Так как $\Delta < 0$, то экстремума в точке M_0 нет.

В точке M_1 имеем : $A = 6x\big|_{(1,1)} = 6$, $C = 6y\big|_{(1,1)} = 6$,

$B = -3$, $\Delta = AC - B^2 = 36 - (-3)^2 = 27$.

Так как $\Delta < 0$ и $A > 0$, то в точке M_1 функция имеет минимум, который равен $z_{\min} = f(1,1) = 1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = -1$.

4.1. Метод наименьших квадратов

В различных экономических и других практических задачах часто возникает необходимость установления аналитической зависимости между интересующими переменными, которые заданы, например, в виде статистических данных за определенный период. Одним из распространенных способов решения подобных задач является метод наименьших квадратов, который основывается, по сути, на нахождении экстремума функций нескольких переменных.

4.4.1. *Понятие эмпирической формулы.*

Важное значение имеет следующая задача:

требуется установить вид функциональной зависимости между двумя переменными величинами x и y по результатам n экспериментальных измерений, приведенных в таблице

Табл.4.1.

x	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_i	…	y_n

Иначе говоря, требуется выразить зависимость между x и y аналитически, т.е. указать формулу

$$y = f(x, a_1, ..., a_n),$$

связывающую между собой соответствующие значения переменных. Формулы, служащие для аналитического представления опытных данных, принято называть *эмпирическими формулами.*

Следует заметить, что подбор эмпирической формулы не ставит задачу разгадать истинный вид зависимости – эта задача математически неразрешима. Ставится задача подобрать формулу, в каком-то смысле наилучшим образом отображающую полученные результаты.

Один из способов заключается в следующем. Исходя из некоторых теоретических или практических соображений (например, конфигурации расположения точек на координатной плоскости) подбирается наиболее простая формула, которая дает ***наилучшее*** совпадение с опытными данными. Наиболее типичными в экономических исследованиях являются формы зависимостей в виде:

1) $(y = a_0 x + a_1)$, 2) $(y = a_0 x^2 + a_1 x + a_2)$, 3) $(y = a_0 x^{a_1})$,

4) $(y = a_0 \log_{a_1} x)$, 5) $(y = a_0 \cdot a_1^{\,x})$, 6) $(y = a_0 + \dfrac{a_1}{x})$.

Слова «наилучшее совпадение» понимаются здесь в том смысле, что из данного множества формул вида $y = f(x, a_0, a_1, ..., a_m)$ наилучшей считается та, для которой сумма квадратов отклонений табличных значений y_i и вычисленных по формуле $\bar{y}_i = f(x_i, a_i)$ является наименьшей.

Описанный способ построения эмпирической формулы называется *методом наименьших квадратов*, а вычисленные путем решения задачи

$$S(a_0, a_1, ...a_m) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i, a_0, a_1, ...a_m))^2 \to \min$$

значения параметров $a_0^{\ 0}, a_1^{\ 0}, ..., a_m^{\ 0}$ задают наилучшую в смысле метода наименьших квадратов формулу $y = f(x, a_0^{\ 0}, a_1^{\ 0}, ...a_m^{\ 0})$.

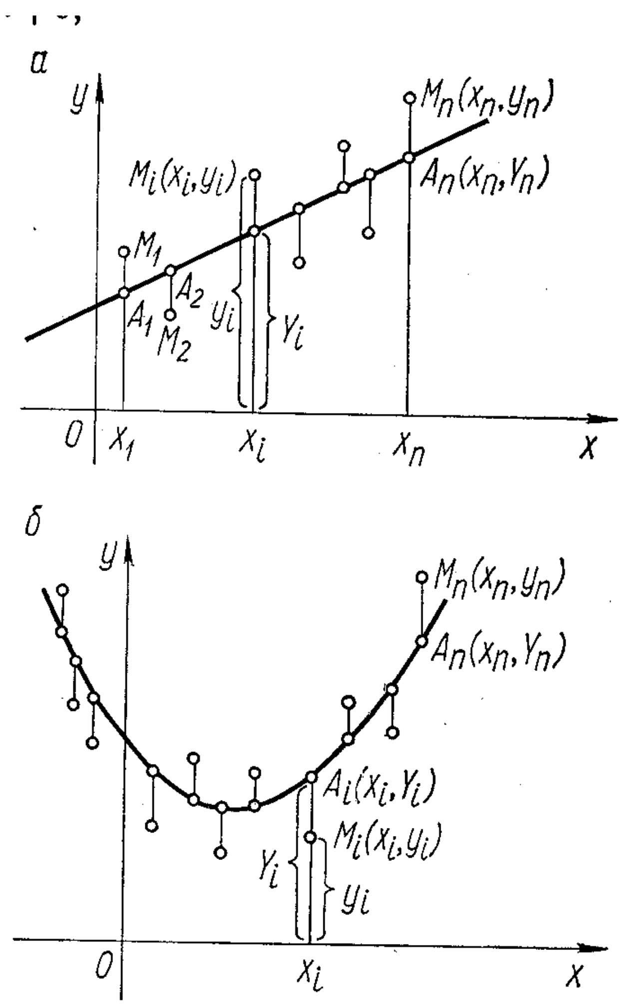
Исходя из необходимых условий экстремума функций многих переменных, минимум функции $S(a_0, a_1, ..., a_m)$ будет в тех точках, где частные производные

$$\frac{\partial S}{\partial a_0},\ \frac{\partial S}{\partial a_1}, \ldots \frac{\partial S}{\partial a_m}$$ обращаются в нуль:

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = 2\sum_{i=1}^{n} [f(x_i, a_0, ..., a_m) - y_i] \cdot \frac{\partial f(x_i, a_0, ..., a_m)}{\partial a_j} = 0, \ \ j = 0, 1, ..., m,$$

Полученная система уравнений называется ***нормальной системой метода наименьших квадратов***.

4.4.2. *Выравнивание экспериментальных данных по прямой.*



Пусть для данных табл. 4.1 из теоретических или практических соображений известно, что эмпирическую функцию следует искать в виде $y = a_1 x + a_0$. Тогда наилучшие значения параметров a_1 и a_0 являются решением нормальной системы метода наименьших квадратов, которая в данном случае имеет вид:

$$\boxed{\begin{cases} a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\,2} + a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_0 n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \quad (4.12)}$$

Упр*. ♣ Доказать разрешимость системы (4.12).

4.4.3. *Выравнивание экспериментальных данных по параболе.*

Пусть экспериментальные данные из табл. 4.1 располагаются вблизи некоторой параболы так, что между переменными x и y можно предположить наличие зависимости, которая выражается формулой $\boxed{y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$. Тогда, следуя методу наименьших квадратов, надо найти минимум по a_0, a_1, a_2 функции трех переменных

$$S(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^{n} (\, a_2 x_i^{\,2} + a_1 x_i + a_0 - y_i)^2 \to \min .$$

Вычисляя частные производные $\frac{\partial S}{\partial a_0}$, $\frac{\partial S}{\partial a_1}$, $\frac{\partial S}{\partial a_2}$ и приравнивая их к нулю, получаем нормальную систему метода наименьших квадратов при выравнивании по параболе:

$$\begin{cases} a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^{4} + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^{3} + a_0\sum_{i=1}^{n} x_i^{2} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{2} y_i, \\ a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^{3} + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^{2} + a_0\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^{2} + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i + a_0 n = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \qquad (4.13)$$

Решая эту систему, находим требуемые $a_2^{\,0}, a_1^{\,0}$ и $a_0^{\,0}$, так что искомое уравнение квадратичной зависимости есть

$$y = a_2^{\,0} x^2 + a_1^{\,0} x + a_0^{\,0}.$$

4.4.3. *Выравнивание экспериментальных данных по гиперболе.*

Если есть основания полагать, что зависимость между переменными x и y обратно-пропорциональная (такая зависимость имеет, например, место для связи между объемом выпускаемой продукции x и себестоимостью y единицы продукции) , то эмпирическая формула ищется в виде $y = a_0 + \frac{a_1}{x}$. В этом случае система нормальных уравнений метода наименьших квадратов будет иметь вид :

$$\begin{cases} a_0 n + a_1\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} + a_1\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^{2}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i} \end{cases} . \qquad (4.14)$$

Тема 5: НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Первообразная и неопределенный интеграл Непосредственное интегрирование Таблица основных интегралов Методы интегрирования

Как известно, *дифференцированием* называется отыскание производной функции. При этом производная имеет ясный механический смысл — если $s(t)$ есть зависимость пройденного пути от времени, то производная $s'(t)$ есть мгновенная скорость в момент t, 2-я производная $s''(t)$, есть ускорение в момент t.

Но можно поставить и обратную задачу: если известна зависимость ускорения $a(t)$ от времени, то как найти скорость в момент t. Или если известна скорость в каждый момент времени, то каков будет пройденный путь? С чисто математической точки зрения класс данных задач таков: известна функция $f(x)$, как найти функцию $F(x)$, производная $F'(x)$ которой есть $f(x)$?

Прямая задача:	Обратная задача:
дифференцирование	интегрирование
$f(x) \to f'(x)$	$f(x) = F'(x) \to F(x)$

<u>Дифференцирование и интегрирование — взаимно обратные операции</u>

5.1. Неопределенный интеграл

Первичными понятиями интегрального исчисления являются понятия *первообразной* и *неопределенного интеграла.*

Определение 5.1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на интервале (a,b), если $F(x)$ дифференцируема на (a,b) и выполняется равенство

$$F'(x) = f(x), \tag{5.1}$$

или, что то же самое,

$$dF(x) = f(x)dx, \tag{5.2}$$

причем (5.1) и (5.2) выполняются для всех $x \in (a;b)$.

Задача об отыскании первообразных ***решается неоднозначно.***

Действительно, если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то она имеет бесконечное множество первообразных вида $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, так как $(F(x)+C)' = (F(x))' = f(x)$. Более того, если $F(x)$ и $\Phi(x)$ — две первообразные для $f(x)$ на $(a;b)$, то для всех $x \in (a;b)$ выполняется равенство $F(x) - \Phi(x) \equiv C$, где C — некоторая фиксированная постоянная. Другими словами, если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, то множество вида $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, описывает ***все*** первообразные для данной функции.

Определение 5.2. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на (a,b) называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{5.3}$$

где C- константа. В записи (5.3) символ « $\int$ » называется интегралом, $f(x)$— подынтегральной функцией, x — переменной интегрирования.

Отыскание для данной, вообще говоря, произвольной функции *f(x)* ее первообразной называется *интегрированием* (а весь комплекс связанных с этим вопросов — *интегральным исчислением*). Как видим, эта задача является обратной по отношению к дифференцированию., поэтому ***верность интегрирования*** *проверяется дифференцированием функции, полученной в результате решения.*

Например, если $f(x) = \sin 2x$, то $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$, так как $F'(x) = (-\frac{1}{2}\cos 2x + C)' = -\frac{1}{2}(-\sin 2x)\cdot 2 + 0 = \sin 2x.$

5.1.1. ***Основные свойства неопределенного интеграла.***

Справедливы следующие свойства неопределенного интеграла:

1) производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \quad (\text{или} \quad d(\int f(x)dx) = f(x)dx);$$

2) интеграл от производной некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \qquad (\text{или} \ \int d(F(x)) = F(x) + C).$$

(Свойства 1 и 2 говорят, что операции « ′» и « ∫ » взаимно сокращаются, если отвлечься от постоянного слагаемого во второй формуле).

3) неопределенный интеграл суммы (разности) функций равен сумме (разности) неопределенных интегралов:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

4) постоянный множитель, отличный от нуля, можно выносить за знак интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

5.1.2. *Таблица основных неопределенных интегралов.*

Ранее была получена таблица производных простейших элементарных функций, которые составили основу вычислительного аппарата в дифференциальном исчислении. Так как интегрирование есть в известном смысле операция, обратная к дифференцированию, то таблица интегрирования в принципе может быть получена путем обращения таблицы дифференцирования.

Например, в таблице дифференцирования было:

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Теперь эту формулу можно как бы прочесть справа-налево:

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

Таким образом, мы элементарно получаем следующую таблицу основных интегралов:

1) $\int 0dx = C;$ $\qquad \int 1dx = x + C;$

2) $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1);$

3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad (x \neq 0);$

4) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, \quad a \neq 1), \quad \int e^x dx = e^x + C;$

5) $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

6) $\int \cos x dx = \sin x + C;$

7) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C \quad (x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z);$

8) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C \quad (x \neq \pi n, n \in Z);$

9)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{|a|} + C = -\arccos\frac{x}{|a|} + C, \quad (a \neq 0, -|a| < x < |a|);$$

10) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\,\frac{x}{a} = -\frac{1}{a} arctg\,\frac{x}{a} + C, \quad (a \neq 0);$

11) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \quad (a \neq 0, |x| \neq |a|);$

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C \quad (a \neq 0, \quad x^2 + a > 0).$

Замечание 1. Если первообразная $F(x)$ для функции $f(x)$ является элементарной функцией, то говорят, что интеграл $\int f(x)dx$ выражается в *элементарных функциях*. Отметим, что операция дифференцирования не выводила нас из класса элементарных функций (т.е. если мы брали элементарную функцию $f(x)$, то ее производная $f'(x)$ тоже оставалась элементарной).

Однако *операция интегрирования этим свойством уже не обладает.*

Например, интегралы

$\int e^{-x^2} dx$ (интеграл Пуассона),

$\int \sin x^2 dx, \ \int \cos x^2 dx$ (интегралы Френеля),

$\int \frac{dx}{\ln x} \ (x > 0, \quad x \neq 1), \ \int \frac{\cos x}{x} dx, \ \int \frac{\sin x}{x} dx$

хотя и существуют, но не выражаются через элементарные функции. Такие интегралы называются ***неберущимися.*** Поскольку они находят приложения, например, в теории вероятностей, физике и других областях, то для них составлены специальные таблицы.

5.1.4. ***Непосредственное интегрирование. Поднесение под знак дифференциала.***

Непосредственное интегрирование основано на применении таблицы интегралов, свойств неопределенного интеграла и на тождественных преобразованиях подынтегральной функции.

Пример 5.1.

$$\int tg^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx =$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = tgx + C_1 -$$

$$-\int 1 \cdot dx = tgx + C_1 - x + C_2 = tgx - x + C.$$

Пример 5.2. Найти интеграл I и результат проверить:

$$I = \int \left(\frac{1}{\sqrt{3-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{x^2+5}} + \frac{3}{x^2-9} \right) dx.$$

Решение. Применяя свойства неопределенного интеграла и табличные интегралы, получаем:

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} dx + 2\int \frac{1}{\sqrt{x^2+5}} dx + 3\int \frac{1}{x^2-9} dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} +$$

$$+2\ln\left|x+\sqrt{x^2+5}\right| + \frac{3}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C =$$

$$\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + 2\ln\left|x+\sqrt{x^2+5}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C.$$

Проверка. Найдите производную ответа $\boxed{\textbf{(Упр)}}$

Весьма полезным приемом интегрирования является *поднесение под знак дифференциала* некоторого выражения и использование потом свойства неопределенного интеграла:

$$\int dF(x) = F(x) + C \text{ или } \int F'(x)dx = F(x) + C.$$

Например, $\int \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x d(2x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + C;$

$$\int ctgx dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$$

5.2. Основные методы интегрирования

К сожалению, общего метода интегрирования нет, тем не менее, ниже мы укажем некоторые приемы вычисления интегралов. Сравнительно в редких случаях удается дать *правила* для интегрирования.

5.2.1. *Замена переменной в неопределенном интеграле.*

Во многих случаях введение новой переменной интегрирования позволяет свести нахождение данного интеграла к нахождению табличного интеграла. Такой метод называется *методом подстановки или методом замены переменной*.

Теорема 5.1. Пусть требуется найти интеграл $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$, где подынтегральная функция непрерывна и известно, что $\int f(t)dt = F(t) + C$. Тогда

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C.$$

Теорема 5.2. Пусть требуется найти $\int f(x)dx$, где $f(x)-$непрерывная функция. Если $\varphi(t)-$строго монотонная функция, имеющая непрерывную производную $\varphi'(t)$, и при $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$ справедливо равенство $f(x) = f(\varphi(t)) = g(t)$, причем $\int g(t)\varphi'(t)dt = G(t) + C$, то

$$\int f(x)dx = G(\psi(x)) + C,$$

где $\psi(x)-$ обратная функция для функции $x = \varphi(t)$.

Полезно запомнить формулу:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln\left|f(x)\right| + C \qquad (5.4)$$

С помощью этой формулы можно вычислять, например, интегралы вида $\int tgxdx,\ \int ctgxdx,\ \int \frac{dx}{ax+b},\quad a \neq 0,$ а так же и другие интегралы.

Например, $\int ctgxdx = \int \frac{\cos xdx}{\sin x} = \ln\left|\sin x\right| + C;$

Пример 5.4. Найти $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$.

Решение. Подстановка $\ln x = t,\quad d(\ln x) = dt,\quad \frac{1}{x}dx = dt.$ Тогда исходный интеграл примет вид

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln\left|t + \sqrt{1+t^2}\right| + C = \ln\left|\ln x + \sqrt{1+\ln^2 x}\right| + C.$$

Пример 5.5. Найти $\int \frac{x^3}{(x-1)^2}dx$ методом подстановки.

Решение.

Пусть $x = t+1,\quad dx = d(t+1),\quad dx = dt.$

Тогда

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2}dx = \int \frac{(t+1)^3}{t^2}dt = \int \frac{t^3+3t^2+3t+1}{t^2}dt = \int \frac{t^3}{t^2}dt + \int \frac{3t}{t^2}dt + \int \frac{1}{t^2}dt$$

$$= \int tdt + 3\int 1dt + \int \frac{3}{t}dt + \int t^{-2}dt = \frac{t^2}{2} + 3t + 3\ln|t| + \frac{t^{-1}}{-1} + C =$$

$$= \frac{(x-1)^2}{2} + 3(x-1) + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

Интегралы, содержащие иррациональные выражения вида $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{x^2 + a^2}$ или $\sqrt{x^2 - a^2}$, можно вычислить с помощью тригонометрических подстановок :

для $\sqrt{a^2 - x^2}$ применяют подстановку

$x = a\sin t$, $dx = a\cos tdt$ (или $x = a\cos t, \quad dx = -a\sin tdt$);

для $\sqrt{x^2 + a^2}$ — подстановку

$$x = a\ tg\ t, \quad dx = \frac{a}{\cos^2 t}dt \quad (\text{или } x = a\ ctg\ t, \quad dx = -\frac{a}{\sin^2 t}dt);$$

для $\sqrt{x^2 - a^2}$ —подстановку $x = \dfrac{a}{\sin t}$ или $x = \dfrac{a}{\cos t}$.

Пример 5.6. Найти $\int \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$.

Решение.

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx = \left[x = \sin t, \quad dx = \cos tdt, \quad t = \arcsin x, \quad -1 \le x \le 1\ \right] =$$

$$= \int \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt}{\sin^2 t} = \int ctg^2 tdt = \int (\frac{1}{\sin^2 t} - 1)dt = \int \frac{1}{\sin^2 t}dt - \int 1dt =$$

$$= -ctgt - t + C = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + C.$$

5.2.2. *Интегрирование некоторых иррациональных функций.*

Интегралы вида $\int R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p}{q}}, ..., (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{s}{t}})dx$, где $R-$ рациональная функция, $p, q, ..., s, t-$ целые числа, находятся с помощью подстановки $t = \sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, где $m-$наименьшее общее кратное чисел $q, ..., t$.

Пример 5.7. Найти $\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx.$

Решение. Пусть $t=\sqrt[6]{1+x}$, тогда

$$x=t^6-1,\ dx=6t^5dt,\quad \sqrt{1+x}=t^5,\quad \sqrt[3]{1+x}=t^2.$$

Следовательно, $\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx=\int \frac{t^6-1+t^3}{t^2}6t^5dt=$

$=6\int (t^9+t^6-t^3)dt=6(\frac{t^{10}}{10}+\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4})+C,$ где $t=\sqrt[6]{1+x}$.

5.2.3. *Интегрирование тригонометрических функций.*

$$\boxed{\int \sin ax\cos bxdx,\qquad \int \cos ax\cos bxdx,\qquad \int \sin ax\sin bxdx,}$$

где $a\neq b$, находятся с помощью формул:

$$\sin ax\cos bx=\frac{1}{2}(\sin(a-b)x+\sin(a+b)x),$$

$$\cos ax\cos bx=\frac{1}{2}(\cos(a-b)x+\cos(a+b)x),$$

$$\sin ax\sin bx=\frac{1}{2}(\cos(a-b)x-\cos(a+b)x).$$

Пример 5.8. Найти $\int \sin 2x\sin 4xdx.$

Решение.

$$\int \sin 2x\sin 4xdx=\int \frac{1}{2}(\cos(2x-4x)-\cos(2x+4x))dx=$$

$$\frac{1}{2}\int \cos 2xdx-\frac{1}{2}\int \cos 6xdx=\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sin 6x}{6}+C=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{12}\sin 6x+C.$$

Вычисление интервалов вида:

$$\boxed{\int R(\sin x,\cos x)dx,\qquad \text{где } R-\text{рациональная функция.}}$$

Если выполнено:

$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то подстановка $t = \cos x$;
$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то $t = \sin x$,

$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то $t = tgx$.

Пример 5.9. Найти $\int \cos^3 xdx$.

Решение. Пусть $t = \sin x$, $dt = \cos^3 xdx$, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Тогда

$$\int \cos^3 xdx = \int \cos^2 x \cos xdx = \int (1 - t^2)dt = \int 1 \cdot dt - \int t^2 dt = t - \frac{t^3}{3} + C =$$

$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Если ни одно из вышеуказанных равенств не выполняется, то целесообразно применять так называемую *универсальную* тригонометрическую подстановку:

$$t = tg\,\frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2tg\,\frac{x}{2}}{1 + tg^2\,\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + y^2}, \quad \cos x = \frac{1 - tg^2\,\frac{x}{2}}{1 + tg^2\,\frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$x = 2arctg\, t, \qquad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

5.2.4. *Интегрирование по частям.*

К числу весьма эффективных методов интегрирования относится *метод интегрирования по частям*. Он основывается на следующем утверждении.

Теорема 5.3. Если функция $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы на некотором множестве X и, кроме того, на этом множестве существует интеграл $\int v(x)u'(x)dx$, то на множестве X существует и интеграл $\int u(x)v'(x)dx$, причем справедлива формула

$$\boxed{\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx}. \qquad (5.5)$$

или в виде, удобном для запоминания:

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}.$$

Неудачный выбор функции u и v может привести к более сложному интегралу, чем исходный интеграл.

Пример 5.11. Найти $\int x\cos xdx$.

Пусть $u = \cos x$, $dv = xdx$. Покажем, что такой выбор функций u и v является ***неудачным.***

Так как $du = -\sin xdx$, $v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2}$, то

$$\int x\cos xdx = \cos x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}(-\sin x)dx = \frac{x^2}{2}\cos x + \int \frac{x^2}{2}\sin xdx.$$

Получили, что $\int \dfrac{x^2}{2}\sin xdx$ сложнее, чем исходный интеграл.

Положим теперь $u = v$, $v = \int \cos xdx = \sin x$. Тогда

$$\int x\cos xdx = x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x + \cos x + C.$$

Существует *ряд рекомендаций* по выбору функций u и v в основных трех типах интегралов, вычисляемых методом интегрирования по частям с помощью формулы (5.5).

1. Интегралы вида $\int \left\{ \begin{matrix} \arcsin x \\ \arccos x \\ arctgx \\ arcctgx \\ \ln x \\ \ln(\varphi\,(x)) \end{matrix} \right\} P_n(x)dx$ вычисляются

подстановкой $u = g(x)$, где $g(x)-$ из $\{\ \}$, а $dv = P_n(x)dx$.

2. Интегралы вида $\int P_n(x)\left\{\begin{matrix} e^{ax} \\ \cos ax \\ \sin ax \end{matrix}\right\} dx$ вычисляются подстановкой $u = P_n(x), \quad dv = \{\ \}dx,$ причем формулу интегрирования по частям нужно применять n раз.

3. Интегралы вида
$\int e^{ax}\cos bxdx,\quad \int e^{ax}\sin bxdx,\quad \int \sin(\ln x)dx,\quad \int \cos(\ln x)dx,$
$\int \sqrt{x^2+a}dx,\quad \int \sqrt{a^2-x^2}dx,\quad \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ и некоторые другие вычисляются с помощью применения формулы интегрирования по частям дважды, причем дважды выбирают тригонометрическую, либо дважды показательную функцию и получают линейное уравнение относительно исходного интеграла.

Пример 5.12. Найти $\int \ln xdx.$

$$\int \ln xdx = \left[u = \ln x, \quad dv = dx, \quad du = \frac{1}{x}dx, \quad v = x \right]$$

$$= x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - x + C$$

Пример 5.13. Найти $\int \arcsin xdx.$

Решение.

$$\int \arcsin xdx = \left[u = \arcsin x, \quad dv = dx, \quad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad v = x \right] = x\arcsin x$$

$$-\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\sqrt{1-x^2} = t, \quad 1-x^2 = t^2, \quad -2xdx = 2tdt\right] = x\arcsin x + \int \frac{tdt}{t}$$

$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Интегрирование рациональных функций.

Теорема 5.4. *Если* $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *– правильная рациональная дробь, то* $\int\dfrac{P(x)}{Q(x)}dx$ *выражается в элементарных функциях***.**

Разложим $Q(x)$ на линейные и квадратичные множители с дискриминантом, меньшим нуля:

$$Q(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots.(x-a_n)^{\alpha_n}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\times$$

$$\times(x^2+p_2x+q_2)^{\beta_2}\ldots(x^2+p_rx+q_r)^{\beta_r},$$

где $\alpha_{1,}\alpha_2,\ldots\alpha_k,\beta_{1,}\beta_2,\ldots\beta_r$ – целые числа, большие или равные 1, то $R(x)$ может быть разложена на простейшие дроби по следующей схеме:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{(x-a_1)^2}+\ldots+\frac{A_{\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\ldots+\frac{B_1}{x-a_k}+$$

$$\frac{B_2}{(x-a_k)^2}+\ldots+\frac{B_{\alpha_k}}{(x-a_k)^{\alpha_k}}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\ldots+$$

$$+\frac{M_{\beta_1}x+N_{\beta_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}}+\ldots+\frac{R_1x+S_1}{x^2+p_rx+qr}+\ldots+\frac{R_{\beta_r}x+S_{\beta_r}}{(x^2+p_rx+q_r)^{\beta_r}},$$

где $A_1,A_2,\ldots M_1,N_1,\ldots R_{\beta_r},S_{\beta_r}$ – некоторые числа, называемые *неопределенными коэффициентами.*

Интегралы от простейших дробей вычисляются следующим образом:

1. $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C.$

Например, $\int \frac{3dx}{x+5} = 3\ln|x+5| + C$.

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k} dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C =$

$= \int A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$.

Например, $\int \frac{4dx}{(x-2)^3} = 4\frac{(x-2)^{-2}}{-2} + C = -\frac{2}{(x-2)^2} + C.$

3.

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \int \frac{Mx+N}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx = \left[x + \frac{p}{2} = t, \quad dx = dt, \right.$$

$$\left. q - \frac{p^2}{4} = a^2 > 0 - \right] = \int \frac{Mt + N - \frac{Mp}{2}}{y^2+a^2} dt = \int \frac{Mtdt}{t^2+a^2} - \int \frac{N - M\frac{p}{2}}{t^2+a^2} dt =$$

$$= \frac{M}{2}\ln|t^2+a^2| + (N - \frac{Mp}{2}) arctg \frac{t}{a} + C = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) +$$

$$+ \frac{2N-Mp}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4q-p^2}} \cdot arctg \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

4. Интегралы вида $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$, где $k \geq 2$, вначале разбиваются на два интеграла, один из которых вычисляется подстановкой $x+\frac{p}{2}=t$, второй – этой же подстановкой, потом интегрированием по частям и понижением порядка.

Пример 5.16. Найти $\int \frac{x^3-5}{x^2-6x+5}dx.$

Решение. Поскольку степень числителя выше степени знаменателя, то вначале выделяем целую часть алгебраической дроби, деля числитель на знаменатель:

$$\frac{x^3-5}{x^2-6x+5}=x+6+\frac{31x-35}{x^2-6x+5}.$$ Тогда

$$\int \frac{x^3-5}{x^2-6x+5}dx.=\int (x+6)dx+\int \frac{31x-35}{x^2-6x+5}dx=\frac{x^2}{2}+6x+I,$$

где $I=\int \frac{31x-35}{x^2-6x+5}dx$.

Пусть $\frac{31x-35}{x^2-6x+5}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-5}$. Тогда приводя к общему знаменателю, получим $\frac{31x-35}{x^2-6x+5}=\frac{A(x-5)+B(x-1)}{(x-1)(x-5)}$.

Отсюда $\boxed{31x-35=(A+B)x-5A-B}$.

Для нахождения неопределенных коэффициентов A и B составим систему

$$\begin{cases} A+B=31, \\ 5A+B=35, \end{cases} \Rightarrow 4A=4, \quad A=1, \quad B=30.$$

Значит, $I=\int \frac{1}{x-1}dx+\int \frac{30}{x-5}dx=\ln|x-1|+30\ln|x-5|+C.$

Окончательно получим

$$\int \frac{x^3-5}{x^2-6x+5}dx=\frac{x^2}{2}+6x+\ln|x-1|+30\ln|x-5|+C.$$

Вместо того, чтобы сравнивать коэффициенты при одинаковых степенях x, *можно при нахождении неопределенных коэффициентов* A, B, *воспользоваться методом произвольных значений.*

Тема 5: Определенный интеграл

1. Площадь криволинейной трапеции

Пусть на промежутке *[a, b]* определена неотрицательная функция *y =f(x).* Рассмотрим фигуру *ADCB* (рис. 1), ограниченную кривой *f(x)*, двумя вертикальными прямыми *x=a* и *x=b* и отрезком *[a, b]* оси *OX*, т.е. криволинейную трапецию.

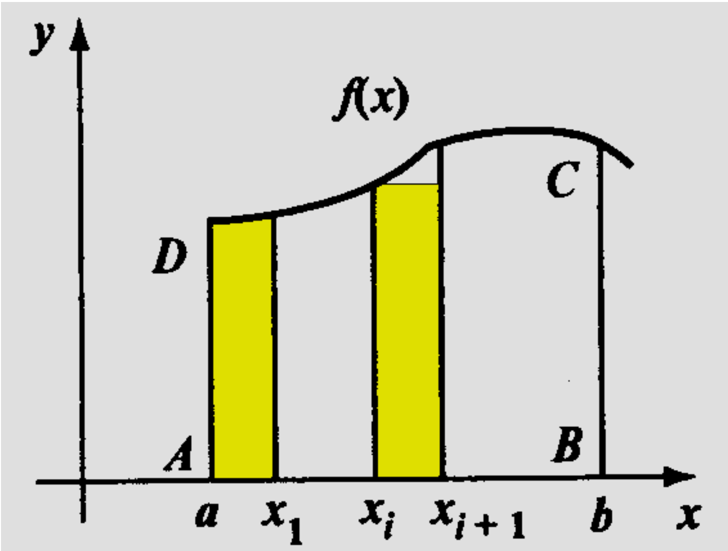


Иллюстрация понятия определенного интеграла

Разделим основание *AB* трапеции на несколько частей точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ и проведем в точках деления вертикальные отрезки.

$$S \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Площадь есть

$$S = \lim \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

при стремлении всех $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \to 0$ к нулю.

Определение определенного интеграла

Пусть на промежутке $[a;b]$ задана функция $f(x)$. Будем считать функцию непрерывной. Выберем на промежутке $[a;b]$ произвольные числа

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$, так что $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b$.

Эти числа разбивают промежуток $[a;b]$ на n более мелких промежутков: $[a;x_1], [x_1;x_2], \ldots, [x_{n-1};b]$. На каждом из этих промежутков выберем произвольно по одной точке:

$c_1 \in [a;x_1],\ c_2 \in [x_1;x_2],\ \ldots,\ c_n \in [x_{n-1};b]$.

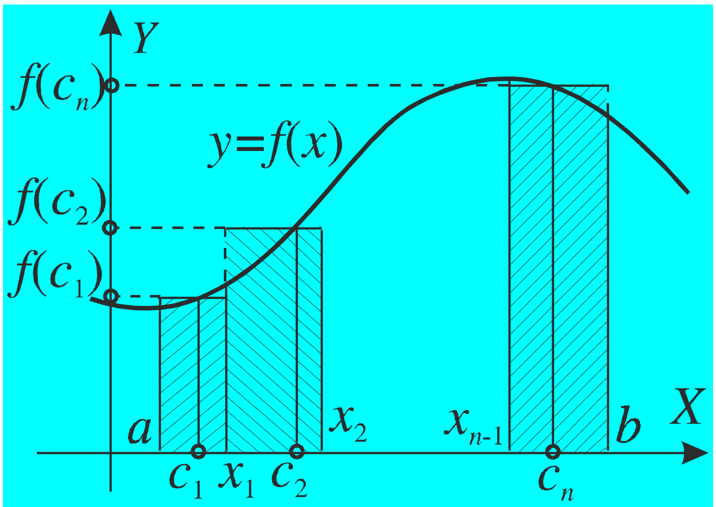


Рис. 1

Обозначим $\Delta x_1 = x_1 - a$; $\Delta x_2 = x_2 - x_1, \ldots, \Delta x_n = b - x_{n-1}$. Составим сумму:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Она называется **интегральной суммой Римана** функции $f(x)$ по промежутку $[a;b]$.

Обозначим: $\lambda = \max(\Delta x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$..

Рассмотрим процесс, при котором число точек разбиения неограниченно возрастает таким образом, что величина λ стремится к нулю.

Определенным интегралом $\int_a^b f(x)dx$ от функции $f(x)$ по промежутку $[a;b]$ называется предел $I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma$, к которому стремится интегральная сумма при этом процессе, если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка, ни от выбора точек c_i:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Число a называется **нижним пределом интегрирования**, а число b — **верхним пределом интегрирования**.

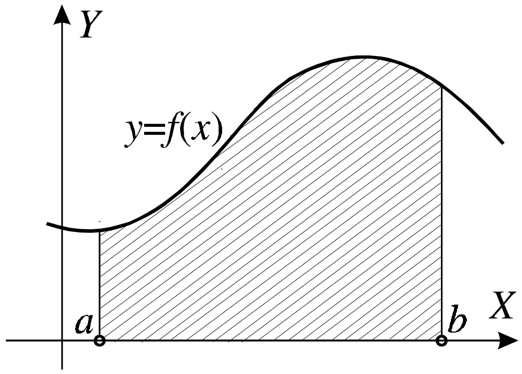


Рис. 2

Рассмотрим фигуру, ограниченную графиком непрерывной, неотрицательной на промежутке $[a;b]$ функции $f(x)$, отрезком $[a;b]$ оси X, и прямыми $x = a$; $x = b$. Такую фигуру называют криволинейной трапецией. На рисунке 2 криволинейная трапеция выделена штриховкой. Площадь S этой трапеции определяется формулой

$$S = I = \int_a^b f(x)dx.$$

Если $f(x) < 0$ во всех точках промежутка $[a;b]$ и

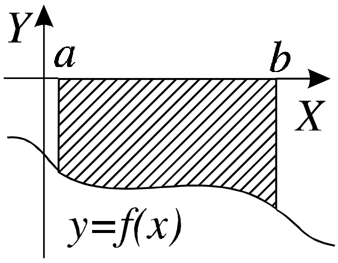


Рис. 3

непрерывна на этом промежутке (например, как изображено на рисунке 3), то площадь криволинейной трапеции, ограниченной отрезком $[a;b]$ горизонтальной оси координат, прямыми $x = a$; $x = b$ и графиком функции $y = f(x)$, определяется формулой

$$S = -\int_a^b f(x)dx.$$

Свойства определенного интеграла:

1) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (здесь k - произвольное число);

2) $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;

3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$; $\int_a^a f(x)dx = 0$

4) Если $c\in[a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

Все приведенные выше свойства непосредственно следуют из определения определенного интеграла.

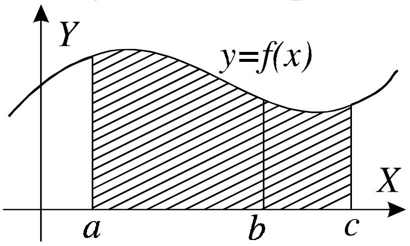


Рис. 4

Оказывается, что формула справедлива и тогда, когда $c\notin[a;b]$. Пусть, например, $c>b$, как изображено на рисунке 4. В этом случае верны равенства $\int_a^b = \int_a^c - \int_b^c = \int_a^c + \int_c^b$.

Теорема. Если $f(x)\le g(x)$ для всех $x\in[a,b]$, а $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, то

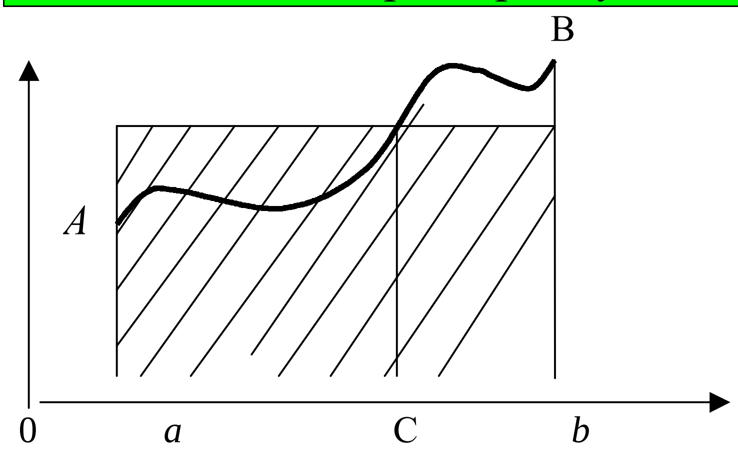
$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

Теорема (теорема о среднем в определенном интеграле).

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существует хотя бы одна точка $c\in[a,b]$, такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Теорема с геометрической точки зрения означает, что площадь криволинейной трапеции $aABb$ совпадает с площадью некоторого прямоугольника



Существование первообразной у непрерывной функции.

Теорема Барроу. Формула Ньютона-Лейбница.

Определенный интеграл как функция верхнего предела.

Пусть функция $f(t)$ определена и непрерывна на некотором промежутке, содержащем точку a. Тогда каждому числу x из этого промежутка можно поставить в соответствие число

$$\boxed{\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt},$$

определив тем самым на промежутке функцию $\Phi(x)$, которая называется ***определенным интегралом с переменным верхним пределом***. Отметим, что в точке $x = a$ эта функция равна нулю.

Вычислим производную этой функции в точке x.

♦ Для этого сначала рассмотрим приращение функции в точке x при приращении аргумента Δx.

$$\Delta\Phi(x) = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) =$$

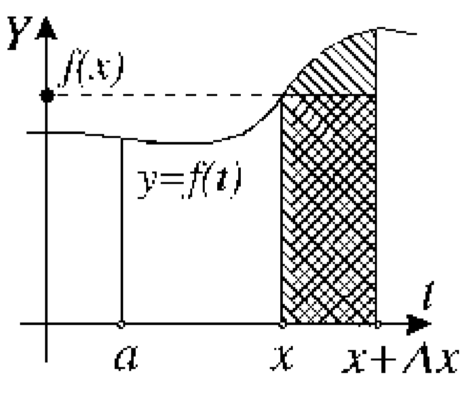
$$=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=$$

$$=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=[\text{ттеорем о среднем}]=f(c)\Delta x,\qquad c\in[x,x+\Delta x]$$

Отсюда следует формула для производной функции $\Phi(x)$:

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=f(x)\qquad(c\to x)$$ ♦

Производная определенного интеграла по верхнему пределу в точке x равна значению подынтегральной функции в точке x.



Теорема (теорема Барроу). Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то функция $\Phi(x)$ является дифференцируемой на $[a,b]$, причем

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x).$$

Эта теорема доказывает, что любая функция $f(x)$ непрерывная на $[a,b]$, имеет первообразную. Именно, $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ является *одной из первообразных*.

Теорема (формула Ньютона-Лейбница). Пусть $F(x)$ – какая-либо первообразная для непрерывной функции $f(x)$, заданной на $[a,b]$. Тогда справедлива формула:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

♦ Пусть $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$. Тогда по теореме об общем виде всех первообразных имеем

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) + C, \qquad \text{где } C \text{ - константа.}$$

При $x = a \quad \Rightarrow \quad 0 = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a)$.

Тогда $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ и $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ ♦

Важность определяется тем, что она связывает определенный интеграл с первообразной ее подынтегральной функции и тем самым дает исключительно удобный способ вычисления определенного интеграла— нужно найти какую-либо первообразную $F(x)$ функции $f(x)$ и подсчитать разность значений первообразной : $F(b) - F(a) = F(x)\Big\|_{x=a}^{x=b}$

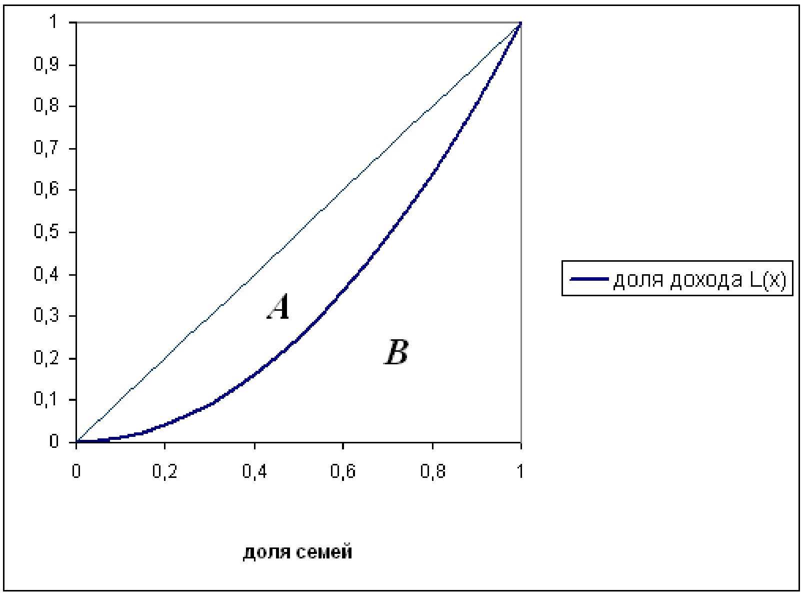
Пример: $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2$

Кривая Лоренца и коэффициент Джини.

Для определения степени неравенства в распределении доходов населения используется так называемая ***кривая Лоренца – зависимость доли совокупного дохода от доли имеющего его населения*** (население при этом упорядочивается по своим доходам в возрастающем порядке от беднейших к самому богатому).

Пусть $x \in [0,1]$ (x —доля беднейшей части семей общества), функция L(x) — доля общественного богатства, которой обладают эти семьи.

Если бы распределение богатства было равномерным, то график функции L(x) шел бы по диагонали единичного квадрата. Поэтому чем больше площадь линзы, обозначенной на рисунке буквой А, тем неравномернее распределено богатство в обществе.



Кривая y=L(x) называется *кривой Лоренса*. *Коэффициентом Джини* называется число: $\boxed{G = A(A+B)^{-1} = 2A = 1-2B}$, дающее численную оценку неравенства в распределении доходов рассматриваемого множества семей.

Пусть, например, $L(x) = x^2$. Тогда площадь фигуры B равна

$$B = \int x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$ Коэффициент Джини $G = 1 - 2B = \frac{1}{3}$.

В России коэффициент Джини в 1989 году составлял 0,24, а в 1993 году вырос до 0,496. Другие примеры значений: Германия – 0,25, Япония – 0,27, Великобритания – 0,297, США - 0,329, Малайзия – 0,484, Мексика - 0,503[1].

Установленная выше связь определенного и неопределенного интегралов сводит вычисление определенного интеграла к взятию неопределенного интеграла и подстановки соответствующих пределов интегрирования. ***Следовательно, все изученные ранее методы нахождения интегралов в полной мере могут быть использованы и в данном случае.***
В частности:

Интегрирование по частям в определенном интеграле

Пусть функция $u = u(x)$ и $v = v(x) -$ непрерывно дифференцируемы на $[a;b]$ функции. Тогда имеет место *формула интегрирования по частям*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = (u(x)v(x))\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

Доказательство:

$$d(u \cdot v) = udv + vdu \Rightarrow \int_a^b d(uv) = uv\Big|_a^b = \int_a^b (udv + vdu)$$

Замена переменной в определенном интеграле.

Пусть $f(x) -$ непрерывная на $[a,b]$ функция, а $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируемая на $[\alpha, \beta]$ функция такая, что $[\alpha, \beta] \xrightarrow{\varphi} [a,b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Таким образом, для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ нужно ввести замену $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$- некоторая непрерывно дифференцируемая функция, являющаяся монотонной и найти новые пределы интегрирования по переменной t, решив для этого уравнения $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi$. Выразив отсюда $\alpha=\varphi^{-1}(a)$, $\beta=\varphi^{-1}(b)$, имеем

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Значит, при использовании метода замены переменной в определенном интеграле не обязательно возвращаться к исходной переменной интегрирования x, а достаточно лишь изменить пределы интегрирования.

Пример $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$. Замена $x=\sin t$, $dx=\cos t\,dt$, $t=\arcsin x$. Поскольку значения $x=\sin t$ не выходят за пределы отрезка $[0;1]$ и $\alpha=\arcsin 0=0$, $\beta=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$, то

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{2}(t+\frac{\sin 2t}{2})\Big|_0^{\pi/2}=$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2})-\frac{1}{2}(0+0)=\frac{\pi}{4}.$$

Формула замены переменной, прочитанная справа налево, позволяет сводить вычисление интеграла $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ с помощью подстановки $\varphi(x)=t$ к вычислению интеграла

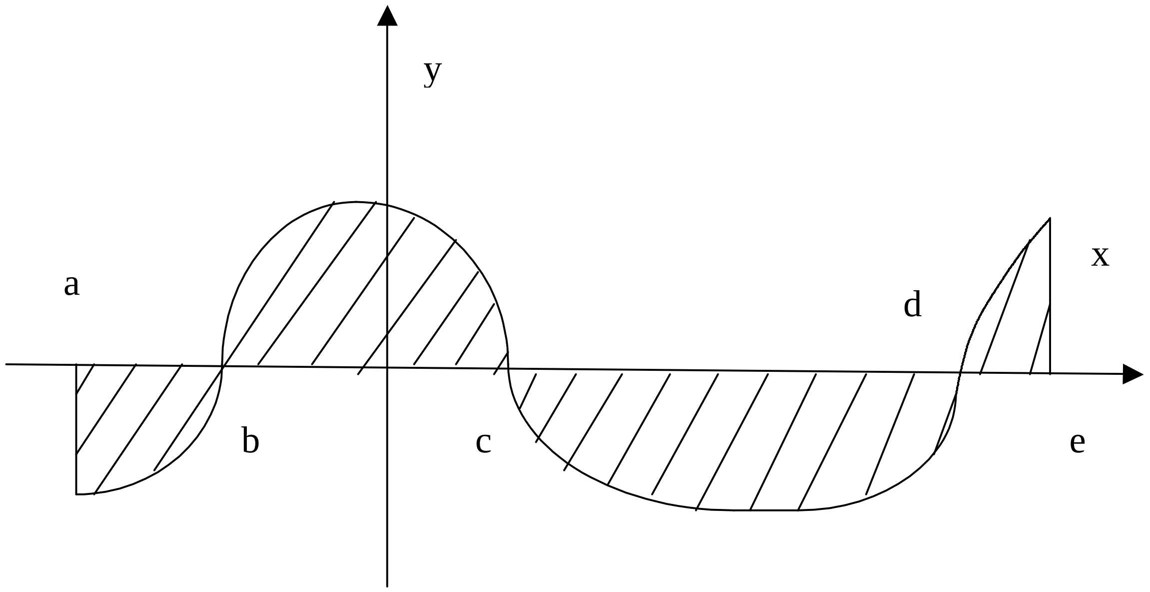
$$\int_\alpha^\beta f(t)dt, \quad \text{где} \quad \alpha=\varphi(a), \quad \beta=\varphi(b).$$

Геометрические приложения определенного интеграла

Площадь плоской фигуры

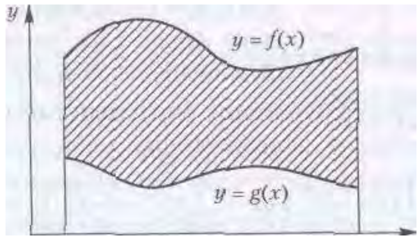
Если функция $y = f(x)$ меняет знак на отрезке $[a,b]$ конечное число раз, то площадь заштрихованной фигуры равна алгебраической сумме соответствующих определенных интегралов:

$$S = -\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^e f(x)dx$$



Площадь плоской фигуры, ограниченной двумя непрерывными на отрезке $[a,b]$ функциями $y = f(x)$ и $y = g(x)$ $(f(x) \geq g(x))$ и $x = a, x = b$ вычисляется по формуле

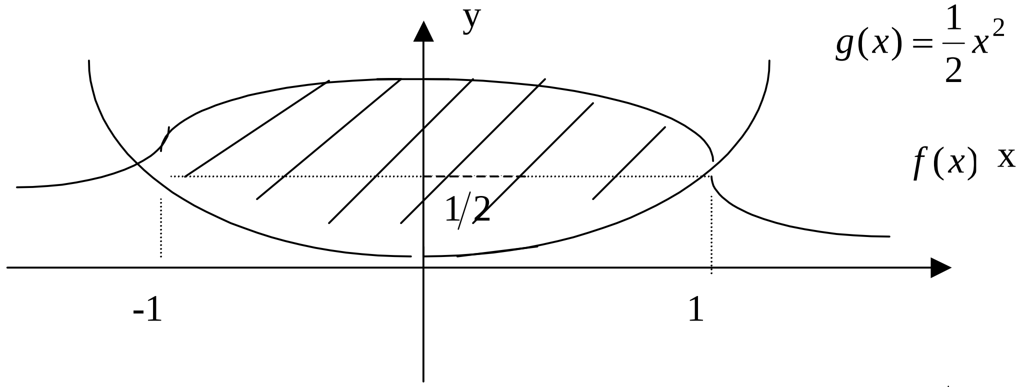
$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$



Пример. Вычислить площадь фигуры, заключенной между локоном Аньези $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ и параболой $y=\dfrac{1}{2}x^2$.

Решение. Найдем точки пересечения кривых

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2}{2}\Leftrightarrow x^4+x^2-2=0,\ \Rightarrow x^2=1, x=\pm 1$$



$$S=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}x^2dx\right)=2\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}x^2\right)dx=2\left(arctgx-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$$

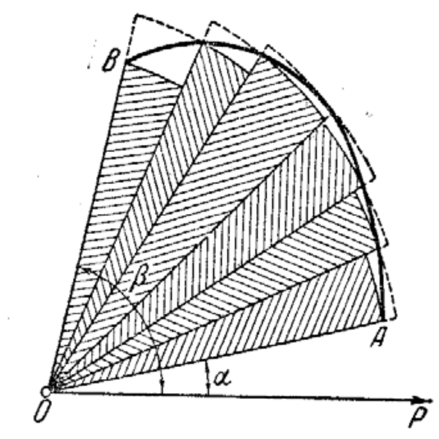


Рис. 76

Площадь плоской фигуры, заданной в полярных координатах $\rho=\rho(\varphi),\quad \varphi\in[\alpha,\beta]$ вычисляется по формуле

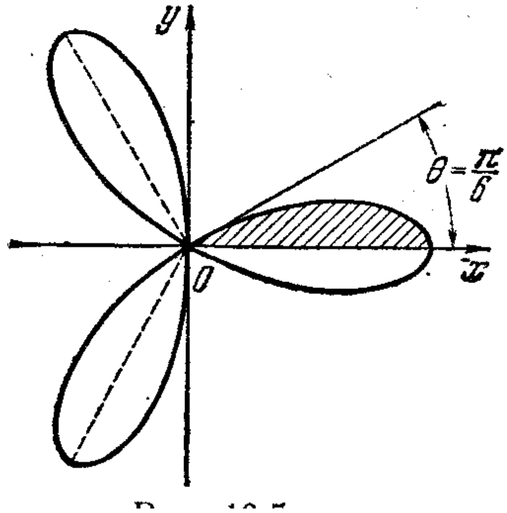
$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi$$

Площадь плоской фигуры, ограниченной линией $y=y(x), x\in[a,b]$, которая представлена в параметрической форме $x=x(t), y=y(t),\quad t\in[t_0,t_1]$ вычисляется формулой

$$S=\int_a^b ydx=\int_{t_0}^{t_1}y(t)x'(t)dt$$

Пример. Найти площадь ***трилистника*** $r = a\cos 3\theta$

Из рисунка ясно, что

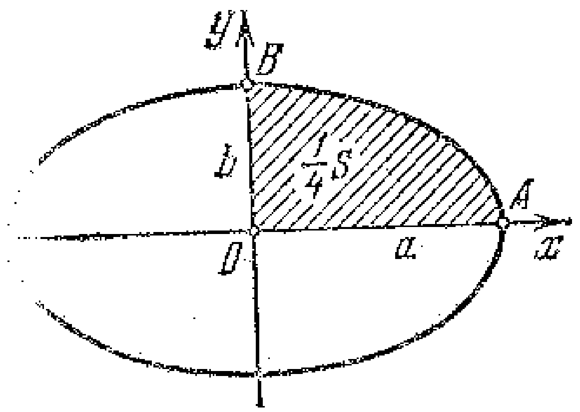


$$S = 6\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} r^2(\theta)d\theta = 6\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/6}\cos^2 3\theta d\theta =$$

$$= 3a^2\int_0^{\pi/6}\frac{1+\cos 6\theta}{2}d\theta =$$

$$= 3a^2[\frac{\pi}{12} + \frac{\sin 6\theta}{12}\Big|_0^{\pi/6}] = \frac{\pi\cdot a^2}{4}$$

Пример. Найти площадь ***эллипса*** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



Для вычисления площади эллипса воспользуемся его параметрическим представлением $x = a\cos t, y = \sin t, t \in [0, 2\pi]$ и учесть, что x *возрастает* от 0 до a, когда t убывает от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Тогда

$$S = 4\int_{\pi/2}^{0} y\cdot x'_t\cdot dt = 4\int_{\pi/2}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t dt =$$

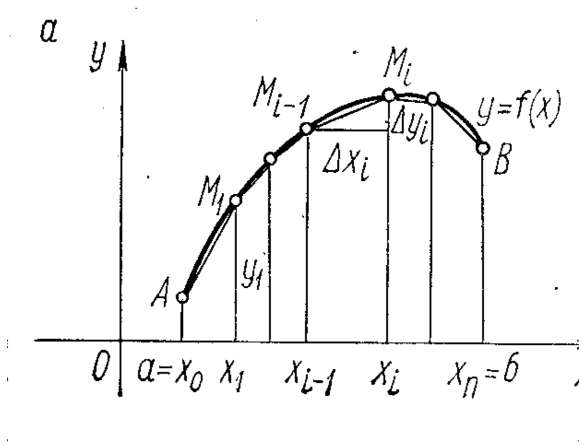
$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt = 4ab[\frac{\pi}{4} - \frac{\sin 2t}{4}\Big|_0^{\pi/2}] = \pi ab$$

Длина дуги плоской кривой

Если дуга задана непрерывно дифференцируемой функцией $y = f(x)$, то ее длина l вычисляется по формуле :

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

Под *длиной дуги* понимается предел, к которому стремится длина ломаной линии, вписанной в эту дугу.



Пример Вычислить длину линии $y = \ln\cos x$ от $x = 0$ до $x = a,\quad 0 < a < \dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Находим $y' = (\ln(\cos x))' = \dfrac{1}{\cos x}(-\sin x)$,

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+tg^2 x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$l = \int_0^a \frac{1}{\cos x}dx = \int_0^a \frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x} = -\int_0^a \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x - 1} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right|\Bigg|_0^a =$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin a + 1}{\sin a - 1}\right|$$

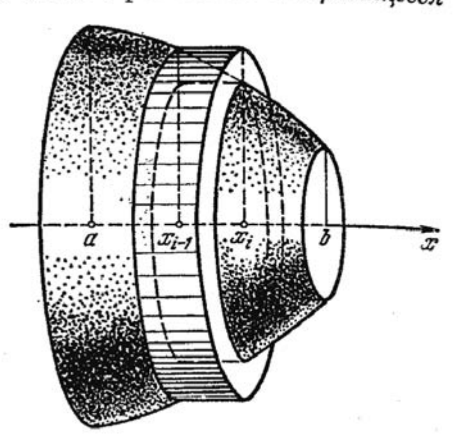
Если дуга задана параметрически $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta]$, то ее длина l вычисляется по формуле $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt$

«Формула Пифагора» для дифференциала дуги

$$l = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt \Rightarrow l' = \sqrt{x'^2 + y'^2} \Rightarrow \qquad \boxed{dl^2 = dx^2 + dy^2}$$

Объем тела вращения

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. В этом случае объем тела, образованного вращением около оси $0x$ криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a, x = b$ и осью абсцисс может быть найден по формуле $V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx$



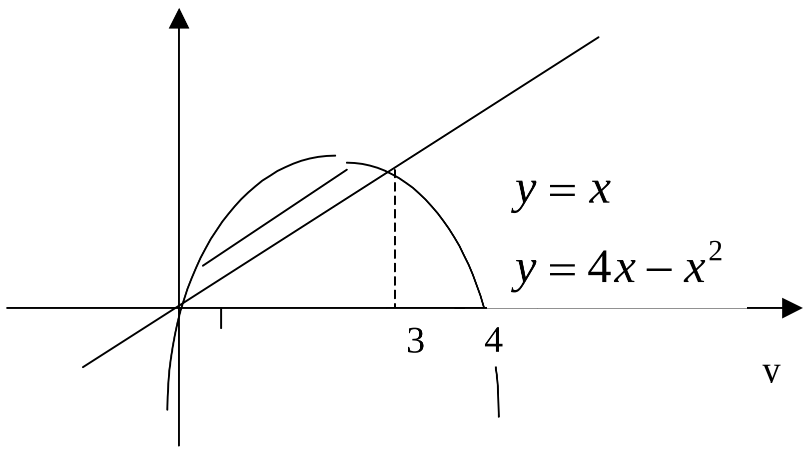
Если вращение происходит вокруг оси $0y$, то объем тела вращения находится по формуле

$$V_y = \pi\int_c^d \varphi^2(y)dy$$

Пример Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 4x - x^2$ и $y = x$ вокруг оси $0x$.

$\boxed{\textit{Решение.}}$ Найдем точки пересечения $y = 4x - x^2$ и $y = x$:

$4x - x^2 = x, \quad x^2 - 3x = 0 \Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad y_1 = 0$ и $x_2 = 3, y_2 = 3$



Объем вычислим как разность $V_1 - V_2$ объемов тел, полученных вращением около оси $0x$ фигуры, ограниченной линиями

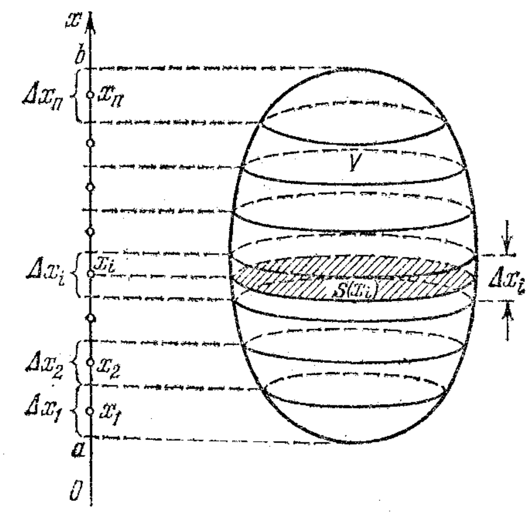
$$y = 4x - x^2, y = 0, \quad x = 3$$

и фигуры, ограниченной линиями $y = x, y = 0, x = 3.$

Тогда $V = V_1 - V_2 = \pi\int_0^3 (4x - x^2)^2 dx - \pi\int_0^3 x^2 dx =$

$$= \pi\int_0^3 (16x^2 - 8x^3 + x^4 - x^2)dx == \pi\int_0^3 (15x^2 - 8x^3 + x^4)dx =$$

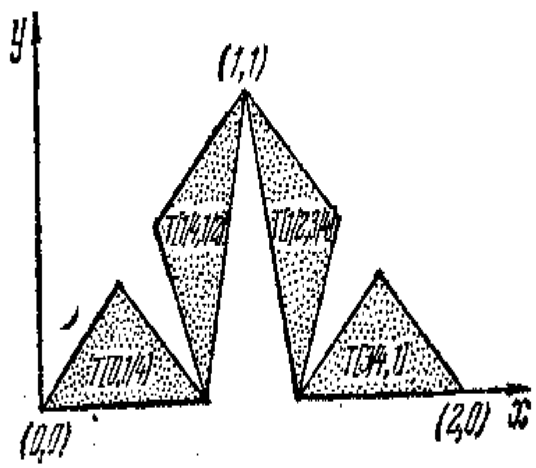
$$\pi\left(\frac{15x^3}{3} - \frac{8x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^3 = \pi\left(5\cdot 3^3 - 2\cdot 81 + \frac{243}{5}\right) = 21{,}6\pi$$

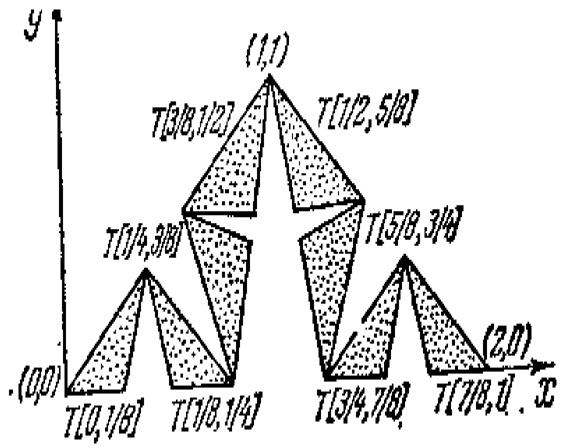


Задача: зная закон изменения $S = S(x)$ площади поперечного сечения тела, найти объем V тела.

$$V \approx \sum S(x_i)\Delta x_i \Rightarrow \qquad V = \int_a^b S(x)dx$$

Пример неспрямляемой линии и неквадрируемой фигуры (Упр*)





Приложения определенного интеграла в экономик.

счет объема продукции.

Пусть $p = f(t)$ – ***производительностью труда*** в момент времени t, $t \in [t_0, t_1]$. Тогда объем продукции, произведенной за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t_0$ вычисляется как

$$V = \int_{t_0}^{t_1} p(t)dt$$

Производственная функция Кобба-Дугласа: $y = Ax_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta}$, где x_1 обозначает затраты труды, x_2 объем капитала

Пример Считая, что функция Кобба-Дугласа имеет вид $p(t) = (1+t)e^{3t}$, вычислить объем продукции, произведенной за 4 года.

$$V = \int_0^4 (1+t)e^{3t}dt = \Big[u = 1+t, \quad du = dt, \quad dv = e^{3t}dt,$$

$$v = \frac{1}{3}e^{3t} \Big] = (t+1)\frac{1}{3}e^{3t}\Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{1}{3}e^{3t}dt = \frac{1}{3}(5e^{12} - 1) - \frac{1}{9}e^{3t}\Big|_0^4 =$$

$$\frac{1}{9}(14e^{12} - 2) \approx 2{,}53 \cdot 10^5$$

Определение. Число $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ называется *средним значением* непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Напомним, что по теореме о среднем в определенном интеграле существует число $c \in [a, b]$, такое, что

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Пример Найти: 1) среднее значение издержек $K(x) = (2x+3)$, выраженных в условных денежных единицах, если объем продукции x меняется от 0 до 4 единиц;
2) объем продукции x_0, при котором издержки принимают среднее значение.

1) $K(x_0) = \dfrac{1}{4-0}\int\limits_0^4 (2x+3)dx = \dfrac{1}{4}(x^2+3x)\Big|_0^4 = \dfrac{1}{4}(16+12) = 7.$

2) Решим уравнение $K(x_0) = 7$. Отсюда $2x_0 + 3 = 7$, $x_0 = 2$. Значит, при объеме продукции $x_0 = 2$ издержки принимают среднее значение, которое составляет 7 денежных единиц.

Несобственные интегралы

До сих пор мы рассматривали определенные интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ при выполнении двух условий: а) промежуток $[a,b]$ конечен, б) функция $f(x)$ ограничена на $[a,b]$. Ниже дается обобщение введенного ранее понятия определенного интеграла для упомянутых случаев.

Несобственные интегралы по бесконечному промежутку.

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена на $[a,+\infty)$ и на любом конечном отрезке $[a,B]$, $a < B$, $B < +\infty$ функция $y = f(x)$ интегрируема, т.е. существует интеграл $\int\limits_a^B f(x)dx$.

Несобственным интегралом 1 рода (по бесконечному промежутку) называется предел $\lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_a^B f(x)dx$, который обозначается как $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Таким образом, $$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_a^B f(x)dx$$

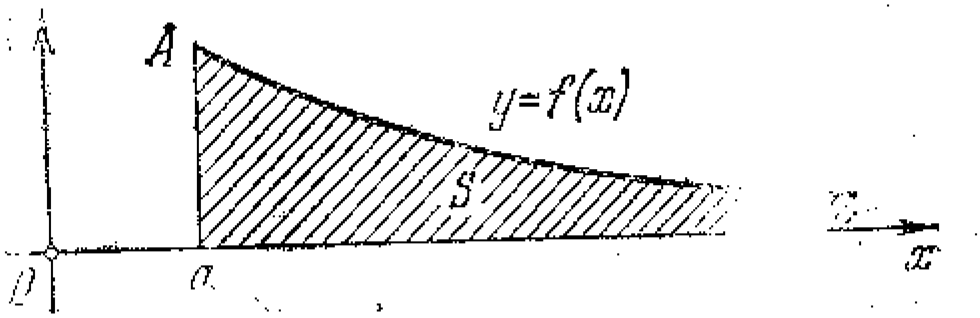
Если предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся*.

Аналогично определяются несобственные интегралы

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{b} f(x)dx, \qquad \text{и} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}}\int_{A}^{B} f(x)dx$$

причем в последнем равенстве A и B стремятся к бесконечности независимо друг от друга.

С геометрической точки зрения сходящийся несобственный интеграл первого рода означает, что площадь бесконечной фигуры есть конечное число



Пример. Исследовать на сходимость интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx.$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{\substack{B\to+\infty \\ A\to-\infty}}\int_{A}^{B}\frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{\substack{B\to+\infty \\ A\to-\infty}}(arctgx)\Big|_{A}^{B} =$$

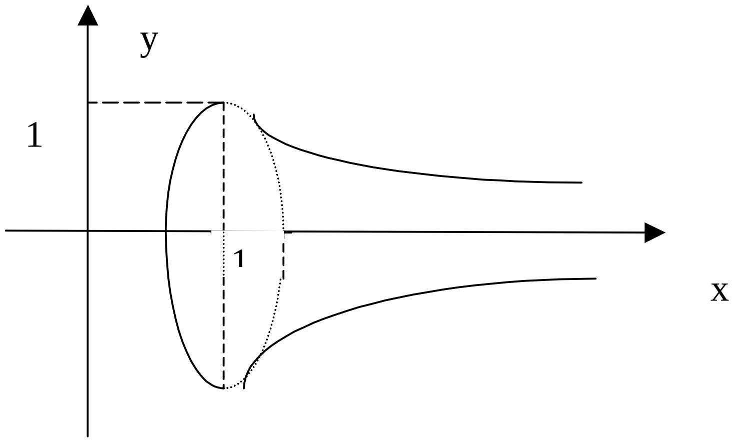
$$= \lim_{\substack{B\to+\infty \\ A\to-\infty}}(arctgB - arctgA) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi\,.$$

Пример. Исследовать на сходимость интеграл $\int_{0}^{+\infty}\cos x dx.$

$$\int_{0}^{+\infty}\cos x dx = \lim_{B\to+\infty}\int_{0}^{B}\cos x dx = \lim_{B\to+\infty}(\sin x)\Big|_{0}^{B} = \lim_{B\to+\infty}(\sin B - \sin 0) =$$

$\lim\limits_{B\to+\infty}\sin B$ — этот предел не существует.

Пример Вычислить объем тела, образованного вращением около оси $0x$ фигуры, ограниченной линиями $y=\dfrac{1}{x},\quad x=1,\quad y=0$



$$V_x=\pi\int\limits_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^2dx=\pi\lim_{B\to+\infty}\int\limits_1^{B}\frac{1}{x^2}dx=\pi\left(\lim_{B\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^B\right)=$$
$$=\pi\left(-\lim_{B\to+\infty}\frac{1}{B}+\frac{1}{1}\right)=\pi\,.$$

В курсе теории вероятностей исключительную роль играет несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx$, называемый интегралом Эйлера-Пуассона. Доказано, что этот интеграл сходится и его значение равно $\sqrt{\pi}$. В физике часто используется интеграл Дирихле $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$. Интересно отметить, что соответствующие неопределенные интегралы *не выражаются в элементарных функциях*.

Несобственные интегралы от неограниченных функций.

Определение Пусть функция $f(x)$ определена на конечном промежутке $[a;b)$ и интегрируема на любом отрезке $[a,b-\varepsilon]$, $\varepsilon>0$, $[a,b-a]\subset[a;b)$. Несобственным интегралом второго рода называется предел $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, если он существует.

Таким образом, $\int\limits_a^b f(x)=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$.

Если функция $f(x)$ определена на конечном промежутке $(a;b]$, интегрируема на любом отрезке $[a+\eta,b]$, $\eta>0$, $[a+\eta,b]\subset(a,b)$, то по определению,

$$\int\limits_a^b f(x)=\lim_{\eta\to+0}\int\limits_{a+\eta}^{b} f(x)dx.$$

Наконец, если функция определена на $[a,c)$ и $(c,b\ ]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\lim_{\eta\to+0}\int\limits_{c+\eta}^{b} f(x)dx$$

Если оба пределсуществуют, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся*.

Пример. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Так при $x\to+0$ подынтегральная функция неограниченная,то

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\eta\to+0}\int\limits_\eta^1 x^{-\frac{1}{2}}dx=\lim_{\eta\to+0}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_\eta^1=2\lim_{\eta\to+0}\sqrt{x}\Big|_\eta^1=2(1-\lim_{\eta\to+0}\sqrt{\eta}\ )=$$

$$=2(1-0)=2.$$

Ответ: данный интеграл сходится и его значение равно 2.

Пример. Исследовать на сходимость $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-6x+5}$.

Подынтегральная функция непрерывна на отрезке $[0,2]$, за исключением точки $x=1$, в которой знаменатель дроби обращается в нуль. Значит,

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2-6x+5} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2-6x+5} + \int_1^2 \frac{dx}{x^2-6x+5}.$$

Если оба интеграла в правой части сходятся, то сходится и данный интеграл; если хотя бы один из них расходится, то и данный интеграл будет расходящимся:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2-6x+5} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x^2-6x+9-4} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-3)^2-4} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x-3-2}{x-3+2}\right| \Bigg|_0^{1-\varepsilon} = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon\to+0} (\ln\frac{4+\varepsilon}{\varepsilon} - \ln 5) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon\to+0} (\ln\frac{4+\varepsilon}{5\varepsilon}) = \infty.$$

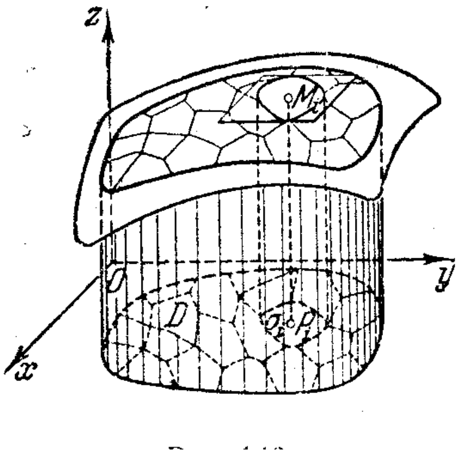
Значит, данный интеграл расходится.

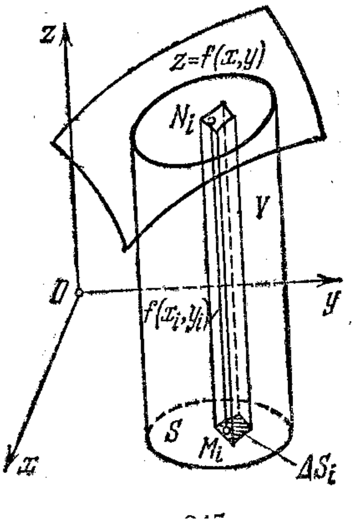
Двойные интегралы

Вычисление площади ⇒ Определенный (1-ый) интеграл

Вычисление объема ⇒ Двойной интеграл

Задача: Найти объем ***цилиндроида***, т.е. тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, снизу областью S плоскости Oxy и с боков прямой цилиндрической поверхностью, построенной на границе области S и имеющей образующие, перпендикулярные плоскости Oxy.





Интегральная сумма Римана:

$$V_n = \sum f(M_i)\Delta S_i = \sum f(x_i, y_i)\Delta S_i$$

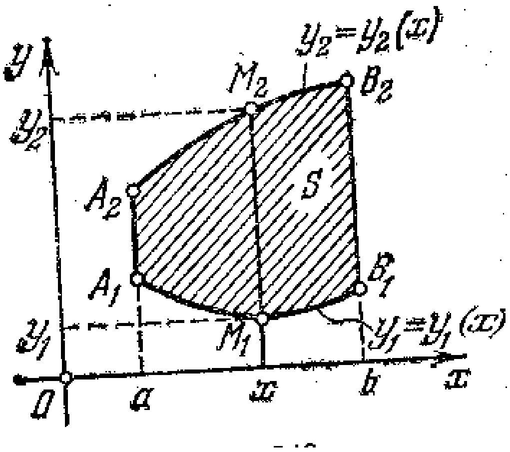
Двойной интеграл

$$\boxed{V = \lim_{d\to 0} V_n = \lim_{d\to 0}\sum f(x_i, y_i)\Delta S_i = \iint_S f(x, y)dS}$$

$dS = dxdy$ элемент площади ⇒

$$\iint_S f(x, y)dS = \iint_S f(x, y)dxdy$$

Вычисление двойного интеграла через повторные интегралы



Пусть область S есть криволинейная трапеция

$$S: \ a \le x \le b, \ \ y_1(x) \le y \le y_2(x)$$

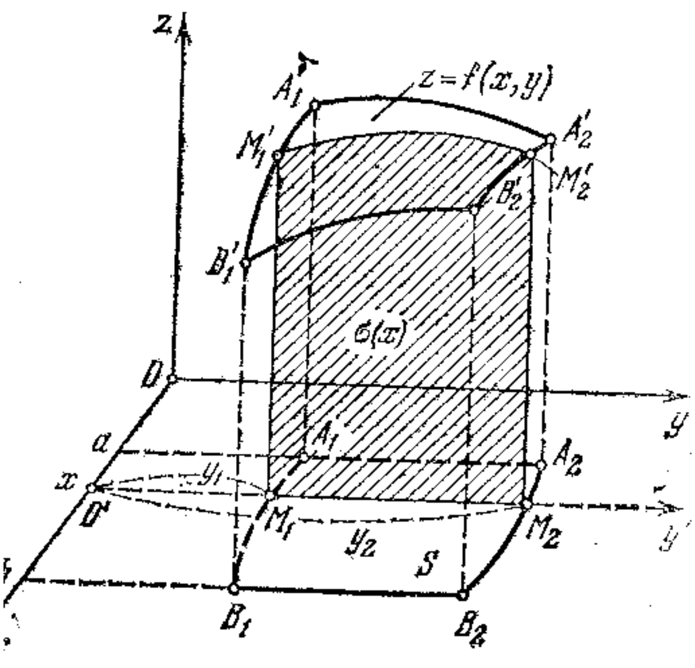
По методу сечений

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

Но сечение $S(x)$ представляет площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху $z = z(x) = f(x, y)|_{x=const}$ и вертикальными прямыми $z = y_i(x)|_{x=const}$.

Следовательно,

$$S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy$$



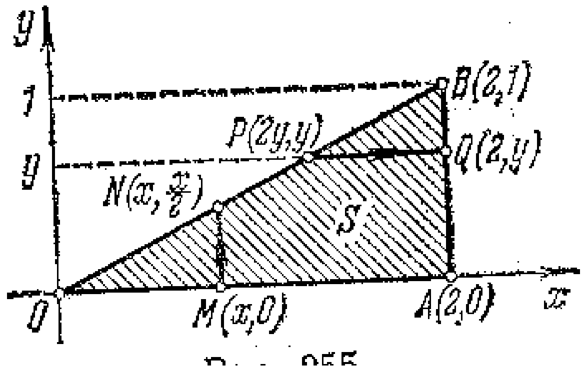
Тогда

$$\boxed{\iint_S f(x, y)dxdy = \int_a^b [\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy]dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy}$$

$$\iint_S f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx$$

Пример 1

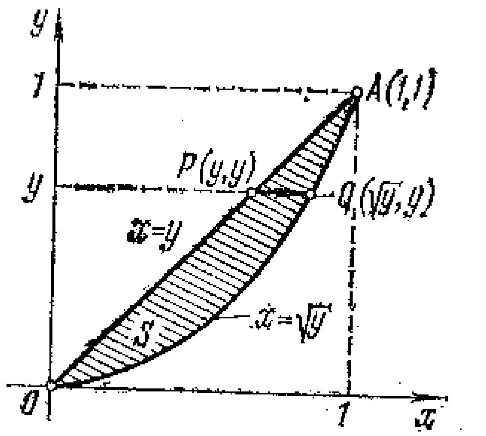
Найти $I = \iint\limits_S x^2 y dxdy$



S: ΔAOB --треугольник
A(2,0), B(2,1), O(0,0)

$$I = \int_0^2 x^2 dx \int_0^{\frac{x}{2}} y dy = \int_0^2 x^2 dx \cdot \frac{y^2}{2}\Bigg|_{y=0}^{y=x/2} = \frac{1}{8}\int_0^2 x^4 dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_{x=0}^{x=2} = \frac{4}{5}$$

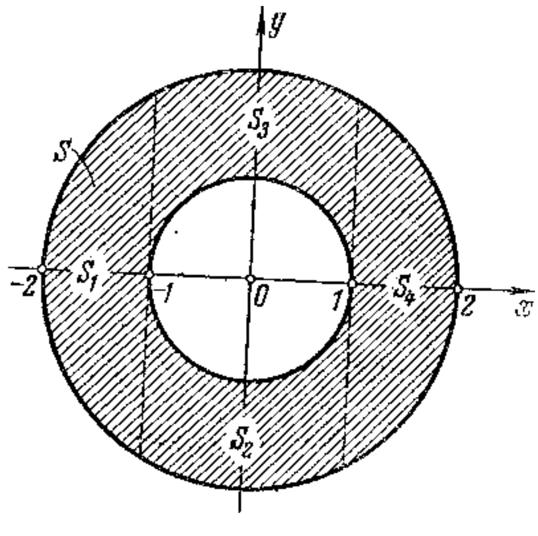
Пример 2. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$.



$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$$

УПР*. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $I = \iint\limits_S f(x,y)dxdy$,

где S — кольцо



1. Примеры задач, приводящие к дифференциальным уравнениям

Часто приходится отыскивать *неизвестную функцию* из соотношения, которое связывает независимую переменную x, искомую функцию $y = y(x)$ и ее производные

$$y'(x), y''(x), y'''(x), \ldots, y^{(n)}(x).$$

Интегральное исчисление

$\int x^2 dx \Rightarrow$ найти функцию $y(x)$, что верно равенство $y' = x^2$.

Решение есть функция $y(x) = \dfrac{x^3}{3} + C$.

Демографическая модель

Известно, что число новорожденных за единицу времени прямо пропорционально с коэффициентом k_1, а число умерших – с коэффициентом k_2 – от численности населения.

Пусть $y = y(t)$ – число жителей региона в момент времени t.

Задача: ***получить формулу подсчета населения***

Решение. $\Delta y = k_1 y \Delta t - k_2 y \Delta t = (k_1 - k_2) y \Delta t$ – прирост населения за промежуток Δt. Предельный переход дает тогда

$y' = k \cdot y \quad (k = k_1 - k_2) \Rightarrow \boxed{\dfrac{dy}{dt} = ky}$ – демографическая модель

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = kdt \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int kdt \Rightarrow \ln y = kt + \ln C \Rightarrow \frac{y}{C} = e^{kt} \Rightarrow$$

$\boxed{y = Ce^{kt}}$ рост численности населения (Мальтус)

Радиоактивный распад

Установлено, что скорость распада пропорциональна наличному количеству не распавшегося вещества с коэффициентом пропорциональности k.

Обозначив:

x_0 — массу радиоактивного вещества в начальный момент времени $t = 0$,

$x -$ его массу в момент времени t.

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = -kx, \quad k > 0.$$

Знак минус указывает на тот факт, что с течением времени масса радиоактивного вещества убывает.

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{x} = -kdt \Rightarrow \ln x = -kt + \ln c.$$

При $t = 0$ получаем $\ln x_0 = \ln c$, откуда $c = x_0$.

Значит, $\boxed{x = x_0 e^{-kt}}$ — формула для определения количества радиоактивного вещества в любой момент времени t.

$\Rightarrow$ можно произвести датировку событий, имеющих место миллионы лет тому назад.

2. Понятие обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка и его решения

Определение1. Обыкновенным дифференциальным уравнением $n-$го порядка называется соотношение вида

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

где $F-$известная функция, заданная в области $D \subset R^{n+2}$, $x-$ независимая переменная, $y = y(x)-$ искомая функция, а $y', y'', ..., y^{(n)}-$ ее производные до $n-$го порядка включительно.

Определение2. *Порядком* n дифференциального уравнения называется порядок старшей из входящих в него производных $y^{(n)}(x)$.

Если уравнение можно записать в виде

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}), \quad (2)$$

где $f-$ функция, определенная в некоторой области $D_1 \subset R^{n+1}$, то говорят, что дифференциальное уравнение *разрешено относительно старшей производной.* Его в этом случае еще называют *дифференциальным уравнением в нормальной форме.*

Дифференциальное уравнение, в которой неизвестная функция y зависит от одной переменной x, называется *обыкновенным.* Если же дифференциальное уравнение содержит функцию многих переменных и ее частные производные, то оно называется *дифференциальным уравнением в частных производных.*

Например, 1) $y' - (2xy')^2 - \ln y' = 0 -$ *обыкновенное* дифференциальное уравнение *первого* порядка;

2) $y''' = \sqrt{1 - yx} -$ *обыкновенное* дифференциальное уравнение *третьего* порядка в *нормальной* форме;

3) $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 -$ уравнение второго порядка в *частных производных*.

Определение3. *Решением* дифференциального уравнения (1) называется всякая действительная функция $y = y(x)$, определенная на интервале (a,b) такая, что:

1) $y(x)$ n раз непрерывно дифференцируема на (a,b);

2) точка $(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) \in D \subset R^{n+2}$, для всех $x \in (a,b)$, где $D -$ область определения функции F;

3) $F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) \equiv 0$ для всех $x \in (a,b)$.

Всякому решению дифференциального уравнения (1) на плоскости отвечает некоторая кривая $y = y(x)$, $x \in (a,b)$, которую называют *интегральной кривой* дифференциального уравнения (1).

Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется *интегрированием* этого уравнения.

Например, решением дифференциального уравнения

$y''' = \sqrt{1 - (y'')^2}$ есть $y = -\sin x + 2x + C$, $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, так как

при $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, $y' = -\cos x + 2$, $y'' = \sin x, y''' = \cos x$ и

$\sqrt{1 - \sin^2 x} = \cos x$, если $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

Простейшие примеры показывают, что дифференциальные уравнения, как правило, имеют *бесчисленное множество решений*. В связи с этим, *Общим решением* дифференциального уравнения (1) (или (2)) обычно называют такое его решение $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, которое содержит столько независимых произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$, каков порядок этого уравнения.

Заметим, что понятие общего решения будет уточнено позже. Общее решение, заданное в неявной форме $\Phi(x, y, C_1, ..., C_n) = 0$ называют *общим интегралом* уравнения.

Чтобы выделить одно какое-то решение, задают некоторые дополнительные условия. Обычно, этими дополнительными условиями являются так называемые *начальные условия*

$$y(x_0) = y_{0,}\ y'(x_0) = y_0',\ y''(x_0) = y_0'',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

где числа $x_0, y_0, y_0', y_0'', ..., y_0^{(n-1)}$ фиксированы.

Нахождение решения $y = \varphi(x)$, удовлетворяющего начальным условиям, называется решением *задачи Коши* для заданных начальных условий.

3. Дифференциальные уравнения первого порядка

Задача Коши. Теорема Коши. Понятие общего решения.

Из (1) и (2) при $n = 1$ имеем дифференциальное уравнение *первого порядка*

$$\boxed{F(x, y, y') = 0,} \qquad (4)$$

где $F -$ известная функция трех переменная, определенная в некоторой области $D \subset R^3$, $x -$независимая переменная, $y = y(x) -$ искомая функция, $y' -$ ее производная, или в разрешенном относительно y' виде

$$\boxed{y' = f(x, y),} \qquad (5)$$

где $f -$ известная функция двух переменных, определенная в некоторой области $D \subset R^2$.

Уравнение (5) всегда можно записать в дифференциалах, где переменные x и y равноправны:

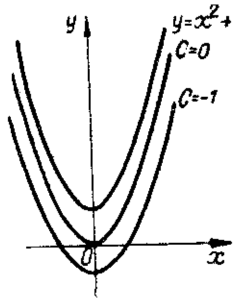
$$\boxed{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.} \qquad \textbf{(6)}$$

Здесь $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – известные функции, заданные в области D, причем $P^2(x,y) + Q^2(x,y) \neq 0$.

Внимание ! $y' = \dfrac{x}{y}$ и $ydy - xdx = 0$ – это записи одного и того же уравнения, но первое задано на плоскости R^2 без оси $0X$, а второе – без начала координат.

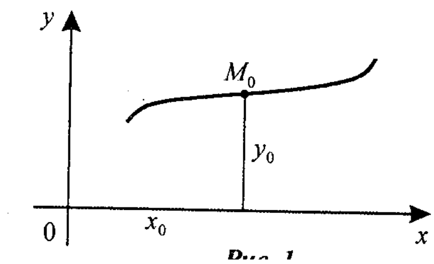
Примеры показывают, что дифференциальные уравнения первого порядка имеют бесчисленное множество решений.

Пример. $y' = 2x \Rightarrow y = x^2 + C$ – семейство интегральных кривых.



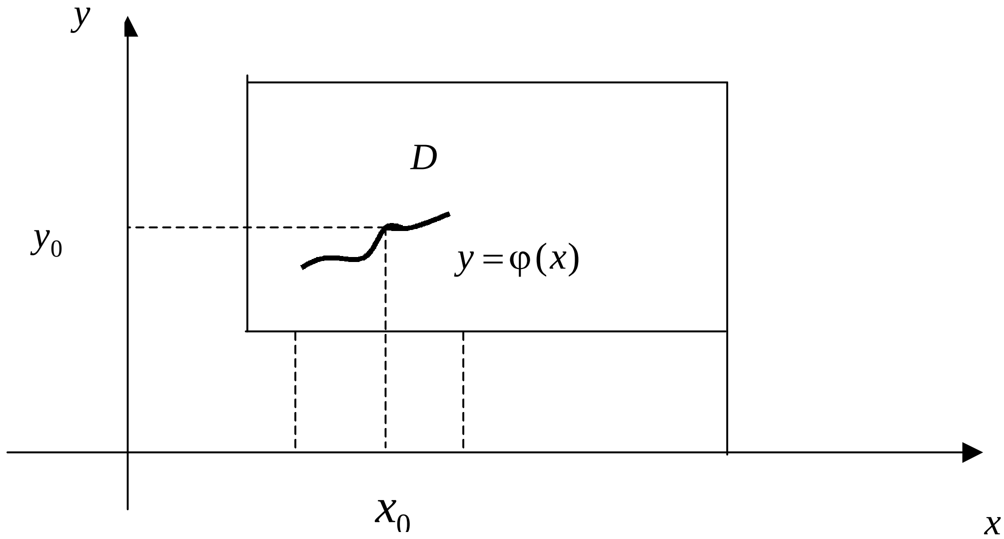
Определение4. Нахождение ***решения*** $y = \varphi(x)$, или $x = \psi(y)$ уравнения (5) или (6), для которого при заданных начальных условиях $(x_0, y_0) \in D$ выполняется равенство $y_0 = \varphi(x_0)$ или $x_0 = \psi(y_0)$, называется решением задачи Коши для начальных условий $(x_0, y_0) \in D$.

Таким образом, *геометрическое* содержание задачи Коши состоит в нахождении интегральной кривой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0) \in D$.



В некоторых случаях решение задачи Коши является не единственным. Следующая теорема указывает одно из достаточных условий, которое гарантирует существование и единственность решения задачи Коши.

Теорема 6.1 (Коши). Пусть функция $f(x,y)$ определена, непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ в открытой области $D \subset R^2$. Тогда найдется интервал $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, на котором *существует единственное* решение $y=\varphi(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x,y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0)=y_0$, $(x_0,y_0)\in D$.

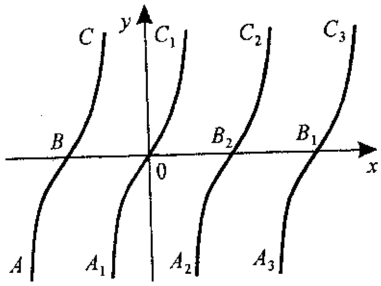


ВНИМАНИЕ! Отметим, что приведенная теорема носит *локальный* характер, т.е. она обеспечивает существование и единственность решения лишь в окрестности точки x_0. При нарушении условий теоремы через точку M_0 могут проходить *несколько* интегральных кривых.

Пример. $y' = 3y^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{y}} \xrightarrow{y\to 0} \infty \Rightarrow$

Неединственность:

Две различные функции $y=(x+C)^3$ и $y\equiv 0$ решения ДУ.



Определение5. Пусть в некоторой области $D \subset R^2$ задано дифференциальное уравнение (5) и для любого замкнутого множества $\overline{D} \subset D$ выполнены условия теоремы Коши. Тогда однопараметрическое семейство функций

$$y = \varphi(x, C), \qquad (7)$$

непрерывно дифференцируемых по x и непрерывных по C называется *общим решением* уравнения (5) в области D, если:
1) функция $y = \varphi(x, C)$ является решением (5) для любого фиксированного C из некоторой области $G \subset R$, где $x \in (a, b)$;
2) для любых начальных условий $(x_0, y_0) \in \overline{D}$ существует $C_0 \in G$ такое, что $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$.

Таким образом, общее решение дает возможность решить задачу Коши для любых начальных условий $(x_0, y_0) \in \overline{D}$, где в $\overline{D}$ имеет место теорема Коши.

Определение 6. Любое решение, полученного из общего при фиксированном значении $C_0 \in G$, называется *частным* решением.

Пусть функция $y = \varphi(x)$ – решение задачи Коши. Тогда график этой функции называется **интегральной линией** или **интегральной кривой,** которая проходит через точку (x_0, y_0). Интегральная кривая в рассматриваемой точке имеет касательную, угловой коэффициент которой равен

$$tg\alpha = y'(x_0) = \quad \varphi'(x_0) = f(x_0, \varphi(x_0)).$$

Таким образом, в каждой точке области D можно установить положение касательной к графику решения уравнения, проходящему через эту точку.

Можно себе представить, что в каждой точке области D построен короткий отрезок касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Тогда получится чертеж, который называется **полем направлений**, задаваемым уравнением.

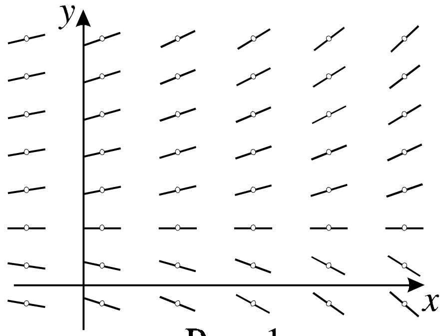


Рис. 1

Поле направлений

Таким образом, каждое дифференциальное уравнение вида задает на плоскости XY в области D поле направлений.

Интегральные линии этого уравнения касаются направления, задаваемого полем в этой точке.

Если в уравнении $y' = f(x, y)$ положим $y' = k$, где $k - fix$, то линии вида $f(x, y) = k$ называются *изоклинами*, так как точки этих кривых имеют одинаковый наклон поля k.

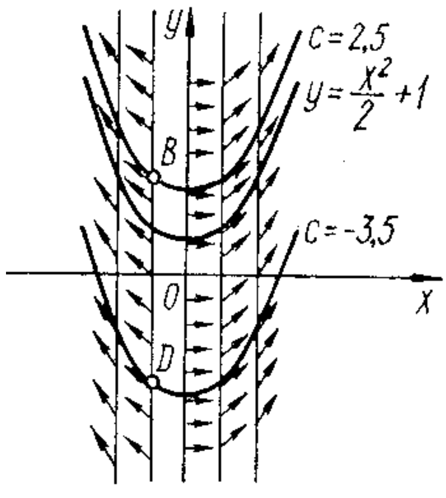
Пример. $y' = x$.

Изоклины:

$k = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow \alpha = 0^0 \Rightarrow x = 0$

$k = 1 \Rightarrow y' = 1 \Rightarrow \alpha = 45^0 \Rightarrow x = 1$

$k = -1 \Rightarrow y' = -1 \Rightarrow \alpha = 135^0 \Rightarrow x = -1$



Основные классы интегрируемых ДУ

1. *Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.*

Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ или $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ называется уравнением с разделяющимися переменными, если его можно записать в виде:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y)} \qquad (8)$$

или

$$\boxed{P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0} \qquad (9)$$

где $f_1(x)$, $P_1(x)$, $Q_1(x)$ – функции только от x,
а $f_2(y)$, $P_2(y)$, $Q\ (y)$ – функции только от y.

Для решения уравнений (8) и (9) прибегают к *методу разделения переменных*, для чего левую и правую часть уравнений (6.8) и (6.9) умножают на такой множитель, чтобы после упрощения при dx стояла функция, зависящая только от x, а при dy стояла функция, зависящая только от y. После умножения получается *уравнение с разделяющимися переменными*, а именно:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx, \qquad \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx + \frac{P_2(y)}{Q_2(y)}dy = 0.$$

После интегрирования последних уравнений получится решение уравнения (8) и (9), записанное в виде:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C \quad \text{и} \quad \int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx + \int \frac{P_2(y)}{Q_2(y)}dy = C.$$

Пример. Проинтегрировать уравнение $y' = tgx\, tgy$.

Решение. $y' = \dfrac{dy}{dx} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = tgx\, tgy \Rightarrow \dfrac{dy}{tgy} = tgxdx$.

Тогда $\dfrac{dy\cos y}{\sin y} = \dfrac{\sin xdx}{\cos x}$, $\int \dfrac{\cos ydy}{\sin y} = \int \dfrac{\sin xdx}{\cos x} + C$,

$\int \dfrac{d(\sin y)}{\sin y} = -\int \dfrac{d(\cos x)}{\cos x} + C$, $\ln|\sin y| = -\ln|\cos x| + \ln|C_1|$,

$\ln|\sin y\cos x| = \ln|C_1|$, $\sin y\cos x = C_1$.

Пример. Найти решение уравнения $(1+e^{2x})y^2dy = e^x dx$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$.

Решение. Разделяя переменные, получаем:

$$y^2dy = \frac{e^x dx}{1+e^{2x}},\ \int y^2dy = \int \frac{d(e^x)}{(e^x)^2+1} + C,\ \frac{y^3}{3} = arctg(e^x) + C.$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow,\quad \frac{0^3}{3} = arctg(e^0) + C,\ 0 = \frac{\pi}{4} + C,\quad C = -\frac{\pi}{4}.$$

$\Rightarrow$Частным решением уравнения, которое удовлетворяет начальному условию $y(0) = 0$, является решение $\dfrac{y^3}{3} = arctge^x - \dfrac{\pi}{4}$.

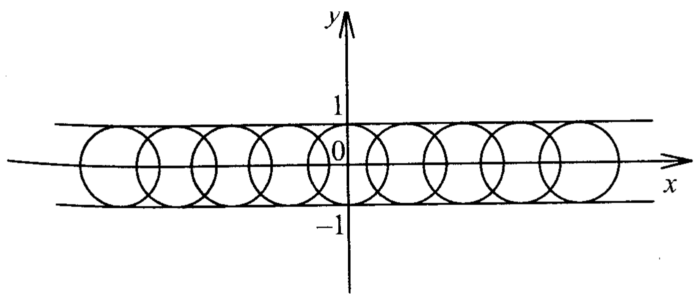
Пример. $\sqrt{1-y^2}dx - ydy = 0$.

Разделим переменные и интегрируем

$$dx = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy \Rightarrow x = -\sqrt{1-y^2} + C \quad \text{или} \quad \boxed{(x-C)^2 + y^2 = 1}$$

ВНИМАНИЕ! Решения потеряны при делении на $\sqrt{1-y^2}$.

Решения вида $y = \pm 1$ не содержатся в *общем интеграле*.



Пример. **Задача об эффективности агитации.**

Пусть некоторой партией ведется предвыборная кампания, в ходе которой она распространяет агитационную информацию о кандидате К. Пусть в момент времени $t = 0$ в результате агитационных действий информацию о кандидате получили x_0 человек из общего числа N потенциальных избирателей. Далее эта информация распространяется посредством общения людей, и в момент времени $t > 0$ число владеющих информацией людей равно $x(t)$.

Сделаем предположение, что скорость роста числа владеющих информацией людей пропорциональна как числу осведомлённых в данный момент избирателей, так и числу неосведомленных избирателей.

Это приводит к уравнению $$\frac{dx}{dt} = kx(N - x).$$

Здесь k – положительный коэффициент пропорциональности. Разделим переменные и интегрируем

$$\frac{dx}{x(N-x)} = kdt \Rightarrow \frac{1}{N}\ln\frac{x}{N-x} = kt + C.$$

Для удобства положим $NC = D$. Тогда $\frac{x}{N-x} = e^{Nkt+D}$.

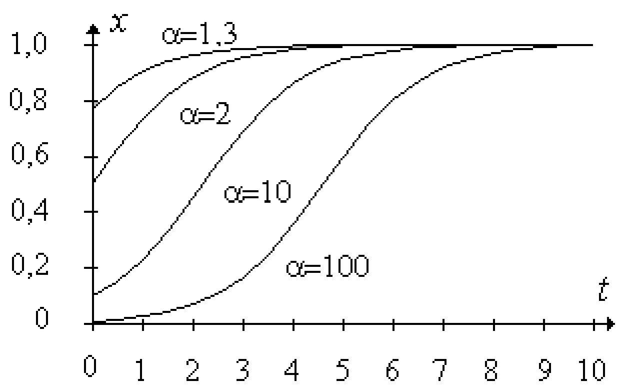
Отсюда определим функцию $x(t) = \frac{N}{1 + Ee^{-Nkt}}$,где $E = e^{-D}$

Такого вида функция называется *логистической*, а её график – *логистической кривой.*

Если теперь учесть, что $x(0) = x_0$ и положить $x_0 = N/\alpha$, где $\alpha > 0$, то можно найти значение константы E. Логистическая функция примет вид:

$$\boxed{x(t) = \frac{N}{1+(\alpha-1)e^{-Nkt}}}.$$

На рисунке приведены примеры логистических кривых, полученных при различных значениях α. Здесь величина N условно принималась за 1, а величина k бралась равной 0,5.



Логистические кривые

С помощью логистической функции описываются многие экономические, социальные, технологические и биологические процессы, например, постоянный рост продаж, распространение слухов, распространение технических новшеств, рост популяции определенного вида животных и др.

2. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка

Дифференциальное уравнение вида

$$A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0,\ \ A(x) \neq 0,$$

или $$y' + p(x)y = q(x) \qquad \boxed{(1)}$$

называется ***линейным ДУ первого порядка***.

Метод : ДУ $\mapsto$ ДУ с разделяющимися переменными

Будем искать решение в виде $\boxed{y = u(x)\, v(x)}$.

Тогда $y' = u'v + uv'$. Подставим y и y' в (1) $\Rightarrow$

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x) \ \Rightarrow\ \boxed{u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)}.$$

Функцию $v(x)$ возьмем как ненулевое решение для

$$\boxed{v' + p(x)v = 0,} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v,\quad \frac{dv}{v} = -p(x)dx,\quad \int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx,$$

$$\ln|v| = -\int p(x)dx, \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = e^{-\int p(x)dx}.}$$

Тогда для нахождения $u(x)$ получается уравнение

$$u'v = q(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} e^{-\int p(x)dx} = q(x) \ \Rightarrow du = e^{\int p(x)dx} q(x)dx,$$

$$u = \int (e^{\int p(x)dx} q(x) \ )dx + C, \qquad \boxed{v = e^{-\int p(x)dx}} \qquad \boxed{y = u \cdot v}$$

Формула решения ЛДУ 1-го порядка

Пример. Решить задачу Коши :

$$(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2, \qquad y(-2) = 5$$

Решение. Разделив $1+x^2 \neq 0$, получим линейное неоднородное ДУ $$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 1+x^2$$

Ищем решение в виде: $y = uv, \quad y' = u'v + uv'$.

Подставим в ДУ: $u'v + uv' - \dfrac{2x}{1+x^2}uv = 1+x^2$, откуда

$$u'v + u(v' - \frac{2xv}{1+x^2}) = 1+x^2.$$

Подберем функцию v так, чтобы коэффициент при u обратился в нуль: $v' - \dfrac{2x}{1+x^2}v = 0$ или $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{2xv}{1+x^2}$,

$$\frac{dv}{v} = \frac{2xdx}{1+x^2}, \quad \ln|v| = \ln\left|1+x^2\right|, \qquad \boxed{v = 1+x^2}.$$

Подставив в $u'v = 1+x^2$, получим $u'(1+x^2) = 1+x^2$ или $u' = 1$, $\dfrac{du}{dx} = 1$, $du = dx$, $u = x + C$. Значит,

$\boxed{y = (x+C)(1+x^2) -}$ ***общее решение ДУ***

$$x_0 = -2, y_0 = 5 \Rightarrow 5 = (-2+C)(1+2^2), \Rightarrow C = 3 \Rightarrow$$

Частное решение имеет вид $y = (x+3)(1+x^2)$.

3. Однородные дифференциальные уравнения

Функция n переменных $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *однородной функцией степени* m, если выполняется тождество $f(tx_1, tx_2, ..., tx_n) \equiv t^m f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

При $n = 2$ и $m = 0$ функция $z = f(x, y)$ называется *однородной нулевой степени*, если $f(tx, ty) = f(x, y)$.

$\boxed{\text{Пример:}}$ $z = \dfrac{x^2 + y^2}{3xy}$ является *однородной нулевой степени*, так как $\dfrac{(tx)^2 + (ty)^2}{3txty} = \dfrac{t^2(x^2 + y^2)}{3t^2(xy)} = \dfrac{x^2 + y}{3xy}$.

Для однородной функции нулевой степени верно равенство $f(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y) = f(1, \frac{y}{x}) = \varphi(\frac{y}{x}) = \varphi(u)$, $x \neq 0$, (*)

Однородным дифференциальным уравнением *первого порядка* называется уравнение $\boxed{y' = f(x, y)}$, где $f(x, y)$ – однородная функция ***нулевой*** степени.

Однородное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Решение в виде: $y = ux, \quad y' = u'x + u$, где $u = u(x)$ – ***неизвестная пока*** функция.

Подставим y' и y в ДУ $\xrightarrow{(*)}$ $u'x + u = \varphi(u)$.

Разделим переменные $\dfrac{du}{\varphi(u) - u} = \dfrac{dx}{x}$. Интегрирование

и замена $u = \dfrac{y}{x}$ даст решение исходного уравнения.

Пример $\quad (y - x)ydx + x^2dy = 0$.

Решение. Находим $y' = \dfrac{(x - y)y}{x^2}$. Функция

$z = f(x, y) = \dfrac{(x - y)y}{x^2}$ – однородная нулевой степени.

Положим $y = ux, \; y' = u'x + u$. Тогда

$$u'x + u = \frac{(x - ux)ux}{x^2} \quad \text{или} \quad u'x + u = \frac{x^2(1 - u)u}{x^2};$$

$$u'x + u = u - u^2; \quad \frac{du}{u^2} = -\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow -\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{x} + \ln|C|;$$

$$\frac{1}{u} = \ln|x| + \ln|C|; \quad \boxed{\frac{x}{y} = \ln|Cx| \text{ ---- общее решение.}}$$

Комплексные числа

Рассмотрим двумерное линейное пространство Ω радиус-векторов на плоскости.

Каждый элемент z пространства Ω в некотором базисе однозначно задается двухкомпонентным столбцом $\begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \end{Vmatrix}$.

Если за базисные элементы пространства Ω принять $g_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$ и $g_2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$, то произвольный элемент $z = \begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \end{Vmatrix}$ может быть представлен в виде $z = \alpha \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + \beta \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix} = \alpha g_1 + \beta g_2$.

Введем операцию *умножения* элементов пространства Ω по следующему правилу:

Определение 1. Результатом операции умножения элементов $z_1 = \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{Vmatrix}$ и $z_2 = \begin{Vmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{Vmatrix}$ из Ω является элемент также этого пространства $z_1 z_2 = \begin{Vmatrix} \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 \\ \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 \end{Vmatrix}$.

Определение 2. Двумерное линейное пространство Ω, с базисом $\left\{ g_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix},\ g_2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \right\}$, в котором введена операция умножения элементов согласно определению 1, называется множеством *комплексных чисел*, а каждый элемент $z \in \Omega$ - *комплексным числом*.

Замечания:

1°. Операция умножения комплексных чисел коммутативна и обладает распределительным свойством относительно операции сложения, что следует непосредственно из ее определения.

2°. Операция умножения комплексных чисел позволяет ввести операцию *деления*: частным от деления комплексного числа z_1 на ненулевое z_2 называется комплексное число z^* такое, что $z_1 = z_2 z^*$.

3°. Нетрудно убедиться, что подмножество комплексных чисел вида $\begin{Vmatrix} \alpha \\ 0 \end{Vmatrix}$, где α - произвольное вещественное число, в силу определения 2, обладает всеми свойствами вещественных чисел, и потому можно говорить, что вещественные числа есть подмножество комплексных чисел.

На практике более употребительна специальная, упрощенная форма записи комплексных чисел: в представлении $z = \alpha \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + \beta \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix} = \alpha g_1 + \beta g_2$ символ g_1 опускается (как бы заменяется не записываемым явно множителем “*единица*”), а символ g_2 заменяется символом i (называемым иногда “*мнимой единицей*”).

Тогда произвольное комплексное число z представимо как $\boxed{z = \alpha + \beta i}$, а записи операций с комплексными числами принимают следующий вид:

$$z_1 + z_2 = (\alpha_1 + \beta_1 i) + (\alpha_2 + \beta_2 i) = (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) i;$$

$$\lambda z = \lambda(\alpha + \beta i) = (\lambda\alpha) + (\lambda\beta) i;$$

$$z_1 z_2 = (\alpha_1 + \beta_1 i)(\alpha_2 + \beta_2 i) = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) i.$$

Данная форма записи удобна тем, что с комплексными числами можно оперировать как с обычными алгебраическими двучленами, если принимать во внимание, что $i^2 = -1$, поскольку

$$\boxed{i^2 = ii = (0+1i)(0+1i) = \left\|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right\| = (-1)+0i = -1}.$$

Тогда, перемножая комплексные числа как двучлены и заменяя повсюду i^2 на число (-1), имеем

$$z_1 z_2 = (\alpha_1 + \beta_1 i)(\alpha_2 + \beta_2 i) = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\beta i + \alpha_2\beta_1 i + \beta_1\beta_2 i^2 =$$
$$= (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)i,$$

которое согласуется с введенным выше определением. Достаточно просто может выполняться также и операция деления:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\alpha_1 + \beta_1 i}{\alpha_2 + \beta_2 i} = \frac{(\alpha_1 + \beta_1 i)(\alpha_2 - \beta_2 i)}{(\alpha_2 + \beta_2 i)(\alpha_2 - \beta_2 i)} = \frac{(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) + (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)i}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} =$$
$$= \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} + \frac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} i.$$

Определение 3. Для комплексного числа $z = \alpha + \beta i$:

1°. Вещественное число α называется *вещественной частью z* и обозначается $\operatorname{Re} z$.

2°. Вещественное число β называется *мнимой частью z* и обозначается $\operatorname{Im} z$.

3°. Вещественное число $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ называется *модулем z* и обозначается $|z|$.

4°. Число φ такое, что $\cos\varphi = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ и $\sin\varphi = \dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$, называется *аргументом z* и обозначается $\arg z$, при условии, что $z \neq 0$.

5°. Комплексное число $\alpha - \beta i$ называется *комплексно сопряженным* числу z и обозначается $\bar{z}$.

Замечание:

1°. Поскольку существует взаимно однозначное соответствие множества радиус-векторов на плоскости и множества комплексных чисел, то комплексные числа можно изображать точками на плоскости.

Свойства комплексного сопряжения

Имеют место следующие, легко проверяемые свойства для любых $z, z_1, z_2 \in \Omega$:

1°. $\overline{(\bar{z})} = z$;

2°. Число z будет вещественным тогда и только тогда, когда $\bar{z} = z$;

3°. Число $z\bar{z} = \alpha^2 + \beta^2$ всегда вещественное и неотрицательное;

4°. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$; $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$;

5°. Если $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k$ многочлен с вещественными коэффициентами, имеющий корень λ, то этот многочлен также будет иметь и корень $\bar{\lambda}$. Действительно, пусть $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \lambda^k = 0$, тогда $0 = \bar{0} = \overline{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \lambda^k} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \bar{\lambda}^k$.

Замечание:

если алгебраическое уравнение с вещественными коэффициентами имеет комплексные корни, то они попарно сопряжены, а алгебраическое уравнение с вещественными коэффициентами нечетной степени имеет, по крайней мере, один вещественный корень.

Задача *На множестве комплексных чисел решить уравнение*

$$z^2 + 1 = 0.$$

Решение: Перепишем это уравнение, приняв, что $z = \alpha + \beta i = \begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \end{Vmatrix}$, то есть $\begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$. Заметим, что здесь мы воспользовались развернутыми представлениями чисел $1 = 1 + 0i = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$ и $0 = 0 + 0i = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$.

Выполнив умножение и сложение в правой части уравнения, приходим к равенству $\begin{Vmatrix} \alpha^2 - \beta^2 + 1 \\ 2\alpha\beta \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$. Но поскольку два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда одновременно равны их вещественные и мнимые части, то мы получаем следующую систему нелинейных уравнений относительно вещественных неизвестных α и β:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 + 1 = 0 \\ 2\alpha\beta = 0 \end{cases},$$

которая имеет два решения $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -1 \end{cases}$.

Поэтому исходное уравнение также имеет два решения

$$z_1 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix} = 0 + 1i = i \quad \text{и} \quad z_2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ -1 \end{Vmatrix} = 0 + (-1)i = -i.$$

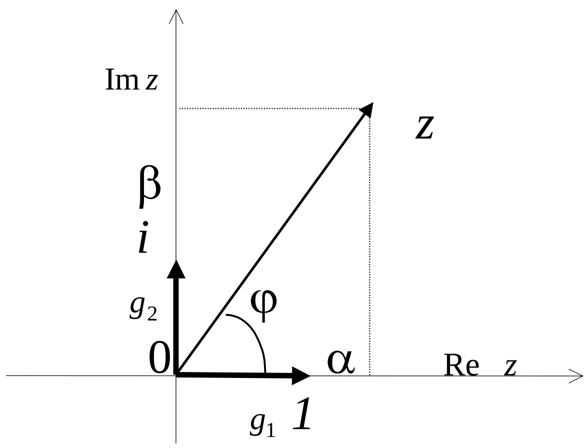
Тригонометрическая и экспоненциальная формы записи комплексных чисел

Исходя из определения 3, можно получить специальную форму записи ненулевых комплексных чисел, называемую *тригонометрической*:

$$\boxed{z = \alpha + \beta i = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} i\right) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

Тригонометрическая форма записи комплексных чисел соответствует заданию точки, изображающей комплексное число, в полярной системе координат.

Пусть



- направляющим элементом полярной оси служит элемент $g_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$,
- значение модуля комплексного числа $|z|$ равно ρ - расстоянию от начала координат до точки, изображающей данное число,
- значение аргумента $\arg z$ совпадает с величиной полярного угла φ, отсчитываемого против часовой стрелки.

Тогда, согласно определению 3, комплексное число $z = \alpha + \beta i$ представимо в тригонометрической форме

$$\boxed{z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)}.$$

Другой часто используемой формой представления комплексных чисел, является их *экспоненциальная* форма, которая получается преобразованием тригонометрической формы по

формуле Эйлера:	$e^{iz} = \cos z + i\sin z$

В этом случае из равенства $z = \alpha + \beta i = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ следует, что

экспоненциальная форма есть $z = \rho e^{i\varphi}$.

Использование экспоненциальной формы записи комплексных чисел может упростить решение некоторых задач, поскольку при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются[1]).

Например,

$$z_1 z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1}\, \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

или

$$i^i = (e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)})^i = e^{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}, \quad \forall k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Задача *Найти вещественное решение уравнения* $\cos\sqrt{x} = 5$.

Из формулы Эйлера следует $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \forall z \in \Omega$. Поэтому данное уравнение можно записать в виде $\dfrac{e^{i\sqrt{x}} + e^{-i\sqrt{x}}}{2} = 5$ или

$$y + \frac{1}{y} - 10 = 0, \qquad \text{где } y = e^{i\sqrt{x}}.$$

Откуда находим, что $e^{i\sqrt{x}} = 5 \pm 2\sqrt{6}$, то есть $i\sqrt{x} = \ln(5 \pm 2\sqrt{6})$ или окончательно $x = -\ln^2(5 \pm 2\sqrt{6})$.

---

[1]) Обоснование обобщения свойств экспоненциальной функции вещественного аргумента на комплексный случай приводится в курсе ТФКП.

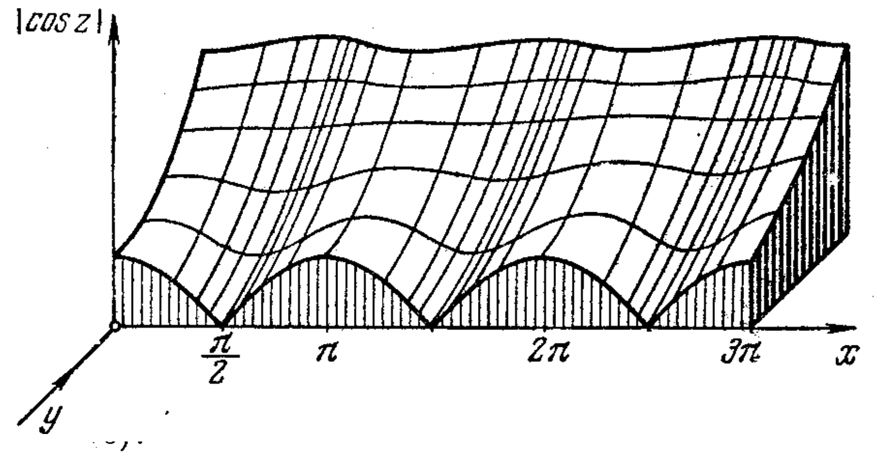
Тригонометрические функции комплексной переменной $z \in C$ можно ввести, опираясь на формулы Эйлера:

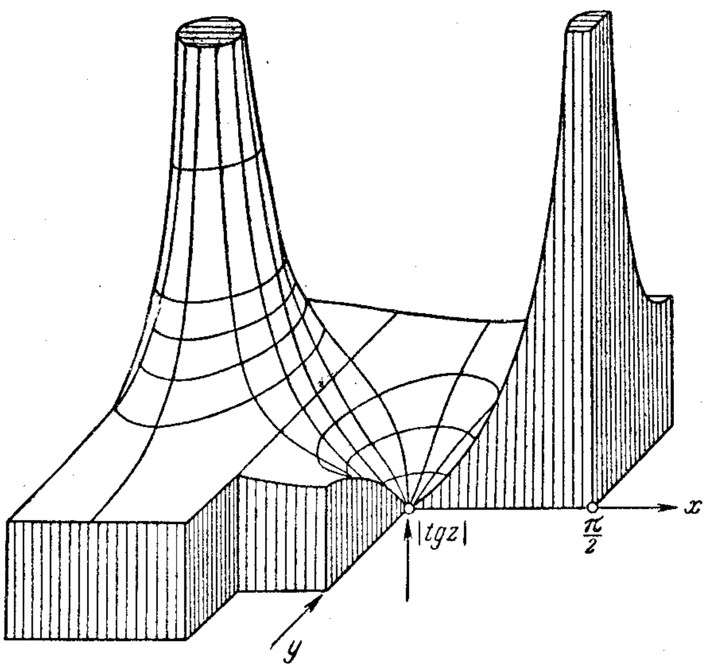
$$\boxed{\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},}$$

Остальные обычным образом

$$tgz = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad ctgz = \frac{\cos z}{\sin z}$$

Графики некоторых тригонометрических функций:





4. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка

Теория линейных уравнений является наиболее простой и разработанной областью дифференциальных уравнений. Именно эти уравнения чаще всего используются в реальных прикладных задачах.

1. Задачи Коши. Общее решение ЛДУ 2-го порядка

Краткие сведения теории ЛДУ 2-го порядка

Определение1 Дифференциальное уравнение вида

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = f(x), \qquad (1)$$

где $A(x) \neq 0, B(x), C(x), f(x) -$ функции, заданные в некоторой области $D \subset R$, называется ***линейным дифференциальным уравнением второго порядка***.

Если $A \neq 0, B, C -$константы, то ДУ (1) ***называется*** *уравнением с постоянными коэффициентами*;
если $f(x) \equiv 0$, то *линейным однородным*;
если $f(x) \neq 0$, то *линейным неоднородным*.

Задача Коши: Для заданных начальных условий (x_0, y_0, y_0'), где $x_0 \in X \subset D$, $X -$ промежуток непрерывности функций $A(x) \neq 0$, $B(x), C(x), f(x)$, а $y_0, y_0' -$ произвольные числа, требуется найти такое *решение* $y = \varphi(x)$ уравнения (1), чтобы

$$y_0 = \varphi(x_0), \qquad y_0' = \varphi'(x_0).$$

Определение 2. *Общим решением* уравнения (1) называется семейство функций $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, дважды непрерывно дифференцируемое по x при $x \in (a,b)$, которое:

1) является решением уравнения (1) для любых C_1, C_2 из некоторой области G;
2) обеспечивает решение задачи Коши для любых начальных условий $(x_0 \in X, y_0, y_0')$ при некоторых $C_1^0, C_2^0 \in G$.

Свойства решений линейных однородных уравнений.

Теорема 1. Если $y = y_1(x)$ – решение уравнения (1), то функция $y = C\, y_1(x)$, где C –любое постоянное число, также будет решением уравнения (1).

Теорема 2. Если $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ –два решения уравнения (1), то и $\bar{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, где C_1, C_2 – произвольные числа, тоже решение уравнения (1).

Док-во—непосредственная подстановка в ДУ **!**

ЦЕЛЬ—установить вид общего решения ЛДУ-2

Трудность в обеспечении условия 2) в Опр.2 **!**

Эти условия гарантирует свойство линейной независимости

Определение1. Два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (1) называются ***линейно зависимыми*** на интервале (a,b), если существуют числа α_1, α_2, не равные одновременно нулю, такие что $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \equiv 0$ для всех $x \in (a,b)$. В противном случае, функции называются ***линейно независимыми***.

Замечание. Две функции являются линейно независимыми, если их отношение не равно тождественной постоянной: $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq const$.

Как проверить ЛНЗ ?

Важную роль играет ***определитель Вронского***.

Пусть $y_1(x), y_2(x)$—две дифференцируемые функции. Тогда определитель вида $W(x) = \det\begin{Vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{Vmatrix}$ называют ***определителем Вронского*** (аналогично $n > 2$

Пример. Функции $x, \sin x, \cos x$—ЛНЗ ?

$$W(x) = \begin{Vmatrix} x & \sin x & \cos x \\ 1 & \cos x & -\sin x \\ 0 & -\sin x & -\cos x \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x & \sin x & \cos x \\ 1 & \cos x & -\sin x \\ x & 0 & 0 \end{Vmatrix} =$$

$= -x(\sin^2 x + \cos^2 x) = -x \neq 0 \ \forall x \in (a,b), a \neq b \Rightarrow$ **ЛНЗ !**

Упр*. Функции $1, x^2, x^3$—ЛНЗ ?

Какая связь Вронскиана и ЛНЗ ?

Теорема 3. Если дифференцируемые на (a,b) функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ **линейно зависимы (ЛЗ)**, то

$$W(x) \equiv 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

Следствие (достаточное условие ЛНЗ). Если $W(x_0) \neq 0$ хотя бы в одной точке из (a,b), то функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ **линейно независимы (ЛНЗ)** на (a,b)

Какое отношение к ДУ ?

Теорема 4. Для того, чтобы два частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ ДУ (1) были **линейно независимы (ЛНЗ)** на (a,b) $\Leftrightarrow$ $W(x) \neq 0$ хотя бы в одной точке $x \in (a,b)$

Понятие линейной независимости функций позволяет описать ***множество всех решений*** ЛДУ.

Теорема 5 (структура общего решения).

1) Всякое ЛДУ (1) имеет ***ровно два линейно независимых*** решения.
2) Если решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (1) линейно независимы, то решение $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, где C_1, C_2 произвольные постоянные, ***является общим решением***.

Как построить два ЛНЗ решения для ДУ?

Мы найдем для частных случаев ЛДУ

Однородные линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим ЛДУ вида $\boxed{y'' + py' + qy = 0,}$ (2)
где p и q – постоянные числа.

Будем искать решение в виде (Эйлер) $\boxed{y(x) = e^{\lambda x}}$

Подставим в ДУ (2): $\Rightarrow y'(x) = \lambda e^{\lambda x}, y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y'' + py' + q = (\lambda^2 + p\lambda + q) \cdot e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow \xrightarrow{e^{\lambda x} \neq 0}$$

Имеем, что $\boxed{\lambda^2 + p\lambda + q = 0}$, (3)
которое называется ***характеристическим уравнением***

(Очевидным образом составляется по коэффициентам

Для квадратного уравнения (3) возможны случаи:

1. Если $D = p^2 - 4q > 0$, т.е. если (3) имеет ***два различных действительных корня*** λ_1 и λ_2, то ДУ (2) имеет общее решение вида

$$\boxed{y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x};}$$

Док-во. Покажем, что $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ и $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ ЛНЗ ?

Вронскиан:

$$W(x) = \begin{Vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{Vmatrix} = e^{\lambda_1 x} \cdot e^{\lambda_2 x} \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{Vmatrix} =$$

$$= e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x}(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0 \quad \forall x \in R \Rightarrow ЛНЗ$$

Пример1. Найти общее решение для $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0, \quad D = 25 - 24 + 1 > 0.$

Значит, $\lambda_1 = \dfrac{5-1}{2} = 2; \quad \lambda_2 = \dfrac{5+1}{2} = 3.$

Общее решение имеет вид: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

2. Если $D = p^2 - 4q = 0$, т.е. если (3) имеет **два равных** действительных корня $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \dfrac{-p}{2}$, то ДУ (2) имеет общее решение

$$\boxed{y = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{\lambda x}};$$

Док-во. Ясно, что $y_1(x) = e^{\lambda x}$ есть частное решение.

Где взять еще одно частное решение?

Выберем в виде $y(x) = x \cdot e^{\lambda x}$. Тогда

$$y'(x) = e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x}, y''(x) = 2\lambda e^{\lambda x} + \lambda^2 x e^{\lambda x} \Rightarrow$$

$$y'' + py' + q = xe^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q) + e^{\lambda x}(2\lambda + p) = 0 \Rightarrow$$

Действительно, $y(x) = x \cdot e^{\lambda x}$—решение ДУ.

Проверим ЛНЗ: Вронскиан:

$$W(x) = \begin{Vmatrix} e^{\lambda x} & x\, e^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & x\lambda e^{\lambda x} + e^{\lambda x} \end{Vmatrix} = e^{\lambda x} \begin{Vmatrix} 1 & x \\ \lambda & x\lambda + 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda x}(x\lambda + 1 - \lambda x) = e^{\lambda x} \neq 0 \quad \forall x \in R \Rightarrow ЛНЗ$$

Пример2. Общее решение ДУ $y'' - 10y' + 25y = 0$.

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$, $D = 100 - 100 = 0$, значит, $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$.

Тогда $y = (C_1 + C_2 x)e^{5x}$— общее решение.

3. Если $D = p^2 - 4q < 0$, т.е. если (3) имеет ***два комплексно-сопряженных корня*** $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{-D}}{2}$, то ДУ (2) имеет **общее решение вида** $\boxed{y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)}$

Док-во.

По формулам Эйлера комплексные экспоненты

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

$$y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

есть решения ДУ (2). Как выбрать ЛНЗ решения?

Упр* Оказывается, что **мнимая и действительные части решений:** $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ являются **ЛНЗ !**

Следовательно, общее решение имеет искомый вид

Пример 3. Уравнения $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$, $D = 4 - 20 = -16 = 16i^2$, $\lambda_{1,2} = \dfrac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$, Значит $\lambda = 1$, $\beta = 2$ и общее решение имеет вид:

$$y = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x).$$

Пример4. Найти частное решение уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям Коши $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, $D = 25 - 24 = 1$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$ – общее решение ДУ.

Для решения **задачи Коши** находим производную $y' = 2C_1e^{2x} + 3C_2e^{3x}$. Подставляя начальные условия $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, получаем $1 = C_1e^{2\cdot 0} + C_2e^{3\cdot 0}$, $0 = 2C_1e^{2\cdot 0} + 3C_2e^{3\cdot 0}$. Значит, C_1 и C_2 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ 2C_1 + 3C_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2C_1 + 2C_2 = 2, \\ 2C_1 + 3C_2 = 0 \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения системы первое уравнение, получаем $C_2 = -2$, откуда $C_1 = 1 - C_2 = 1 + 2 = 3$.

Ответ: $y = 3e^{2x} - 2e^{3x}$.

5. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

Краткие сведения теории ЛНДУ 2-го порядка

Определение Дифференциальное уравнение вида

$$y'' + py' + qy = f(x), \qquad (1)$$

где p, q—константы, $f(x)$—заданная функция называется ***линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами***.

Как устроено общее решение ЛНДУ ?

Теорема (структура общего решения ЛНДУ).
Общее решение ***линейного неоднородного дифференциального уравнения*** ЛНДУ (1) есть сумма

$$\boxed{y(x) = y^*(x) + y_{общ}(x)} \qquad (*)$$

некоторого частного решения $y^*(x)$ ***неоднородного*** ДУ (1) и ***общего решения*** $y_{общ}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ ***однородной части*** ДУ (1), т.е. решения для ДУ вида

$$y'' + py' + qy = 0. \qquad (**)$$

Здесь $y_1(x)$, $y_2(x)$ линейно независимые решения для ДУ (**), а C_1, C_2 —произвольные постоянные.

Как искать частное решение неоднородного ДУ?

Укажем для ***специального вида*** правой части $f(x)$!!

1. Пусть

$$\boxed{f(x) = P_n(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}$$

а) Предположим, что число $\boxed{\lambda = 0}$ не является корнем характеристического уравнения $\boxed{\lambda^2 + p\lambda + q = 0}$

Тогда частное решение для ***неоднородного уравнения*** ищем тоже в виде многочлена той же степени, (но с неизвестными пока коэффициентами):

$$\boxed{y^*(x) = R_n(x) \equiv b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n} \quad \text{(а1)}$$

Подставим (а1) в ДУ (1):$\Rightarrow$

$$\boxed{R''_n(x) + pR'_n(x) + qR_n(x) \equiv P_n(x)} \text{ для } \forall x \qquad \text{(в1)}$$

Сравнивая в тождестве (в1) коэффициенты при одинаковых степенях x**,** получим алгебраическую систему из $(n+1)$ уравнений относительно неизвестных коэффициентов b_i

б) Пусть число $\boxed{\lambda = 0}$ является корнем (однократным !) характеристического уравнения $\boxed{\lambda^2 + p\lambda + q = 0}$

(в этом случае оно имеет вид $\lambda(\lambda + p) = 0$)!

Тогда частное решение для ***неоднородного уравнения*** ищем в виде

$$\boxed{y^*(x) = x \cdot R_n(x)} \qquad \text{(а2)}$$

Далее используется процедура пункта а).

в) Пусть число $\boxed{\lambda = 0}$ является корнем (двухкратным !) характеристического уравнения $\boxed{\lambda^2 + p\lambda + q = 0}$

(в этом случае оно имеет вид $\lambda^2 = 0$)!

Тогда частное решение для ***неоднородного уравнения*** ищем в виде

$$\boxed{y^*(x) = x^2 \cdot R_n(x)} \qquad (а3)$$

Далее используется процедура пункта а).

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 2y = x^2$.

Решение. 1)Ищем общее решение для $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$,

$$D = 4 - 8 = -4 = 4i^2,\ \lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 1,$$

Значит, общее решение однородного уравнения есть

$$y_{общ} = e^x(C_1 \sin x + C_2 \cos x).$$

2) Для нахождения частного решения неоднородного уравнения используем специальный вид правой части

$$P_n(x) = x^2,\ n = 2.$$

Так как среди корней характеристического уравнения нет $\lambda = 0$, то множители x и x^2 отсутствуют, значит, ищем частное решение y^* в виде многочлена второй степени с неопределенными коэффициентами

$$y^* = ax^2 + bx + c, \qquad y'^* = 2ax + b, \qquad y''^* = 2a.$$

Подставляем y^*, y'^*, y''^* в исходное уравнение

$$y'' - 2y' + 2y = x^2$$

Имеем

$$2a - 4ax - 2b + 2ax^2 + 2bx + 2c = x^2;$$

$$x^2(2a) + x(-4a + 2b) + 2a - 2b + 2c = x^2.$$

Составляем систему для нахождения a, b и c, приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях x в левой и правой части уравнения:

$$\begin{array}{l} x^2: \\ x^1: \\ x^0: \end{array} \begin{cases} 2a = 1, \\ -4a + 2b = 0, \\ 2a - 2b + 2c = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/2, \\ b = 1, \\ c = 1/2. \end{cases}$$

Итак, частное решение $\boxed{y^* = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}}$.

Следовательно, общее решение неоднородного ДУ есть

$$\boxed{Y = y_{общ} + y^* = e^x(C_1 \sin x + C_2 \cos x) + \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}.}$$

2. Пусть правая часть имеет вид

$$\boxed{f(x) = e^{kx} \cdot P_n(x) \equiv e^{kx} \cdot (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n)}$$

Важную роль играет взаимодействие корней характеристического уравнения с правой частью!!!

Пусть $\lambda_i, i = 1{,}2$ — корни характеристического уравнения $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

Возможны случаи:

а) $\boxed{k \neq \lambda_i}$

Тогда частное решение ищем в виде $\boxed{y^*(x) = e^{kx} \cdot R_n(x)}$

где $R_n(x)$— многочлен n-ой степени с неизвестными коэффициентами.

б) число k является простым корнем (кратности один) характеристического уравнения,

т.е. $\boxed{k = \lambda_1}$ **или** $\boxed{k = \lambda_2}$

Частное решение ищем в виде $\boxed{y^*(x) = x \cdot e^{kx} \cdot R_n(x)}$

где $R_n(x)$— многочлен n-ой степени с неизвестными коэффициентами.

в) число k является двукратным корнем характеристического уравнения, т.е. $\boxed{k = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda}$

Частное решение ищем в виде $\boxed{y^*(x) = x^2 \cdot e^{kx} \cdot R_n(x)}$

где $R_n(x)$— многочлен n-ой степени с неизвестными коэффициентами.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = xe^x$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0, \quad (\lambda - 1)^2 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

Значит, общее решение есть $y = (C_1 + C_2 x)e^x$.

Так как правая часть имеет вид $xe^{1\cdot x}$ и $k=1$ совпадает с $\lambda_1=\lambda_2=1$, то в частном решении появляется множитель x^2: $y^*=x^2(ax+b)e^x$.

Тогда

$$\begin{aligned}
&y^*=e^x(ax^3+bx^2);\\
&y'^*=e^x(ax^3+bx^2)+e^x(3ax^2+2bx)=e^x(ax^3+(b+3a)x^2+2bx);\\
&y''^*=e^x(ax^3+(b+3a)x^2+2bx)+e^x(3ax^2+2(b+3a)x+2b=\\
&\quad=e^x(ax^3+(b+6a)x^2+(4b+6a)x+2b)
\end{aligned}$$

Подставляем y^*, $y^{*''}$, $y^{*''}$ в исходное уравнение, группируя слагаемые по степеням x и вынося e^x за скобки:

$$e^x(ax^3-2ax^3+ax^3+bx^2-2(b+3a)x^2+(b+6a)x^2$$

$$-4bx+(4b+6a)x+2b)=xe^x.$$

Приравнивая коэффициенты при x^3, x^2, x и x^0в левой и правой частях последнего уравнения, получаем систему для нахождения неопределенных коэффициентов a и b:

$$\begin{matrix} x^3: \\ x^2: \\ x: \\ x^0: \end{matrix}
\begin{cases} 0a=0,\\ b-2b-6a+b+6a=0,\\ -4b+b+16a=1,\\ 2b=0 \end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases} 0a=0,\\ 0a+0b=0,\\ 6a=1,\\ 2b=0 \end{cases}
\Rightarrow \quad a=\frac{1}{6}, \quad b=0.$$

Значит, $y^*=\dfrac{x^3}{6}e^x$. Общее решение есть

$$\boxed{Y=(C_1+C_2x)e^x+\frac{x^3}{6}e^x.}$$

3. **Т**рудный случай представляет правая часть вида

$$\boxed{f(x) = e^{kx}(P_n(x)\cdot\cos px + Q_m(x)\cdot\sin px)}$$

где $P_n(x)$— многочлен n-ой степени, $Q_m(x)$— многочлен m-ой степени.

а) Пусть комплексное число $\boxed{\mu = k \pm p\cdot i}$ **не является** корнем характеристического уравнения

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

Тогда частное решение ищем в виде

$$\boxed{y^*(x) = e^{kx}(R_q(x)\cdot\cos px + T_q(x)\cdot\sin px)}$$

где степень $\boxed{q = \max\{m, n\}}$

б) Пусть комплексное число $\boxed{\mu = k \pm p\cdot i}$ **является** корнем характеристического уравнения

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

Тогда частное решение ищем в виде

$$\boxed{y^*(x) = x\cdot e^{kx}(R_q(x)\cdot\cos px + T_q(x)\cdot\sin px)}$$

где степень $\boxed{q = \max\{m, n\}}$

Пример. Найти решение ДУ

$$y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 1,\quad y'(0) = 2.$$

Решение. Прежде находим общее решение однородного уравнения

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Характеристическое уравнение :

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, $D = 1 + 4 \cdot 2 = 9 = 3^2$, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = +1$. (*)

Значит, общее решение однородного уравнения есть

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x.$$

Корней вида $k + pi = i$ в уравнении (*) нет.

Значит, частное решение y^* неоднородного уравнения будем искать в виде $y^* = a\cos x + b\sin x$.

Тогда $y^{*\prime} = -a\sin x + b\cos x$, $y^{*\prime\prime} = -a\cos x - b\sin x$.

Подставляем y^*, $y^{*\prime\prime}$, $y^{*\prime\prime}$ в исходное уравнение и, приводя подобные члены при $\cos x$ и $\sin x$, получаем:

$$-a\cos x - b\sin x - a\sin x + b\cos x + a\cos x + b\sin x$$
$$= \cos x - 3\sin x,$$

$$(b - 3a)\cos x + (-3b - a)\sin x \equiv \cos x - 3\sin x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\boxed{\cos x}$ и при $\boxed{\sin x}$ в правой и левой частях последнего уравнения, получим:

$$\begin{cases} b - 3a = 1, \\ -3b - a = -3 \end{cases} \begin{cases} 3b - 9a = 3, \\ -3b - a = -3, \end{cases} \Rightarrow -10a = 0, \Rightarrow a = 0, b = 1$$

Значит, частное решение неоднородного уравнения имеет вид $y^* = \sin x$, а **общее решение** неоднородного уравнения есть $\boxed{Y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + \sin x;}$

Учтем начальные условия $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Найдем $Y' = -2C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + \cos x$.

Отсюда $1 = C_1 + C_2$ и $2 = -2C_1 + C_2 + 1$.

Решаем полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ -2C_1 + C_2 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Ответ: $\boxed{Y = e^x + \sin x.}$

Сводная таблица:

Пусть функция $f(x)$ имеет вид $P_n(x)$, или $P_n(x)e^{\alpha x}$, или $(P_{n_1}(x)\sin\beta x + P_{n_2}(x)\cos\beta x)e^{\alpha x}$,

где $P_n(x), P_{n_1}(x), P_{n_2}(x)$ – многочлены степени n или не меньше n.

Тогда частное решение можно найти в виде

$$Q_n(x),\ Q_n(x)e^{\alpha x},\ e^{\alpha x}(Q_{n_1}(x)\sin\beta x + Q_{n_2}(x)\sin\beta x),$$

где $Q_n(x)$, $Q_{n_1}(x), Q_{n_2}(x)$ – многочлены такой же степени, что и $P_n(x), P_{n_1}(x), P_{n_2}(x)$, но с неопределенными коэффициентами, или в таком же виде, но с множителем x или x^2 в зависимости от соотношения корней λ_1 и λ_2 характеристического уравнения и числа α $(\alpha \pm i\beta)$:

1. если $\lambda_1 \neq \alpha, \lambda_2 \neq \alpha$, то множители x и x^2 отсутствуют;
2. если $\lambda_1 = \alpha$, (или $\lambda_2 = \alpha$), но $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то появляется множитель x;
3. если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то появляется множитель x^2;
4. если ни один их корней $\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm \beta_1 i$ характеристического уравнения не равен $\alpha \pm \beta i$, то множитель x отсутствует; если $\lambda_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$, то появится множитель x.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = \boxed{3e^{2x}} + \boxed{xe^{x}}$ (Super)

Замечание (принцип суперпозиции решений ДУ)

Пусть правая часть ДУ $y'' + py' + qy = f(x)$ (*)
равна сумме двух функций $\boxed{f(x) = f_1(x) + f_2(x)}$,
а $y_1(x), y_2(x)$ есть решения с одной левой частью, но с разными правыми частями

$\boxed{y'' + py' + qy = f_1(x)}$ и $\boxed{y'' + py' + qy = f_2(x)}$

УПР*(доказать)

Тогда $\boxed{y(x) = y_1(x) + y_2(x)}$ есть решение (*)

<u>*Решение.*</u> В нашем случае $f_1(x) = 3e^{2x}$, $f_2(x) = xe^{x}$

1) Решение $y'' - 2y' + y = xe^{x}$ (для $f_2(x) = xe^{x}$)

(см. Лекция 9) имеет вид $y_2(x) = (C_1 + C_2 x)e^{x} + \dfrac{x^3}{6}e^{x}$.

2) Для $f_1(x) = 3e^{2x}$ имеем ДУ $y'' - 2y' + y = 3e^{2x}$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0, \quad (\lambda - 1)^2 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

Значит, общее решение есть $y = (C_1 + C_2 x)e^{x}$.

Так как правая часть имеет вид $3e^{2\cdot x}$ и $k = 2$ **не совпадает** с $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, то частное решение следует искать в виде: $y^* = ae^{2x}$.

Тогда

$y^* = e^x(ax+b)$; $y'^* = e^x(ax+b) + e^x \cdot a$; $y''^* = 4ae^{2x}$

Подставляем y^*, $y^{*''}$, $y^{*''}$ в исходное уравнение, группируя слагаемые по степеням x и вынося e^x за скобки:

$$e^{2x}(4ax - 4a + a) = 3e^{2x}. \Rightarrow a = 3 \Rightarrow \boxed{y^*(x) = 3e^{2x}}$$

Общее решение есть $y_1(x) = (C_1 + C_2 x)e^x + 3e^{2x}$.

Итак, по принципу суперпозиции общее решение для ДУ (Super) равно

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = (C_1 + C_2 x)e^x + 3e^{2x} + \frac{x^3}{6}e^x.$$

6. Метод Лагранжа

$$y'' + py' + qy = f(x), \qquad (1)$$

Как быть, если $f(x)$ – произвольная функция?

$(p, q \neq const\,?)$

Для нахождения частного решения $\boxed{y^*(x)}$ можно использовать ***метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)***

Пусть однородное уравнение $\boxed{y'' + py' + qy = 0}$ (2)

имеет общее решение

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad (3)$$

Будем искать решение ***неоднородного*** уравнения (1) в виде (метод Лагранжа !)

$$\boxed{y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)} \qquad (*)$$

где $C_1(x), C_2(x)$ – пока ***неизвестные*** функции.

Дифференцируем

$$y'(x) = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x)$$

Потребуем (это можем !), чтобы выражение для y' имело такой же вид как и для y. Для этого положим

$$\boxed{C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0}. \qquad \text{(A)}$$

Тогда имеем

$$y'(x) = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)$$

Дифференцируем полученное выражение

$$y''(x) = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x)$$

Найденные $\boxed{y, y', y''}$ подставим в исходное ДУ (1):

$$y'' + py' + qy = C_1'y_1' + C_1y_1'' + C_2'y_2' + C_2y_2'' +$$

$$+ pC_1y_1' + pC_2y_2' + qC_1y_1 + qC_2y_2 = \boxed{\text{(перегруппируем)}=}$$

$$= C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + C_2(y_2'' + py_2' + qy_2) =$$

$$\boxed{(y_1, y_2 - \text{решения !})} = \boxed{C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = f(x)}$$

Итак, получили систему уравнений

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) \end{cases} \qquad (**)$$

Определитель системы(вронскиан) $W(x) = \begin{Vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y_2' \end{Vmatrix} \neq 0$

Следовательно, можно найти $\boxed{C_1'(x), C_2'(x)}$, Проинтегрировав их найдем искомые функции $\boxed{C_1(x), C_2(x)}$ и тем самым найдем требуемое решение неоднородного ДУ :

$$\boxed{y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)}$$

Пример $y'' + y = tgx$

Найдем общее решение однородного ДУ $\boxed{y'' + y = 0}$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0, \lambda_{1,2} = \pm i$.

Общее решение ОДУ $\boxed{y(x) = e^{0\cdot x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x)}$

По методу Лагранжа будем искать ***частное решение*** для неоднородного ДУ в виде

$$\boxed{y(x) = C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x)}$$

где $C_1(x), C_2(x)$ -- подлежащие определению функции.

Система уравнений (**) в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ -C_1' \sin x_1 + C_2' \cos x = tgx \end{cases}$$

Отсюда найдем $C_1' = -\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$, $C_2' = \sin x$

Интегрируем:

$$C_1 = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx = \int (\cos x - \frac{1}{\cos x})dx = \sin x - \ln tg(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) + K_1$$

$$C_2 = \int \sin x dx = -\cos x + K_2$$

Окончательно, общее решение неоднородного ДУ есть

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) &= C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x = \\ &= (\sin x - \ln tg(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) + K_1)\sin x + (-\cos x + K_2)\cos x \end{aligned}}$$

Системы дифференциальных уравнений (с постоянными коэффициентами)

Если одно дифференциальное уравнение описывает изменение во времени состояния одного объекта, то система подобных уравнений описывает динамику состояния системы взаимосвязанных объектов.

Однородные системы

Однородной называется система следующего вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n \end{cases} \qquad (0.1)$$

В **матричной форме** систему можно переписать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dy_1}{dt} \\ \ldots \\ \dfrac{dy_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ldots a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y}$$

Будем искать решение в виде (Эйлер): $\boxed{\vec{y} = \vec{b}\,e^{\lambda t}}$ где $\vec{b}$ - вектор постоянных множителей. Подставляя это решение в (0.1), получаем:

$$\vec{b}\lambda\, e^{\lambda t} = A\vec{b}e^{\lambda t} \Rightarrow (A - \lambda E)\vec{b}e^{\lambda t} = 0 \;\; (e^{\lambda t} \neq 0) \quad \boxed{(A - \lambda E)\vec{b} = 0}$$

То есть мы получаем так называемую задачу о ***собственных числах и собственных векторах матрицы*** A.

Цель—определить такие λ и $\boldsymbol{b}$, при которых задача имеет нетривиальное решение ($\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$).

Решая *матричное* характеристическое уравнение: $\boxed{\det(A-\lambda E)=0}$ получаем *собственные* числа λ_i.

Далее можно обычным способом находить для каждого найденного собственного числа соответствующий ему собственный вектор $\vec{b}_i, (i=1,2,...,n)$.

Тогда общее решение системы ДУ имеет вид

$$\vec{y}(t)=C_1\vec{b_1}e^{\lambda_1 t}+C_2\vec{b_2}e^{\lambda_2 t}+....+C_n\vec{b_n}e^{\lambda_n t}$$

Пример 1. Решить систему
$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+2y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=2x+y\end{cases}$$

Решим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (1-\lambda)^2-4=0 \Rightarrow \lambda^2-2\lambda-3=0 \Rightarrow \lambda_1=3,\quad \lambda_2=-1$$

Вычислим теперь для найденных собственных чисел соответствующие им собственные векторы из матричных уравнений $(A-\lambda_i E)\vec{b}_i = 0$

$$(A-\lambda_1 E)\vec{b}_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-3 & 2 \\ 2 & 1-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2g_1 + 2g_2 = 0 \\ +2g_1 - 2g_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \qquad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Аналогично

$$(A-\lambda_2 E)\vec{b}_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+1 & 2 \\ 2 & 1+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} +2f_1 + 2f_2 = 0 \\ +2f_1 + 2f_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Тогда общее решение есть

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \vec{b}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \overrightarrow{b_2} e^{\lambda_2 t} = \overline{C}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + \overline{C}_2 \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

или в координатной форме

$$\boxed{x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}}, \quad \boxed{y(t) = c_1 e^{3t} - c_2 e^{-t}}$$

Модель гонки вооружений Ричардсона

Модель Ричардсона была первым опытом применения динамического моделирования в области международных отношений. Он применил ее для описания гонки вооружений между Австро-Венгрией и Германией с одной стороны, и Россией и Францией – с другой, в период, 1909-1913 гг.

Основными переменными в модели могут быть собственно количества вооружений или военные бюджеты (военные расходы) соперничающих сторон.

В основу модели были положены следующие соображения:

a) Скорость роста военных расходов пропорциональна уровню военных расходов противника;
b) Экономические ограничения приводят к уменьшению скорости роста военных расходов пропорционально их размерам;
c) Государство стремится увеличить свой военный бюджет, даже в условиях отсутствия внешней угрозы.

Обозначим военные расходы соперничающих государств через ***x*** и ***y,*** а скорости их роста: $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$.

Модель Ричардсона задается системой:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1 y - b_1 x + c_1 \\ \frac{dy}{dt} = a_2 x - b_2 y + c_2 \end{cases}$$

Коэффициенты *a>0* обычно называются коэффициентами обороны, b>0 – усталости, а c – коэффициентами доброй воли (если c<0) или претензий (c>0).

Упр*

Это неоднородная система ДУ.

Модель ведения боевых действий Ланчестера

Пусть силы сторон X и Y вовлечены в сражение. И пусть x(t) и y(t) описывают размер этих сил в момент времени t. (Это может быть число танков, если речь идет о танковых сражениях; число самолетов в авиационных сражениях; число солдат и т.д и т.п.). Время может изменяться в часах, днях, месяцах и т.п. В силу того, что непрерывные модели обычно исследуются легче, чем дискретные, последние часто заменяются на непрерывные. Так поступим и мы. Будем считать, что время непрерывно, а x(t) и y(t) есть непрерывные и, более того, дифференцируемые функции времени.

Как выглядят функции x(t) и y(t) мы пока не знаем, но нам могут быть известны такие параметры как *темпы (или скорости) операционных потерь (ТОП)*, связанные болезнями, дезертирством и пр.; *темпы боевых потерь (ТБП), темпы поставок (или восстановления) (ТП).*

Основная идея модели Ланчестера состоит в том, что ***скорости изменения объемов*** вооруженных сил должны подчиняться следующему соотношению:

$$\frac{dx}{dt} \text{ (or } \frac{dy}{dt}) = -(ТОП + ТБП) + ТП \qquad (*)$$

Конкретизация модели (*) может происходить в рамках различных предположений. Рассмотрим один из возможных вариантов.

Сражение с применением обычных вооружений

В данной модели предполагается, что **операционные потери** каждой из сторон **пропорциональны размеру ее собственных вооруженных сил, а боевые потери пропорциональны размеру вооруженных сил противника.**

Это приводит к следующей формальной модели:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -ax - by + P(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = -cx - dy + Q(t) \end{cases}$$

где P(t) и Q(t) – функции поставок.

Пусть две войсковые группы сражаются в изоляции. Будем считать, что у них нет операционных потерь и нет поставок и подкреплений. Тогда модель упрощается:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -by \\ \dfrac{dy}{dt} = -cx \end{cases}$$

где by, cx – темпы боевых потерь, зависящие от количества вооруженных сил противника, а b и c - соответствующие коэффициенты боевых потерь.

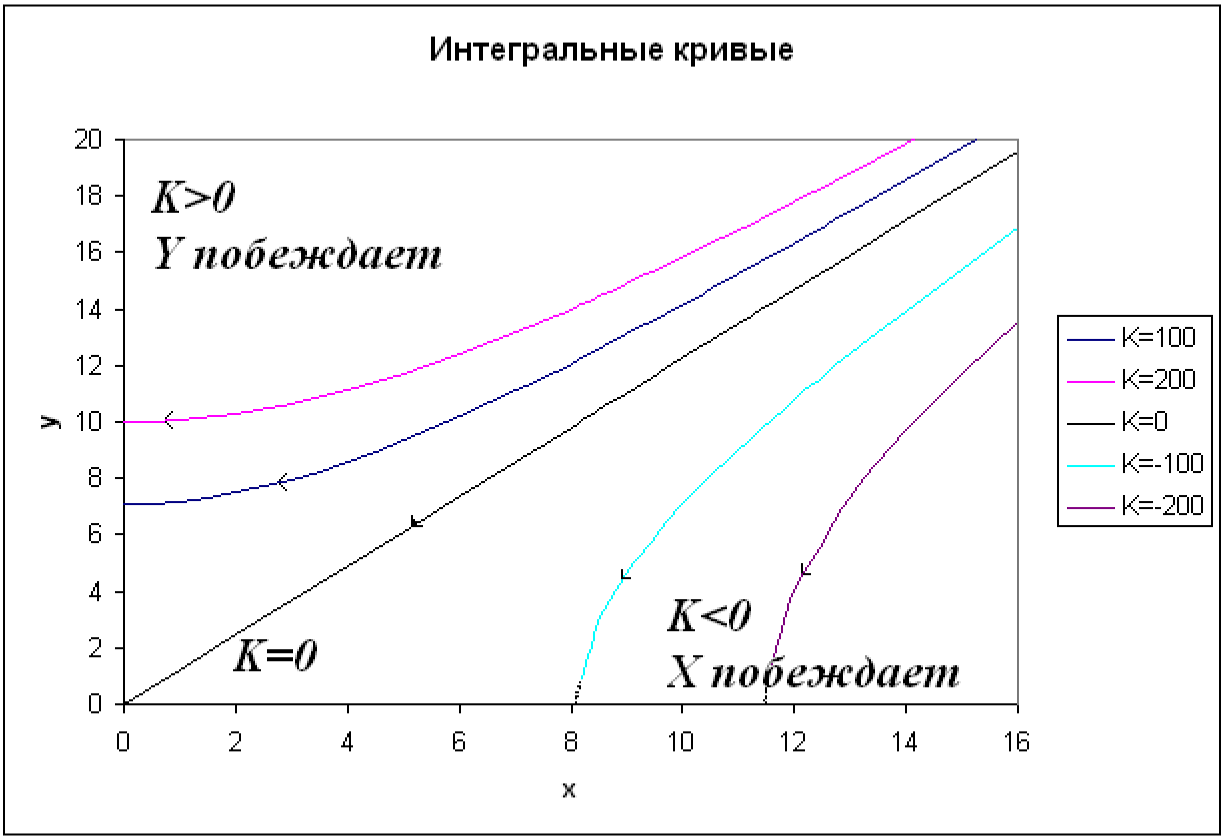
Разделив одно уравнение на другое, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx}{by} \Rightarrow by \cdot dy = cx \cdot dx$$

Проинтегрировав его, получаем:

$$\frac{by^2}{2} = \frac{cx^2}{2} + C \Rightarrow \boxed{by^2 - cx^2 = K, \quad (K = 2C)}$$

Это — уравнение гиперболы. Построим картину соответствующих интегральных кривых. Поскольку отрицательные x(t) и y(t) не имеют физического смысла, будем использовать только первую четверть координатной плоскости.



При $\boxed{\text{K=0}}$ имеем $\boxed{y = \sqrt{\frac{c}{b}}x}$. Это уравнение прямой линии, то есть в случае ведения боевых действий, когда боевые силы сторон пропорционально сокращаются и ***одновременно*** иссякают (финальное состояние (0,0)).

При $\boxed{\text{K>0}}$ первыми иссякают силы X, и Y побеждает. Финальное состояние можно легко установить из уравнения. Положим в нем x=0, и получим что $by^2 = K \Rightarrow y_{fin} = \sqrt{K/b}$.

Аналогичным образом при $\boxed{K<0}$ первыми иссякают силы Y, сторона X побеждает, а финальное соотношение сил оказывается таким: $\left(\sqrt{\dfrac{-K}{c}};0\right)$. Узнать знак константы K легко по начальным условиям. Пусть $x_0 = x(0), \quad y_0 = y(0)$, тогда

$$K = by_0^2 - cx_0^2$$

Условие выигрыша сражения для X (условие K<0) - $\dfrac{y_0}{x_0} < \sqrt{\dfrac{c}{b}}$.

Условие выигрыша сражения для Y (условие K>0) - $\dfrac{y_0}{x_0} > \sqrt{\dfrac{c}{b}}$.

Понятие устойчивости решений ДУ

Рассмотрим для простоты неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' + ay = b, \quad (b = const) \qquad (1)$$

с начальным условием $y(0) = y_0$.

Обозначим $z = y - \frac{b}{a}$ ($a \neq 0$). Теперь уравнение (1) примет вид

$$z' + a\left(z + \frac{b}{a}\right) = b \quad \text{или} \quad z' + az = 0.$$

Разделяя переменные, находим, что решением уравнения является функция $\boxed{z = z_0 e^{-ax}}$, где $z_0 = y_0 - \frac{b}{a}$.

Возвращаясь к изначальной неизвестной, получаем

$$\boxed{y(x) = \left(y_0 - \frac{b}{a}\right)e^{-ax} + \frac{b}{a}} \qquad (a \neq 0). \qquad (2)$$

Если $a=0$, то его решением при заданном начальном условии будет функция $\boxed{y(x) = bx + y_0}$.

Заметим, что решение (2) состоит из двух частей:

1) $y_h = Ae^{-ax}$ - решения однородного ДУ $y' + ay = 0$ и

2) $y_0(x) = b / a$ - решения, которое называют **равновесным** и которое получается, если в уравнении (1) положить $y' = 0$.

Такое представление позволяет рассматривать решение (2) уравнения (1) как сумму равновесного или фиксированного значения y_e и отклонения или девиации y_h траектории $y(x)$ от равновесного значения.

Это отклонение возрастает экспоненциально с ростом X при $a < 0$ и стремится к нулю при $a > 0$.

В первом случае ($a < 0$) решение называется **неустойчивым**, а во втором – **устойчивым** (асимптотически устойчивым).

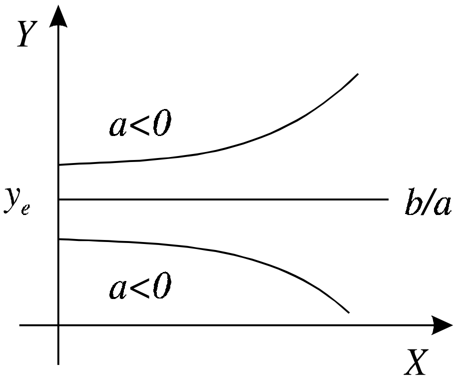


Рис.1.
Случай неустойчивого решения.

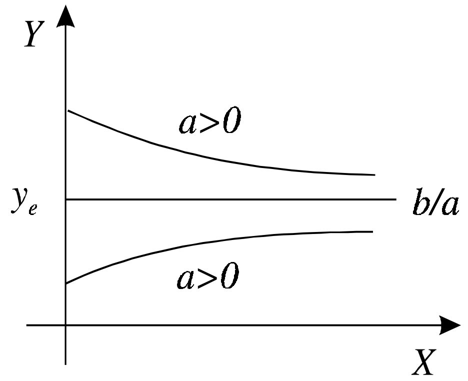


Рис.2.
Устойчивое решение.

Как показано на рисунках, отклонение $y_h = (y_0 - y_e)e^{-ax}$ от уровня равновесия $\frac{b}{a}$ **уменьшается** с ростом x при $a > 0$ и **увеличивается** с ростом x при $a < 0$.

Пример. В качестве примера рассмотрим динамическую модель Вальраса устойчивости рынка.

Имеется несколько продавцов и несколько покупателей некоторого товара.

Некий посредник объявляет цену p на товар, после чего каждый продавец сообщает, сколько товара он может продать при такой цене.

Суммарное количество товара, выставляемое на продажу при данной цене, называется **предложением** и будет обозначаться $S(p)$.

Также каждый покупатель сообщает, сколько товара он собирается купить при данной цене. Сумма потребностей покупателей в дальнейшем будет называться **спросом** и обозначаться $D(p)$.

Введем понятие **избыточного спроса** $E(p)$ как разности между спросом и предложением: $E(p) = D(p) - S(p)$.

Если $E(p) \geq 0$, то цена растет до тех пор, пока не будет достигнуто равновесие, которое определяется равенством спроса и предложения, то есть равенством $D(p) = S(p)$ или $E(p) = 0$.

Если $E(p) \leq 0$, то есть имеет место **избыточное предложение**, происходит снижение цены, пока не наступит равновесие.

Здесь уместно сделать самое простое возможное предположение, заключающееся в том, что **скорость изменения цены во времени пропорциональна избыточному спросу**: малый избыточный спрос вызовет медленное увеличение цены товара, большой избыточный спрос – быстрое увеличение цены, малое избыточное предложение – медленное понижение цены и т. д.

Отсюда следует уравнение $\boxed{\dfrac{dp}{dt} = kE(p)}$.

Здесь k - положительная константа, отражающая скорость процесса.

Пусть спрос и предложение являются **линейными** функциями цены: $\boxed{D(p) = \alpha + \beta p}$ и $\boxed{S(p) = \gamma + \delta p.}$

Тогда, зафиксировав некое начальное условие $p(0) = p_0$, будем иметь уравнение

$$p'(t) = k(\alpha + \beta p - \gamma - \delta p) = k(\beta - \delta)p + k(\alpha - \gamma).$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами, которое, как было показано выше, имеет решение

$$\boxed{p(t) = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \delta} + \left(p_0 - \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \delta}\right)e^{k(\beta - \delta)t}},$$

Это решение **устойчиво**, если $\beta - \delta < 0$
и **неустойчиво** при $\beta - \delta > 0$.

Но β - **тангенс** угла наклона кривой спроса,а
δ - **тангенс** угла наклона кривой предложения,

Если выполняется условие $\boxed{\beta - \delta < 0}$ (которое верно при убывании спроса и возрастании предложения с ростом цены), то **рынок устойчив**, то есть избыточный спрос снижается и окончательно устраняется возрастающей ценой.

Если $\boxed{\beta - \delta > 0}$, рынок неустойчив: будет иметь место непрерывная и **неограниченная инфляция**.

ДОПОЛНЕНИЕ

(к методу Лагранжа вариации произвольной постоянной)

Рассмотрим **линейные дифференциальные уравнения первого порядка с переменными коэффициентами**.

Выпишем такое уравнение в общем виде:

$$y' + a(x)y = b(x). \tag{9}$$

Здесь $a(x)$ - некоторая функция аргумента x. Как мы это делали раньше, вначале будем искать решение однородного уравнения, положив функцию $b(x)$ в правой части (9) равной нулю. Представив уравнение $y' + a(x)y = 0$ в виде

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx,$$

после интегрирования получаем

$$\ln y + C = -\int a(x)dx$$

или

$$y(x) = e^{-C}e^{-\int a(x)dx} = Ae^{-\int a(x)dx}. \tag{10}$$

Здесь A - неопределенная константа, которую можно найти из начального условия $y(0) = 0$.

Пример. Решить уравнение $y' + 2xy = 0$ при начальном условии $y(0) = 3$.

В этом случае

$$a(x) = 2x, \qquad e^{-\int a(x)dx} = e^{-\int 2xdx} = e^{-x^2}$$

и начальное условие определяет $A = 3$.

Искомое решение имеет вид $y(x) = 3e^{-x^2}$.

Перейдем к решению неоднородного линейного ДУ-1 с **переменными коэффициентами.**

Положим в формуле (10) $\boxed{A = A(x)}$, то есть будем считать множитель A некоторой функцией от x.

Этот метод называется **методом вариации произвольной постоянной**, и с его помощью мы попытаемся решить уравнение (9) при условии, что $b(x)$ есть некоторая функция, не равная тождественно нулю.

Из формулы (10) получаем:

$$y(x) = A(x)e^{-\int a(x)dx};$$

$$y'(x) = A'(x)e^{-\int a(x)dx} - A(x)e^{-\int a(x)dx}a(x).$$

После подстановки этих выражений уравнение (9) принимает вид

$$A'(x)e^{-\int a(x)dx} - A(x)e^{-\int a(x)dx}a(x) + a(x)A(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x)$$

откуда следует уравнение относительно функции $A(x)$:

$$A'(x) = b(x)e^{\int a(x)dx},$$

с решением

$$A(x) = \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx.$$

Подставив это выражение в (10), получим общее решение уравнения (9):

$$\boxed{y(x) = e^{-\int a(x)dx}\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx}. \qquad (11)$$

Пример. Решить уравнение $y' + \frac{1}{x} y = x$ при начальном условии $y(1) = 2$.

Для решения поставленной задачи применим метод Лагранжа, которым была получена формула (11).

В нашем уравнении $a(x) = \frac{1}{x}; b(x) = x$. Решение однородного уравнения $y' + \frac{1}{x} y = 0$ получается из формулы (10):

$$y(x) = Ae^{-\int a(x)dx} = Ae^{-\ln x} = \frac{A}{x}. \qquad (12)$$

Реализуем теперь метод вариации произвольной константы A, считая, что $A = A(x)$ есть некоторая функция аргумента x. Тогда $y' = \frac{xA'(x) - A(x)}{x^2}$, и подставив это выражение вместе с приведенным выше выражением для y в исходное уравнение, получим:

$$\frac{xA'(x) - A(x)}{x^2} + \frac{A(x)}{x^2} = x,$$

откуда следует, что $A'(x) = x^2$ или $A(x) = \frac{x^3}{3} + C$. Если теперь подставить это в формулу (12), то получится общее решение исходного уравнения: $y = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$.

С помощью начального условия найдем значение неопределенной константы C и выпишем решение

$$\boxed{y = \frac{x^2}{3} + \frac{5}{3x}}.$$

РЯДЫ

Понятие числового ряда и его сходимости

Пусть дана бесконечная последовательность чисел

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \ .$$

Числовым рядом называется выражение

$$\boxed{a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,} \qquad (1)$$

где числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ называются *членами ряда*, а $a_n = f(n)$ называется *общим членом* ряда.

Что есть сумма ряда ???

Отличается от суммы **конечного** числа слагаемых. *Например*, сочетательное свойство может нарушаться:

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots\dots = 0+0+0+\dots\dots = 0$$

$$1-(1-1)-(1-1)-\dots\dots\dots\dots = 1-0-0-\dots\dots\dots = 1$$

Для ***корректного*** определения суммы бесконечного ряда воспользуемся операцией предельного перехода.

Определение. Частичной n — ой суммой ряда (1) называется сумма S_n его первых n членов:

$$\boxed{S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n}.$$

Образуем теперь ***последовательность*** $S_1, S_2, \dots S_n, \dots,$ состоящую из частичных сумм ряда (1).

Определение. Если существует конечный предел S последовательности частичных сумм $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то ряд (1) называется *сходящимся*, а число S — *суммой ряда* и записывается этот факт как $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или равен бесконечности, то ряд (1) называется *расходящимся*.

Пример. 1) Исследовать на сходимость ряд

$1-1+1`-1+........$ т.е общий член есть $a_n=(-1)^n$

Решение. Так как последовательность частичных сумм имеет вид

$$S_1=1, S_2=1-1=0, S_3=1-1+1=1, ..., S_n=(-1)^{n+1}$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует $\Rightarrow$ **ряд расходится**

Пример. 2) Исследовать на сходимость (***по определению!***) ряд

$$\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}+\ldots$$

и, если ряд сходится, то найти его сумму.

Решение. Общий член ряда $a_n=\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}$

представим в виде двух слагаемых

$$\frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{a}{3n-1} + \frac{b}{3n+2}$$ и найдем числа a и b методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n(3a+3b)+2a-b}{(3n-1)(3n+2)}.$$

$$\begin{cases} 3a+3b=0, \\ 2a-b=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a, \\ 2a+a=1, \end{cases} \quad \begin{cases} b=-1/3, \\ a=1/3. \end{cases}$$

Значит, $a_n = \frac{1/3}{3n-1} - \frac{1/3}{3n+2}$, а тогда

$$\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 11} + \ldots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = (\frac{1/3}{2} - \frac{1/3}{5}) +$$

$$(\frac{1/3}{5} - \frac{1/3}{8}) + \frac{1/3}{8} + \frac{1/3}{11}) + \ldots + (\frac{1/3}{3n-1} - \frac{1/3}{3n+2}).$$

В этой сумме все слагаемые, кроме первого и последнего, взаимно уничтожаются.

$$\boxed{S_n = \frac{1}{6} - \frac{1/3}{3n+2}} .$$

Находим теперь

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{6} - \frac{1/3}{3n+2}) = \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n+2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\cdot 0 = \frac{1}{6}.$$

Итак, данный ряд сходится и его сумма равна $\boxed{S = \frac{1}{6}}.$

Ряд $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, a \neq 0,$ (2)

составленный из членов геометрической прогрессии со знаменателем q, называется *геометрическим рядом*.

Если $|q| < 1$, то ряд (2) сходится и его сумма равна

$S = \dfrac{a}{1-q}$; если $|q| \geq 1$, то ряд (2) расходится.

Д-во:

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1-q} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a - aq^n}{1-q} = (q < 1) = \frac{a}{1-q}$$

Ряд $\boxed{1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}}$, называемый *гармоническим рядом*, расходится. $\left(\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)\right)$

Док-во. От противного. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0.$$

Но с другой стороны

$(S_{2n} - S_n) = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots.. + \dfrac{1}{2n} > n \cdot \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}.$ Тогда равенство $\lim\limits_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) = 0$ невозможно. Противоречие

Обобщенный гармонический ряд $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}}$ сходится, если $\boxed{p > 1}$ и расходится, если $\boxed{p \leq 1}$. УПР* Доказать

Простейшие свойства сходящихся рядов.

Определение 1. Если в ряде (1) отбросить первые n членов, то получится ряд r_n, называемый *остатком ряда* (1) после n-го члена:

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \qquad (3)$$

Теорема 1. Если ряд (1) сходится, то сходится и любой его остаток и, наоборот, если остаток (3) сходится, то сходится и ряд (1).

Определение 2. Произведением ряда (1) на постоянное число c называют ряд $ca_1 + \ldots + ca_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ (4)

Теорема 2. Если ряд (1) сходится и его сумма равна S, то и ряд (4) сходится и его сумма равна cS.

Определение 3. Суммой (разностью) двух рядов

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

называется ряд

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots + (a_n \pm b_n) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n).$$

Теорема 3. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и имеют суммы S_1 и S_2, соответственно, то их сумма и разность сходятся и имеют суммы $S_1 \pm S_2$.

Как вычислить сумму ряда???
Ряд сходиться или расходится??

Необходимый признак сходимости ряда и его следствие.

Ниже приведены несколько утверждений, позволяющих делать (в некоторых случаях) заключение о сходимости или расходимости рядов.

Теорема 4 (необходимый признак **сходимости**). Если ряд (1) сходится, то общий член этого ряда стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Д-во: $a_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Внимание! **Данный признак не является достаточным!**

Пример: Гармонический ряд $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

расходится, но $a_n = \frac{1}{n} \to 0$

Следствие (достаточный признак **расходимости** ряда). Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд (1) расходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n+2}$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{2-1/n}{3+2/n} = \frac{2}{3} \neq 0.$$

Значит, ***ряд расходится.***

Достаточные признаки сходимости рядов с **неотрицательными** *членами*

Теорема 4 (первый признак сравнения).
Пусть даны два ряда с неотрицательными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad \text{(A)}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \qquad \text{(B)}$$

Если для всех n, или начиная с некоторого номера $n = N$, выполняется неравенство $a_n \le b_n$, то из сходимости ряда (B) следует сходимость ряда (A), а из расходимости ряда (A) следует расходимость ряда (B).

Иначе говоря, если «больший» ряд сходится, то и «меньший» ряд сходится; если «меньший» ряд расходится, то и «больший» ряд расходится.

Пример. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{1+2^{2n}}$ на сходимость.

Сравним данный ряд с геометрическим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$, который сходится как геометрический ряд со знаменателем $q = \dfrac{1}{2} < 1$. Имеем $\dfrac{2^n}{1+2^{2n}} < \dfrac{2^n}{2^{2n}} = \dfrac{1}{2^n}$ для всех n, значит, на основании теоремы ряд сходится.

Пример $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$ *Решение*. Сравним данный ряд с ***расходящимся*** гармоническим рядом $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}}$.

Поскольку $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$ и гармонический ряд расходится, то на основании теоремы заключаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ расходится.

Теорема 5. (второй признак сравнения).

Если существует конечный, отличный от нуля, предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L, \quad L \neq 0, \quad L \neq \infty$, то ряды (A) и (B) сходятся или расходятся **одновременно.**

Пример. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2-3n+5}$.

Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}$, который расходится. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)n}{(n^2-3n+5)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-n}{n^2-3n+5} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2(2-\frac{1}{n})}{n^2(1-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{1-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}} = 2 \neq 0.$$

Поскольку $2 \neq 0$, то на основании теоремы заключаем, что исследуемый ряд **расходится.**

Теорема 6 (признак Даламбера). Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, то при $\boxed{l < 1}$ ряд сходится, при $\boxed{l > 1}$ ряд расходится, при $l = 1$ вопрос остается открытым — нужно применять другие признаки.

Признак Даламбера удобно применять в тех случаях, когда в записи общего члена ряда участвуют факториалы (!) и степени.

Пример. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$.

Решение. Так как $a_n = \frac{n!}{5^n}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{5^{n+1}}$, то

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\,5^n}{5^{n+1}\,n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+1)\,5^n}{5^n \cdot 5 \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{5} = \infty.$$

Так как $\infty > 1$, то исследуемый ряд **расходится**.

Теорема 7 (признак Коши). Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, существует предел $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, то при $l < 1$ ряд сходится, при $l > 1$ ряд расходится, а при $l = 1$ вопрос остается открытым.

Пример. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1$$

На основании признака Коши заключаем, что исследуемый **ряд сходится**.

Теорема 8 (интегральный признак Маклорена-Коши).

Если члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n,\quad a_n > 0$, не возрастают $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$ и существует функция $f(x)$, которая определена на промежутке $[1;+\infty)$, непрерывна, не возрастает и $a_n = f(n),\quad n = 1,2,\ldots$, то для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ необходимо и достаточно, чтобы **несобственный** интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ сходился.

Пример. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

Заменяя в формуле общего члена $a_n = \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ число n на переменную x, получаем функцию $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$. Вычисляем несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{\infty} f(x)dx = \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}dx = \lim_{B\to+\infty} \int\limits_1^{B} \frac{d(\ln(x+1))}{\ln(x+1)} =$$

$$= \lim_{B\to+\infty} \ln(\ln(x+1))\Big|_1^B = \lim_{B\to+\infty} (\ln(\ln B) - \ln(\ln 2)) = \infty.$$

Значит, интеграл расходится, следовательно, исходный числовой ряд также **расходится**.

Пример.* Исследовать ряд $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}}$ (обобщ.гармоничес.)

Заменяя в формуле общего члена $a_n = \frac{1}{n^p}$ число n на переменную x, получаем функцию $\boxed{f(x) = \frac{1}{x^p}}$.

Вычисляем несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{B\to+\infty} \frac{x^{-p+1}}{(-p+1)} \Big|_1^B ==$$

$$= \frac{1}{1-p} \lim_{B\to+\infty} (x^{-p+1} - 1) =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{1-p} & \text{since} \quad \lim_{B\to+\infty} x^{-p+1} = 0(\textit{если} \quad \mathrm{p} > 1) \\ \infty & \text{тта как} \quad \lim_{B\to+\infty} x^{-p+1} = \infty(\textit{если} \quad \mathrm{p} < 1) \end{cases}$$

При $\boxed{p = 1}$ имеем $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{B\to+\infty} \ln x \Big|_1^B = \infty$

Значит, обобщенный гармонический ряд $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}}$ расходится при $p \le 1$ и сходится при $p > 1$

Замечание Удобен как «эталон» при сравнении рядов.

Например, исследуем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$. Общий член ряда удовлетворяет неравенству $\frac{n}{n^3+1} = \frac{1}{n^2 + \frac{1}{n}} < \frac{1}{n^2}$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится (p>1). По признаку сравнений «меньший» ряд тоже сходится

УПР*

Признак Раабе Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0,$

существует предел $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = l$, то при

$\boxed{l \; > \; 1}$ ряд сходится, при $\boxed{l > 1}$ ряд расходится, при $l = 1$ вопрос остается открытым — нужно применять другие признаки.

Пример*. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$.

РЯДЫ (Примеры и решения)

1. Пользуясь необходимым признаком сходимости ряда, установить, сходится или расходится ряд

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{5n+2}};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{5n+2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(2-\frac{1}{n}\right)}{n\left(5+\frac{2}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{5+\frac{2}{n}} = \frac{2}{5}.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{5} \neq 0$, то по следствию из необходимого признака сходимости, данный ряд расходится.

2. Пользуясь признаками сравнения, исследовать на сходимость

1) $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{1+25^n}}$; Имеем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{1+25^n} = \frac{5}{26} + \frac{25}{626} + \dots$.

Заметим, что $\frac{5^n}{1+25^n} < \frac{5^n}{25^n} = \left(\frac{1}{5}\right)^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

Поскольку больший ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$ есть сходящийся геометрический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n \left(|q| < 1\right)$, то по первому признаку сравнения меньший ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{1+25^n}$ сходится.

2) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n^3+n-1}}$

Сравним исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n^3+n-1}$

со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

(ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится, если $p > 1$ расходится, если $p \le 1$).

Находим

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n^3+n-1} \cdot \frac{n^2}{1} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2}{2n^2+n-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^3\left(2+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{2}.$$

Поскольку $L \neq 0,\ L \neq \infty$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, значит, исходный ряд также сходится.

3. Пользуясь признаком Даламбера, исследовать на сходимость $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n3^n}}$;

Здесь $a_n = \dfrac{4^n}{n3^n}$, $a_{n+1} = \dfrac{4^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}$. Находим

$$l = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}\cdot n\cdot 3^n}{(n+1)3^{n+1}4^n} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n 4n\cdot 3^n}{(n+1)3^n 3\cdot 4^n} = \frac{4}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \qquad .$$

$$= \frac{4}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{4}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{4}{3}\cdot 1 = \frac{4}{3}.$$

4. Пользуясь признаком Коши, исследовать на сходимость $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}$;

Здесь $a_n = \dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$. Для применения признака Коши сходимости числового ряда найдем

$$l = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{2}e.$$

Поскольку $e \approx 2{,}72$, то $l > 1$, значит, по признаку Коши ряд расходится.

5. Пользуясь интегральным признаком,

исследовать на сходимость $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n}{n^4+4}}$.

Исследуем на сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{2xdx}{x^4+4} =$$

$$= \lim_{B\to+\infty} \int\limits_{1}^{B} \frac{d(x)^2}{(x^2)^2+2^2} = \lim_{B\to+\infty} (arctgx^2)\Bigg|_{1}^{B} =$$

$$\lim_{B\to+\infty} (arctgB - arctg1) =$$

$$= \lim_{B\to+\infty} arctgB - \lim_{B\to+\infty} arctg1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Значит, несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{2xdx}{x^4+4}$ сходится, поэтому сходится и исходный числовой ряд.

ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

Определение1. Ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1)

называется *знакопеременным*, если среди его членов есть как положительные, так и отрицательные действительные числа.

Сходимость и сумма ряда (1) определяются как и ранее.

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда: $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (2)

Определение 2. Если сходится ряд (2), то ряд (1) называется ***абсолютно сходящимся.***
Если ряд (1) сходится, а (2) – расходится, то ряд (1) называется ***условно сходящимся***.

Замечание. Для рядов с произвольным распределением знаков их членов, мы приведем только один важный признак ***общий признак*** сходимости.

Теорема 1 (Коши)(достаточный признак). Если знакопеременный ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, сходится, то сходится и данный ряд.

Или короче: Если знакопеременный ряд сходится абсолютно, то он сходится.

$\boxed{\text{Док-во.}}$ Пусть $\overline{a_n} = |a_n| + a_n \geq 0$ и $\overline{b_n} = |a_n| - a_n \geq 0$

Ряды $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n}}$ и $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_n}}$ — знакоположительны и так как $\overline{a_n} < 2a_n$, $\overline{b_n} < 2a_n$**(!)**, то по признаку сравнения они сходятся. Но $a_n = \dfrac{\overline{a_n} - \overline{b_n}}{2}$ и по свойству суммы сходящихся рядов получаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\boxed{\text{сходиться}}$

$\boxed{\textit{Пример}}$. Исследовать $\dfrac{\cos\alpha}{1^3} + \dfrac{\cos 2\alpha}{2^3} + \ldots \dfrac{\cos n\alpha}{n^3} + \ldots$

$\boxed{\textit{Решение}}$. Данный ряд является знакопеременным. Составим ряд из абсолютных величин данного ряда:

$$\left|\frac{\cos\alpha}{1^3}\right| + \left|\frac{\cos 2\alpha}{2^3}\right| \ldots + \left|\frac{\cos n\alpha}{n^3}\right| + \ldots \quad .$$

Члены этого ряда не превосходят соответствующих членов ряда $\dfrac{1}{1^3} + \dfrac{1}{2^3} + \ldots + \dfrac{1}{n^3} + \ldots$, который сходится, как обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$, где $p > 1$.

Значит, по теореме Коши, исходный ряд $\boxed{\text{сходится}}$.

$\boxed{\textit{Контрпример}}$(***достаточное условие Коши не является необходимым!***) Исследовать ряд

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots$$

$\boxed{\textit{Решение}}$. Данный ряд $\boxed{\text{сходится}}$ (см. ниже признак Лейбница), однако ряд из абсолютных величин (это — гармонический ряд !) является $\boxed{\text{расходящимся}}$

Замечание. Разграничение на абсолютную и условную сходимости рядов весьма существенно. Оказывается, что некоторые свойства **конечных сумм** переносятся **только на абсолютно** сходящиеся ряды; условно сходящиеся ряды такими свойствами не обладают.

Некоторые свойства абсолютно сходящихся рядов:

1) Любая перестановка членов абсолютно сходящегося ряда приводит к абсолютно сходящемуся ряду с той же суммой; перестановкой же членов **условно** сходящегося ряда можно получить **любую** наперед заданную сумму (теорема Римана).

Пример. Рассмотрим условно сходящийся ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots \quad (A)$$

Переставим его члены так, чтобы после каждого положительного стояли два отрицательных:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\ldots\ldots$$

Сложим каждый положительный член с **одним** отрицательным: $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\ldots+\ldots$

Получили в итоге ряд (A), все члены которого умножены на число $\frac{1}{2}$. По свойству сходящихся рядов (умножение на постоянную!) полученный ряд также сходится и его сумма равна $\frac{1}{2}\cdot S$. ***Таким образом, перестановка членов ряда уменьшила сумму условно сходящегося ряда в два раза.***

2) Рассмотрим два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. *Произведением* рядов называется ряд из всевозможных попарных произведений, взятых в некотором порядке $\sum_{k=1}^{\infty} a_{p_k} b_{q_k}$. Если ряд из произведений сходится, то его сумма не зависит от порядка слагаемых. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся абсолютно, то их произведение также сходится абсолютно к сумме, равной произведению сумм указанных рядов $S = S_1 \cdot S_2$

Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

Частным случаем знакопеременных рядов являются **знакочередующиеся** ряды, члены которых поочередно имеют то положительный, то отрицательный знаки.

Определение 3. Если числовой ряд имеет вид

$$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots (-1)^{n-1} + \ldots, \ a_n > 0 \qquad (3)$$

или

$$-a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n + \ldots, \ \ a_n > 0, \qquad \mathbf{(3')}$$

то он называется *знакочередующимся*.

Укажем простой достаточный признак сходимости ***знакочередующегося*** ряда.

Теорема (признак Лейбница). Если для знакочередующегося ряда

$$a_1 - a_2 + a_3 - ...(-1)^{n-1} + \dots,\ a_n > 0$$

выполняются условия:

1) $\boxed{a_1 > a_2 > ... > a_n > ...;}$ 2) $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,}$

то ряд сходится и его сумма не превосходит первого члена ряда $\boxed{0 < S < a_1}$, а остаток ряда r_n не превышает по абсолютной величине первого отбрасываемого члена: $|r_n| < a_{n+1}$.

(Ряды, удовлетворяющие условиям теоремы, иногда называют *рядами Лейбница)*

Док-во. Запишем частичную сумму S_{2m} четного числа членов ряда в виде

$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ... + (a_{2m-1} - a_{2m})$ (B)

Так как $(a_1 - a_2) > 0, ..., (a_{2m-1} - a_{2m}) > 0$, то $\boxed{S_{2m} > 0}$ для любого m. Кроме того, эта частичная сумма монотонно возрастает с ростом m. С другой стороны частичную сумму (B) можно переписать в виде

$$S_{2m} = -a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - ... - a_{2m})$$

Очевидно, сумма $\boxed{S_{2m} < a_1}$ и убывает с ростом m.

Объединяя два неравенства, получим $\boxed{0 < S_{2m} < a_1}$

Итак, имеем последовательность, которая монотонно возрастает и ограничена сверху $\Rightarrow$ она сходится

$$\lim S_{2m} = S.$$

Так как $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$, то для частичных сумм с нечетным числом членов ряда имеем

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} \overset{2)}{=} S + 0 = S.$$

Замечание. Для ряда вида

$$-a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n + \ldots, \qquad a_n > 0,$$

оценка суммы ряда имеет вид $\boxed{-a_1 < S < 0}$.

(Это легко видеть, если данный ряд умножить на (-1)).
Поэтому иногда эту оценку записывают в общем виде как $\boxed{|S| < a_1}$

Итак, ряд сходится и его сумма удовлетворяет неравенству $|S| < a_1$.

Оценим теперь остаток ряда, который запишем в виде

$$r_n = (-1)^n (a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots\ldots)$$

Это опять знакочередующийся ряд. Значит для него верны доказанные выше оценки.

Значит $|r_n| < a_{n+1}$. Терема доказана.

Пример Исследовать ряд $\boxed{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots}$

Решение. Данный ряд – знакочередующийся. Члены его убывают по абсолютной величине : $1 > \frac{1}{2} > \ldots > \frac{1}{n} > \ldots.$

и предел общего члена $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Следовательно, этот ряд сходится и его сумма $S \le 1.$

Однако ряд, составленный из абсолютных величин

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - + \frac{1}{4} + \ldots \quad \text{(гармонический ряд)}$$

является **расходящимся, т.е. исходный ряд является условно (неабсолютно) сходящимся.**

Степенные ряды

Для математического анализа в первую очередь нужны функциональные ряды, т.е. ряды, членами которых являются функции. Наиболее важным для приложений является специальный класс функциональных рядов — ***степенные ряды.***

Понятие функционального ряда и его области сходимости.

Определение 4 Ряд вида

$$f_1(x) + f_2(x) + f_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad \textbf{(4)}$$

где $f_n(x)$, $n = 1,2,\dots,n$, функции, определенные на множестве X, называется *функциональным рядом*.

Сумма $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$ называется n*–частичной суммой* ряда, а ряд

$$r_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots$$

называется остатком ряда (4).

При каждом конкретном значении $x_0 \in X$ функциональный ряд (4) превращается в обычный числовой ряд

$$f_1(x_0) + f_2(x_0) + f_n(x_0) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0),$$

который может оказаться как сходящимся, так и расходящимся.

Определение 5. Совокупность D всех значений $x \in X$, при которых функциональный ряд (4) сходится, называется *областью сходимости* этого ряда, а функция $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x),\ x \in D$ называется *суммой* ряда

Можно показать, что для сходящегося ряда справедливо равенство
$S(x) = S_n(x) + r_n(x)$, причем $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0,\ x \in X$.

Определение. Функциональный ряд (4) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$.

Степенные ряды. Теорема Абеля.

Определение. Ряд вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (5)$$

или в более общей форме

$$a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad (5a)$$

называется *степенным рядом.*

С помощью замены $y = x - x_0$ исследование сходимости ряда (5а) можно свести к исследованию ряда (5).

Ясно, что при $x = 0$ $(x = x_0)$ *степенной ряд сходится.*

При изучении области сходимости степенных рядов важную роль играет следующая теорема.

Теорема (Абеля). 1) Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ **сходится** при $x = x_0$, то он **сходится** причем абсолютно для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_0|$.

2) Если же ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ **расходится** при $x = x_1$, то он **расходится** при всех x, удовлетворяющих условию $|x| > |x_1|$.

Док-во (основано на свойствах последовательностей).

1)Так как *числовой* ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0{}^n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0{}^n = 0$.Это означает, что числовая последовательность $\{a_n x_0{}^n\}$ **ограничена!** Т.е. $\exists\ \mathrm{M} > 0$, что $| a_n x^n |< M$. Тогда перепишем степенной ряд в виде

$$a_0 + a_1 x_0 \frac{x}{x_0} + a_2 x_0{}^2 \frac{x^2}{x_0{}^2} + \ldots + .. = \sum a_n x_0{}^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n .$$

Рассмотрим ряд из абсолютных величин

$$| a_0 | + | a_1 x_0 \frac{x}{x_0} | + | a_2 x_0{}^2 \frac{x^2}{x_0{}^2} | + \ldots + .. \le$$

$$\le M + M \left| \frac{x}{x_0} \right| + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \ldots . = M(1 + q + q^2 + \ldots)$$

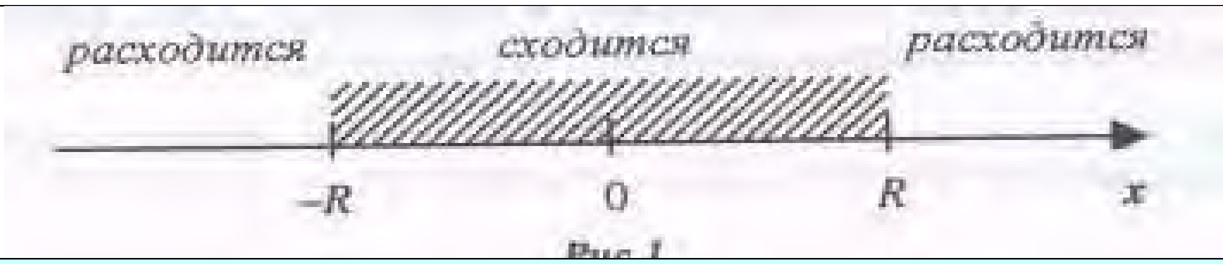
Это геометрическая прогрессия с $q=\dfrac{x}{x_0}<1$—сходится.

Из признака сравнения следует сходимость абсолютная сходимость степенного ряда.

2) 2-ая часть теоремы. От противного. Пусть степенной ряд сходится при некотором $x^*, |x^*|>x_0$. Но тогда согласно 1-ой части теоремы, степенной ряд сходится для $\forall x, |x|>x^*$. В том числе должен сходится и при $x=x_0$, так как $|x_0|<|x^*|$. Но это противоречит предположению теоремы. Теорема доказана.

Интервал, радиус и область сходимости степенного ряда.

Из теоремы Абеля следует, что для любого степенного ряда (5) найдется такое неотрицательное число R, называемое *радиусом сходимости*, что при всех x, $|x|<R$ ряд сходится, а при всех x, $|x|>R$, ряд расходится.



Интервал $(-R;R)$ называется *интервалом сходимости* степенного ряда (5).

Заметим, что для $x \in (-R, R)$ ряд сходится абсолютно, а в точках $x = \pm R$ степенной ряд может сходиться или расходиться.

Как найти радиус сходимости R?

Для этого можно воспользоваться, например, признаками Даламбера или Коши.

Теорема. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$, то

$$R = \frac{1}{l} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Док-во. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$. Применим к нему признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x| = l\cdot|x|.$$

Отсюда следует, что если $l\cdot|x|<1$, т,е. если $|x|<\dfrac{1}{l}$, то ряд сходится абсолютно. Если $l\cdot|x|>1$, то ряд **расходится**. Теорема доказана.

Аналогично может быть доказана

Теорема. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = l$, то

$$R = \frac{1}{l} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Заметим, что если $l=0$, для любого $|x|$,то $R=\infty$. Если $l=\infty$, для любого $|x|\neq 0$, то $R=0$. Если $R=0$, то ряд (5) сходится в единственной точке $x_0=0$; если $R=\infty$, то ряд сходится на всей числовой прямой.

Итак, *интервал сходимости* ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ есть $(-R;R)$.

Для нахождения *области сходимости* ряда (5) надо отдельно исследовать сходимость в точках $x=-R$ и $x=R$; в зависимости от результатов этого исследования областью сходимости ряда (5) может быть один из промежутков:

$$\boxed{[-R;R],\ (-R;R),\ [-R;R),(-R;R]}.$$

Пример. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n+1}$.

Решение. Здесь $a_n=\frac{3^n}{n+1}$, $a_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{n+2}$.

Находим $$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n(n+2)}{(n+1)3^{n+1}}\right|=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{3};$$

Значит, ряд сходится на интервале $(-1/3;1/3)$. При $x=\frac{1}{3}$

получим ряд $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(\frac{1}{3})^n}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots,$$

который ***расходится (как гармонический ряд).***

При $x=-\frac{1}{3}$ получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(-\frac{1}{3})^n}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{30}-\ldots\ .$$

Данный знакочередующийся ряд удовлетворяет признаку Лейбница и поэтому **сходится**. Следовательно, областью сходимости ряда является полуинтервал $\boxed{(-3,3)\bigcup\{x=-1/3\}=[-1/3;1/3)}$.

Свойства степенных рядов

Пусть функция $S(x)$ есть сумма степенного ряда

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n,\ x\in(-R,R).$$

Какие свойства функции $S(x)$?

Теорема. Функция $S(x)$ является дифференцируемой на интервале сходимости $x\in(-R,R)$. Причем ее производная $S'(x)$ может быть найдена почленным дифференцированием членов ряда

$$\boxed{\begin{aligned}&S'(x)=(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots)'=\\&=a_1+a_2x+\ldots+a_nx^{n-1}+\ldots\end{aligned}}$$

при этом радиус сходимости полученного ряда равен R

Кроме того, степенной ряд можно почленно интегрировать, т.е. для $\forall a,b\in(-R,R)$ справедлива формула

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_a^b S(x)=\int_a^b (a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots)dx=\\&=\int_a^b a_0dx+\int_a^b a_1xdx+\ldots+\int_a^b a_nx^ndx+\ldots\end{aligned}}$$

Замечание. **1)** При дифференцировании интервал сходимости $(-R,R)$ остается неизменным. Однако ситуация в точках $x=\pm R$ может не совпадать с ситуацией, которая имеет место в исходном степенном ряде.

2) Степенной ряд можно дифференцировать бесконечное число раз.
3) На произвольные функциональные ряды данная теорема ***без специальных предположений*** **не распространяется.**

Например, ряд

$$\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin(2^3x)}{2^2}+\frac{\sin(3^3x)}{3^2}+\ldots+\frac{\sin(n^3x)}{n^2}+\ldots$$

сходится абсолютно при любом x, так как он ***мажорируется*** (оценивается) сходящимся рядом (обобщенным гармоническим рядом)

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

Вместе с тем ряд из производных

$$\cos x+2\cos 2^3x+\ldots.+n\cos n^3x+\ldots..$$

расходится при всяком x так как его общий член $n\cos n^3x$ не стремится к 0.

Примеры

Найти радиус, интервал и область сходимости следующих степенных рядов:

а) $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(x-1)^n}$;

Выполним замену $x-1=y$ и найдем радиус сходимости R полученного степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n y^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\,y^n$.

Поскольку

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

то ряд сходится в единственной точке $y=0$, значит, по замене $x-1=0$, $x=1$. Исходный ряд сходится в единственной точке $x=1$. Это и есть область его сходимости.

б) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}}$

Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ находим радиус сходимости

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$$

Значит, ряд сходится на всей числовой прямой $(-\infty;+\infty)$. Это и есть область сходимости ряда.

в) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+n}}$;

Имеем: $a_n=\frac{1}{n^2+n}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2+(n+1)}=\frac{1}{n^2+3n+2}$.

Тогда

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2+3n+2}{n^2+n}\right|=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}=1$$

.

Значит, интервал сходимости данного ряда $(-R;\ R)$ есть интервал (– 1; 1).

Исследуем теперь сходимость ряда на концах интервала.

При $x = 1$ из исходного ряда получаем числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+n}$, здесь $a_n = \frac{1}{n^2+n}$. Сравним его со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, т.е. $b_n = \frac{1}{n^2}$ (ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$, а у нас $p = 2$).

Поскольку $a_n < b_n \left(\frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2}\right)$, то меньший ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$ сходится, поэтому $x = 1$ принадлежит области сходимости.

При $x = -1$ получаем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+n}$, который сходится абсолютно, как доказано выше. Значит, $x = -1$ принадлежит области сходимости. Область сходимости исходного ряда есть отрезок [– 1; 1].

г) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{5^n}}$. Выполним замену $y = x + 1$. Получаем степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{5^n}$. Здесь $a_n = \frac{1}{5^n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{5^{n+1}}$, значит $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{5^{n+1}}{5^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\cdot 5^n}{5^n} = 5.$

Поэтому $-5 < y < 5$, $-5 < x + 1 < 5$, $-6 < x < 4$.

Интервал сходимости исходного ряда (– 6; 4).

Исследуем сходимость на концах интервала.

При $x = -6$ получаем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 5^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = -1+1-1+1-\ldots \quad .$$

Общий член ряда не стремится к нулю, значит, он расходится и $x = -6$ не входит в область сходимости. Аналогично, при $x = 4$ получаем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty}1 = 1+1+\ldots \; .$$

Данный ряд также расходится, поэтому областью сходимости исходного ряда остается интервал (– 6; 4).

Пример 1

Дан сходящийся ряд $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}}$. Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы этого ряда:

1) суммой первых трех его членов
2) суммой первых его четырех членов

Решение.

1) Из формулы $\boxed{S=S_n+r_n}$ находим $S=S_3+r_3$. Или $S=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+r_3$. Откуда $S=\frac{1}{36}+r_3$. По теореме Лейбница $\boxed{|r_n|<a_{n+1}}$. Значит $|r_3|<a_4$ или $|r_3|<\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16}$.

Так как $r_3=-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-.....+$, то $\boxed{r_3<0}$

(см. т. Лейбница) Для ряда вида
$-a_1+a_2-a_3+...+(-1)^n a_n+...,\quad a_n>0$
оценка суммы ряда имеет вид $\boxed{-a_1<S<0}$.

Тогда $-\frac{1}{16}<r_3<0$ или сумма $\boxed{S\approx\frac{1}{36}}$ $\boxed{\text{с избытком.}}$

2) Аналогично $S=S_4+r_4$. Или $S=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+r_4$.

Откуда $S=\frac{115}{144}+r_4$. Далее $|r_4|<a_5$ или $|r_4|<\frac{1}{5^2}=0{,}04$.

Так как $r_4=+\frac{1}{5^2}-.....+$, то $\boxed{r_4>0}$. Значит, сумма ряда

$\boxed{S\approx\frac{115}{144}}$ $\boxed{\text{с недостатком}}$

Пример 2

Проверить, что ряд $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}}$ сходится.

Сколько нужно взять членов ряда, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,01 **?**

Решение.

1) Ряд сходится, так как все условия т. Лейбница выполнены.

2) Так как $\boxed{S = S_n + r_n}$ и верна оценка $\boxed{|r_n| < a_{n+1}}$, то требуемое n найдем из условия: $a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 0{,}01$.

Из уравнения $\frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0{,}01$ находим $n = 9999$

Итак, $\boxed{|r_{9999}| < 0{,}01}$ причем $\boxed{0 < r_{9999} < 0{,}01}$. Значит

$\boxed{S = S_{9999} + r_{9999}}$ или $\boxed{S \approx S_{9999}}$ с недостатком.

Пример 3

Сколько нужно взять членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{(2n+1)5^n}$, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,01 **?**

1) Ряд сходится по т. Лейбница 2) $a_1 = \frac{1}{3\cdot 5} = \frac{1}{15}$, $a_2 = -\frac{2}{5\cdot 5^2} = -\frac{2}{125}$, $a_3 = \frac{3}{7\cdot 5^3} = \frac{3}{875} < 0{,}01$. Значит, надо взять два члена ряда $S = S_2 + r_2$, или $\boxed{S \approx \frac{1}{15} - \frac{1}{125} = \frac{19}{375}}$, (с недостатком, так $r_2 > 0$)

Пример 4 Найти сумму ряда

$$1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+\ldots(|x|<1)$$

Применим дифференцирование степенных рядов.

Рассмотрим геометрическую прогрессию

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+\ldots=\frac{1}{1-x} \quad \text{при } \boxed{(|x|<1)}$$

Дифференцируем этот ряд

$$(1+x+x^2+x^3+\ldots+\ldots)'=(\frac{1}{1-x})'.$$

Отсюда $\boxed{1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+\ldots=\frac{1}{(1-x)^2}}$

Пример 4 Найти сумму ряда

$$x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots+\ldots(|x|<1)$$

Применим интегрирование степенных рядов.

Рассмотрим геометрическую прогрессию

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+\ldots=\frac{1}{1-x} \quad \text{при } \boxed{(|x|<1)}$$

Интегрируем этот ряд

$$\int_0^x (1+x+x^2+x^3+\ldots+\ldots)dx=\int_0^x \frac{1}{1-x}dx.$$

Отсюда

$$x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots+\ldots=-\ln(1-x),$$

Ряд сходится при $\boxed{-1\le x<1}$ **!**

Пример 5* Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k (x-2)^{2k}$$

Здесь $a_n = 0$ при $n = 2k-1$ и $a_n = \left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k$ при $n = 2k$

Находим

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[2k]{\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k}} = \lim_{k\to\infty}\sqrt{\left(\frac{2k+1}{k+1}\right)} = \sqrt{2}$$

При $x-2=\sqrt{2}$ имеем числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k 2^k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{k+\frac{1}{2}}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)^k$$

Так как

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)^k = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)^{(2k+1)\cdot\frac{k}{2k+1}} = \sqrt{e} \neq 0$$

то ряд расходится, ибо общий член ряда не стремится к нулю.

Аналогично, при $x-2=-\sqrt{2}$ ряд расходится.

Итак, $\boxed{2-\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{2}}$ — область сходимости ряда

Ряды Тейлора и Маклорена

Среди различных аналитических аппаратов исследования функций первое место по своей простоте и удобству употребления занимают степенные ряды. Идея проста: функция, которую мы хотим изучить, представляется как предел частичных сумм простейших степенных функций.

Пусть задана $f(x)$ в окрестности точки $x = x_0$.

Предположим, что $f(x)$ разлагается в ряд по степеням $(x - x_0)$: т.е. ряд имеет вид

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + .. + a_n(x - x_0)^n + ... \quad (1)$$

с радиусом сходимости R, $(|x - x_0| < R)$

Этот ряд на интервале сходимости $|x - x_0| < R$ можно дифференцировать бесконечно число раз:

$$f'(x) = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot (x - x_0) + 3 \cdot a_3 \cdot (x - x_0)^2 .. + n \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-1} ...$$

$$f''(x) = 2 \cdot 1 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3(x - x_0) + .. + n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-2} ...$$

....

$$f^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 1 \cdot a_n + (n+1) \cdot n \cdot ... \cdot 3 \cdot 2a_{n+1} \cdot (x - x_0) + ...$$

Положим в каждом равенстве $x = x_0$. Тогда последовательно получаем коэффициенты Тейлора:

$$a_0 = f(x_0) \qquad a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!},\ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \ldots \boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}},.$$

Итак, если функция $f(x)$ разлагается в ряд по степеням $(x-x_0)$, то этот ряд имеет вид

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} \qquad (2)$$

Определение. Степенной ряд вида (2) называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ в точке x_0. Если $x_0=0$, то ряд

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+..+\frac{f^{n}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (3)$$

называется рядом *Маклорена*.

Разложение в ряд Тейлора (Маклорена) было получено в предположении, что $f(x)$ разлагается в ряд.

Теперь ***откажемся*** от этого предположения. Будем считать только, что $f(x)$ имеет производные любого порядка при $x=x_0$ (бесконечно дифференцируема).

Составим ряд Тейлора $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}$ (*)

Ниоткуда не следует, вообще говоря, что этот ряд сходится для $x\neq x_0$. Более того, ряд может сходится, а его сумма вовсе не равна $f(x)$!!!

Упр.* $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$ (Ряд Маклорена $\equiv 0$!!!)

Вопросы:

1) при каких условиях этот формальный ряд (*) сходится?
2) если сходится, то будет ли его сумма $S(x)$ совпадать с функцией $f(x)$, его породившей?

Теорема. *(дост. условие разложения в ряд Тейлора).* Если функция $f(x)$ и ее производные любого порядка ограничены в окрестности точки x_0: $(|x-x_0|<R)$ ***одним и тем же числом*** M: $\boxed{\left|f^{(n)}(x)\right|\le M,}$ $\boxed{(n=0,1,2,....)}$ то ее ряд Тейлора сходится к самой $f(x)$ для любого x из этой окрестности $|x-x_0|<R$.

Если функция $f(x)$ разложима в ряд Тейлора, то это разложение единственно.

Остаточный член ряда Тейлора.

Обозначим $T_n(x)$ сумму первых членов ряда Тейлора

$$T_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Остаточным членом ряда Тейлора называют разность

$$R_n(x)=f(x)-T_n(x)$$

Таким образом, имеет место формула Тейлора

$$\boxed{f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)}$$

Важно знать, как устроен остаток $\boxed{R_n(x)\ !!!}$

Теорема. Если функция $f(x)$ имеет производную $(n+1)$-го порядка $f^{(n+1)}(x)$ в окрестности точки x_0, то остаточный член имеет вид:

$$\boxed{R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\xi)},$$

где ξ -некоторая точка, лежащая между x и x_0.

При $n=0$ из формулы Тейлора имеем

$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x-x_0)}$ -формула Лагранжа

При $n=1$ имеем

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$$

Если отбросить остаточный член, то получим

$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)^2$ - формула для вычисления приближенного значения через дифференциал

Само по себе выражение для $R_n(x)$ не дает возможности вычислять его величину, так как неизвестна точка ξ, в которой вычисляется $f^{(n+1)}(x)$.

Удобно пользоваться следующей оценкой : если производную $f^{(n+1)}(x)$ удовлетворяет условию $\boxed{\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M_{n+1},}$ для некоторого числа M_{n+1}, то

$$\boxed{|R_n(x)| \le M_{n+1} \cdot \frac{|x-x_0|^{n+1}}{n+1}}$$

Этой формулой можно пользоваться для оценки точности аппроксимации функции $f(x)$ ее многочленом Тейлора $T_n(x)$.

Разложение некоторых элементарных функций в степенные ряды

Выпишем теперь разложение в степенные ряды Маклорена (при $x_0 = 0$) некоторых элементарных функций:

1) $f(x) = e^x$

Имеем $f'(x) = e^x, \ldots\ldots, f^{(n)}(x) = e^x, \ldots\ldots\ldots$

Следовательно, при $x_0 = 0$

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots}$$

Найдем радиус сходимости этого ряда

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \quad \text{или } R = \frac{1}{l} = \infty$$

Значит, ряд в правой части сходится на всей оси $(-\infty, +\infty)$. Если взять промежуток вида $[-N, +N]$, где N-произвольно, то для $\forall x \in [-N, N]$ имеем оценку

$$|f^{(n)}(x)| \le e^N = M, \forall n = 0,1,2,3\ldots.$$

Согласно теореме (достат. условие) функция $f(x) = e^x$ разлагается в ряд Маклорена на всей оси $(-\infty, \infty)$ так как N-произвольно.

Интересно заметить, что при $x = 1$ получаем

$$\boxed{e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots}$$

2) $f(x) = \sin x$

Вычислим

$$f'(x) = \cos x = \sin(x + 1\cdot\frac{\pi}{2}),\ f''(x) = -\sin x = \sin(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}),$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}),\dots,\ f^{(n)}(x) = \sin(x + n\cdot\frac{\pi}{2})$$

Отсюда
$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -1,\dots,$$
$$f^{(2n)} = 0,\ f^{(2n-1)} = (-1)^{n-1}$$

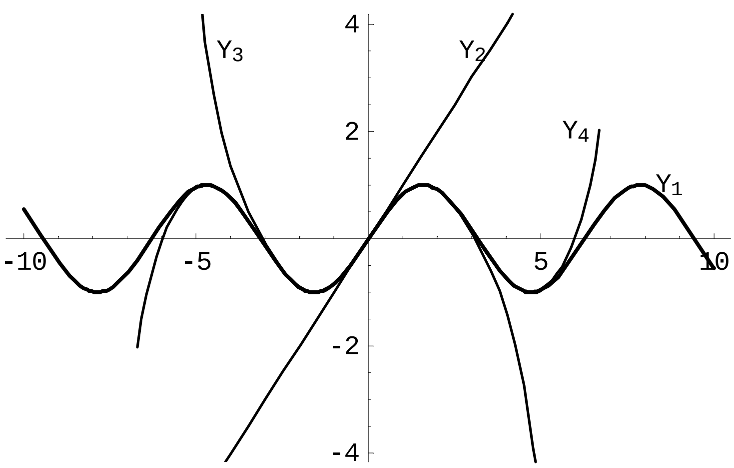
Тогда

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots}$$

Можно показать, что радиус сходимости ряда $R = \infty$

Так как $|f^{(n)}(x)| = |\sin(x + n\cdot\frac{\pi}{2})| \le 1, \forall x$, то ряд сходится к функции $\sin x$ на всей оси.

На рис. 3 изображен жирной линией график функции $Y_1 = \sin x$,тонкими линиями его приближение одним членом ряда Маклорена $Y_2 = x$, приближение четырьмя отличными от нуля членами ряда $Y_3 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$ и, наконец, приближение семью членами ряда $Y_4 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}$



3) Аналогично

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots}$$

Данные разложения верны для $x \in (-\infty;+\infty)$.

3) Бином

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

Данное разложение верно при $x \in (-1;+1)$ и, может быть, при $x=\pm 1$ (это решается для конкретного α индивидуально).

Замечание. Если в разложении для функции $(1+x)^{\alpha}$ положить $\alpha = n$, где n - натуральное число, то все члены этой формулы начиная с $(n+1)$ -го исчезают, и формула Маклорена превращается в известную формулу **бинома Ньютона**

$$\boxed{(1+x)^{n} = 1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{2}+\ldots+x^{n}},$$

т.е. бином Ньютона является частным случаем разложения функции $(1+x)^{\alpha}$ в ряд Маклорена.

5) $$\boxed{\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n!}+\ldots}$$

Можно найти разложение, вычисляя коэффициенты Тейлора.

***Применим интегрирование степенных рядов*.**

Рассмотрим геометрическую прогрессию (или бином при $\alpha=-1$)

$$1-x+x^2-x^3+\ldots+\ldots=\frac{1}{1+x} \quad \text{при } \boxed{(|x|<1)}$$

Интегрируем этот ряд

$$\int_0^x (1-x+x^2-x^3+\ldots+\ldots)dx = \int_0^x \frac{1}{1+x}dx.$$ Отсюда

$$x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots+\ldots=\ln(1+x),$$

Ряд сходится при $\boxed{-1<x\le 1}$ **!**

ПРИМЕРЫ.

Полученные формулы дают возможность производить разложения в ряд некоторых функций без использования общей схемы с нахождением производных высокого порядка.

ПРИМЕР 1.

Разложить по формуле Маклорена функцию e^{2x+1}

Решение. Воспользуемся разложением функции e^x в ряд, заменив в правой части ряда величину *x* на *2x*:

$$e^{2x+1}=e^1\left[1+\frac{2x}{1!}+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(3x)^3}{3!}+\ldots..\right]=$$

$$e\left[1+2x+2x^2+\frac{9}{2}x^3+\ldots\ldots.\right]=$$

$$e+2ex+2ex^2+\frac{9}{2}ex^3+\ldots..$$

Пользуясь известными разложениями элементарных функций в степенные ряды, разложить в ряд Маклорена следующие функции:

ПРИМЕР 2. $f(x) = x^3 e^{-x}$;

Воспользуемся известным разложением

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots, \text{ где } -\infty < t < +\infty.$$

Полагаем здесь $t = -x$, получим

$$f(x) = x^3\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \ldots\right) =$$

$$= x^3 - x^4 + \frac{x^5}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + \frac{(-1)x^{n+3}}{n!} + \ldots.$$

Данное разложение сходится к $f(x)$ при всех x.

ПРИМЕР 3. $f(x) = \sin 3x$;

воспользуемся известным разложением

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, -\infty < t < +\infty.$$

Полагаем теперь t=3x, получаем

$$\sin 3x = 3x - \frac{3^3 x^3}{3!} + \frac{3^5 x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{3^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$$

$\forall x \in R$.

ПРИМЕР 4. $f(x)=\sqrt{1-x^3}$;

Представим $f(x)$ в виде $f(x)=\left(1+\left(-x^3\right)\right)^{\frac{1}{2}}$ и воспользуемся известным разложением

$$(1+t)^m=1+\frac{m}{1!}t+\frac{m(m-1)}{2!}t^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}t^3+\ldots+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}t^n+\ldots,$$

которое верно при $-1<t<1$.

Полагая теперь $m=\frac{1}{2}$, $t=x^3$, получим

$$f(x)=1+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{1!}x^3+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}\left(x^3\right)^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(x^3\right)^3}{3!}+\ldots$$

$$+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\left(x^3\right)^n+\ldots,$$

или, произведя упрощения, получаем

$$f(x)=1-\frac{1}{2\cdot1!}x^3+\frac{1\cdot3}{2^2\cdot2!}x^6-\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3\cdot3!}x^9+$$

$$\ldots+\frac{(-1)^n1\cdot3\cdot5\cdot\ldots(2n-1)x^{3n}}{2^n n!}+\ldots.$$

Это разложение верно, если $-1<x^3<1$, т.е. $-1<x<1$.

ПРИМЕР 5. $f(x)=\ln(x+2)$. Преобразуем $f(x)$.

$$f(x)=\ln\left(2\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right).$$

Воспользуемся разложением

$$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}+\ldots,\ -1<t\le 1.$$

Полагая $t=\dfrac{x}{2}$, получим, что

$$f(x)=\ln 2+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4\cdot 2}+\frac{x^3}{8\cdot 3}-\frac{x^4}{16\cdot 4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{2^n\cdot n}+\ldots,$$

где $-1<\dfrac{x}{2}\le 1$, значит $-2<x\le 2$.

Степенные ряды применяются для вычисления с заданной точностью значений функций; для приближенного вычисления определенных интегралов и для решения других задач, в частности, при интегрировании дифференциальных уравнений.

Разложение обратных тригонометрических функций в степенные ряды

Разложить в ряд Маклорена функцию $\boxed{y = \arcsin x}$

Применим интегрирование степенных рядов.

Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

Представим $f(x)$ в виде $f(x) = \left(1 + \left(-x^2\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$ и воспользуемся известным разложением бинома

$$(1+t)^m = 1 + \frac{m}{1!}t + \frac{m(m-1)}{2!}t^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}t^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}t^n + \ldots, -1 < t < 1$$

Полагая теперь $m = -\frac{1}{2}$, $t = -x^2$, получим

$$f(x) = 1 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{1!}(-x^2) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}\left(-x^2\right)^2 +$$

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-x^2\right)^3}{3!} + .. + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!}\left(-x^2\right)^n$$

или, произведя упрощения, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \boxed{= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 6}x^6 + \ldots.} -1 \le x \le 1 \qquad \text{(a)}$$

Так как $\int\limits_0^x \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$, то имеем из (a)

$$\boxed{\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots. +}$$

Разложить в ряд Маклорена функцию $\boxed{y = arctgx}$

Можно разложить, вычисляя коэффициенты Тейлора.

***Применим интегрирование степенных рядов*.**

Рассмотрим геометрическую прогрессию

(в которой вместо x возьмем $-x^2$)

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + \ldots = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{при} \ \boxed{(|x|<1)}$$

Интегрируем этот ряд

$$\int_0^x (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + \ldots)dx = \int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx. \quad \text{Отсюда}$$

$$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots + \ldots = arctgx,$$

Ряд сходится при $\boxed{-1 \le x \le 1}$ **!**

$$\boxed{arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots} \qquad \boxed{(*)}$$

Степенные ряды применяются для вычисления с заданной точностью значений функций; для приближенного вычисления определенных интегралов и для решения других задач, в частности, при интегрировании дифференциальных уравнений.

Задача: вычислить число π с точностью …….

При $x=1$ из (*) имеем еще один способ вычисления числа π :

$$arctg1=\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\ldots$$

Задача: вычислить число e с точностью $0{,}0001$

Из формулы $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$ при $x=1$ получаем (*знакоположительный*) ряд

$$\boxed{e=2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+R_n}$$

Так как $\frac{1}{2!}\le\frac{1}{2},\frac{1}{3!}<\frac{1}{2^2},\frac{1}{4!}<\frac{1}{2^3},\ldots\ldots$, то

$$e=2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots=2+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2+1=3$$

или $\boxed{2<e<3}$.

Тогда при $x=1$ остаточный член в форме Лагранжа удовлетворяет неравенству $|R_n(x)|\le\frac{e^1}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}$

Найдем требуемое n из условия $R_n<0{,}0001$ или

$\frac{3}{(n+1)!}<0{,}0001$. Отсюда $n=7$ $\left(\frac{3}{(8)!}=\frac{1}{13440}<0{,}0001\right)$.

Итак $$\boxed{e\approx 2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{7!}\approx 2{,}7183}$$

Вычислить приближенно $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ с точностью до 0,0001 .

Поскольку $\frac{1}{\sqrt[4]{e}} = e^{-\frac{1}{4}}$, то из известного разложения

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

при $x = -\frac{1}{4}$, получаем

$$e^{-\frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16 \cdot 2} - \frac{1}{64 \cdot 6} + \frac{1}{256 \cdot 120} - \ldots .$$

Поскольку $\frac{1}{64 \cdot 6} > \frac{1}{10000}$, $\frac{1}{256 \cdot 120} < \frac{1}{10000}$, то для достижения заданной точности достаточно четырех первых членов разложения:

$$e^{-\frac{1}{4}} \approx 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{32} - \frac{1}{384} \approx 1 - 0{,}25000 + 0{,}03125 - 0{,}00260$$

$$\approx 0{,}77865 \approx 0{,}7787$$

Вычислить приближенно $\sqrt[3]{9}$ с точностью до 0,001 .

$$\sqrt[3]{9} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{8}} = 2 \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{1}{8}} = 2\left(1 + \frac{1}{8}\right)^{1/3}$$ Здесь $m = \frac{1}{3}, x = \frac{1}{8}$

$$\sqrt[3]{9} = 2\left(1 + \frac{1}{8}\right)^{1/3} = 2 \cdot (1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{3} - 1)(\frac{1}{8})^2 \cdot \frac{1}{2!} + \ldots =$$

$$= 2(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} - \frac{2}{3^2 8^2 3!} + \ldots) \approx \ldots\ldots.. \approx 2{,}080$$

Приближенное вычисление значений функций

Задача: вычислить число $\cos 5^0$ с точностью $0{,}0001$

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots}$$

При $x = 5^0 = \dfrac{\pi}{36}$ имеем

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{36} = 1 - \left(\frac{\pi}{36}\right)^2 \frac{1}{2!} + \left(\frac{\pi}{36}\right)^4 \frac{1}{4!} + \ldots. = a_1 - a_2 + a_3 + \ldots}$$

Так как $\dfrac{\pi}{36} < 0{,}1,$ и

$$a_3 = \left(\frac{\pi}{36}\right)^4 \frac{1}{4!} < \frac{(0{,}1)^4}{4!} = \frac{1}{240000} < \frac{1}{10 \cdot 10000} < 0{,}00001$$

то $\cos 5^0 \approx a_1 - a_2 \approx 1 - 0{,}0038 = 0{,}9962$

Задача: Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} ..\right) - 2 - 2x - x^2}{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ..\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots.}{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2}{3!} + \frac{x}{4!} + \ldots.}{\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \ldots} = 2$$

Интегрирование функций

Задача: Вычислить с точностью до 0,0001 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$;

Неопределенный интеграл $\int \frac{\sin x}{x} dx$ относится к «неберущимся» интегралам. Разложим $\frac{\sin x}{x}$ в ряд

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) dx =$$

$$\left[x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} - \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!}\right]\Bigg\|_0^1 + \ldots =$$

$$= \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + \ldots = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \frac{1}{35280} + \ldots.$$

В правой части ряд Лейбница, поэтому его остаток не превосходит по абсолютной величине первого отбрасываемого члена. Так $\frac{1}{35280} < \frac{1}{10000}$, то для вычисления интеграла с требуемой точностью 0,0001 достаточно взять три первых члена разложения:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} \approx 0,9461.$$

Задача: Вычислить $\int\limits_0^{0,5} e^{-x}dx$ с точностью до 0,001.

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \ldots \ .$$

Интегрируя его почленно, получим:

$$\int\limits_0^{0,5} e^{-x}dx = \int\limits_0^{0,5} \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \ldots\right)dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3\cdot 2!} - \frac{x^4}{4\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 4!} .. + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)n!} + \ldots\right|_0^{0,5} =$$

$$= 0,5 - \frac{(0,5)^2}{2!} + \frac{(0,5)^3}{3\cdot 2!} - \frac{(0,5)^4}{4\cdot 3!} + \ldots + \frac{(-1)^n 0,5^{n+1}}{(n+1)n!} + \ldots. \quad .$$

По признаку Лейбница остаток сходящегося знакочередующегося ряда не превосходит по абсолютной величине абсолютной величины первого отбрасываемого члена, поэтому

$$\int\limits_0^{0,5} e^{-x}dx \approx 0,5 - \frac{0,25}{2} + \frac{0,125}{3\cdot 2} - \frac{0,0625}{4\cdot 6} =$$

$$0,5 - 1,125 + 0,0208 - 0,0026 = 0,0182 \approx 0,018.$$

Заданная точность обеспечена, так как первый отброшенный член удовлетворяет требуемому неравенству

$$\frac{(0,5)^5}{5\cdot 4!} = \frac{0,03125}{5\cdot 24} = 0,00026 < 0,001.$$

Интегрирование дифференциальных уравнений

Задача: Решить задачу Коши

$$y'' - xy = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

Решение будем искать в виде степенного ряда

$$\boxed{y(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots\ldots} \qquad (P)$$

Из начальных условий при $\boxed{x = 0}$ можно определить коэффициенты $a_0 = 0, a_1 = 1$.

(В противном случае они служат произвольными постоянными общего решения ДУ).

Дважды дифференцируя ряд (Р) и подставляя в ДУ, имеем (*учтем, что* $a_0 = 0, a_1 = 1$)

$$2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 \cdot x + 4 \cdot 3 \cdot a_4 \cdot x^2 \ldots + n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2} + \ldots =$$
$$= x^2 + a_2 \cdot x^3 + \ldots + a_{n-3} \cdot x^{n-2} + \ldots\ldots$$

Отсюда, сравнивая коэффициенты, получаем

$$a_2 = 0, a_3 = 0, 4 \cdot 3 \cdot a_4 = 1, \ldots\ldots, n(n-1)a_n = a_{n-3}$$

или

$$a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = \frac{1}{3 \cdot 4}, a_5 = 0, a_6 = 0, a_7 = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7},$$

$$a_8 = 0, a_9 = 0, a_{10} = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10}, \ldots\ldots,$$

$$a_{3m-1} = 0, a_{3m} = 0, a_{3m+1} = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10 \ldots. 3m(3m-1)}$$

Значит $\boxed{y(x) = x + \frac{1}{3 \cdot 4} \cdot x^4 + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^7 + \ldots\ldots}$

УПР* Найти область сходимости ряда (R)

Задача: Решить задачу Коши

$$y' = xy^2,\ y(1) = 0$$

Решение будем искать в виде степенного ряда по степеням $(x-1)$:

$$\boxed{y(x) = a_0 + a_1 \cdot (x-1) + a_2 \cdot (x-1)^2 + \dots\dots} \qquad \text{(C)}$$

Исходное уравнение $\boxed{\textit{нелинейное}}$ *и поэтому подстановка ряда (C) в ДУ приводит к сложным вычислениям.*

Продифференцируем исходное ДУ

$$y' = xy^2$$

$$y'' = y^2 + 2xy \cdot y'$$

$$y''' = 4yy' + 2x(y')^2 + 2xyy''$$

$$y^{(4)} = 6y'^2 + 6yy'' + 6xy'y'' + 2xyy'''$$

....

Полагаем теперь $\boxed{x = 1}$, учитывая условие $\boxed{y(1) = 0}$, последовательно найдем:

$$y'(1) = 1,\ y''(1) = 0,\ y''')1) = 2,\ y^{(4)}(1) = 6, \dots\dots.$$

Из (C) имеем

$$a_0 = y(1) = 0, a_1 = y'(1) = 1, a_2 = \frac{1}{2!} y''(1) = 0$$

$$a_3 = \frac{1}{3!} y'''(1) = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4!} y^{(4)}(1) = \frac{1}{4}, \dots\dots$$

Тогда $\boxed{y(x) = 1 \cdot (x-1) + \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{(x-1)^4}{4} + \dots\dots}$