Н.П.ГРУШИНСКИЙ

ТЕОРИЯ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ

Н. П. ГРУШИНСКИЙ

ТЕОРИЯ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ
И ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебника для студентов вузов, обучающихся
по специальностям «Астрономия» и «Астрономогеодезия»



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1976

52
Г 91
УДК 528.2

Николай Пантелеймонович Грушинский

ТЕОРИЯ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ

М. 1976 г., 512 стр. с илл.

Редактор *В. Г. Демин.*
Техн. редактор *С. Я. Шкляр.*
Корректор *Л. Н. Боровина.*

Сдано в набор 24/II 1976 г. Подписано к печати 20/VIII 1976 г. Бумага $60\times90^1/_{16}$.

Физ. печ. **л.** 32+3 вкл. Услови. печ. л. 32,875. Уч.-изд. л. 30,23. Тираж 4400 экз. Т-14478.

Цена книги 1 р. 30 к. Заказ № 69.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

1-я типография издательства «Наука».
г. Новосибирск, 77, ул. Станиславского, 25.

Г $\frac{20602-103}{053(02)-76}$ 167-76

© Главная редакция
физико-математической литературы
издательства «Наука», 1976,
с изменениями.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию 9
Предисловие к первому изданию 11
Введение 13

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ ИЗУЧЕНИЯ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ

Глава 1. **Основные способы геометрических измерений на поверхности Земли** 27
§ 1. Триангуляция 27
§ 2. Базисы триангуляции 32
§ 3. Понятие об уравнивании триангуляции 34
§ 4. Методы измерения расстояний. Дальномеры 37
§ 5. Понятие о радиогеодезических методах определения координат 39
§ 6. Полигонометрический метод определения опорных точек . . 44
§ 7. Нивелирование 45

Глава 2. **Решение основных задач геодезии на эллипсоиде вращения (сфероидическая геодезия)** 48
§ 1. Основные параметры земного эллипсоида 48
§ 2. Применяющиеся в геодезии системы координат 50
§ 3. Формулы преобразования координат 52
§ 4. Нормальные сечения и главные радиусы кривизны 55
§ 5. Взаимно обратные нормальные сечения 58
§ 6. Геодезическая линия 59
§ 7. Расхождение взаимно обратных нормальных сечений . . . 63
§ 8. Длины дуг меридианов и параллелей 67

Глава 3. **Определение геодезических координат и расстояний на эллипсоиде относимости** 71
§ 1. Постановка задачи 71
§ 2. Способы решения треугольников на эллипсоиде относимости 73
§ 3. Прямая геодезическая задача 77
§ 4. Приемы упрощения формул для решения прямой геодезической задачи 81
§ 5. Решение обратной геодезической задачи 84

Глава 4. **Понятие о редукционной проблеме. Влияние уклонения отвесных линий** 85
§ 1. Редуцирование базисов при методе развертывания геодезических измерений на референц-эллипсоиде 85

§ 2. Редуцирование базисов при методе проектирования геодезических измерений на референц-эллипсоид 87
§ 3. Влияние уклонения отвесных линий на астрономические широты, долготы, азимуты и горизонтальные углы. Уравнение Лапласа 88

Глава 5. **Определение основных элементов фигуры Земли из градусных измерений** 93
§ 1. Определение большой полуоси и сжатия по градусным измерениям, выполненным вдоль меридиана 93
§ 2. Определение большой полуоси и сжатия по градусным измерениям, выполненным вдоль параллелей 96
§ 3. Определение элементов земного эллипсоида по большим астрономо-геодезическим сетям 97
§ 4. Установление исходных геодезических дат 100
§ 5. Референц-эллипсоид. Эллипсоид Красовского. Международный эллипсоид 102
§ 6. Дифференциальные формулы первого рода 104
§ 7. Дифференциальные формулы второго рода 110

Глава 6. **Изучение фигуры физической поверхности Земли (по Молоденскому)** 112
§ 1. Постановка задачи. Координаты точек и дифференциал дуги на физической поверхности Земли 112
§ 2. Дифференциальные формулы для перехода к новой системе координат 115
§ 3. Геодезические построения при помощи прямых линий (хорд эллипсоида) 120
§ 4. Решение прямой геодезической задачи 127
§ 5. Дифференциальные формулы прямой и обратной геодезических задач 128
§ 6. Определение высот 129
§ 7. Редукционная задача 130

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ГРАВИМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ ИЗУЧЕНИЯ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ

Глава 7. **История развития гравиметрии и теории фигуры Земли в России** 133
§ 1. Идеи Ломоносова о природе тяготения 133
§ 2. Первые маятниковые определения 134
§ 3. Московская аттракция. Идеи о применении гравиметрического метода для изучения строения земной коры 137
§ 4. Развитие идей в области теории фигуры Земли 139
§ 5. Обобщение теории фигуры Земли в работах Молоденского 140

Глава 8. **Необходимые сведения из теории ньютонова потенциала** 142
§ 1. Сила тяжести 142
§ 2. Потенциал силы тяжести 145
§ 3. Регулярность потенциала притяжения на бесконечности . . 148
§ 4. Потенциал простого слоя 149
§ 5. Потенциал шара на внешнюю точку 153
§ 6. Потенциал шара на внутреннюю точку 154
§ 7. Уравнения Лапласа и Пуассона 156
§ 8. Формула Остроградского 157
§ 9. Основные преобразования Грина 159

§ 10. Преобразование формулы Грина по Молоденскому . . . 163
§ 11. Оператор Лапласа в ортогональной криволинейной системе координат 165

Глава 9. **Сферические функции** 170
§ 1. Определение сферических функций 170
§ 2. Дифференциальные уравнения для сферических функций. Многочлены Лежандра 171
§ 3. Некоторые свойства многочленов Лежандра 176
§ 4. Рекуррентная формула многочленов Лежандра 181
§ 5. Разложение функции $1/r$ в ряд по многочленам Лежандра . . 183
§ 6. Некоторые свойства присоединенных функций Лежандра . . 185
§ 7. Интегральные соотношения для сферических функций . . . 187
§ 8. Разложение в ряды по сферическим функция 189
§ 9. Теорема сложения 191
§ 10. Нормирование сферических функций. Интегральное уравнение элементарных сферических функций 193
§ 11. Практика разложения по сферическим функциям 194

Глава 10. **Нормальное гравитационное поле Земли. Нормальный земной эллипсоид** 198
§ 1. Теорема Клеро о распределении силы тяжести на земной поверхности 198
§ 2. Теорема Стокса 201
§ 3. Потенциалы силы тяжести для уровенной поверхности, заданной в форме эллипсоида вращения 203
§ 4. Формула Пицетти — Сомильяна 213
§ 5. Формула Клеро 216
§ 6. Потенциал силы тяжести заданной в виде разложения в ряд по сферическим функциям 219
§ 7. Формулы нормального значения силы тяжести 225
§ 8. Представление формулы нормального значения силы тяжести через коэффициенты разложения по сферическим функциям 231
§ 9. Нормальный геоид 233
§ 10. Масса и средняя плотность Земли 238
§ 11. Различные формы представления потенциала притяжения через сферические функции 240

Глава 11. **Проблема регуляризации Земли. Редукции силы тяжести** 242
§ 1. Понятие регуляризации. Смысл введения редукций . . . 242
§ 2. Регуляризация Земли методом инверсии 246
§ 3. Редукция в свободном воздухе 247
§ 4. Притяжение плоского слоя 251
§ 5. Поправка за рельеф местности 252
§ 6. Поправка за промежуточный слой и аномалия Буге . . . 255
§ 7. Поправка Прея и аномалия силы тяжести внутри Земли . . 258
§ 8. Топографическая поправка 260
§ 9. Теория изостазии 264
§ 10. Изостатическая редукция 268
§ 11. Редукция конденсации 270
§ 12. Редукция силы тяжести и образование аномалий на море 271
§ 13. Физический смысл редукций. Искажение геоида при введении поправок 273

Глава 12. **Аномальное гравитационное поле. Геоид регуляризированной Земли** 279
§ 1. Второе приближение в определении фигуры Земли. Постановка задачи 279

§ 2. Теорема Брунса. Вывод граничного условия 280
§ 3. Формула Стокса. Ряд Стокса 282
§ 4. Вывод формулы Пицетти 287
§ 5. Преобразование функции Стокса 288
§ 6. Практика вычисления высот геоида 291
§ 7. Карта геоида. Современные представления 294

Глава 13. **Уклонение отвесных линий** 298

§ 1. Основные понятия 298
§ 2. Гравиметрический вывод уклонения отвесных линий 300
§ 3. Изменение уклонения отвеса вследствие кривизны силовой линии 302
§ 4. Вывод формулы Венинг-Мейнеса для уклонения отвесных линий 304
§ 5. Характер изменения функции Венинг-Мейнеса Q. Влияние аномалий ближних зон 306
§ 6. Практика вычисления уклонений отвесных линий. Учет влияния аномалий центральной зоны 310
§ 7. Учет влияния аномалий ближних и средних зон 316
§ 8. Вопросы учета влияния дальних зон 324

Глава 14. **Изучение фигуры физической поверхности Земли** . . . 327

§ 1. Принципиальные трудности редуцирования на геоид . . . 327
§ 2. Системы высот 330
§ 3. Нормальные высоты, аномалии высот и геодезические высоты 336
§ 4. Краевая задача Молоденского и интегральное уравнение . . 339
§ 5. Решение основного уравнения для нахождения возмущающего потенциала 342
§ 6. Другие методы решения краевой задачи Молоденского . . . 348
§ 7. Понятие об астрономо-геодезическом нивелировании . . . 353
§ 8. Основы астрономо-гравиметрического нивелирования . . . 356

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

АСТРОНОМИЧЕСКИЕ СПОСОБЫ ИЗУЧЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ И ФИГУРЫ ЗЕМЛИ

Глава 15. **Задача двух тел** 365

§ 1. Элементы кеплеровой орбиты 365
§ 2. Дифференциальные уравнения движения задачи двух тел . . 367
§ 3. Интегрирование уравнений движения 369
§ 4. Механический смысл постоянных интегрирования 373
§ 5. Уравнение Кеплера 375
§ 6. Выражение первых интегралов задачи двух тел через элементы орбиты 377

Глава 16. **Определение элементов фигуры Земли по наблюдениям Луны** 378

§ 1. Геометрический способ определения большой полуоси Земли 378
§ 2. Динамический способ определения большой полуоси и стоксовой постоянной по наблюдениям Луны. Динамический параллакс Луны 378
§ 3. Определение сжатия Земли по лунно-солнечной прецессии 379
§ 4. Определение геометрического сжатия по динамическому . . 383
§ 5. Определение сжатия Земли по неравенствам в движении Луны 384

Глава 17. Основы космической геодезии 386

§ 1. Принцип использования искусственных спутников Земли в геодезии 386
§ 2. Геодезические спутники 389
§ 3. Способы наблюдения искусственных спутников Земли и применяющиеся при этом инструменты 391
§ 4. Системы координат 395
§ 5. Основные правила матричных операций 400
§ 6. Принцип космической триангуляции 403
§ 7. Запись основного уравнения космической геодезии в матричной форме 407
§ 8. Основы построения космической триангуляции. Определение положения спутника 409
§ 9. Определение положения станции. Метод одновременных наблюдений 411
§ 10. Орбитальный метод нахождения координат станций . . . 412
§ 11. Определение центра масс Земли 415

Глава 18. Основы определения параметров гравитационного поля и фигуры Земли по возмущениям в движении искусственных спутников 419

§ 1. Понятие о возмущенном движении. Оскулирующие элементы орбиты 419
§ 2. Основные формулы для определения параметров гравитационного поля Земли по наблюдениям искусственных спутников 420
§ 3. Некоторые соображения о выборе уравнений для изучения фигуры Земли по наблюдениям искусственных спутников . . 424
§ 4. Уравнения Лагранжа. Вывод уравнения Лагранжа для долготы восходящего узла 426
§ 5. Вывод возмущения долготы восходящего узла под влиянием сжатия Земли 429
§ 6. О влиянии сопротивления атмосферы на долготу восходящего узла 430
§ 7. Определение фундаментальной стоксовой постоянной fM . . 431

Глава 19. Приложение задачи двух неподвижных центров к построению нормального гравитационного поля 434

§ 1. Понятие о задаче двух неподвижных центров 434
§ 2. Потенциал силы тяжести 436
§ 3. Уравнение идеального геоида 439
§ 4. Нормальное значение силы тяжести 442
§ 5. Принцип построения дифференциальных уравнений движения спутника 444

Глава 20. Современное состояние изученности гравитационного поля и фигуры Земли 446

§ 1. Мировая гравиметрическая система 446
§ 2. Гравиметрическая изученность мира 450
§ 3. Гравиметрические карты 453
§ 4. Геометрическая структура гравитационного поля и фигуры Земли 455
§ 5. Определение потенциала Земли. «Стандартная Земля» . . 458
§ 6. Основные черты аномального гравитационного поля и фигуры Земли 469

Глава 21. **Гравитационное поле и фигура Луны и планет** 476
§ 1. Основные соображения об изучении гравитационного поля Луны и ее фигуры 476
§ 2. Основные характеристики Луны по астрономическим наблюдениям 478
§ 3. Определение потенциала гравитационного поля Луны по рельефу 481
§ 4. Основы гидростатической теории фигуры Луны 483
§ 5. Определение параметров гравитационного поля и фигуры Луны по наблюдениям искусственных спутников 488
§ 6. Непосредственные измерения силы тяжести на Луне . . . 495

Глава 22. **Проблема предсказания аномалий** 496
§ 1. Причины, вызывающие потребность предсказания аномалий. Средняя аномалия 496
§ 2. Методы интерполяции и экстраполяции гравитационных аномалий. Ошибки интерполяции и ошибка представительства 498
§ 3. Ковариация 500
§ 4. Оценка влияния неучета дальних зон при вычислении высот геоида 505
§ 5. Оценка сферических гармоник с помощью ковариационной функции 508
§ 6. Оценка точности определения высот геоида 510

Литература 512

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Со времени выхода в свет первого издания книги прошло 12 лет. Этот интервал времени невелик для классических методов. Однако он составил целую эпоху в развитии спутниковой геодезии. Разработаны новые методы определения координат станций и спутников, основных параметров гравитационного поля и фигуры Земли. По большому материалу спутниковых наблюдений вычислены уточненные значения этих параметров.

Уверенно получены новые значения коэффициентов разложения потенциала гравитационного поля. Одновременно накопление наземных гравиметрических измерений, которые сейчас уже покрывают обширные площади не только континентов, но и океанов, открыло новые возможности в изучении фигуры Земли. Разработаны и применяются методы совместного использования спутниковых и гравиметрических данных, причем спутники надежно обеспечивают низкие гармоники в разложении потенциала гравитационного поля в ряд по сферическим функциям, а гравиметрические данные — высокие.

Все это заставило автора пересмотреть курс и заново написать третью часть — «Астрономические методы изучения гравитационного поля и фигуры Земли», а также главу «Редукции силы тяжести», взгляд на которые начал заметно эволюционировать, и главу «Современное состояние изученности гравитационного поля и фигуры Земли». Кроме того, внесены необходимые изменения и улучшения в главы о нормальном и аномальном гравитационных полях, написана новая глава об истории гравиметрии.

Помимо вопросов теории автор счел целесообразным включить в книгу некоторые фактические данные обработки результатов измерений, как например, таблицы коэффициентов зональных и тессеральных гармоник гравитационного потенциала,

вычисленных по наблюдениям искусственных спутников, таблицы осредненных аномалий, схему высот геоида и аномалий. Эти данные мало публиковались, но, будучи включенными в учебник, они позволят использовать фактический материал для постановки различных учебных задач, а также могут быть полезными и для различных научных исследований.

Автор выражает глубокую признательность научному редактору В. Г. Демину, немало способствовавшему улучшению книги, а также своей жене Н. Б. Сажиной, с которой обсуждались отдельные главы и которая во многом способствовала выходу книги в свет.

Н. П. Грушинский

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Этот учебник составлен по материалам лекций, читанных автором в течение ряда лет в Московском университете для студентов-астрономов.

Он рассчитан в первую очередь на студентов-гравиметристов физического и физико-математического факультетов университетов, а также на студентов-гравиметристов и геодезистов геодезических институтов и слушателей соответствующих факультетов военных академий.

В основу книги положены два курса: общий курс «Основы высшей геодезии и гравиметрии» и спецкурс «Теория фигуры Земли». Оба эти полугодовых курса являются как бы частями одного годового курса, в котором излагаются основы определения фигуры Земли двумя способами: геодезическим и гравиметрическим. Этому годовому курсу и соответствует настоящий учебник.

Первая часть его охватывает основные классические задачи высшей геодезии. Последовательность их изложения соответствует последовательности решения: измерения на физической поверхности Земли, редукция на поверхность относимости, нахождение земного эллипсоида. Этому предпосылается описание решения геодезических задач на эллипсоиде, поскольку формулы этого раздела являются, собственно говоря, разделом геометрии на эллипсоиде и требуются при изложении материала последующих разделов.

В этой части, в отличие от имеющихся учебников по высшей геодезии, все разделы классической геодезии изложены сжато, кроме того, приводится решение прямой и обратной задач высшей геодезии методом хорд, предложенным чл.-корр. АН СССР М. С. Молоденским. Этот метод позволяет не прибегать к разложениям в ряды, исследование сходимости которых сильно усложняет рассмотрение, а исключение этого вопроса лишает изложение строгости. Однако мы не сочли возможным ограничиться лишь этим методом, так как в этом случае студентам трудно было бы ориентироваться в вопросах классической высшей геодезии.

Вторая часть содержит изложение основных задач геодезической гравиметрии. Здесь рассматривается задача построения потенциала силы тяжести для Земли, принятой за эллипсоид вращения, и устанавливается связь между параметрами гравитационного поля и сжатием этого эллипсоида. Далее излагаются вопросы, связанные с изучением аномального гравитационного поля. При изложении материала второй части мы используем новые методы решения основных задач геодезической гравиметрии, полученные М. С. Молоденским и нашедшие уже свое применение в практике геодезических работ.

В решении задачи определения фигуры Земли гравиметрическим способом мы широко пользуемся аппаратом разложения по сферическим функциям. Без этого сейчас уже невозможно полное изложение теории фигуры Земли. Имея в виду, что далеко не во всех вузах, где изучается гравиметрия, читаются курсы специальных функций, мы включили в учебник главу, дающую основные понятия о сферических функциях.

В настоящее время курс теории фигуры Земли будет неполным, если в нем не рассматривать нашедших широкое применение методов определения фигуры Земли по возмущениям орбит искусственных спутников. Поэтому в учебник включена третья часть: «Астрономические способы изучения фигуры Земли». Основой этой части являются понятия небесной механики, курс которой слушает крайне ограниченное число студентов. Поэтому в ней автор счел целесообразным рассмотреть, по возможности элементарно, основные задачи небесной механики и с их помощью рассказать уже о самом методе. Некоторые окончательные формулы этой части приведены без вывода, так как их вывод потребовал бы более углубленного изложения небесной механики, что сильно увеличило бы объем книги и повторяло бы соответствующие курсы.

Автор считает своим приятным долгом выразить глубокую признательность рецензенту А. А. Михайлову, научному редактору В. В. Бровару и А. И. Фролову, отредактировавшему первые пять глав, а также коллегам М. У. Сагитову, М. С. Яров-Яровому, В. Г. Демину, Г. Д. Марчуку за ряд ценных советов и указаний, сделанных во время подготовки книги.

Н. П. Грушинский

ВВЕДЕНИЕ

Определение предмета. Под теорией фигуры Земли принято понимать раздел науки, занимающийся изучением формы Земли по ее полю силы тяжести. Первым шагом в этом исследовании является установление фигуры однородной жидкости, вращающейся с некоторой постоянной скоростью, частицы которой притягиваются друг к другу по ньютонианскому закону. Доказано, что такая идеальная планета должна иметь форму эллипсоида вращения малого сжатия, причем сжатие тем больше, чем быстрее скорость вращения. Устанавливаются пределы допустимой скорости вращения, превзойдя которую планета должна разрушиться.

Условием устойчивого равновесия вращающейся идеальной жидкости является неравенство

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\sigma} \leqslant 0{,}2247,$$

где σ — плотность, ω — угловая скорость вращения, f — гравитационная постоянная.

Эта задача расширяется переходом от однородной жидкости к неоднородной. Здесь задаются каким-либо законом изменения плотности вращающейся жидкой массы, например, законом возрастания плотности с углублением внутрь массы. Для такой неоднородной планеты фигурой равновесия уже будет не эллипсоид вращения, а фигура, близкая к нему, которую мы будем называть сфероидом. Теория о фигурах равновесия вращающейся жидкой массы с некоторым заданным распределением плотностей распространяется в равной степени на все планеты. Поэтому ее принято называть теорией фигуры планет. Наконец выполняется более детальное изучение формы уже конкретной планеты — Земли — по ее гравитационному полю. Это возможно, поскольку фигура Земли сложилась именно под действием силы тяжести. Здесь мы считаем уже известным, что идеальная Земля имеет фигуру, близкую к эллипсоиду вращения, и изучаем сжатие этого эллипсоида и отклонения истинной Зем-

ли от идеальной. Это физический, или гравиметрический способ изучения фигуры Земли.

Однако проблема установления фигуры Земли возникла значительно раньше, чем появились понятия силы тяжести и притяжения. При этом задача ставилась и решалась чисто геометрически. Этим занималась и занимается сейчас геодезия.

В геодезии рассматривают вопросы измерения углов и расстояний на земной поверхности, определения из этих измерений фигуры Земли и изображения изучаемой поверхности. Решение задач геодезии для незначительной части поверхности нашей планеты, когда эта часть может быть с достаточной точностью принята за плоскость, составляет предмет *низшей геодезии*, или *топографии*. Решение всего комплекса задач для значительной части земной поверхности, когда приходится принимать во внимание кривизну Земли, а также для всей Земли в целом относится к *высшей геодезии*.

Раздел высшей геодезии, в котором трактуется о способах изображения поверхности нашей планеты на плоскости, выделяется сейчас в специальную дисциплину — *математическую картографию*.

Основной задачей высшей геодезии является определение формы и размеров Земли и создание сети опорных точек (определение координат, направлений и расстояний). Методы высокоточных угловых и линейных измерений на поверхности Земли также являются разделом высшей геодезии.

Если геометрический способ определения фигуры Земли позволяет установить как форму ее, так и линейные размеры, то физический или гравиметрический метод позволяет установить только форму Земли, однако в этом вопросе он имеет преимущество: возможность изучения гравитационного поля на океанах, где исключена постановка точных геодезических измерений. Эти два независимых метода изучения фигуры Земли являются взаимоконтролирующими и взаимодополняющими друг друга. Естественно поэтому их сближение.

Строгое решение многих геодезических задач невозможно без учета гравиметрических данных. Так например, измеренные элементы земной поверхности (углы, направления, отрезки) для их последующей обработки необходимо спроектировать на некоторую правильную поверхность (плоскость, сферу или эллипсоид). Это проектирование должно производиться с учетом отклонения отвесных линий и аномалий высот, которые дает гравиметрия. Вторым примером необходимости гравиметрических данных в геодезии служит получение высот точек, которые строго не могут быть определены без знания силы тяжести. И наоборот: для определения аномалий силы тяжести в гравиметрии необходимо знание высот мест наблюдения. Координаты,

определенные астрономически, могут быть преобразованы в геодезические введением гравиметрических поправок. С другой стороны, и гравиметрия не может обойтись без геодезических данных: каждое гравиметрическое измерение всегда должно сопровождаться измерением высоты точек наблюдения.

За несколько последних десятилетий выделилась и вполне определилась такая наука, как *геодезическая гравиметрия*. Она рассматривает вопросы приложения гравиметрических данных к решению геодезических задач и в первую очередь к решению основной задачи высшей геодезии — определению фигуры Земли. Таким образом, гравиметрия в конечном счете приводит к решению той же задачи, что и высшая геодезия, только методы решения этой задачи существенно иные.

Если в геодезии мы имеем дело с методами чисто геометрическими, то гравиметрия оперирует физическими категориями, изучая силовое поле Земли и его закономерности.

Кроме геометрического (геодезического) и физического (гравиметрического) методов определения фигуры Земли, существует еще третий — *астрономический метод*. Он основан на том, что отклонение распределения масс планеты от правильного сферического вызывает возмущения в движении по орбите ее спутников. Наблюдая фактическое движение спутника и сравнивая его с теоретическим, можно определить сжатие планеты и некоторые более мелкие отступления ее от правильной формы эллипсоида вращения.

Однако по наблюдениям единственного естественного спутника Земли — Луны, вследствие удаленности последней, эти определения делались крайне неуверенно, так что при изучении фигуры Земли астрономический метод не принимался всерьез.

С того момента, как человечество осуществило запуск искусственных спутников Земли, метод изучения фигуры Земли и некоторых основных характеристик гравитационного поля Земли по возмущениям орбит спутников начал давать весьма точные результаты и стал одним из основных методов изучения фигуры Земли. Поэтому сейчас, ставя перед собой задачу изучения теории фигуры Земли, естественно рассматривать все три метода: геометрический, физический и астрономический.

Краткий исторический очерк. Проблема изучения фигуры Земли относится к числу древнейших научных проблем, поставленных человечеством еще на ранней ступени своего культурного развития. На протяжении многих веков она являлась, да и теперь остается одной из важнейших проблем естествознания и прежде всего астрономии и геодезии. Началом в изучении фигуры Земли в смысле определения формы ее поверхности и размеров явилось научное обоснование ее шарообразности.

Общеизвестно, что доказательством шарообразности Земли служат:

1. Всегда круговая линия горизонта в океане и на открытых равнинах.

2. Постепенное исчезновение высоких предметов *снизу* при удалении от них и, наоборот, появление их *сверху* при приближении.

3. Форма тени Земли на поверхности Луны при лунных затмениях.

4. Последовательное и правильное изменение высот звезд при перемещении по меридиану (выпуклость по меридиану).

5. Различие во времени восхода и захода Солнца и звезд под разными долготами (выпуклость по параллели).

6. Возможность кругосветных путешествий и потеря или выигрыш при них одних суток.

7. Сходство Земли с другими планетами, которые имеют шарообразную форму.

Всеми этими доказательствами, кроме двух последних, т. е. возможности кругосветных путешествий и сходства Земли с другими планетами, располагали люди с доисторических времен. Считают, что еще Пифагор (около 571—497 гг. до н. э.) высказал мысль о шарообразности Земли.

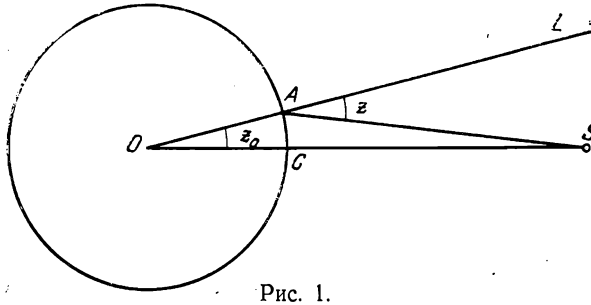


Рис. 1.

Многие из названных доказательств шарообразности Земли приводит Аристотель (384—322 гг. до н. э.), который указывает также размеры Земли по окружности — 400 000 стадий (стадия — мера длины, применявшаяся в Древнем Египте и других странах Ближнего Востока. Точная длина египетской стадии неизвестна. Считают, что она заключена между 158 и 185 *м*). Однако Аристотель не говорит, как это число получено.

Первое исторически известное определение размеров Земли как шара выполнено Эратосфеном (276—196 гг. до н. э.). Эратосфен измерил зенитное расстояние Солнца $z=LAS$ (рис. 1) в Александрии в полдень того дня, когда в Сиене Солнце находилось в зените, т. е. зенитное расстояние было равно

$z_0=0$. В этом предположении, а также при условиях, что Сиена и Александрия находятся на одном меридиане и Солнце бесконечно удалено от Земли, имеет место равенство углов $\angle LAS=\angle LOS$, т. е. $z_0=z$. Значит, угол z, который у Эратосфена получился равным 1/50 части окружности, измеряется дугой AC. Зная по длительности переходов караванов расстояния между Александрией и Сиеной, равное 5000 стадий, Эратосфен получил для длины меридиана Земли величину, равную 250 000 стадий.

Точность определения Эратосфена, конечно, весьма низка. Сделан ряд грубых допущений: в Сиене зенитное расстояние фактически не измерялось — положение Солнца в зените фиксировалось отсутствием тени от вертикальных предметов; предполагалось, что Сиена и Александрия расположены на одном меридиане, что далеко не точно; наконец, фактически не производились линейные измерения. Однако не в этом дело. Принцип, положенный Эратосфеном в основу выполненных измерений, является и до наших дней основой геодезического метода определения размеров Земли. Аналогичное определение было произведено Посидонием (135—50 гг. до н. э.).

Первые определения размеров Земли основывались, как мы видим, на принципе измерения дуг меридианов. Зная длину дуги и число градусов, в ней содержащихся, легко получали длину дуги в 1 градус и длину всей окружности. Таким образом появились *градусные измерения*, служащие основным методом геометрического (геодезического) изучения фигуры Земли до наших дней.

В нашу эру под влиянием различных социально-экономических причин начался упадок науки и культуры в Греции и Египте, и мы не имеем сведений о сколь-либо серьезных геодезических измерениях в это время. Только в VII в., в период расцвета могущества арабского государства, сопровождавшегося бурным развитием науки, были выполнены новые градусные измерения для определения фигуры Земли. Эти измерения были произведены при халифе Аль-Мамуне (786—833) в долине Синджар в Месопотамии под широтой 35°. Указанная работа по определению размеров Земли является первой, при которой были фактически произведены измерения как угловые, так и линейные. При этом арабские ученые нашли именно дугу в один градус, непосредственным измерением высот звезд в меридиане. По арабским измерениям длина дуги в один градус получилась равной 111,8 *км*, а радиус земного шара — 6406 *км*, т. е. для своего времени арабские ученые получили результат, удивительно близкий к действительности. После этой фундаментальной работы длительное время не было никаких

выдающихся исследований в области определения фигуры Земли. Постепенное ослабление арабского государства и окончательный распад его в XIII в. под влиянием экспансии восточных монгольских племен, господствовавшая в средние века схоластика и церковная реакция надолго задержали развитие научной мысли. В этих условиях не мог получить развитие и вопрос о фигуре Земли. Только в XV в., когда в Европе наметился перелом в развитии общественных отношений и возникли крупные национальные государства, развитие торговли и жажда наживы вызвали повышенный интерес к путешествиям, а это в свою очередь оживило интерес к проблеме определения размеров и формы Земли. В эту эпоху были совершены великие морские путешествия и географические открытия, которые, с одной стороны, окончательно утверждали длительное время подвергавшееся нападкам представление о шарообразности Земли, а с другой,—вызывали необходимость установления размеров Земли для составления морских карт. Однако несовершенство метода и низкая измерительная техника не давали возможности значительно повысить точность измерения по сравнению с измерениями арабов до тех пор, пока голландским ученым Снеллиусом (1591—1626) не был предложен метод *триангуляции*. Метод заключается в том, что между двумя точками, расстояние которых друг от друга требуется определить, разбивается цепь треугольников так, что каждые два смежных треугольника имеют одну общую сторону. Углы в этих треугольниках измеряются. Если теперь измерить одну сторону одного треугольника, то все остальные треугольники могут быть решены, а значит, может быть найдено и интересующее нас расстояние. Таким образом, вместо измерения длины всей дуги оказывается достаточным измерение одной стороны треугольника. Эта сторона может быть короткой, и ее можно выбрать на ровной, удобной для измерений местности, поэтому в новом методе значительно снижались ошибки линейных измерений. Угловые же измерения всегда делались с большей относительной точностью, чем линейные.

Новый метод был успешно применен Пикаром (1620—1682) при измерении дуги от Парижа до Амьена (1669—1670), предпринятом французской Академией наук. Была измерена дуга в $1^{\circ}22'55''$. Ее длина оказалась равной 78 854 туазам, что соответствует в метрической системе мер 153 689 *м*. Отсюда длина одного градуса была получена равной 111 212 *м*. Современное значение длины дуги одного градуса под той же широтой равно 111 221 *м*. Такое близкое совпадение надо считать случайным. Но для своего времени измерения Пикара были все же исключительно точными. Пикар применил для измерения горизонтальных углов зрительные трубы с сеткой нитей, а для оп-

ределения широт — зенитные секторы. Этой классической работой, можно считать, заканчивается первый период в изучении фигуры Земли, длившийся более 2000 лет, период, в течение которого еще не встал вопрос об отклонении Земли от шарообразной формы.

Следующим шагом в развитии представлений о форме Земли явилась теория Ньютона (1643—1727). В третьей части «Математических начал натуральной философии» Ньютон излагает теорию фигуры Земли, основанную на законе всемирного тяготения. Он определяет силу тяжести как равнодействующую сил притяжения и центробежной. Исходя из представления гидростатического равновесия внутри вращающейся жидкой однородной массы в поле сил тяготения, он выводит форму Земли в виде сплюснутой у полюсов сферы, полярный радиус которой должен быть меньше экваториального на величину *сжатия* $\alpha = 1/230$. Этим сжатием Ньютон объяснил, в частности, замеченные к тому времени явления изменения хода маятниковых часов при изменении широты места.

В середине XVIII в. французской Академией наук были выполнены градусные измерения под различными широтами с целью экспериментального решения вопроса о фигуре Земли. Были организованы две экспедиции, выполнившие градусные измерения в экваториальной области — в Перу — и под полярным кругом — в Лапландии на Скандинавском полуострове. Перуанская экспедиция в составе Буге, Годена, Лакондамина работала с 1735 по 1742 г. и выполнила измерения дуги меридиана от 0°2′30″ северной широты до 3°4′30″ южной широты. Для длины дуги в 1 градус было получено значение в 56 748 туазов. Лапландская экспедиция в составе Клеро, Мопертюи, Камюза и Цельзия измерила в течение 1736—1737 гг. дугу в 57′30″ под широтой в 66° и получила значение длины дуги в 1 градус, равное 57 422 туазам. Из ранее выполненного Ж. Кассини большого градусного измерения под Парижем (1718 г.) была известна длина градусной дуги в 57 084 туаза. Эти измерения доказали на опыте справедливость выводов Ньютона о сжатии Земли, кстати говоря, до этого упорно оспаривавшихся рядом ученых и в первую очередь Кассини. Длина градусной дуги под северными широтами оказалась наибольшей, что соответствует наименьшей кривизне и свидетельствует о полярном сжатии. Значение сжатия α Земли по дугам Лапландской и Парижской получилось равным 1/214, а по Перуанской и Парижской — 1/314.

Так было доказано, что фигура Земли представляет собой сплюснутый сфероид с полярной осью, примерно на 20 *км* меньшей экваториальной оси. В 1743 г. вышла в свет работа Клеро «Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатики»,

в которой он, развивая теорию Ньютона, показал, что Земля имеет форму сфероида и что ускорение силы тяжести на поверхности изменяется как функция широты по закону

$$g = g_e(1 + \beta \sin^2 \varphi),$$

где φ — широта места, g_e — ускорение силы тяжести на экваторе, $\beta = \frac{5}{2} q - \alpha$, α — сжатие, $q = \frac{\omega^2 a}{g_e}$ — отношение для экватора центробежной силы к силе тяжести, ω — угловая скорость вращения Земли, a — большая полуось.

Это соотношение получило название теоремы Клеро. Оно дает закон изменения силы тяжести с широтой и связывает распределение силы тяжести на земной поверхности со сжатием Земли.

При выводе этого соотношения Клеро предполагал, что Земля является жидкой, причем плотность ее изменяется по радиусу произвольным образом, но постоянна в бесконечно тонких слоях, ограниченных софокусными эллипсоидами. Теорема Клеро открыла новые возможности в исследовании фигуры Земли. Она дала метод определения сжатия независимо от геометрических элементов путем изучения гравитационного поля Земли. С этого времени начала развиваться гравиметрия как наука, изучающая силу тяжести, и ее распределение на поверхности Земли и определяющая фигуру Земли по известному распределению силы тяжести.

Сто лет спустя, в 1840 г., Стокс обобщил выводы Клеро. Он доказал теорему: *Если заданы уровенная поверхность, целиком охватывающая все массы, общая масса тела и угловая скорость вращения тела, то этим однозначно определяется сила тяжести как на самой уровенной поверхности, так и во всем внешнем пространстве.* Эта теорема дает связь фигуры Земли с силой тяжести на ней. Стокс решил и обратную задачу: по известной силе тяжести построить уровенную поверхность. Эта задача решается не в общем виде. Ход ее решения таков: мы задаемся фигурой Земли в виде сфероида и выводим теорему Клеро независимо от каких-либо предположений о внутреннем строении Земли, т. е. получаем распределение силы тяжести на этом сфероиде. Если бы Земля действительно была сфероидом, то наблюденная сила тяжести точно соответствовала бы нормальной, полученной по уравнению Клеро. Разность силы тяжести — наблюденной на уровенной поверхности и нормальной на сфероиде — характеризует отступления уровенной поверхности от сфероида. Стокс и другие ученые указали путь нахождения по этим разностям (аномалиям силы тяжести) расстояний уровенной поверхности от эллипсоида вращения.

В середине XVIII в. учение о сфероидичности Земли получило всеобщее признание, что привело к новым исследованиям по определению размеров Земли уже как эллипсоида вращения.

Если ранее размеры Земли задавались одной постоянной — радиусом, то теперь Землю характеризуют уже две постоянные — большая и малая полуоси a и b или большая полуось a и сжатие $\alpha=(a-b)/a$. На рубеже XVIII и XIX вв. во многих странах начали развиваться астрономо-геодезические работы для составления карт и обоснования топографических съемок. При этом попутно решались вопросы и о размерах Земли. В настоящее время территории всех технически развитых стран густо покрыты сетями триангуляций, необходимых как для вывода фигуры Земли, так и для картирования страны. Почти каждое из крупных градусных измерений сопутствовалось выводом размеров земного эллипсоида.

Данные о размерах эллипсоидов, полученных в XIX и в первой половине XX в., приводятся в табл. 1.

Таблица 1

Автор	Год определения	a, м	α	$\alpha_{экв}$	λ_0
Деламбр	1800	6 375 553	1 : 334,00		
Вальбек	1819	376 896	1 : 302,78		
Эверест	1830	377 276	1 : 300,81		
Эри	1830	376 542	1 : 299,33		
Бессель	1841	377 397	1 : 299,15		
Теннер	1844	377 096	1 : 302,5		
Шуберт	1861	378 547	1 : 283,0		
Кларк	1866	378 206	1 : 294,98		
Кларк	1880	378 249	1 : 293,47		
Жданов	1893	377 717	1 : 299,7		
Гельмерт	1906	378 200	1 : 298,3		
Хейфорд	1909	378 388	1 : 297,0		
Хейфорд	1909	378 246	1 : 298,8	1 : 38 000	38° E
Красовский	1936	378 210	1 : 298,6	1 : 30 000	10° E
Красовский	1940	378 245	1 : 298,3		

Эллипсоид Хейфорда 1909 г. принят в качестве международного эллипсоида.

Последующее совершенствование методов и измерительной техники, а также накопление материалов измерений постепенно вело к повышению точности результатов. В начале XX в. было обращено внимание на возможную трехосность Земли. Сведения о трехосности и направлении наибольшего экваториального радиуса приведены в табл. 2.

В таблицах $\alpha_{экв}$ — экваториальное сжатие, a_1, a_2 — большая и малая полуоси экваториального эллипса, λ_0 — долгота наибольшего экваториального радиуса.

Таблица 2

Автор	Год	$a_1 - a_2$	λ_0
Гельмерт	1915	230±51	17° W
Беррот	1916	150±58	10 W
Гейсканен	1924	345±38	18 E
Гейсканен	1929	165±57	38 E
Хирвонен	1933	139±16	19 W
Красовский	1936	213	10 E
Гейсканен	1938		25 W
Гейсканен	1938		3 W
Изотов	1948	213	15 E

Однако практического применения в геодезии трехосный эллипсоид не получил вследствие усложнения всех формул. К тому же и определяется он неуверенно.

В связи с работами Клеро и Стокса фигуру Земли начали понимать как уровенную поверхность, т. е. такую поверхность, в каждой точке которой действующая сила тяжести направлена по нормали. Эта уровенная поверхность не совпадает строго с эллипсоидом. Ее уклонения от общего земного эллипсоида характеризуются аномалиями силы тяжести.

В 1873 г. немецкий физик Листинг ввел термин *геоид. Под геоидом понимается уровенная поверхность потенциала силы тяжести, совпадающая на океанах с уровнем невозмущенной воды и продолжающаяся под материками, где она определилась бы уровнем воды в сети каналов, сообщающихся с океаном, при условии сохранения всех масс над ними.*

Понятие геоида как поверхности, представляющей фигуру Земли, сохранилось до наших дней.

Но геоид — поверхность неправильная; для него нельзя составить простые геометрические соотношения. Поэтому геодезические измерения невозможно обрабатывать на геоиде. Например, невозможно написать простое уравнение для передачи координат по азимуту и расстоянию или, наоборот, расстояния по координатам. Для того чтобы обрабатывать геодезические измерения, необходимо пользоваться простой математической поверхностью, но достаточно близкой к геоиду. Такой поверхностью является плоскость для малых площадей (десятки километров) и эллипсоид для значительных площадей. Все геодезические измерения, производящиеся на физической поверхности Земли, должны быть редуцированы на эллипсоид. Это относится к углам, направлениям и расстояниям. Эллипсоид, принятый для обработки триангуляций, на который относятся или редуцируются все геодезические измерения, называется

референц-эллипсоидом или *эллипсоидом относимости*. Путь редуцирования на референц-эллипсоид был таков: измеренные элементы редуцировались на «уровень моря», т. е. на геоид по известным направлениям отвесной линии и высотам. После этого все редуцированные элементы переносились на эллипсоид без изменений. Это так называемый метод развертывания. При этом методе на концах больших рядов триангуляций для большой страны неизбежно накопятся значительные искажения.

В 30-е годы Ф. А. Красовский (1878—1948) предложил метод проектирования. В этом случае измеренные величины должны проектироваться на геоид по известным высотам и далее с геоида на эллипсоид по известным высотам геоида ζ и нормалям к геоиду. При этом элементами, определяющими фигуру Земли, или геоид, являются размеры эллипсоида a и α и высоты ζ геоида над эллипсоидом.

Но, как показали исследования советских геодезистов и в первую очередь М. С. Молоденского, этот путь оказывается неприемлемым по следующим причинам:

1. При проектировании с физической поверхности Земли на геоид мы не знаем хода силовой линии внутри масс Земли и не можем знать его, поскольку неизвестно распределение этих масс.

2. По той же причине мы не знаем и направления нормали на геоиде.

3. Нивелировка дает высоты, лишь приближенно характеризующие расстояние от физической поверхности Земли до геоида (в строгом смысле слова), ибо в силу непараллельности уровенных поверхностей высота зависит от пути нивелирования (рис. 2).

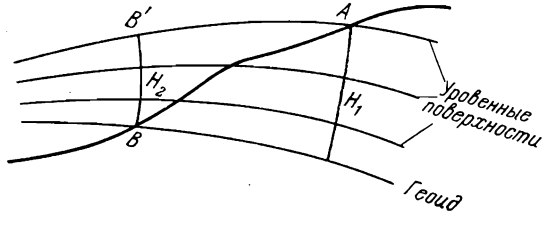


Рис. 2.

Высота точки A над B может быть определена и как H_1, и как H_2, так как при движении по уровенной поверхности от B' к A приращение высот будет равно нулю. Но $H_1 \neq H_2$, а раз так, то геоид в строгом смысле неопределим.

Все это привело М. С. Молоденского к мысли о нецелесообразности рассматривать геоид как фигуру Земли и основную редукционную поверхность. Сейчас разработан иной путь, методически похожий, но теоретически принципиально отличный. Он состоит в том, что определяется поверхность самой Земли, а не геоида. Задача состоит в определении системы высот физической поверхности Земли над эллипсоидом относимости — так называемых *геодезических высот*. Эти высоты разделяются на некоторую нормальную часть и аномалии высот. И то и другое определяется точно и строго из нивелировок и гравиметрических измерений, выполненных на физической поверхности Земли. С помощью этих высот и отклонений отвесных линий возможно строгое проектирование всех измеренных на физической поверхности Земли величин на эллипсоид. Теория этого метода и практические формулы предложены и разработаны в 40—50 гг. М. С. Молоденским. При таком подходе фигура Земли определяется следующими элементами: 1) большой полуосью эллипсоида вращения; 2) сжатием его; 3) совокупностью геодезических высот, распадающихся на нормальную часть и аномалии высот. Все эти элементы принципиально и практически определимы.

При такой постановке проблемы фигура Земли определяется с той необходимой точностью, которая вытекает из требований данной конкретной задачи с учетом, если это нужно, всех неровностей ее поверхности.

Революцию в геодезии сделал запуск искусственных спутников. Использование искусственных спутников Земли дало геодезии методы, позволяющие решать ранее неразрешимые задачи, и чрезвычайно расширило ее возможности, причем спутниковые методы обогатили как геометрическую геодезию, так и физическую — гравиметрическую.

Одной из наиболее важных и очевидных новых задач явилась возможность создания единой геодезической сети, охватывающей весь земной шар, а на первых шагах — возможность геодезической связи континентов. Спутник, движущийся на большой высоте, может наблюдаться одновременно с весьма удаленных пунктов, и таким образом возможно построение триангуляции с очень большими сторонами треугольников, в тысячу и более километров. Но это еще не все. Наблюдая возмущения элементов орбит спутников, оказалось возможным определить координаты самого спутника, координаты станций наблюдения и основных элементов гравитационного поля. Соответственно возникли два метода спутниковой геодезии: геометрический, в котором спутник используется как пассивный элемент, когда спутник служит чем-то вроде сигнала в триангуляции, и орбитальный, или динамический, в котором по возмущениям

элементов орбиты находятся силы, их возмутившие, т. е. гравитационное поле и уклонения его от нормы, а по предвычисленным и наблюденным положениям уточняются координаты станций. Так возникли методы трехмерной спутниковой триангуляции, методы определения центра масс Земли и координат с началом в этом центре масс, появилась возможность связи триангуляций отдельных континентов и создания единой общеземной геодезической системы, а также построения пространственной геодезической системы без необходимого ранее введения вспомогательной отсчетной поверхности в виде референц-эллипсоида. Широкие перспективы открыли спутники и в физической геодезии, изучающей гравитационное поле и фигуру Земли. Уже первые наблюдения возмущения орбит спутников позволили уточнить сжатие Земли и определить его на два порядка выше, чем это позволяли сделать гравиметрический или геометрический методы. Этот способ дает возможность также установить главные крупные черты отклонения формы Земли от общего гравиметрического эллипсоида; он подтвердил и открыл полярную и экваториальную асимметрию Земли.

Использование орбитального спутникового метода изменило сам подход к изучению гравитационного поля и фигуры Земли. Наиболее употребляемым методом стал метод разложения гравитационного поля по сферическим гармоникам, причем начали принимать во внимание гармоники до двадцатого и даже более высоких порядков.

Однако чрезмерное увлечение спутниковой геодезией на первых порах, когда некоторые специалисты считали, что она полностью заменит наземные методы, прошло, и сейчас наука развивается гармонически, используя и сочетая как наземные, так и космические методы.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ ИЗУЧЕНИЯ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ

Изучением формы и размеров Земли геометрическим методом занимается геодезия. Из геодезии выделяют часть, в которой рассматриваются методы измерения Земли с учетом кривизны ее поверхности. Эту часть называют *высшей геодезией*. Основной задачей высшей геодезии считают определение формы и размеров Земли. Однако в понятие высшей геодезии входит и много других задач: определение координат пунктов и расстояний на Земле, построение геодезических сетей, теория и практика линейных и угловых измерений, нивелировки, методы обработки геодезических измерений и уравнивание и т. п. В настоящей книге, посвященной теории фигуры Земли, из всей совокупности задач высшей геодезии мы, естественно, должны выделить именно эту главную ее задачу.

В первой части книги излагаются методы решения основной задачи высшей геодезии чисто геометрическим путем. Основным здесь является представление Земли в первом приближении в виде эллипсоида вращения, наилучшим образом подходящего к истинной Земле, и определение параметров такого эллипсоида из геометрических градусных измерений.

На этом этапе, пока мы еще не познакомились с понятиями физической геодезии, т. е. связью формы Земли с силой тяжести, уклонения истинной физической поверхности Земли от эллипсоида относимости практически определимы только приближенно, с помощью системы высот точек физической поверхности Земли над уровнем моря и высот уровня моря над избранным эллипсоидом относимости. Методы решения этой задачи даются здесь лишь в кратком изложении, поскольку геометрическое решение этой задачи сложно в практическом осуществлении и применяется редко.

Поэтому, не предполагая подменять курсы высшей геодезии, в этой части книги мы изложим основы сфероидической геодезии, метод построения градусных сетей и вывода из них параметров земного эллипсоида. Для лучшего понимания, как это делается практически, в книге фрагментарно дано понятие основных геодезических работ, производимых на местности для градусных измерений. Все остальные разделы высшей геодезии сюда не вошли. Не включена в этот раздел и та часть спутни-

ковой геодезии, которая, используя спутники как визирные цели, решает геодезические задачи также геометрическими методами.

С таким же правом, как разделение предмета теории фигуры Земли на три части: геометрическую (геодезическую), физическую (гравиметрическую) и астрономическую, мы могли бы разделить его на два подраздела: геометрический и динамический, разбив таким образом спутниковый метод на две части, отнеся к первой, геометрической, ту его часть, в которой спутники играют пассивную роль, а ко второй вместе с гравиметрическими методами также метод возмущения орбит в неоднородном гравитационном поле планет. Однако спутниковые методы имеют специфику, роднящую их и в то же время отличающую от наземных методов. Это дает право объединить геометрический и динамический спутниковые методы, выделив их в специальный раздел астрономических методов изучения фигуры Земли и отделив от двух классических путей решения проблемы: геометрического и гравиметрического.

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ СПОСОБЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ

Геометрический способ изучения фигуры Земли содержит в себе четыре основные задачи, являющиеся одновременно четырьмя основными разделами высшей геодезии. Это: 1) измерения углов и расстояний между пунктами физической поверхности Земли, 2) выбор референц-эллипсоида, наилучшим образом представляющего Землю в изучаемом районе, 3) редуцирование измеренных величин на референц-эллипсоид, 4) решение геодезических задач на поверхности эллипсоида. Возможен и в последующем излагается способ решения геодезических задач непосредственно по измерениям, выполненным на физической поверхности Земли (способ М. С. Молоденского), минуя редукцию. Но и в том, и в другом способе исходными данными для решения задач являются геодезические измерения. В этой главе в сжатом виде дается общее представление о видах геодезических работ, необходимых для решения задачи о фигуре Земли.

§ 1. Триангуляция

Основой всех геодезических работ служит сеть опорных пунктов с известными координатами и ориентировкой, т. е. с известными широтой, долготой и азимутом некоторого фикси-

рованного направления. Если бы Земля была правильным эллипсоидом с правильным эллипсоидальным распределением масс и для нее направление отвесной линии всегда совпадало с направлением нормали к поверхности, то сеть таких опорных пунктов можно было бы получить с помощью астрономических измерений. Однако наличие уклонений отвесных линий от нормалей к эллипсоиду приводит к несовпадению координат на эллипсоиде с координатами тех же точек, определенных астрономически. Это приводит к необходимости установления системы координат на референц-эллипсоиде — так называемой системы геодезических координат — и построения системы опорных точек с известными геодезическими координатами. Такая геодезическая сеть, в которой известны координаты точек и расстояния между ними, в принципе дает все необходимое для определения сжатия и большой полуоси земного эллипсоида. В самом деле, знание длины одной градусной дуги позволяет определить радиус шаровой Земли, а знание двух градусных дуг под разными широтами позволяет определить эллипсоид вращения. Наличие же опорной геодезической сети равносильно знанию большого числа градусных дуг под различными широтами. Опорная геодезическая сеть строится методом триангуляции, в котором линейные измерения заменяются более точными и более простыми угловыми. Для определения линейного масштаба триангуляции производятся линейные (базисные) измерения.

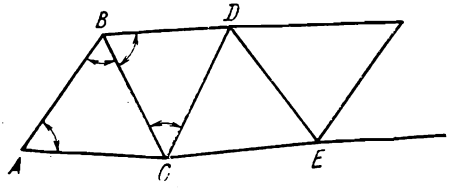


Рис. 3.

Основная идея триангуляции состоит в следующем. На местности в точке A с известными координатами производится измерение угла между направлениями на две другие точки B и C (рис. 3), служащие вершинами треугольника. Так же измеряется угол между направлениями BA и BC. Если кроме того, известна длина одной стороны треугольника ABC, в данном случае расстояние AB, то, решая методами тригонометрии треугольники, находят длины сторон AC и BC. Далее измеряют углы DBC и DCB и, зная сторону BC, решают треугольник BCD и т. д. По известным расстояниям и направлениям и при известных координатах исходной точки A находят последовательно координаты точек B, C, D, E ... Координаты исходного пункта принимаются равными астрономическим или устанавливаются по последним с учетом уклонений отвесных линий в исходной точке. Длина выходной стороны AB определяется с помощью специальных линейных измерений, называемых базис-

ными. Таким образом устанавливается сеть опорных геодезических точек, необходимая как для решения задачи о форме и размерах Земли, так и для проведения топографических съемок и составления карт. Создание высокоточных триангуляционных сетей является весьма трудоемкой и дорогостоящей работой. Поэтому для территорий больших стран вместо сплошной высокоточной триангуляции строится основной триангуляционный каркас, так называемые ряды триангуляции I класса,

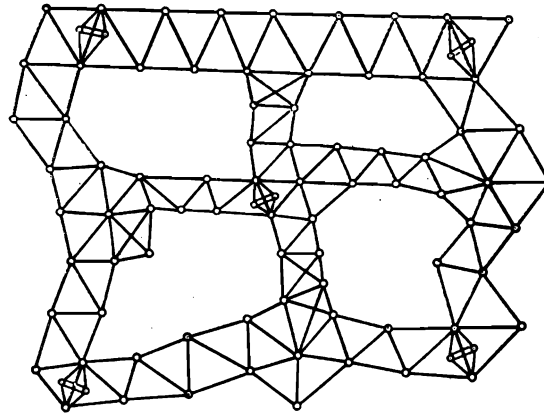


Рис. 4.

составляющие замкнутые полигоны (рис. 4). Эти ряды располагаются примерно вдоль параллелей и меридианов на расстояниях 200—250 *км*. В пересечениях рядов триангуляции I класса, или, что то же самое, в вершинах полигонов триангуляции, с помощью базисных измерений определяются выходные стороны и на концах последних определяются астрономические координаты и азимуты. Кроме того, для повышения точности и для придания большей жесткости всей триангуляционной системе на протяжении каждой стороны полигона, так называемом звене триангуляции, устанавливаются 1—2 астропункта, т. е. в избранных вершинах треугольников, отстоящих от базисов или от других астропунктов на 70—100 *км*, определяются астрономические координаты.

В этот основной жесткий геодезический каркас вписываются сплошные сети треугольников триангуляции второго класса, имеющие стороны от 7 до 20 *км*. Не реже чем через каждые 25 треугольников равномерно по всей заполняющей сети II класса определяются базисные стороны. При этом обязательным является установление базисной стороны в середине полигона I класса. На концах базисных сторон определяются азимуты и астро-

номические координаты. Относительно пунктов I и II классов определяются пункты государственных сетей триангуляции III и IV классов, которые могут образовывать триангуляционные сети, имеющие связи со всеми ближайшими пунктами того же или высшего класса. Триангуляционные пункты III и IV классов являются непосредственно опорными точками при выполнении любых технических задач: при ориентировке аэрофотосъемки, обосновании топографических съемок, ориентировке геологических, гравиметрических, планировочно-строительных и других работ. По мере снижения класса триангуляции уменьшаются длины сторон треугольников, снижается точность измерений. Принятие такой схемы построения опорных геодезических сетей существенно удешевляет работы и обеспечивает высокую жесткость всего построения.

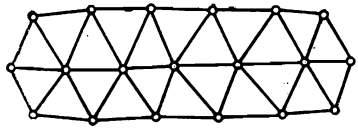


Рис. 5.

В табл. 3 приведены основные требования к триангуляциям различных классов в соответствии с инструкцией о построении государственной геодезической сети Союза ССР 1966 г.

Таблица 3

	I класс	II класс	III класс	IV класс
1. Длина звена, *км*	200	—	—	—
2. Число базисов	1 на звено	1 через 25 треугольников	1 через 20—25 треугольников	1 через 20—25 треугольников
3. Число сторон между базисными сетями	10	20—25	20—25	—
4. Длина базиса, *км*	6—15	6—15	—	—
5. Точность измерения базиса	1 : 1 000 000	1 : 1 000 000	—	—
6. Точность определения базисной стороны	1 : 400 000	1 : 300 000	1 : 200 000	1 : 150 000
7. Длина сторон, *км*	⩾20	7—20	3—5	2
8. Точность измерений координат:				
широты B	0″,3	0″,4	—	—
долготы L	0^s,03	0^s,03	—	—
азимута A	0″,5	0″,5	—	—
9. Точность измерения углов	0″,7	1″,0	1″,5	2″

Астрономические пункты располагаются парами, по одному на двух смежных пунктах геодезической сети.

Часто при проведении триангуляции цепь простых треугольников заменяется более сложными фигурами. В некоторых странах принято для увеличения жесткости геодезической сети строить ее из более сложных фигур, например, из рядов двойных треугольников (рис. 5), или из рядов центральных фигур (рис. 6). Часто применяются построения из рядов геодезических четырехугольников (рис. 7).

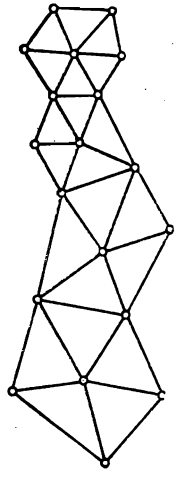


Рис. 6.

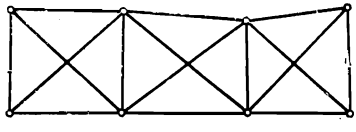


Рис. 7.

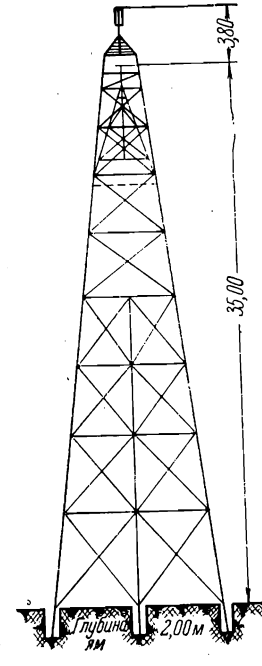


Рис. 8.

В СССР геодезические сети строятся в основном из рядов простых треугольников, по форме близких к равносторонним. Увеличение жесткости системы достигается оснащением этой сети большим числом высокоточных астропунктов, азимутальных определений и привлечением гравиметрической съемки.

Переход к более сложным геодезическим фигурам бывает необходим при переброске рядов через горы или еще какие-либо препятствия, где ухудшаются условия видимости соседних геодезических пунктов.

Основные ряды триангуляции обычно строятся вдоль больших рек, железных или шоссейных дорог, что удешевляет строительные работы. Для выполнения угловых измерений в вершинах треугольников строятся специальные сооружения —

так называемые сигналы (рис. 8), которые служат одновременно визирной целью и местом установки инструмента. Установленный на сигнале угломерный инструмент располагается высоко над местностью, так что визирный луч проходит на достаточной высоте (6—8 *м*) над препятствиями. Это предохраняет от искажающего воздействия непостоянства плотности воздушных масс близ препятствий. Если вспомнить, что длина стороны геодезического треугольника составляет 20—30 *км* и учесть необходимую высоту визирного луча над препятствием, то можно подсчитать, что высота сигналов в равнинной открытой местности должна быть порядка 20—25 *м*. В залесенной местности эта высота увеличивается до 40 *м* и более.

В случае пересеченной местности используются местные возвышенности, позволяющие уменьшать высоту сигналов. К сигналу предъявляются очень высокие требования в отношении его жесткости. Это понятно, если иметь в виду, что с него должны быть измерены углы с ошибкой порядка 0″,7. Поэтому сигнал представляет собой сложное деревянное или металлическое сооружение. Таким образом, выполнению триангуляционных работ предшествует рекогносцировочная и строительная работа, состоящая из выбора на местности вершин треугольников, расчета высот сигналов и строительства сигналов. Но сигнал не является долговременным сооружением, более того, часто строятся разборные сигналы. Для того чтобы вершины треугольников были зафиксированы на местности достаточно неподвижно и на долгие времена, под сигналом закладываются так называемые центры — трудно разрушающиеся подземные сооружения с маркой, указывающей точное место, к которому относятся координаты данной точки.

Все угловые измерения, а также астрономические определения, выполненные с верхней площадки сигнала, приводятся к центру, который и является пунктом триангуляции.

§ 2. Базисы триангуляции

Для того чтобы в триангуляции от непосредственно измеряемых углов перейти к длинам сторон треугольников, необходимо измерить длину хотя бы одной стороны одного треугольника — *выходной стороны*. Однако длина сторон треугольников составляет 20—30 *км* и измерение такой большой длины на местности с относительной точностью 10^{-6} весьма затруднительно. Поэтому обычно на местности измеряется длина некоторой линии — *базиса*, удобно расположенного, имеющего длину порядка 6—8 *км*. С помощью базиса и углов, измеренных в вершинах треугольников базисной сети, вычисляется длина выходной стороны. На рис. 9 показан пример схемы базисной сети. AB — выходная сто-

рона триангуляции, ab — базис. Измеренные базисы редуцируются к референц-эллипсоиду, например, с помощью приближенного соотношения

$$\frac{d_1}{d} = \frac{R}{R+H}; \quad d_1 = d - d\frac{H}{R}, \tag{1.1}$$

где d_1 — длина базиса на эллипсоиде относимости, d — горизонтальное проложение измеренного базиса на местности, R — радиус Земли, H — высота места измерения базиса над эллипсоидом

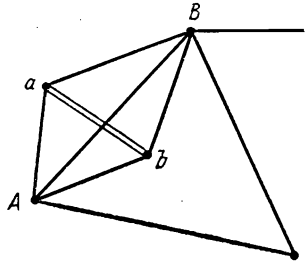


Рис. 9.

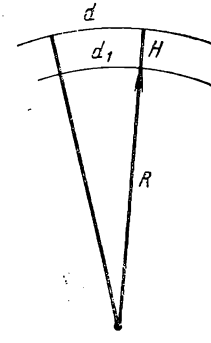


Рис. 10.

(рис. 10). Измерения базисов производятся с помощью специальных базисных приборов или дальномеров. Базисные приборы состоят из инварных мерных проволок длиной в 24 или 48 *м*, которые натягиваются с постоянной силой на специальных штативах. Концы проволок имеют штриховые шкалы, отсчеты которых делаются против специально устанавливаемых вдоль базиса штативов с целиками. Длина самой мерной проволоки систематически сравнивается на специальном компараторе с эталонной единицей длины. Дальномер систематически эталонируется на эталонном базисе.

Система мер длины до настоящего времени основывается на условной единице — Парижском архивном метре, приближенно равном 1/40 000 000 длины меридиана. Этот эталон был отлит из платины в 1800 г. в Париже, и с ним должны были сравниваться все мерные приборы. В 1875 г. по образцу архивного метра были отлиты из иридиевой платины 31 метр-прототип. При сравнении их метр-прототип № 6 оказался совпадающим в пределах точности измерений с исходным образцом. Его длина была принята за международный метр. Остальные метры-прототипы получили поправки для приведения их длин к международному и были разосланы в различные страны, для которых служат эталоном длины. В Россию попали метры-прототипы № 11 и № 28.

В порядке службы мер и стандартов метры-прототипы сличаются с парижским образцом № 6 раз в 25 лет. Внутри страны эталоны, по которым производится компарирование мерных проволок, ежегодно сличаются с метрами-прототипами.

§ 3. Понятие об уравнивании триангуляции

При построении триангуляции измеряется значительно больше величин, чем требуется для выполнения расчетов. Так, для решения треугольника достаточно знания одной стороны и двух углов, в триангуляции же измеряется три угла. Для расчета всей триангуляции достаточно измерить один базис, а базисы измеряются в конце каждого звена и т. д. Все это приводит к избыточным условиям, которые позволяют вычислить вероятнейшие поправки измеренных углов треугольников, получить в результате более точную триангуляцию и оценить ее точность.

Рассмотрим схематично возникающие при построении триангуляции условия. Пусть триангуляция состоит из n точек (вершин треугольников) A, B, C ... и имеет выходную сторону S. Для определения положения всех n точек необходимо измерить $2(n-2)$ углов. (Точки A и B известны без измерения углов; для определения каждой из последующих $n-2$ точек надо измерить 2 угла). Всего имеем в сети $n-2$ треугольников и $3(n-2)$ углов. Число избыточных углов будет $3(n-2)-2(n-2)=n-2$. Обозначим избыточные углы через φ, а необходимые через α. Каждый угол φ может быть выражен через углы α:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= f_1(\alpha_i), \\ \varphi_2 &= f_2(\alpha_i), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_{n-2} &= f_{n-2}(\alpha_i). \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

Составим разности избыточных углов (измеренных и вычисленных через них):

$$\varphi_{k\text{выч}} - \varphi_{k\text{изм}} = \Delta\varphi_k.$$

Теперь можно написать значения исправленных измеренных углов $\varphi_{k\,\text{изм}}+\Delta\varphi_k$. Они могут быть вычислены с помощью уравнений (1.2), однако через исправленные значения α, т. е. имеем систему

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 + \Delta\varphi_1 &= f_1(\alpha_i + \Delta\alpha_i), \\ \varphi_2 + \Delta\varphi_2 &= f_2(\alpha_i + \Delta\alpha_i), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_{n-2} + \Delta\varphi_{n-2} &= f_{n-2}(\alpha_i + \Delta\alpha_i), \end{aligned}\right\} \tag{1.2'}$$

где i меняется от 1 до $2n-4$.

Система (1.2′) дает $n-2$ условий и содержит $2(n-2)$ неизвестных поправок углов триангуляции. Для нахождения поправок углов надо составить еще по крайней мере $n-2$ условий.

Перечислим некоторые из таких условий.

1. Каждый треугольник имеет три измеренных угла *1*, *2*, *3* (рис. 11). Сумма этих углов должна составить ровно 180° плюс сферический избыток. Поскольку измерения не точны, в каждый угол должна быть введена поправка $\Delta 1$, $\Delta 2$, $\Delta 3$. Тогда получаем условие $1+\Delta 1+2+\Delta 2+3+\Delta 3=180°$. Это так называемые условия фигур.

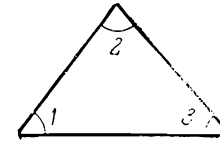


Рис. 11.

В нашей цепи таких условий будет по числу треугольников $n-2$.

2. При наличии в сети триангуляции центральных фигур возникают условия горизонта, состоящие в том, что сумма углов вокруг центральной точки равна 360°. Число таких условий равно числу центральных фигур.

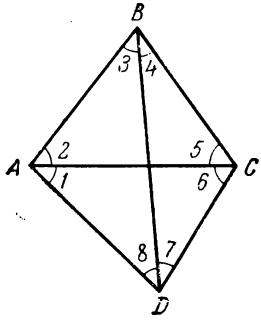


Рис. 12.

3. При наличии диагоналей, связывающих вершины двух соседних треугольников, возникают боковые условия, выражающие то, что диагональ AC (рис. 12), определенная из треугольника ABC, совпадает с диагональю, определенной из треугольника ADC.

Из треугольника ABC

$$\frac{AB}{\sin 5}=\frac{AC}{\sin(3+4)},\quad AC=\frac{AB\sin(3+4)}{\sin 5}. \tag{1.3}$$

Из треугольника ADC

$$\frac{AD}{\sin 6}=\frac{AC}{\sin(7+8)},\quad AC=\frac{AD\sin(7+8)}{\sin 6}. \tag{1.4}$$

Во втором уравнении выразим AD через AB, полученное из треугольника ABD:

$$\frac{AB}{\sin 8}=\frac{AD}{\sin 3},\quad AD=\frac{AB\sin 3}{\sin 8}.$$

Тогда (1.4) представим в виде

$$AC=\frac{AB\sin 3\sin(7+8)}{\sin 6\sin 8}. \tag{1.4′}$$

Так как диагонали, вычисленные из разных треугольников,

равны, то из (1.3) и (1.4′), деля одно на другое, получим

$$\frac{\sin 5}{\sin(3+4)} \cdot \frac{\sin 3}{\sin 8} \cdot \frac{\sin(7+8)}{\sin 6} = 1. \qquad (1.5)$$

Это соотношение справедливо в случае, если углы точны. Так как измеренные углы ошибочны, то уравнение (1.5) имеет место для углов с внесенными в них поправками:

$$\frac{\sin(5+\Delta 5)}{\sin(3+\Delta 3+4+\Delta 4)} \cdot \frac{\sin(3+\Delta 3)}{\sin(8+\Delta 8)} \cdot \frac{\sin(7+\Delta 7+8+\Delta 8)}{\sin(6+\Delta 6)} = 1. \qquad (1.5')$$

Условие (1.5′) содержит искомые поправки углов. Число таких условий равно числу геодезических четырехугольников в сети.

4. Каждый новый базис дает также одно уравнение для нахождения поправок углов, выражающее то условие, что длина второго базиса, вычисленная через исходный базис и цепь

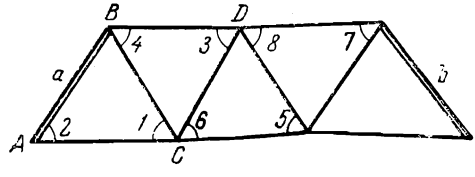


Рис. 13.

треугольников, равна измеренной длине. Пусть в звене триангуляции (рис. 13) a — исходный базис, b — второй базис в конце звена. По теореме синусов

$$BC = \frac{a \sin 2}{\sin 1}, \quad CD = \frac{BC \sin 4}{\sin 3} = a \frac{\sin 2}{\sin 1} \cdot \frac{\sin 4}{\sin 3}$$

и т. д.

$$b = a \frac{\sin 2}{\sin 1} \cdot \frac{\sin 4}{\sin 3} \cdot \frac{\sin 6}{\sin 5}. \qquad (1.6)$$

Условие (1.6) справедливо при точных углах. Поэтому в нем, так же как и в предыдущем случае, углы $1, 2, 3, \ldots$ надо заменить суммами измеренных углов и их поправок $1+\Delta 1$, $2+\Delta 2$, $3+\Delta 3$, ... Число таких условий равно числу базисов без одного.

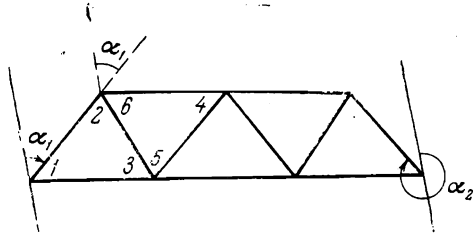


Рис. 14.

5. Аналогичное условие можно написать для азимутов — так называемое азимутальное условие. Оно состоит в том, что азимут α_2, переданный по цепи треугольников от α_1, должен равняться измеренному азимуту α_2 (рис. 14). Из рис. 14 видно,

что $\alpha_1+180°-2-180°+5+180°-8-180°+11\ldots=\alpha_2$ или

$$\alpha_2=\alpha_1-2+5-8\ldots \qquad (1.7)$$

В случае нечетного числа треугольников к правой части уравнения (1.7) следует добавить 180°. Условие (1.7), так же как и предыдущее, должно быть записано для исправленных углов $2+\Delta 2$, $5+\Delta 5$ и т. д. Общее число азимутальных условий равно числу определенных азимутов без одного.

6. В каждом полигоне возникают 4 полигональных условия для базисов, широт, долгот и азимутов, состоящие в том, что переданные по полигону и замкнутые на исходные базисы широты, долготы и азимуты должны равняться исходным.

Кроме перечисленных, возникают еще некоторые условия. Все эти условия дают систему условных уравнений, из которой по способу наименьших квадратов находят вероятнейшие поправки в значении углов триангуляции, после чего триангуляция считается жесткой и используется как опорная геодезическая система и как основа для вывода размеров земного эллипсоида.

§ 4. Методы измерения расстояний. Дальномеры

До последнего времени наиболее трудоемкими в геодезических работах являлись линейные измерения. При этих измерениях трудно достижимы высокие точности, требуемые в геодезии. Поэтому и был введен метод триангуляции, позволяющий в основном все сводить к угловым измерениям. Однако геодезия не может ограничиться только угловыми измерениями, как бы ни были они точны; чтобы определить положение вершин треугольников, помимо углов должна быть известной длина хотя бы одной стороны.

Первоначально линейные измерения осуществлялись многократным откладыванием мерного прибора: жезла, ленты, цепи, проволоки. Этот метод с течением времени усовершенствовался настолько, что его относительная точность достигла $1\cdot10^{-6}$. Но в силу трудоемкости метода его применение ограничилось измерением длин базисов триангуляции. В грубой модификации этот метод линейных измерений применяют в топографии. Сами мерные приборы: жезлы, проволоки и т. п. сравнивались на эталонном компараторе с эталонным жезлом.

Для повышения точности при таком сравнении применялся как простой микрометрический метод, так и интерференционный. Интерференционный метод нашел применение и при полевых измерениях расстояний. Этот метод основан на явлении интерференции света, которая состоит в том, что при наложении линейно поляризованных волн происходит ослабление или усиление интенсивности света в зависимости от соотношения фаз склады-

ваемых световых волн. Если перемещать источник одной из складываемых световых волн, то суммарная освещенность будет изменяться от максимума до минимума при смещении одного из источников вдоль по лучу на половину длины волны. Таким образом, интерференционный метод в принципе позволяет производить измерения с точностью до десятых долей длины волны. Явление интерференции давно используется в геодезии для линейных измерений небольших расстояний. Если использовать волны большой длины, то метод интерференции, очевидно, можно применить для измерения больших расстояний. Такие волны большой длины предоставляет нам радио.

Широкое распространение получил класс оптических дальномеров параллактического действия, основанных на измерении угла, под которым видна точно калиброванная длина рейки. Однако точность подобных приборов порядка 10^{-4}, что делает их пригодными только для топографических съемок.

Наиболее удобными, точными и имеющими большие перспективы оказались дальномеры, основанные на принципе измерения времени распространения электромагнитных колебаний в световом и радиодиапазоне от источника, где производится наблюдение, до объекта, расстояние до которого измеряется, и обратно. В этом случае расстояние может быть вычислено по формуле

$$D = \frac{1}{2} vt,$$

где v — скорость распространения сигнала, t — время, протекшее от момента посылки сигнала до его приема в том же пункте, т. е. время распространения сигнала на двойное измеряемое расстояние.

Этот метод стал приемлем только тогда, когда развитие электронно-измерительной техники сделало возможным измерение коротких интервалов времени с точностью порядка 10^{-10} *сек*. Это понятно, если вспомнить, что скорость распространения света составляет около 300 000 *км/сек*, т. е. 10 *км* свет пройдет приблизительно за 10^{-5} *сек*. Радиоволны распространяются со скоростью, близкой к скорости света. В геодезических дальномерах используются частоты $3 \div 8 \cdot 10^{14}$ *Гц*, что соответствует длине волны 0,4 — 0,9 микрон и радиочастоте от 40 до 0,1 *Мгц*, т. е. в длинах волн это дает диапазон от нескольких миллиметров до 3000 *м*. Дальномеры, в которых используются световые колебания, называются *светодальномерами*, приборы, в которых используются радиоволны,— *радиодальномерами*. Светодальномеры получили большое распространение после того, как в 1943 г. шведским физиком Бергстрандом был сконструирован первый электрооптический дальномер с большим радиусом действия, по-

лучивший название *геодиметр*. Эти приборы в усовершенствованном варианте позволяют измерять расстояния до 15 *км*. Электрооптические дальномеры обеспечивают сейчас первоклассные геодезические работы. Вообще электрооптические дальномеры можно разделить на три категории по точности и обеспечиваемым задачам. Высокоточные дальномеры для основных геодезических работ обеспечивают точность $2 \div 3 \cdot 10^{-6}$, имея дальность действия в несколько десятков километров. Эти приборы применяются при построении триангуляции и полигонометрических ходов I и II классов. Другая категория приборов имеет дальность действия 8—20 *км* и точность порядка $10^{-5} — 4 \cdot 10^{-6}$ и может применяться при выполнении триангуляции или полигонометрии III класса. Наконец, легкие приборы, часто называемые топографическими, обеспечивающие рядовые геодезические работы и построение опорных сетей III и IV классов, имеют дальность 0,1 — 2,2 — 8 *км* и точность $10^{-4} — 4 \cdot 10^{-5}$.

Следующий шаг в улучшении систем дальномеров, повышении точности и увеличении дальности был сделан, когда в качестве источника света были применены лазеры. Лазерные установки позволили с невиданной доселе точностью определить расстояние до Луны.

§ 5. Понятие о радиогеодезических методах определения координат

Последнее время широкое распространение в геодезии получили радиодальномеры, основанные на измерении скорости распространения радиоволн. Лучшие типы таких дальномеров обеспечивают дальность измерений в два-три десятка километров с точностью, необходимой для построения триангуляции I класса. На этом же принципе измерений основаны различные навигационные системы, предназначенные для определения точных координат корабля в море, самолета или спутника.

Применяются два метода радиогеодезических измерений расстояний: импульсный и фазовый. Измерения возможны в случае прямой видимости предмета. При импульсном методе расстояние до объекта определяется временем распространения радиоволн до объекта и обратно. Скорость распространения волн при этом считается известной. Этот метод получил широкое распространение в практике американских и английских геодезических работ. Фазовый метод основан на использовании интерференции радиоволн.

Известно, что фазовая скорость радиоволн диапазона 150—500 *м* практически постоянна на расстояниях до 200 *км* и равна 299 600 *км/сек* (с точностью до $2 \div 3 \cdot 10^{-4}$).

В пространстве, окружающем единичный излучатель, создается фазовое поле, характеризующееся тем, что разность фаз колебаний в точке излучения в любой точке поля определяется только ее координатами. В случае изотропной среды разность фаз ψ определяется только расстоянием R от центра излучения. Если f — частота (число колебаний в секунду), $\omega = 2\pi f$ — циклическая частота (число циклов в секунду), v — скорость распространения колебаний, R — расстояние от центра излучения, то разность фаз ψ, приобретенная колебаниями на пути R, будет $\psi = R\frac{\omega}{v}$. В самом деле,

$$v = \frac{R}{t};\ \psi = \frac{2\pi f}{R}Rt = 2\pi ft.$$

Если бы мы могли измерить полный фазовый угол ψ, задача была бы решена, поскольку ω и v — величины известные.

В основу фазовых радиоинтерференционных методов определения расстояний положено измерение фазовых соотношений в поле передатчиков, излучающих когерентные колебания. Поскольку практически осуществить излучение на одной и той же частоте (из двух точек) невозможно, применяют способ трансформации частот. Одна из станций, находящаяся в точке A, излучает колебания с частотой f. Другая станция, расположенная в B на расстоянии R_{AB}, принимает колебания f, трансформирует их в колебания частоты $\frac{n}{m}f$ и излучает последние в пространство. В этом случае излучения обоих передатчиков когерентны и разность фаз между излучаемыми колебаниями может быть измерена по фигурам Лиссажу в электроннолучевой трубке.

Существуют различные способы фазовых геодезических радиоизмерений. Рассмотрим коротко основные из них.

Метод радиодальномера. Обе радиостанции (задающая и отражающая) неподвижны. Будем изменять частоту излучения постепенно от $\omega_1^{н}$ до $\omega_1^{к}$ и одновременно изменять частоту излучения другого передатчика так, чтобы в каждый момент сохранялось неизменным отношение

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n}.$$

В силу изменения частот будут меняться и фазы. Пусть h — число полных циклов, на которое изменится фаза при переходе от частоты $\omega_1^{н}$ к $\omega_1^{к}$, и пусть $\psi_н$ и $\psi_к$ — начальный и конечный фазовые углы, которые мы можем непосредственно измерить. Тогда для $\psi_н$ и $\psi_к$ мы получим следующие два уравнения:

$$z\theta + \psi_н = 2\omega_1^{н}\frac{R_{AB}}{v},\quad (z+h)\,\theta + \psi_к = 2\omega_1^{к}\frac{R_{AB}}{v},$$

где θ — изменение фазы за один цикл, z — число целых циклов изменения фазы θ, ψ — часть целого цикла, получаемая непосредственно из измерений.

Из этих двух соотношений можно исключить z и вычислить R_{AB}:

$$R_{AB} = \frac{v}{2\Delta\omega_1}(h\theta + \psi_к - \psi_н).$$

Для однозначного определения искомого пункта необходимо иметь три приемно-передающие станции. Одна из этих станций задающая и две отражающие. Отражающие станции являются базисными. Определяются координаты задающей станции.

Метод радиолага (метод перемещающегося интерферометра). Частоты ω_1 и ω_2 остаются неизменными. Задающая приемно-передающая станция расположена на движущемся объекте, координаты которого определяются. При изменении расстояния между задающей и отражающей станциями разность фаз можно определить путем непрерывного счета числа фазовых циклов в течение всего времени перемещения задающего передатчика от известной исходной точки.

При работе радиолагом линии равных фаз представляют собой концентрические окружности с центром у отражающих станций. Плотность изофаз при работе методом радиолага всюду одинакова, что означает, что точность метода не зависит от расстояния до отражающих станций, но зависит от углов пересечения изофаз.

Метод радиолага неудобен, поскольку на двух базисных станциях может работать только одна станция, координаты которой определяются.

Метод фазового зонда. Метод состоит в том, что все три передающие станции находятся в фиксированных точках, а движущийся объект имеет только приемник.

Таким образом, если при перемещении приемников непрерывно наблюдать за приращением фазового угла, можно вычислить приращение разности расстояний до опорных точек *1* и *2*. Зная разности расстояний от исходной точки ξ_0 до опорных, можно вычислить разность расстояний $(R_{A\xi} - R_{B\xi})$ искомой точки ξ до опорных.

Этот метод применяется, в частности, для определения координат корабля.

Для однозначного определения положения точки ξ необходимо иметь вторую систему передающих станций C и D и на приемном пункте второй сдвоенный приемник.

Приведем далее краткое описание основных радиогеодезических систем, получивших распространение.

Система Шоран (Short Range Navigation). Эта американская система основана на импульсном методе, применяется

как аэронавигационная система ближнего действия с радиусом до 400—500 *км*. Система состоит из комплекта станций — двух наземных базисных и одной самолетной. Самолетная станция является задающей. Наземные станции преобразуют полученные от задающей станции импульсы и излучают их обратно. Эти преобразованные импульсы вновь принимает самолетная станция. Расстояние D от самолета до базисной станции определяется по формуле $D=vt/2$, где v — известная скорость распространения волн, t — время. Длина волны, на которой работает станция, 1,2—1,4 *м*.

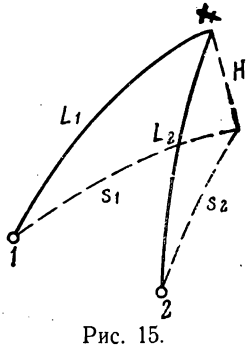


Рис. 15.

Для определения координат самолета с помощью системы Шоран измеренные наклонные дальности L проектируются высотами H на эллипсоид и по длинам проекций, являющихся геодезическими линиями s_i, определяются искомые величины (рис. 15).

Точность определения расстояний системой Шоран ± 20 *м*, причем точность почти не зависит от расстояния. Относительная точность при расстояниях порядка в 500 *км* составляет 1 : 25 000.

Система Хиран (Hight accuracy Shoran) является усовершенствованием системы Шоран. Она работает на более коротких волнах, отдельные узлы системы термостатированы, улучшена стабилизация электронных схем. Дальность действия системы Хиран до 800 *км*. Точность порядка 1 : 100 000, для больших расстояний 1 : 150 000.

Система Джи — английская аэронавигационная импульсная система; состоит из трех наземных передающих станций и самолетной станции, на которой производятся измерения. Система Джи работает на принципе определения разности времени прихода радиоимпульсов от двух станций, составляющих пару. Каждой измеренной разности расстояний соответствует гипербола с фокусами в наземных станциях пары. Положение самолета определяется точкой пересечения двух гипербол, соответствующих двум парам станций. Семейства соответствующих гипербол заранее наносятся на навигационные карты, на которые сразу же по получении сигнала наносится положение самолета. Система работает на волне длиной 10 *м*.

Система Джи-H — усовершенствованная система Джи — работает в диапазоне сантиметровых волн.

Система Декка — английская навигационная система, работающая по принципу фазового зонда. Система состоит из трех наземных базисных станций и приемной станции на корабле или самолете, координаты которого определяются. Система работает на длине волны 2000—5000 *м*. Базисные станции пере-

дают когерентные колебания. Разность фаз колебаний, принятых от двух станций, характеризует разность расстояний до этих станций. Линии равных разностей фаз, являющиеся гиперболами, заранее наносятся на карту, по которой определяется положение корабля. Дальность действия системы Декка ночью — до 500 *км*, днем — до 1500—2000 *км*. Точность при дальностях порядка 500 *км* — 1 : 10 000. При максимальных дальностях точность падает до 1 : 3000. Эта система широко применяется при геодезических и геофизических съемках.

Принцип измерения расстояний радиогеодезическими системами. Связи континентов. Радиогеодезические системы Шоран и Хиран применяются для измерения расстояний между удаленными точками, в частности, для связи континентов. Метод осуществления такой связи состоит в следующем: в конечных точках измеряемой линии устанавливаются базисные наземные станции. Примерно посередине между этими станциями соединяющую их линию пересекает самолет, идущий курсом, перпендикулярным к измеряемой линии, и в пределах прямой видимости с обеих наземных станций. За несколько километров до створа базисных станций самолетная станция начинает измерять расстояния $d_1, d_1'; d_2, d_2'; d_3, d_3'$ и т. д. (рис. 16). По мере приближения к створу сумма $d_i + d_i'$

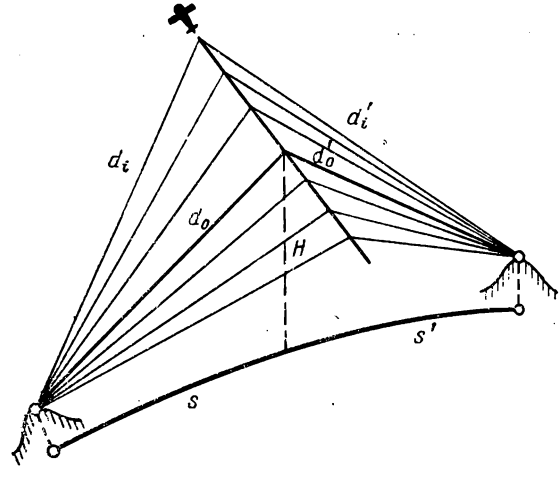


Рис. 16.

будет уменьшаться и в момент пересечения створа достигнет минимума. Эти минимальные расстояния $d_0 d_0'$ редуцируют на эллипсоид, и полученные проекции s, s' в сумме дадут искомое расстояние. Высоту самолета, необходимую для редуцирования измеренных дальностей, определяют с помощью радиоальтиметра.

В наблюдения вводится поправка за изменение скорости распространения радиоволн, за кривизну траектории радиолуча и за инструментальные ошибки. Этим методом в 50-е годы созданы обширные радиогеодезические сети в США, Канаде, Австралии, СССР. В Канаде, например, разбита обширная геодезическая сеть, состоящая из 73 пунктов. Сеть опирается на 10 исходных сторон триангуляции I класса и охватывает почти всю северную часть Канады. Всего было измерено 325 сторон средней длиной 368 *км*. Наибольшая сторона имела длину 590 *км*. Системой Шоран выполнены геодезические связи Скандинавии и Англии, Малой Азии и Африки через Крит, Англии и Исландии, Северной и Южной Америки через Антильские острова. Позже системой Хиран осуществлены связи Европы с Северной Америкой.

Таким образом, введение в действие радиогеодезических дальномерных систем вносит сейчас революционные изменения в методы геодезических измерений, разрушает державшуюся веками монополию триангуляции и открывает новые перспективы для изучения фигуры Земли геометрическими методами.

§ 6. Полигонометрический метод определения опорных точек

Появившиеся за последнее время дальномеры, позволяющие с высокой точностью и большой производительностью выполнять линейные измерения, дали возможность в ряде случаев заменить традиционные в создании опорных геодезических сетей триангуляционные ряды линиями высокоточной полигонометрии. Метод полигонометрии состоит в измерении на местности длин линий и углов поворота, т. е. углов, под которыми располагаются примыкающие одна к другой линии полигонометрии (рис. 17).

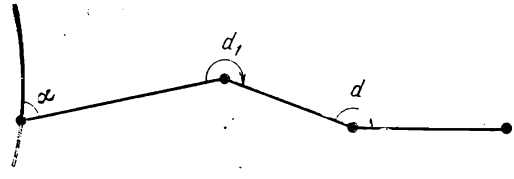


Рис. 17.

По инструкции 1966 г. при построении государственной геодезической сети допускается наряду с триангуляцией применение методов полигонометрии и трилатерации (построения треугольников по измеренным сторонам). При этом полигонометрические ряды могут быть рядами I, II, III и IV классов, различаясь, как и триангуляции, по назначению и точности.

Допускается переход от рядов триангуляции к полигонометрическому ходу при построении геодезической сети одного и того же класса. По условиям местности полигонометрические ряды, так же как и триангуляции, сопровождаются выполненными по определенной программе астрономическими пунктами и азимутальными измерениями. Так, полигонометрические ряды I класса состоят из звеньев длиной в 200 *км*, на концах которых определяются астрономические пункты. Звено должно содержать не более 10 сторон длиной 20—25 *км*. Ниже приводятся основные требования, предъявляемые при построении точной полигонометрии различных классов.

	I	II	III	IV
Точность измерения сторон	1 : 300 000	1 : 250 000	1 : 200 000	1 : 150 000
Точность измерения углов	±0″,4	1″,0	1″,5	2″,0
Длина сторон, *км*	20—25	7—20	5—8	2—5
Число сторон в звене	10	20	20—25	20—25

§ 7. Нивелирование

Угловые и линейные измерения, выполняемые в геодезии, производятся на физической поверхности Земли. Для последующей обработки и их сопоставления они должны быть спроектированы на референц-эллипсоид. Для этого надо знать высоты точек физической поверхности Земли над референц-эллипсоидом — так называемые геодезические высоты и направления нормали к референц-эллипсоиду. Непосредственные измерения не дают нам высоты над эллипсоидом. Поэтому геодезическая высота делится на составляющие: высоту пункта над геоидом и высоту геоида над референц-эллипсоидом. Первую получают из геометрического нивелирования, вторую из астрономического или астрономо-гравиметрического нивелирования.

Знание высот необходимо не только для решения редукционной задачи, но также и для многих практических геодезических и инженерных задач. С помощью нивелирования получают превышения одной точки над другой. Существует три способа нивелирования: 1) нивелирование горизонтальным лучом, или геометрическое нивелирование, когда измеряются непосредственно превышения одной точки над другой без измерения углов и расстояний, 2) нивелирование наклонным лучом, или так называемое тригонометрическое нивелирование, когда измеряются углы наклона с одной точки на другую и расстояние между ними, и 3) барометрическое нивелирование, основанное на изменении плотности воздуха с высотой. При создании государственной нивелирной сети применяется только первый вид нивелирования, являющийся наиболее точным.

Технически определение превышений одной точки над другой производится следующим образом: нивелир с горизонтальной визирной трубой наводится последовательно на рейки, установленные в точках A и B (рис. 18). Рейки имеют одинаковые шкалы, оцифрованные в сантиметрах с одной стороны и в $^{11}/_{10}$ долях

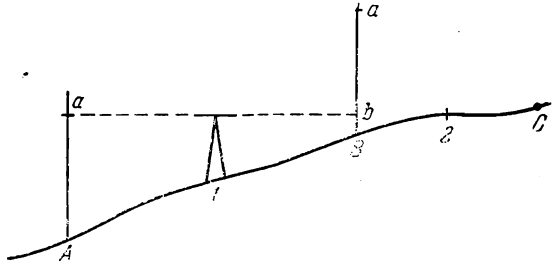


Рис. 18.

сантиметра с другой стороны. Пусть отсчет по рейке при наведении на точку A будет a, а при наведении на точку B — b. Разность отсчетов по рейке $a - b$ даст непосредственно превышение в сантиметрах. Далее нивелир переносят в другую точку стояния (2) и делают наведения на рейку, установленную в точках B, C и т. д.

Непосредственно измеренное превышение с одной установки нивелира называется элементарным нивелирным превышением Δh. Сумма элементарных нивелирных превышений составляет высоту $H = \Sigma \Delta h$.

Далее мы увидим, что для того, чтобы получить высоты, не зависящие от пути, вдоль которого производилось нивелирование, вводится система так называемых ортометрических высот. Их значения определяются формулой

$$H = \frac{1}{g_m} \sum g \Delta h.$$

Здесь g_m — среднее значение силы тяжести вдоль отвесной линии от уровня моря до физической поверхности Земли, g — значение силы тяжести в точках стояния нивелира.

Таким образом, вдоль линий нивелирования должно производиться определение силы тяжести g.

Очевидно, что для определения высот необходимо установить некоторый нулевой уровень, от которого должны производиться отсчеты высот при нивелировках. Естественно было за такой уровень принять уровень моря. Однако уточнение этого вопроса показало, что уровни различных морей и океанов могут отличаться друг от друга вследствие действия постоянных ветров, те-

чений, степени солености воды, конфигурации берега. Поэтому для начала отсчета нивелировок устанавливается некоторый условный уровень. Так, для всех нивелировок, выполняющихся на территории СССР, за начало отсчета высот принимается нуль Кронштадтского футштока, установленный по среднему уровню моря в районе Кронштадта.

Для обеспечения высотного обоснования создается нивелирная сеть. Эта сеть состоит из ходов высокоточного нивелирования I класса, образующих замкнутые полигоны с периметром порядка 800 *км*. Эти ходы служат основой для нивелировок II класса, образующих полигоны с периметром 500—600 *км*. Полигоны нивелировок II класса сгущаются полигонами и ходами нивелировок III класса, протяженность которых не превосходит 150 *км*. Дальнейшее сгущение производится нивелировками IV класса, служащими непосредственной основой топографических съемок.

Для создания сети пунктов с определенными высотами на местности вдоль ходов нивелировок закладываются реперы и марки, которые должны сохранять свою высоту неизменной.

Построение нивелирной сети в виде замкнутых полигонов дает контроль правильности произведенных нивелирных работ и критерий для оценки точности. Точность нивелировок определяется невязками, возникающими при замыкании полигонов, т. е. отличием от нуля суммы превышений по замкнутому контуру. В табл. 4 приводятся допускаемые инструкцией невязки для нивелировок различных классов.

Таблица 4

Класс нивелировки	Общая формула невязки, *мм*	Невязка на 100 *км* хода, *мм*
II	$5\sqrt{L}$	50
III	$10\sqrt{L}$	100
IV	$20\sqrt{L}$	200

L — длина хода в километрах.

Нивелирование I класса выполняют с наивысшей точностью, достигаемой применением наиболее совершенных инструментов и методов наблюдений, и с возможно полным исключением систематических ошибок. Не реже чем через каждые 25 лет выполняют повторное нивелирование по всем линиям I класса и некоторым линиям II класса с целью их модернизации, а также для получения количественных характеристик современных вертикальных движений земной коры.

ГЛАВА 2

РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ГЕОДЕЗИИ НА ЭЛЛИПСОИДЕ ВРАЩЕНИЯ (СФЕРОИДИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ)

§ 1. Основные параметры земного эллипсоида

Геодезические измерения выполняются на физической поверхности Земли. Эта поверхность является весьма сложной и не позволяет получить достаточно простые соотношения между геодезическими элементами, например, между координатами точек и расстоянием между ними.

К тому же и само понятие расстояния между точками здесь не определено. Можно говорить о расстоянии по прямой, о расстоянии по дуге большого круга для сферы, по геодезической линии для эллипсоида, по некоторой кривой, лежащей на физической поверхности Земли. Для внесения в вопрос определенности в геодезии делаются упрощения. При решении геодезических задач на малых участках земной поверхности Земля представляется плоскостью и соответственно решение получается на основе положений плоской геометрии. При решении геодезических задач для значительных участков Земли или всей Земли в целом Земля представляется эллипсоидом вращения.

Нахождение эллипсоида, наилучшим образом представляющего всю Землю в целом, так называемого общего земного эллипсоида, может быть осуществлено при условии полной геодезической и гравиметрической изученности Земли. Этот эллипсоид должен быть ориентирован в теле Земли так, чтобы соблюдались условия: 1) совпадения центра эллипсоида с центром масс Земли; 2) совпадения их осей вращения.

Если эллипсоид вывести по результатам измерений на какой-либо ограниченной территории, то он будет представлять наилучшим образом именно эту территорию. До сих пор в различных странах пользуются различными эллипсоидами. В СССР принят так называемый эллипсоид Красовского, выведенный в 1940 году Ф. Н. Красовским и А. А. Изотовым и имеющий элементы

большая полуось	6 378 245 *м*,
сжатие	1 : 298,3.

Все геодезические измерения для их последующей обработки должны быть спроектированы на поверхность эллипсоида.

Элементы геодезических измерений, редуцированные на эллипсоид, являются исходным материалом для решения геодезических задач.

Основными геодезическими задачами являются: 1) уточнение формы и размеров земного эллипсоида; 2) перенос направлений и расстояний с физической поверхности Земли, где производятся измерения, на референц-эллипсоид (редукционная проблема); 3) нахождение координат точек на заданном эллипсоиде по известным координатам исходной точки, расстоянию от нее и направлению (так называемая прямая геодезическая задача); 4) нахождение расстояния между точками и направлений при заданных координатах точек на заданном эллипсоиде (так называемая обратная геодезическая задача); 5) уточнение координат точек при изменениях основных элементов эллипсоида.

В высшей геодезии рассматривается решение всех этих задач на поверхности эллипсоида вращения. Соответствующий раздел высшей геодезии получил название *сфероидической геодезии.* Нас прежде всего интересуют первая и вторая из сформулированных задач, а именно определение или уточнение формы и размеров земного эллипсоида и редукционная проблема. Однако для решения этого вопроса необходимо иметь понятие о решении и других основных задач высшей геодезии. Поэтому в дальнейшем приводится изложение принципов их решения.

Вывод основных геометрических соотношений на эллипсоиде неизбежно связан с применением эллиптических функций, которые в практике решения геодезических задач приходится представлять в виде бесконечных рядов. Это делает формулы для решения задач высшей геодезии очень громоздкими и сложными в применении. Желание упростить путь решения приводит к тому, что при решении задач на меньшие расстояния строятся упрощенные, менее точные формулы. Таким образом, для решения задач одного и того же типа, но требующих различной точности, применяются различные формулы. Это весьма усложняет практику геодезических вычислений.

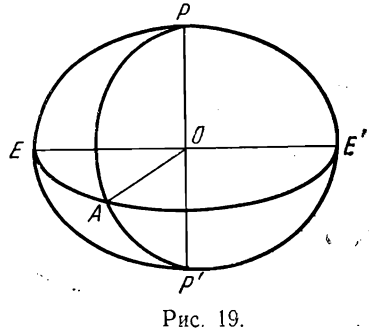


Рис. 19.

Однако при использовании ЭВМ это не является препятствием, ибо всегда легко построить программу так, чтобы автоматически удерживалось нужное число членов разложения.

Введем следующие обозначения: $OA = OE = a$ — большая полуось эллипсоида, $OP = b$ — малая полуось эллипсоида (рис. 19).

Полярное сжатие α эллипсоида определится как

$$\alpha = \frac{a-b}{a}, \tag{2.1}$$

первый эксцентриситет e меридианного эллипса равен

$$e = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}, \tag{2.2}$$

второй эксцентриситет e' меридианного эллипса равен

$$e' = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2}}. \tag{2.3}$$

Между этими параметрами существуют следующие очевидные соотношения:

$$e'^2 = \frac{e^2}{1-e^2}; \quad e^2 = \frac{e'^2}{1+e'^2},$$

а также

$$b = a\sqrt{1-e^2}, \tag{2.4}$$

$$a = b\sqrt{1+e'^2}. \tag{2.5}$$

Между сжатием и эксцентриситетом легко получается следующая зависимость:

$$\alpha = 1 - \frac{b}{a} = 1 - \sqrt{1-e^2}.$$

Возводя в квадрат и удерживая член до квадрата сжатия, получим приближенное равенство

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2. \tag{2.6}$$

§ 2. Применяющиеся в геодезии системы координат

1. Криволинейные системы координат. В высшей геодезии наиболее часто приходится иметь дело с географической, или геодезической системой координат. В этой системе положение точки определяется двумя криволинейными координатами на поверхности эллипсоида — широтой B и долготой L (рис. 20). Широта $B = \angle NKR$ определяется как угол, образованный нормалью MN к эллипсоиду в данной точке M и плоскостью экватора. Широта отсчитывается от плоскости экватора от 0 до 90° к северу и к югу. Соответствующие широты называются

северными и южными и им приписываются соответственно знаки плюс или минус.

Долгота L устанавливается как двугранный угол между плоскостью начального меридиана PEP' и меридиана PMR, проходящего через данную точку M. В качестве начального меридиана принят по международному соглашению меридиан, проходящий через Гринвичскую обсерваторию. Долготы, отсчитываемые на запад от Гринвичского меридиана до 180°, называют западными долготами, на восток — восточными. В международной практике принято также считать западные долготы положительными, а восточные — отрицательными.

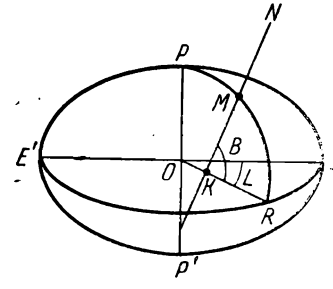


Рис. 20.

Геодезические широты и долготы следует отличать от астрономических. Последние определяются нормалью к уровенной поверхности, проходящей через данную точку. Разности геодезических и астрономических широт равны составляющим отклонения линий отвеса в данной точке от нормали к земному эллипсоиду в плоскости меридиана. Разности геодезических и астрономических долгот равны составляющим отклонения отвесной линии в первом вертикале, умноженным на косинус широты.

В географии и при построении общих географических карт разностью геодезических и астрономических широт часто пренебрегают и широту и долготу места называют географическими координатами, не уточняя, к какой нормали они отнесены. Поэтому понятие географических координат носит в себе некоторую неопределенность.

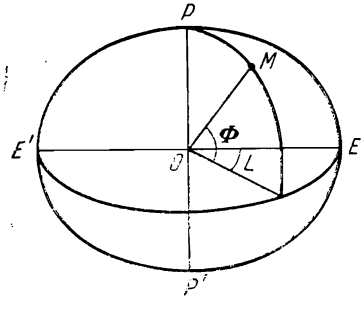


Рис. 21.

Если нормаль заменить направлением радиуса-вектора OM и широту отсчитывать как угол Φ между этим радиусом-вектором и плоскостью экватора, то мы будем иметь дело с системой геоцентрических координат Φ, L (рис. 21).

В ряде теоретических построений применяется система координат с приведенной широтой u. Последняя получается как угол между плоскостью экватора EE' и радиусом OM' сферы, построенной на экваторе. Точка M' является проекцией точки M на сферу. Проектирование ведется прямой RM, параллельной малой

полуоси эллипсоида (рис. 22). Второй координатой в этой системе служит, как и в предыдущих, долгота.

Координатными линиями во всех этих системах служат меридианы и параллели.

2. Системы пространственных декартовых координат. В теоретических построениях высшей геодезии применяется также система пространственных декартовых геоцентрических координат XYZ (рис. 23), в которой ось Z обычно

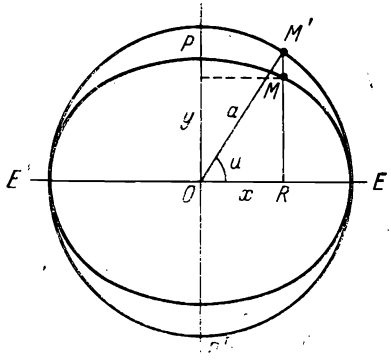


Рис. 22.

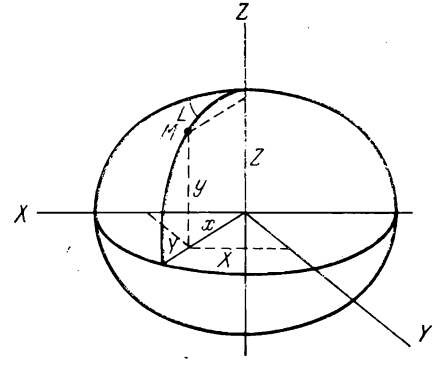


Рис. 23.

направляется по малой полуоси эллипсоида, ось X лежит в плоскости нулевого меридиана, а ось Y направлена к востоку (или западу) от оси X. Помимо этой системы, применяется система прямоугольных координат xy, лежащих в плоскости меридиана, заданного предварительно своей долготой L. В этом случае положение точки определяется координатами x, y, L.

§ 3. Формулы преобразования координат

1. Выражение координат x, y меридианного эллипса через геодезическую широту B. Точка M (рис. 24) удовлетворяет уравнению эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2.7}$$

Дифференцируя это уравнение по x, получим

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2.8}$$

Значение производной равно тангенсу угла, образованного касательной с осью x:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(90^\circ + B) = -\operatorname{ctg} B. \tag{2.9}$$

Вносим в (2.8) значение производной из (2.9):

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2}(-\operatorname{ctg} B) = 0.$$

Отсюда следует:

$$y = \frac{b^2}{a^2} x \operatorname{tg} B.$$

Подставляя сюда значение b из (2.4), получим

$$y = x(1 - e^2)\operatorname{tg} B. \tag{2.10}$$

Для того чтобы выразить раздельно координаты x и y через B,

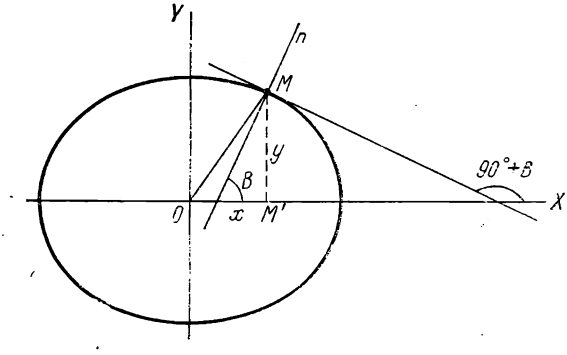


Рис. 24.

исключим y из двух уравнений (2.7) и (2.10), учитывая (2.4):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2(1 - e^2)^2 \operatorname{tg}^2 B}{a^2(1 - e^2)} = 1.$$

Решаем это уравнение относительно x:

$$x^2(1 + \operatorname{tg}^2 B - e^2 \operatorname{tg}^2 B) = a^2,$$

или

$$x^2\left(\frac{1 - e^2 \sin^2 B}{\cos^2 B}\right) = a^2,$$

и окончательно

$$x = \frac{a \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}. \tag{2.11}$$

Выражение для y получим, внося (2.11) в (2.10):

$$y = \frac{a(1 - e^2) \sin B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}. \tag{2.12}$$

2. Связь геодезической и геоцентрической широт получается сейчас же, если в выражение (2.10) внести

очевидное из рис. 21 соотношение $y/x = \operatorname{tg}\Phi$:

$$\operatorname{tg}\Phi = (1 - e^2)\operatorname{tg}B = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}B. \tag{2.13}$$

Интересно оценить, какое максимальное расхождение геоцентрической и геодезической широт возможно при заданном эксцентриситете e.

Для этого преобразуем выражение (2.13) к виду

$$\operatorname{tg}B - \operatorname{tg}\Phi = e^2 \operatorname{tg}B$$

или

$$\sin(B - \Phi) = e^2 \sin B \cos\Phi. \tag{2.14}$$

Разлагая левую часть в ряд и пренебрегая малыми порядка e^4, а также заменяя $\cos\Phi$ на $\cos B$, получим

$$B - \Phi \approx \frac{1}{2} e^2 \sin 2B. \tag{2.15}$$

Эта разность достигает своего максимума при широте $B = 45°$. Выражая $B - \Phi$ в минутах дуги, имеем

$$(B - \Phi)' = \frac{1}{2} e^2 \rho' \sin 2B$$

и для $B = 45°$ $(B - \Phi)'_{45°} = 11',8$.

3. Выражение координат x, y меридианного эллипса и геодезической широты B через приведенную широту u.

Из рис. 22 очевидно соотношение

$$x = a\cos u. \tag{2.16}$$

Для того чтобы выразить y через приведенную широту u, заметим, что из треугольника ORM' следует

$$x^2 + RM'^2 = a^2, \tag{2.17}$$

а из уравнения эллипса, которому удовлетворяют координаты точки M,

$$x^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2 = a^2. \tag{2.18}$$

Сравнивая (2.17) и (2.18), получаем $RM' = \frac{a}{b} y$.

Далее, из рис. 22 видно, что $RM' = a \sin u$, откуда

$$y = b \sin u. \tag{2.19}$$

Деля (2.19) на (2.16) и учитывая (2.10), получим

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}\operatorname{tg}u = (1 - e^2)\operatorname{tg}B$$

или

$$\operatorname{tg} u = \frac{a}{b}(1-e^2)\operatorname{tg} B = \sqrt{1-e^2}\operatorname{tg} B = \frac{b}{a}\operatorname{tg} B. \qquad (2.20)$$

4. Выражение пространственных прямоугольных координат через плоские прямоугольные и через геодезическую или приведенную широту меридианного эллипса. Для пространственных прямоугольных координат X, Y, Z имеют место формулы преобразования (2.11) и (2.12), только роль оси y играет теперь ось Z, направленная по оси вращения Земли. Координаты X и Y получаются из отрезка x, заданного формулой (2.11) и лежащего в плоскости меридиана L, проектированием на плоскость нулевого меридиана и перпендикулярную ей (рис. 25). Соответственные формулы преобразования будут:

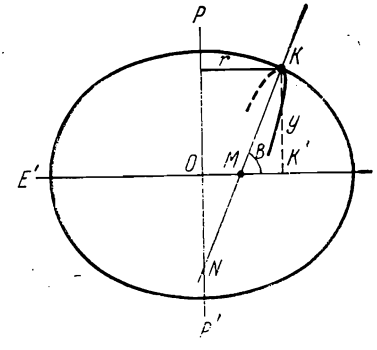


Рис. 25.

$$\left.\begin{aligned} X = x\cos L &= \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}\cos B\cos L,\\ Y = x\sin L &= \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}\cos B\sin L,\\ Z = z &= \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}\sin B \end{aligned}\right\} \qquad (2.21)$$

или, если заменить e^2 через $(a^2-b^2)/a^2$,

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{a^2}{\sqrt{a^2\cos^2 B + b^2\sin^2 B}}\cos B\cos L,\\ Y &= \frac{a^2}{\sqrt{a^2\cos^2 B + b^2\sin^2 B}}\cos B\sin L,\\ Z &= \frac{b^2}{a^2}\frac{a^2}{\sqrt{a^2\cos^2 B + b^2\sin^2 B}}\sin B. \end{aligned}\right\} \qquad (2.22)$$

§ 4. Нормальные сечения и главные радиусы кривизны

Сечения поверхности плоскостями, проходящими через нормаль к поверхности в какой-либо ее точке, называются нормальными сечениями в данной точке. Геометрическое место точек пересечения поверхности и плоскости при нормальном сечении

образует кривую. Из бесчисленного множества таких нормальных сечений, проходящих через точку, можно выделить два, образующие кривые с экстремальными значениями кривизны. Эти сечения называются главными нормальными сечениями. В дифференциальной геометрии выводится формула Эйлера, дающая связь между кривизнами главных нормальных сечений и кривизной произвольного сечения:

$$\frac{1}{R_A} = \frac{\cos^2 A}{N} + \frac{\sin^2 A}{M}. \tag{2.23}$$

Здесь N, M — радиусы кривизны главных нормальных сечений, R_A — радиус кривизны сечения, расположенного под углом A к главному сечению с наибольшим радиусом кривизны N. Главные нормальные сечения ортогональны и служат осями симметрии поверхности, т. е. сечения, образованные плоскостями, расположенными под одинаковыми по абсолютной величине углами относительно плоскости главного сечения, имеют одинаковые кривизны. Это видно из формулы (2.23):

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{N}; \quad \frac{1}{R_{\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{M}; \quad \frac{1}{R_A} = \frac{1}{R_{-A}}. \tag{2.24}$$

Для эллипсоида вращения главными сечениями служат меридианное сечение и сечение плоскостью первого вертикала. В этом легко убедиться, если вспомнить, что поверхности вращения симметричны относительно своих меридианных сечений, т. е. кривизны сечений, одинаково наклоненных к меридианному, равны между собой.

Для нахождения меридианного сечения воспользуемся известной из дифференциальной геометрии формулой для радиуса кривизны R плоской кривой $y = y(x)$:

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}. \tag{2.25}$$

Для меридианного сечения $y' = -\operatorname{ctg} B$, что геометрически очевидно (рис. 24). Тогда

$$y'' = \frac{1}{\sin^2 B} \frac{dB}{dx}.$$

Значение $\frac{dB}{dx}$ найдем из выражения (2.11):

$$\frac{dB}{dx} = -\frac{a(1 - e^2)\sin B}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}}.$$

Внося полученные значения y' и y'' в (2.25), получим для радиуса

кривизны меридианного сечения выражение

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 B)^{3/2}} = \frac{a^2b^2}{p^3}. \tag{2.26}$$

Радиус кривизны другого главного сечения — сечения плоскостью первого вертикала — легко получим, если вспомним, что по теореме Менье радиус кривизны наклонного сечения равняется радиусу кривизны нормального сечения, умноженному на косинус угла между этими сечениями. В качестве наклонного сечения возьмем сечение плоскостью, параллельной экватору. Радиус кривизны такого сечения согласно (2.11) будет равен (рис. 25)

$$r = x = \frac{a\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}},$$

а радиус кривизны N определится как

$$N = \frac{r}{\cos B} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}} = \frac{a^2}{p}. \tag{2.27}$$

Из двух главных сечений эллипсоида сечение меридианное является наименьшим. Это легко показать следующим образом:

$$\frac{N}{M} = \frac{1-e^2\sin^2 B}{1-e^2} = 1 + \frac{e^2\cos^2 B}{1-e^2} \geqslant 1,$$

$$N \geqslant M.$$

В геодезии часто приходится пользоваться средним радиусом кривизны. Для того чтобы получить средний радиус кривизны в данной точке, воспользуемся уравнением (2.25), которое запишем в форме

$$R_A = \frac{NM}{N\cos^2 A + M\sin^2 A}. \tag{2.24'}$$

Тогда средний радиус кривизны получим как

$$R_{ср} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R_A dA = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{NM}{N\cos^2 A + M\sin^2 A}\, dA.$$

Чтобы проинтегрировать это выражение, разделим числитель и знаменатель подынтегрального выражения на $N\cos^2 A$ и, пользуясь симметрией, будем вести интегрирование от 0 до $\pi/2$:

$$R_{ср} = \frac{2}{\pi}\sqrt{NM}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\frac{M}{N}}\frac{dA}{\cos^2 A}}{1+\frac{M}{N}\operatorname{tg}^2 A} = \frac{2}{\pi}\sqrt{NM}\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2},$$

где

$$t = \sqrt{\frac{M}{N}}\,\mathrm{tg}\,A.$$

Тогда

$$R_{\text{ср}} = \frac{2}{\pi}\sqrt{NM}\Big[\,\mathrm{arctg}\,t\Big]_0^{\infty} = \sqrt{NM}.$$

Вводя значения N и M, получим

$$R_{\text{ср}} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\sin^2 B}. \qquad (2.28)$$

§ 5. Взаимно обратные нормальные сечения

Выделим из пучка нормальных плоскостей к эллипсоиду в точке A (рис. 26) ту, которая проходит также и через точку B, лежащую на поверхности эллипсоида. В точке B эта плоскость не будет нормальной. Эта плоскость, пересекаясь с поверхностью эллипсоида, образует линию, называемую прямым нормальным сечением, проходящим через точки A и B. Плоскость прямого из точки A в B нормального сечения определяется нормалью эллипсоида в точке A и прямой AB. Из пучка нормальных плоскостей в точке B выберем плоскость, проходящую через точку A. Эта плоскость не совпадает с первой. При пересечении с эллипсоидом она образует линию, называемую линией обратного из A в B нормального сечения. Линия обратного сечения определяется нормалью эллипсоида в точке B и прямой BA.

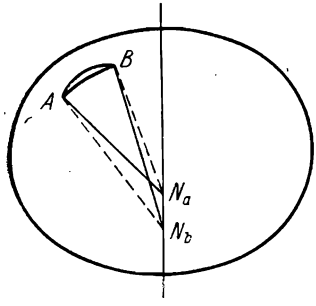


Рис. 26.

Легко установить взаимное расположение нормальных сечений. Для этого рассмотрим соотношение между отрезками, которые отсекает нормаль к эллипсоиду на его большой и малой полуосях.

Геометрически ясно (рис. 25), что

$$\frac{y}{MK'} = \mathrm{tg}\,B.$$

Тогда

$$OM = x - y\,\mathrm{ctg}\,B$$

и

$$ON = OM\,\mathrm{tg}\,B = x\,\mathrm{tg}\,B - y,$$

или, вводя значения x и y из (2.11) и (2.12), получим

$$ON = \frac{ae^2 \sin B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}. \tag{2.29}$$

Отсюда следует, что чем севернее расположена точка, через которую проведена нормаль, тем ON больше и тем южнее пересекает нормаль ось вращения. Поэтому прямое сечение из A и B будет проходить севернее обратного, если точка A расположена севернее B.

Очевидно, что в случае расположения точек A и B на одном меридиане или на одной параллели взаимные нормальные сечения совпадают.

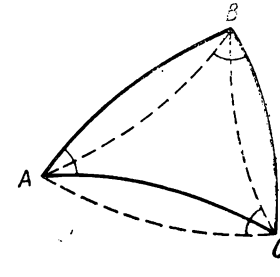


Рис. 27.

При угловых измерениях, когда в точке стояния A инструмента производится визирование на предметы B и C (рис. 27), мы определяем, очевидно, углы между прямыми сечениями AB и AC. Наоборот, измеряя углы в B и C на AC и AB, мы определяем углы между обратными сечениями BA и CA. Таким образом, при измерении углов в треугольнике фигура получается разомкнутой. Чтобы избавиться от этой двойственности, можно от нормальных сечений перейти к геодезическим линиям, что и делается при решении задач высшей геодезии. Но иногда нормальные сечения и геодезические линии не различаются, поскольку расхождения между ними, как мы увидим далее, могут быть много меньше точности вычислений.

§ 6. Геодезическая линия

Геодезическая линия определяется как кратчайшее расстояние по поверхности эллипсоида между двумя точками. Рассмотрим на поверхности эллипсоида элемент ds кривой. Пусть координаты концов этой элементарной дуги a и b суть (B, L) и $(B+dB, L+dL)$ соответственно, а α — азимут направления от точки a к точке b. Тогда можно написать дифференциальные соотношения

$$\left.\begin{aligned} ds \cos\alpha &= M\, dB, \\ ds \sin\alpha &= \Delta\, dL, \end{aligned}\right\} \tag{2.30}$$

где

$$\Delta = N \cos B.$$

Для элемента дуги получим выражение $ds^2 = M^2 dB^2 + \Delta^2 dL^2$.

Полагая долготу L функцией широты, получим

$$\left(\frac{ds}{dB}\right)^2 = \Delta^2\left(\frac{dL}{dB}\right)^2 + M^2. \tag{2.31}$$

В этом предположении имеем

$$ds = \left[\Delta^2\left(\frac{dL}{dB}\right)^2 + M^2\right]^{1/2} dB,$$

а для дуги конечного размера

$$s = \int_a^b \left[\Delta^2\left(\frac{dL}{dB}\right)^2 + M^2\right]^{1/2} dB. \tag{2.32}$$

Для простоты введем обозначение $\left[\Delta^2\left(\frac{dL}{dB}\right)^2 + M^2\right] = R^2$. Тогда

$$s = \int_a^b R dB. \tag{2.32'}$$

Будем теперь искать такой вид функции $L=F(B)$, при котором s имеет наименьшее значение, т. е. из семейства кривых s, проходящих между a и b, выберем кратчайшую. Изменение s в зависимости от изменения вида функции L есть вариация s. Условием экстремальности s служит равенство

$$\delta s = 0. \tag{2.33}$$

Возьмем вариацию от s. По условию $s = s(B, L, L')$. Вариация s есть изменение s к бесконечно близкому s_1 за счет изменения функции L:

$$s_1 = s\left(B, L + \delta L, L' + \frac{d\delta L}{dB}\right),$$

$$\delta s = s_1 - s = s\left(B, L + \delta L, L' + \frac{d\delta L}{dB}\right) - s(B, L, L').$$

Развертывая в ряд первый член справа, получим

$$\delta s = s(B, L, L') - \frac{\partial s}{\partial L}\delta L + \frac{\partial s}{\partial L'}\frac{d\delta L}{dB} + \ldots - s(B, L, L') \approx$$

$$\approx \frac{\partial s}{\partial L}\delta L + \frac{\partial s}{\partial L'}\frac{d\delta L}{dB}.$$

Вводим значение s из (2.32'):

$$\delta s = \int_a^b \frac{\partial R}{\partial L}\delta L\, dB + \int_a^b \frac{\partial s}{\partial L'}\frac{d\delta L}{dB}\, dB.$$

Интегрируя второй интеграл по частям, находим

$$\delta s = \int_a^b \frac{\partial R}{\partial L}\,\delta L\,dB + \int_a^b \frac{\partial R}{\partial L'}\,\delta B - \int_a^b \frac{d}{dB}\left(\frac{\partial R}{\partial L'}\right)\delta L\,dB.$$

Функция R явно от L не зависит, поэтому $\frac{\partial R}{\partial L} = 0$ и первый член в выражении для вариации обращается в нуль. Второй член исчезает, поскольку вариация δL в точках a и b обращается в нули. Поэтому условие (2.33) примет вид

$$\delta s = -\int_a^b \frac{d}{dB}\left(\frac{\partial R}{\partial L'}\right)\delta L\,dB = 0. \tag{2.34}$$

В силу произвольности вариации δL это условие тождественно условию

$$\left(\frac{d}{dB}\,\frac{\partial R}{\partial L'}\right) = 0 \tag{2.35}$$

или

$$\frac{\partial R}{\partial L'} = \text{const}.$$

Но

$$\frac{\partial R}{\partial L'} = \frac{\Delta^2}{R}\,\frac{dL}{dB},$$

что получается непосредственным дифференцированием R. Тогда

$$\frac{\Delta^2}{R}\,\frac{dL}{dB} = \text{const}, \tag{2.36}$$

или

$$\frac{\Delta^2 \dfrac{dL}{dB}}{\left[M^2 + \Delta^2\left(\dfrac{dL}{dB}\right)^2\right]^{1/2}} = \text{const}. \tag{2.36'}$$

Воспользуемся соотношениями (2.30), из которых получаем

$$\Delta\,\frac{dL}{dB} = M \operatorname{tg}\alpha.$$

Вводя это в (2.36), получим

$$\frac{\Delta M \operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{M^2(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}} = \frac{\Delta \operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha} = \Delta \sin\alpha = \text{const}$$

или, используя приведенную широту $\Delta = a\cos u$,

$$a\cos u \sin\alpha = \text{const}. \tag{2.37}$$

Это замечательное свойство геодезической линии — постоянство произведения радиуса параллели на синус азимута — может быть положено и в основу определения геодезической линии. Иначе геодезическую линию можно определить как такую линию на поверхности, в каждой точке которой главная нормаль совпадает с нормалью к поверхности. Такую линию можно представить как линию вешения по трем точкам при бесконечном сближении этих точек*) (рис. 28). Из b визируем на a и, повернув теодолит на 180°, находим точку c. Перенося теодолит в c, визируем на b и находим d, повернув теодолит на 180°, и т. д. Тогда, если a, b, c бесконечно близки, нормаль к поверхности в b будет лежать в соприкасающейся плоскости, проходящей через a, b, c. Прямая PP' — ось вращения Земли.

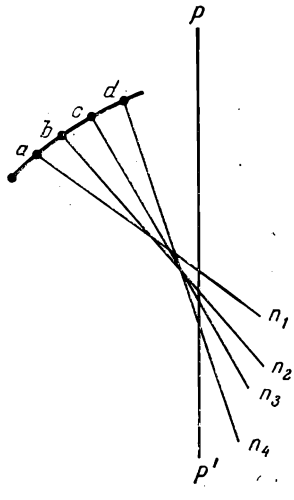


Рис. 28.

Найдем уравнение геодезической линии, исходя из этого определения, и покажем, что оба определения тождественны.

Пусть поверхность задана уравнением

$$F(x, y, z) = 0, \qquad (2.38)$$

а геодезическая линия — уравнением в параметрической форме

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s). \qquad (2.39)$$

Нормаль к поверхности (2.38) будет

$$\frac{X - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z - z}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

где X, Y, Z — координаты точки, в которой определяется нормаль, и x, y, z — текущие координаты нормали.

Нормаль к линии (2.39) будет

$$\frac{X - x}{\frac{d^2x}{ds^2}} = \frac{Y - y}{\frac{d^2y}{ds^2}} = \frac{Z - z}{\frac{d^2z}{ds^2}}.$$

*) Не путать с кривой провешивания, получающейся как геометрическое место точек, в которых нормальные плоскости одновременно проходят через конечные точки A и B, т. е. разность азимутов в которых на A и B равна 180°.

Для геодезической линии эти нормали совпадают. Условием этого будет уравнение

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{d^2x}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{d^2y}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{d^2z}{ds^2}}, \tag{2.40}$$

а так как мы имеем дело с поверхностью вращения, для которой уравнение (2.38) имеет вид

$$x^2 + y^2 + f(z) = 0,$$

то условие (2.40) примет вид

$$\frac{2x}{\frac{d^2x}{ds^2}} = \frac{2y}{\frac{d^2y}{ds^2}} = \frac{f(z)}{\frac{d^2z}{ds^2}}.$$

Интегрируя, получим уравнение геодезической линии в виде

$$x\,dy - y\,dx = c\,ds. \tag{2.41}$$

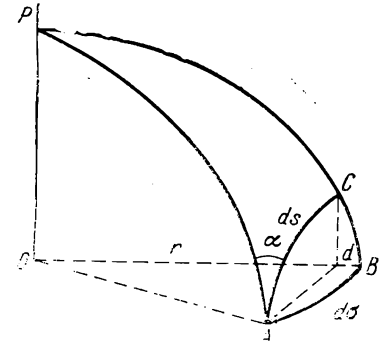


Рис. 29.

Левая часть этого уравнения есть удвоенная площадь треугольника AOd (рис. 29). Площадь же сектора AOB равна

$$\frac{1}{2} r\,d\sigma = \frac{1}{2} r\,ds \sin\alpha.$$

В пределе для бесконечно малого элемента дуги ds площадь сектора равна площади треугольника и

$$\frac{1}{2} r\,ds \sin\alpha = c\,ds,$$

т. е. $r \sin\alpha = \text{const}$.

Таким образом, мы пришли к уравнению (2.37), которое было получено из первого определения. Это доказывает идентичность обоих определений.

§ 7. Расхождение взаимно обратных нормальных сечений

Для сферы прямое и обратное сечение совпадают с геодезической линией. Для эллипсоида малого сжатия их расхождения малы. Рассмотрим расхождение прямого и обратного сечений. Геодезическая линия, являясь предельным случаем нормальных сечений, очевидно, не может сильно уклоняться от них.

Рассмотрим геометрический вывод расхождения нормальных сечений. Этот вывод своей наглядностью и краткостью выгодно отличается от более строгого аналитического *).

Найдем угол между плоскостями $AaBn_a$ прямого и $AbBn_b$ обратного нормальных сечений, пересекающимися по хорде AB (рис. 30). Для этого из точки B, как из центра, построим дуги An'_a и An'_b. Рассмотрим сферический треугольник с вершинами в A, n'_a, n'_b. В этом треугольнике угол f при вершине A и есть искомый угол между секущими плоскостями. Стороне $n'_an'_b$ соответствует угол ε, а стороне An'_a — угол $ABn_a = 90° - S/2$.

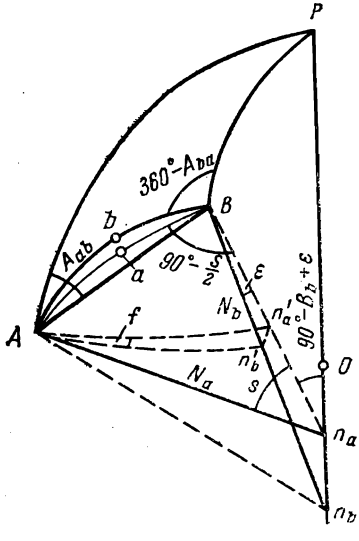


Рис. 30.

Угол при n'_b равен $360° - A_{ba}$, как угол между теми же плоскостями, что и угол при B в полярном треугольнике ABP.

Угол f находим из треугольника $An'_an'_b$:

$$\frac{\sin f}{\sin \varepsilon} = \frac{\sin (360° - A_{ba})}{\sin\left(90° - \frac{S}{2}\right)}. \qquad (2.42)$$

Входящий в формулу угол ε найдем из плоского треугольника Bn_an_b:

$$\frac{\sin \varepsilon}{n_an_b} = \frac{\sin (90° - B_b + \varepsilon)}{Bn_b}. \qquad (2.43)$$

Величины, входящие в формулу (2.43), известны:

$$\left.\begin{aligned} Bn_b &= N_b = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_b}}, \\ n_an_b &= On_b - On_a = \\ &= ae^2 \left[\frac{\sin B_b}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_b}} - \frac{\sin B_a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_a}}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (2.44)$$

согласно формуле (2.29).

*) См. Ф. А. Слудский, Лекции по высшей геодезии, М., 1894 и Ф. Н. Красовский, Высшая геодезия, Геодезиздат, 1942.

Раскладывая знаменатель в ряд и пренебрегая величинами порядка $e^4(B_b - B_a)$, получим

$$n_a n_b = ae^2(\sin B_b - \sin B_a) = 2ae^2 \sin\frac{B_b - B_a}{2}\cos\frac{B_b - B_a}{2} = \\ = ae^2(B_b - B_a)\cos B_m. \quad (2.45)$$

Вернемся теперь к формуле (2.42), в которой сделаем необходимые замены с помощью (2.43), (2.44), (2.45):

$$\sin f = -n_a n_b \frac{\cos(B_b - \varepsilon)}{N_b}\cdot\frac{\sin A_{ba}}{\cos\frac{S}{2}} = \\ = -\frac{e^2(B_b - B_a)\cos B_m \cos(B_b - \varepsilon)\sin A_{ba}\sqrt{1 - e^2\sin^2 B_b}}{\cos\frac{S}{2}}.$$

Сохраняя ту же точность, т. е. пренебрегая e^4 и $\varepsilon^2 e^2$, получим

$$\sin f = -\frac{e^2(B_b - B_a)\cos^2 B_m \sin A_{ab}}{\cos\frac{S}{2}}. \quad (2.46)$$

Из малого прямоугольного сферического треугольника ACB (рис. 31) имеем

$$\smile AC = B_b - B_a = \\ = \smile AB\cos A_{ab} = S\cos A_{ab}.$$

Тогда формулу (2.46) можно переписать в следующем виде:

$$\sin f = \frac{e^2 S\sin A_{ab}\cos A_{ab}\cos^2 B_m}{\cos\frac{S}{2}} \approx \\ \approx -\frac{1}{2}e^2 S\sin^2 A_{ab}\cos^2 B_m. \quad (2.46')$$

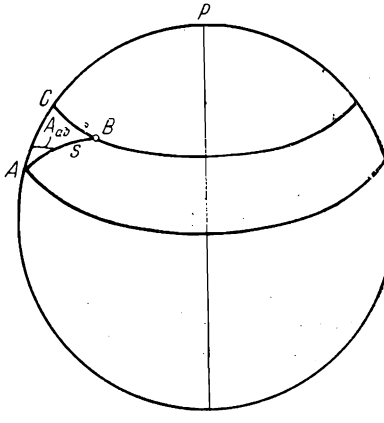


Рис. 31.

При $AB = 100$ км, $B_m = 45°$ и $A_{ab} = 45°$ имеем $f'' = 6''$.

Для того чтобы найти теперь наибольшее расхождение между взаимно обратными сечениями, достаточно найти длину перпендикуляров от середины хорды AB до дуг AaB и AbB (рис. 32). При этом будем рассматривать хорду и дуги для сферы, что допустимо в силу малости f.

Наибольшее расхождение ab будет (рис. 32 и 33)

$$ab = ad \cdot f.$$

Но $ad = N_B - N_B \cos\frac{S}{2} = N_B\left(1 - \cos\frac{S}{2}\right) = 2N_B \sin^2\frac{S}{4}$ и

$ab = 2fN_B \sin^2\frac{S}{4}$ или, в силу малости S,

$$ab = 2fN_B \frac{S^2}{16}. \qquad (2.47)$$

Для уже рассмотренного случая

$$f = 6'', \quad S = \frac{1}{60}, \quad ab \approx 0{,}006\,м.$$

Определим теперь угол между взаимно обратными нормальными сечениями. Приближенное значение этого угла найдем из малого

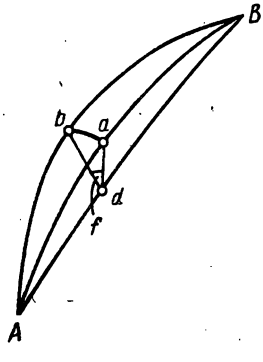


Рис. 32.

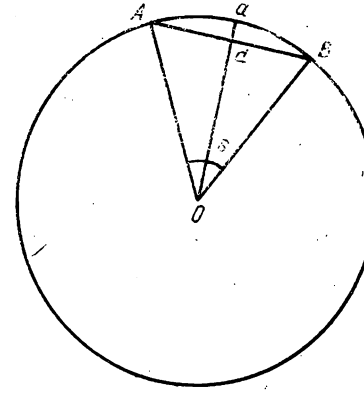


Рис. 33.

сферического треугольника Aab (рис. 32). У него известны линейное значение расхождения ab и дуги Aa и Ab. Полагая $Aa = 50$ *км*, получим

$$\frac{\sin A}{\sin ab} = \frac{\sin 90°}{\sin Ab},$$

или

$$A = \frac{\sin ab}{\sin Ab}.$$

В нашем случае $A = 0{,}003$. Углы между нормальными сечениями и геодезической линией будут такого же порядка, что очевидно из определения геодезической линии.

§ 8. Длины дуг меридианов и параллелей

Дуга меридиана. Длина дуги меридиана s_M, заключенная между точками с широтами B_1 и B_2, получается в результате интегрирования выражения для элементарной дуги меридиана $ds = M\,dB$ (рис. 34) в пределах от B_1 до B_2:

$$s = \int_{B_1}^{B_2} M\,dB. \tag{2.48}$$

Имея в виду значение M (2.26), находим

$$s = \int_{B_1}^{B_2} \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 B)^{3/2}}\,dB = a(1-e^2)\int_{B_1}^{B_2} \frac{dB}{(1-e^2\sin^2 B)^{3/2}}.$$

Полученное для s выражение представляет собой эллиптический интеграл, который не интегрируется в элементарных функ-

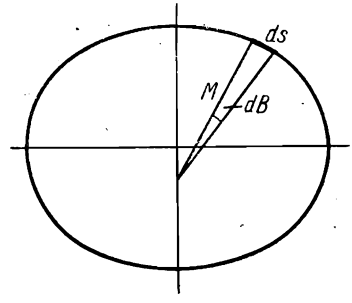


Рис. 34.

циях. В целях практического решения задачи подынтегральное выражение раскладывают в ряд и, пользуясь быстрой сходимостью полученного ряда, ограничиваются, в зависимости от характера решаемой задачи, одним, двумя или, реже, тремя членами разложения:

$$\int_{B_1}^{B_2} \frac{dB}{(1-e^2\sin^2 B)^{3/2}} = \int_{B_1}^{B_2} (1-e^2\sin^2 B)^{-3/2}\,dB =$$

$$= \int_{B_1}^{B_2} \left(1 + \frac{3}{2}e^2\sin^2 B + \frac{15}{8}e^4\sin^4 B + \frac{105}{48}e^6\sin^6 B + \ldots\right) dB.$$

Заменим степени синусов через косинусы кратных углов:

$$\sin^2 B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2B, \quad \sin^4 B = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2B + \frac{1}{8}\cos 4B.$$

Вводя эти значения в подынтегральное выражение и группируя члены по кратности углов, получим

$$-\int_{B_1}^{B_2}\left\{\left(1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4+\ldots\right)-\left(\frac{3}{4}e^2+\frac{15}{16}e^4+\ldots\right)\cos 2B+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{15}{64}e^4+\ldots\right)\cos 4B+\left(\frac{35}{512}e^4+\ldots\right)\cos 6B+\ldots\right\}dB.$$

Обозначая скобки под знаком интеграла соответственно через $A_1, A_2, \ldots, A_n$, для длины дуги меридиана будем иметь

$$s=a(1-e^2)\int_{B_1}^{B_2}(A_1-A_2\cos 2B+A_3\cos 4B+\ldots)\,dB.$$

Выполняя интегрирование, получим

$$s=a(1-e^2)\left\{A_1(B_2-B_1)-\frac{1}{2}A_2(\sin 2B_2-\sin 2B_1)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}A_3(\sin 4B_2-\sin 4B_1)+\frac{1}{6}A_4(\sin 6B_2-\sin 6B_1)+\ldots\right\}. \tag{2.49}$$

Для характеристики скорости сходимости ряда (2.49) приводим значения его коэффициентов:

$$A_1=1{,}0050517739,$$
$$A_2=0{,}0050623776,$$
$$A_3=0{,}0000106245,$$
$$A_4=0{,}0000000208.$$

В предельно неблагоприятном случае четвертый член даст всего 2,1 *см*.

Для некоторых задач, в частности, для пояснения принципа определения элементов земного эллипсоида из градусных измерений, выгодно представить формулу (2.49) в виде разложения по степеням эксцентриситета e. Для этого введем значения коэффициентов A и сгруппируем члены при одинаковых степенях e:

$$A_1=1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4+\ldots,$$
$$A_2=\frac{3}{4}e^2+\frac{15}{16}e^4+\ldots,$$
$$A_3=\frac{15}{64}e^4+\ldots$$

Тогда

$$s = a(1-e^2)\left\{\left(1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4+\ldots\right)(B_2-B_1) - \right.$$
$$-\left(\frac{3}{4}e^2+\frac{15}{16}e^4+\ldots\right)(\sin 2B_2-\sin 2B_1)+$$
$$\left.+\frac{15}{256}e^4(\sin 4B_2-\sin 4B_1)+\ldots\right\}$$

Представляя разности синусов через произведения

$$\sin 2B_2-\sin 2B_1 = 2\sin(B_2-B_1)\cos(B_2+B_1),$$
$$\sin 4B_2-\sin 4B_1 = 2\sin 2(B_2-B_1)\cos 2(B_2+B_1),$$

получим

$$s = a(1-e^2)\left\{\left(1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4+\ldots\right)(B_2-B_1) - \right.$$
$$-\left(\frac{3}{4}e^2+\frac{15}{16}e^4+\ldots\right)2\sin(B_2-B_1)\cos(B_2+B_1)+$$
$$\left.+\frac{15}{128}e^4\sin 2(B_2-B_1)\cos 2(B_2+B_1)+\ldots\right\}.$$

Если задача решается не для очень больших дуг, можно выражение упростить, положив

$$\sin(B_2-B_1) = (B_2-B_1)-\frac{(B_2-B_1)^3}{6},$$
$$\cos(B_2+B_1) = \cos 2B_m,$$

где $B_m = \frac{B_2+B_1}{2}$ или, если широты заданы в секундах,

$$\sin(B_2-B_1) = \frac{B_2''-B_1''}{\rho''}-\frac{(B_2''-B_1'')^3}{6\rho''^3}.$$

Тогда

$$s = a\frac{(B_2''-B_1'')}{\rho''}\left\{1-\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos 2B_m\right)e^2 - \right.$$
$$\left.-\left(\frac{3}{64}+\frac{3}{16}\cos 2B_m-\frac{15}{64}\cos 4B_m\right)e^4+\frac{1}{8}e^2\frac{(B_2''-B_1'')^2}{\rho''^2}\cos 2B_m\right\}. \quad (2.49')$$

Дуга параллели. Длина дуги параллели есть длина части окружности, поэтому она получается непосредственно в конечном виде как произведение радиуса данной параллели $r = N\cos B$ на разность долгот l крайних точек искомой дуги.

Имея в виду значение N (2.27), для дуги параллели получаем выражение

$$s = \frac{l''}{\rho''} N \cos B = \frac{l''}{\rho''} \frac{a \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}, \qquad (2.50)$$

где $\rho'' = 206\,265''$ — число секунд в радиане.

В качестве примера приведем значения длин одного градуса и одной секунды дуг меридианов и параллелей под различными широтами для эллипсоида Красовского (табл. 5).

Таблица 5

Широта B, град.	1°	1″	Широта B, град.	1°	1″
	Дуги меридианов, $м$			Дуги параллелей, $м$	
0	110 576,3	30,7	30	96 489,9	26,8
30	110 854,4	30,8	40	85 395,3	23,7
60	111,414,1	30,9	50	71 696,9	19,9
90	111 695,8	31,0	60	55 800,9	15,5
			70	38 187,2	10,6

ГЛАВА 3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КООРДИНАТ И РАССТОЯНИЙ НА ЭЛЛИПСОИДЕ ОТНОСИМОСТИ

§ 1. Постановка задачи

Одной из основных задач геодезии является определение координат сети опорных пунктов. При астрономических определениях координат последние получаются по наблюдениям небесных светил с помощью установленных по отвесной линии инструментов. Эти координаты относятся к уровенной поверхности силы тяжести, проходящей через точку наблюдения, и не совпадают с координатами референц-эллипсоида из-за угла между эллипсоидом и названной уровенной поверхностью, т. е. они отклоняются от геодезических на величину проекции угла уклонения отвесной линии на плоскость меридиана и первого вертикала в данной точке. Задача нахождения системы геодезических координат решается чисто геометрическим путем при заданных размерах эллипсоида, координатах начальной точки и азимута в ней, т. е. при заданном референц-эллипсоиде.

Для определения геодезических координат точки необходимо знать азимут направления на эту точку с исходной точки, координаты которой известны, и расстояние до нее. Наоборот, если известны координаты двух точек, можно определить расстояние и азимуты направления между ними.

Соответственно тому, что дано и что находится, формулируются так называемые прямая и обратная геодезические задачи.

Основным методом определения опорных пунктов является метод триангуляции.

Схему определения координат и расстояний в методе триангуляции можно наглядно иллюстрировать следующим образом.

На рис. 35 показан ряд триангуляций, состоящий из треугольников (*1*, *2*, *3*), (*2*, *3*, *4*), (*3*, *4*, *5*) и т. д.

В этих треугольниках измеряется длина стороны s_{12} и все углы при вершинах *1*, *2*, *3*, *4* и т. д.

По известной стороне s_{12} и углам при вершинах *1* и *2* решается первый треугольник (*1*, *2*, *3*), находятся его стороны s_{13} и s_{23}.

По известным сторонам s_{12} и s_{13} и направлениям $(1 \rightarrow 2)$, $(1 \rightarrow 3)$ при данных координатах исходного пункта 1 (B_1, L_1) решается прямая геодезическая задача и находятся координаты точек 2 (B_2, L_2) и 3 (B_3, L_3), а также обратные азимуты A_{21} и A_{31}.

Далее, по стороне s_{23} и углам при вершинах 2 и 3 решается второй треугольник (2, 3, 4), находятся стороны s_{24} и s_{34} и их азимуты. По этим сторонам, известным направлениям $2 \rightarrow 4$ и

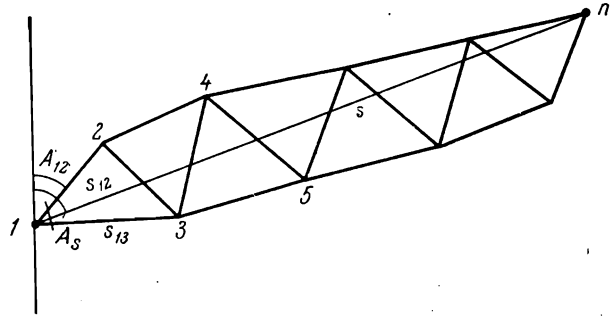


Рис. 35.

$3 \rightarrow 4$ и найденным координатам пунктов $2(B_2, L_2)$ и $3(B_3, L_3)$ решается прямая геодезическая задача и находятся координаты точки 4 и так далее, пока не будут найдены координаты всех пунктов триангуляции, являющиеся вершинами нашей системы треугольников.

Заметим, что при решении треугольников измеренных данных оказывается больше, чем требуется (измеряются три угла и одна сторона). Это приводит к необходимости выполнения так называемых уравнительных вычислений, сводящихся к нахождению наивероятнейших значений с помощью способа наименьших квадратов.

Теперь, если надо определить расстояние s между точками (1) и (n), то его определяют методом решения обратной геодезической задачи по найденным координатам краевых пунктов (1) и (n), (B_1, L_1) и (B_n, L_n).

Таким образом, для того чтобы понять методику и принципы создания сети опорных геодезических пунктов и измерения больших расстояний, надо рассмотреть способы решения сфероидических треугольников, способы решения прямой геодезической задачи и способы решения обратной геодезической задачи.

Кроме того, надо иметь в виду, что все измерения производятся на физической поверхности Земли, тогда как вычисления должны производиться на поверхности эллипсоида относимости,

к которому относятся и найденные координаты и расстояния. Поэтому неотъемлемой задачей высшей геодезии является задача редукции измеренных на физической поверхности Земли элементов к поверхности референц-эллипсоида.

§ 2. Способы решения треугольников на эллипсоиде относимости

Вопрос решения сфероидических треугольников является сложным. В элементарных функциях он не решается. К счастью, земной эллипсоид весьма близок к сфере, поэтому при не слишком больших сторонах сфероидические треугольники можно заменить сферическими, с теми же сторонами и углами, не делая при этом ощутимых ошибок. Эта замена допустима при сторонах треугольника $\leqslant 100 - 120$ *км*. Стороны треугольников в рядах триангуляции первого класса обычно имеют длины в 30—40 *км*. Только в горных местностях они достигают сотни километров. Таким образом, практически во всех случаях геодезической практики можно пользоваться решением сферических треугольников.

Однако решение сферических треугольников также представляет ряд неудобств: в частности, неудобным является необходимость выражения при таком решении сторон треугольников в угловой мере. Чтобы избежать этого и упростить задачу, решение сферических треугольников сводят к решению плоских треугольников, однако с углами, несколько отличными от углов данного сферического. Этот прием основан на теореме Лежандра о сферических избытках. Сферическим избытком называется отличие суммы углов сферического треугольника от π. Теорема Лежандра утверждает, что *если стороны плоского и сферического треугольников равны между собой, то углы такого плоского треугольника равны соответствующим углам сферического треугольника, уменьшенным на* $^1/_3$ *сферического избытка* ε. Сферический же избыток является функцией радиуса сферы и равняется

$$\varepsilon'' = \frac{S}{R^2}\rho''\left(1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{24R^2} + \ldots\right),$$

где S — площадь треугольника, R — радиус сферы, a, b, c — стороны треугольника.

Таким образом, решение сферических треугольников сводится к решению плоских треугольников. Сферический избыток вычисляется по известным сторонам треугольника a, b, c и радиусу R сферы.

Докажем сформулированное положение.

Пусть имеем сферический ABC и плоский $A'B'C'$ треугольники с соответственно равными сторонами (рис. 36).

Найдем отличие углов плоского треугольника от углов сферического.

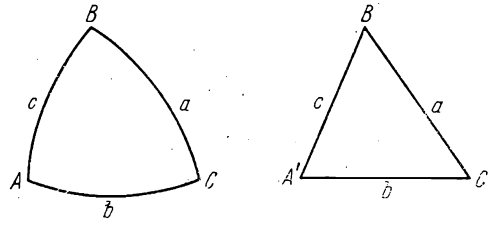


Рис. 36.

Напишем для треугольников аналогии Непера:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\frac{A}{2} &= \pm\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}},\\
\cos\frac{A}{2} &= \pm\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}},\\
\sin\frac{A'}{2} &= \pm\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\\
\cos\frac{A'}{2} &= \pm\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},
\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

где $p=\dfrac{a+b+c}{2}$.

Обозначим через S площадь плоского треугольника

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \tag{3.2}$$

и составим синус разности углов

$$\sin\frac{A-A'}{2}=\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A'}{2}-\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A'}{2}. \tag{3.3}$$

Используя (3.1), получим

$$\sin\frac{A-A'}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}-$$

$$-\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}}\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}=$$

$$=\frac{S}{\sqrt{bc\sin b\sin c}}\left\{\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{(p-b)(p-c)}}-\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{p(p-a)}}\right\}$$

или, вынося b, c за знак корня:

$$\sin\frac{A-A'}{2}=$$

$$=\frac{S}{bc\sqrt{\frac{\sin b}{b}\frac{\sin c}{c}}}\left\{\sqrt{\frac{\sin(p-b)}{p-b}\frac{\sin(p-c)}{p-c}}-\sqrt{\frac{\sin p}{p}\frac{\sin(p-a)}{p-a}}\right\}.$$

В последнее равенство входят выражения вида $\frac{\sin x}{x}$. Имея в виду малость величин $p-a$, $p-b$, $p-c$ (x в угловой мере равняется x/R), разложим все отношения $\frac{\sin(p-a)}{p-a}$, ... в ряд

$$\frac{\sin(p-a)}{p-a}=1-\frac{(p-a)^2}{6}+\frac{(p-a)^4}{120}+\ldots$$

. . . . . .

$$\sqrt{\frac{\sin(p-a)}{p-a}}=1-\frac{(p-a)^2}{12}+\frac{(p-a)^4}{1440}-\ldots$$

. . . . . .

и удержим члены до четвертого порядка малости. Получим

$$\sin\frac{A-A'}{2}=\frac{S}{bc}\frac{1}{\left(1-\frac{b^2}{12}\right)\left(1-\frac{c^2}{12}\right)}\left\{\left[1-\frac{(p-b)^2}{12}+\frac{(p-b)^4}{1440}\right]\times\right.$$

$$\times\left[1-\frac{(p-c)^2}{12}+\frac{(p-c)^4}{1440}\right]-\left[1-\frac{p^2}{12}+\frac{p^4}{1440}\right]\times$$

$$\left.\times\left[1-\frac{(p-a)^2}{12}+\frac{(p-a)^4}{1440}\right]\right\}=$$

$$=\frac{s}{bc}\left(1+\frac{b^2+c^2}{12}\right)\left\{\frac{p^2+(p-a)^2-(p-b)^2-(p-c)^2}{12}+\right.$$

$$\left.+\frac{(p-b)^2(p-c)^2-p^2(p-a)^2}{144}-\frac{p^4+(p-a)^4-(p-b)^4-(p-c)^4}{1440}\right\}.$$

Сделав преобразование каждой дроби отдельно, получим

1. $p^2+(p-a)^2-(p-b)^2-(p-c)^2=2cb.$

2. $(p-b)^2(p-c)^2-p^2(p-a)^2=\frac{1}{2}(a^2-b^2-c^2)bc.$

3. $p^4-(p-b)^4+(p-a)^4-(p-c)^4=$

$$=[p^2-(p-b)^2][p^2+(p-b)^2]+[(p-a)^2-(p-c)^2]\times$$

$$\times[(p-a)^2+(p-c)^2]=bc[3a^2+b^2+c^2].$$

Полученные значения введем в выражение для $\sin\frac{A-A'}{2}$:

$$\sin\frac{A-A'}{2} = \frac{S}{bc}\left(1+\frac{b^2+c^2}{12}\right)\left[\frac{bc}{6}+\frac{bc\,(a^2-b^2-c^2)}{288}-\frac{bc\,(3a^2+b^2+c^2)}{1440}\right]. \quad (3.4)$$

Раскрыв скобки, получим

$$\sin\frac{A-A'}{2} = S\left(1+\frac{b^2+c^2}{12}\right)\left(\frac{1}{6}+\frac{a^2-b^2-c^2}{288}-\frac{3a^2+b^2+c^2}{1440}\right) =$$

$$= \frac{S}{6}\left(1+\frac{b^2+c^2}{12}+\frac{a^2-b^2-c^2}{48}-\frac{3a^2+b^2+c^2}{240}\right)$$

или, приводя подобные члены,

$$\sin\frac{A-A'}{2} = \frac{S}{6}\left(1+\frac{a^2+7b^2+7c^2}{120}\right).$$

Относя стороны к радиусу сферы, переводя углы в секунды и заменяя, в силу малости углов, синусы аргументами, получаем

$$(A-A')'' = \frac{S}{3R^2}\rho''\left(1+\frac{a^2+7b^2+7c^2}{120R^2}\right). \quad (3.5)$$

Аналогичные выражения получаем для B и C:

$$(B-B')'' = \frac{S}{3R^2}\rho''\left(1+\frac{7a^2+b^2+7c^2}{120R^2}\right), \quad (3.6)$$

$$(C-C')'' = \frac{S}{3R^2}\rho''\left(1+\frac{7a^2+7b^2+c^2}{120R^2}\right). \quad (3.7)$$

Сферический избыток ε найдем, просуммировав (3.5)—(3.7):

$$\varepsilon'' = \frac{S}{R^2}\rho''\left(1+\frac{a^2+b^2+c^2}{24R^2}\right). \quad (3.8)$$

Определим теперь поправки для перехода от углов плоского треугольника к сферическому, имея в виду, что они равны 1/3 сферического избытка.

Выразим через сферический избыток ε, который можно теперь получить в числовом виде, коэффициент в формулах (3.5)—(3.7)

$$\frac{S}{3R^2}\rho'' = \frac{\varepsilon''}{3}\left(1-\frac{a^2+b^2+c^2}{24R^2}\right) \quad (3.9)$$

и введем (3.9) в формулы (3.5)—(3.7); тогда получим

$$(A-A')'' = \frac{\varepsilon''}{3}\left(1-\frac{a^2+b^2+c^2}{24R^2}\right)\left(1+\frac{a^2+7b^2+7c^2}{120R^2}\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon''}{3}\left(1-\frac{a^2+b^2+c^2}{24R^2}+\frac{a^2+7b^2+7c^2}{120R^2}\right) = \frac{\varepsilon''}{3}\left(1+\frac{b^2+c^2-2a^2}{60R^2}\right). \quad (3.10)$$

Введем обозначение $\frac{a^2+b^2+c^2}{3}=m^2$ и преобразуем с его помощью (3.10). Последнюю дробь в скобках представим в виде

$$\frac{b^2+c^2-2a^2}{60R^2}=\frac{b^2+c^2+a^2}{60R^2}-\frac{3a^2}{60R^2}=\frac{m^2}{20R^2}-\frac{a^2}{20R^2}.$$

Тогда

$$(A-A')''=\frac{\varepsilon''}{3}\left(1+\frac{m^2-a^2}{20R^2}\right);$$

аналогичные выражения получим для $B-B'$ и $C-C'$. Окончательно имеем

$$\left.\begin{aligned}(A-A')''&=\frac{\varepsilon''}{3}+\frac{\varepsilon''}{60R^2}(m^2-a^2),\\(B-B')''&=\frac{\varepsilon''}{3}+\frac{\varepsilon''}{60R^2}(m^2-b^2),\\(C-C')''&=\frac{\varepsilon''}{3}+\frac{\varepsilon''}{60R^2}(m^2-c^2).\end{aligned}\right\}\qquad(3.11)$$

В случае, если стороны треугольника a, b, $c\leqslant 200$ *км*, вторым членом сферического избытка можно пренебречь. Таким образом, для практических операций используются формулы

$$\left.\begin{aligned}(A-A')''&=\frac{\varepsilon''}{3},\\(B-B')''&=\frac{\varepsilon''}{3},\\(C-C')''&=\frac{\varepsilon''}{3}.\end{aligned}\right\}\qquad(3.12)$$

Для примера приводим значения сферического избытка ε для треугольников разных размеров:

Длина стороны треугольника $a=b=c$, *км*	5	10	30	60	111
Сферический избыток ε''	0,07	0,25	2	8	27

§ 3. Прямая геодезическая задача

Известны координаты (B_1, L_1) исходной точки *1*, азимут A_{12} направления с точки *1* на точку *2* и расстояние s между точками. Требуется найти координаты точки *2* (B_2, L_2) и обратный азимут A_{21} (рис. 37).

Задача решается посредством представления искомых элементов как функций исходных в предположении малости дуги s по сравнению с радиусом Земли:

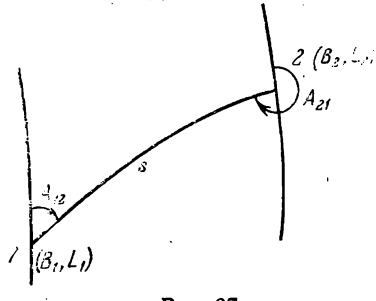


Рис. 37.

$$\left.\begin{aligned} B_2 &= f_1(B_1,\ L_1,\ A_{12},\ s),\\ L_2 &= f_2(B_1,\ L_1,\ A_{12},\ s),\\ A_{21} &= f_3(B_1,\ L_1,\ A_{12},\ s). \end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

Если мы фиксируем исходную точку $(B_1,\ L_1)$ и направление A_{12} на искомую, то координаты искомой точки $(B_2,\ L_2)$ будут зависеть только от расстояния s. Поэтому правые части (3.13) можно представить в виде степенных рядов

$$\left.\begin{aligned} B_2 &= B_1 + dB = B_1 + \left(\frac{\partial B}{\partial s}\right)_1 s + \left(\frac{\partial^2 B}{\partial s^2}\right)_1 \frac{s^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 B}{\partial s^3}\right)_1 \frac{s^3}{3!} + \ldots,\\ L_2 &= L_1 + dL = L_1 + \left(\frac{\partial L}{\partial s}\right)_1 s + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial s^2}\right)_1 \frac{s^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 L}{\partial s^3}\right)_1 \frac{s^3}{3!} + \ldots\\ A_{21} &= A_{12} + 180^\circ + dA =\\ &= A_{12} + 180^\circ + \left(\frac{\partial A}{\partial s}\right)_1 s + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial s^2}\right)_1 \frac{s^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 A}{\partial s^3}\right)_1 \frac{s^3}{3!} + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

Значения первых производных широт, долгот и азимутов по расстоянию s, т. е. коэффициенты первых членов разложения, легко получить геометрически. Рассмотрим для этого на эллипсоиде дугу прямого нормального сечения ab, равную ds. Проведем из b линию bc, перпендикулярную к меридиану aP (рис. 38). Тогда bc будет сечением первого вертикала. Из элементарного треугольника abc найдем величины дуг ac и bc:

$$\left.\begin{aligned} ac &= ds\cos A,\\ bc &= ds\sin A. \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

Разность широт dB точек a и b равна разности широт точек a и c, но линейное расстояние ac связано с угловой величиной приращения широты соотношением

$$dB = \frac{ac}{M}$$

или

$$dB = \frac{ds\cos A}{M}.$$

Аналогично, для разности долгот точки a и b имеем

$$dL = \frac{cb}{N\cos B} = \frac{ds\sin A}{N\cos B}.$$

Таким образом, для первых производных широты и долготы по s имеем выражения

$$\frac{dB}{ds} = \frac{\cos A}{M}, \quad \frac{dL}{ds} = \frac{\sin A}{N\cos B}. \tag{3.16}$$

Для нахождения производной азимута рассмотрим треугольник cPb (рис. 38, 39). В этом треугольнике угол при c прямой,

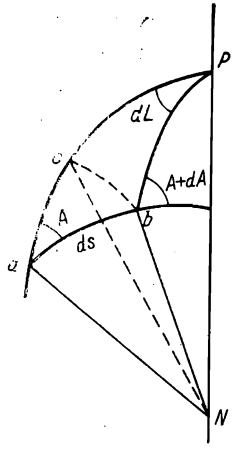


Рис. 38.

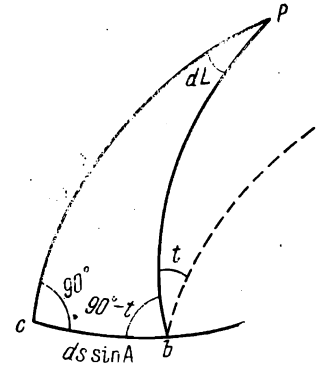


Рис. 39.

а угол при b отличается от прямого на малую величину, t — угол между меридианом bP и направлением bt, параллельным меридиану cP.

Для прямоугольного сферического треугольника bcP имеет место соотношение

$$\cos(90° - t) = \sin dL \cos[90° - (B + dB)]$$

или

$$\sin t = \sin dL \sin (B + dB).$$

Считая dL, t и dB малыми и заменяя синусы этих углов аргументами, получим

$$t = dL \sin B.$$

Но t есть приращение прямого азимута направления s при переходе от точки c к точке b:

$$t = dA.$$

Поэтому

$$dA = dL \sin B.$$

Вводя значение dL из (3.16), получаем

$$\frac{dA}{ds} = \frac{\sin A \operatorname{tg} B}{N}. \tag{3.17}$$

Формулы (3.16) и (3.17) дают коэффициенты первого члена разложения (3.14). Для получения последующих членов разложения надо выполнить дифференцирование этих выражений. При этом следует иметь в виду, что входящие в формулы величины M и N также являются функциями широты B [(2.26) и (2.27)]. Однако для небольших расстояний (не превышающих 30 *км*) можно пренебречь сфероидичностью Земли и считать $M = \text{const}$ и $N = \text{const}$. Тогда коэффициенты второго члена разложения (3.14) будут

$$\frac{d^2B}{ds^2} = -\frac{\sin A}{M}\frac{dA}{ds} = -\frac{\sin^2 A}{MN}\operatorname{tg} B,$$

$$\frac{d^2L}{ds^2} = \frac{\cos A}{N\cos B}\frac{dA}{ds} + \frac{\sin A}{N}\frac{\operatorname{tg} B}{\cos B}\frac{dB}{ds} =$$

$$= \frac{\cos A \sin A}{N^2 \cos B}\operatorname{tg} B + \frac{\sin A \cos A}{NM}\frac{\operatorname{tg} B}{\cos B} = \frac{\operatorname{tg} B \sec B \sin 2A}{NM},$$

$$\frac{d^2A}{ds^2} = \frac{\cos A \operatorname{tg} B}{N}\frac{dA}{ds} + \frac{\sin A}{N}\sec^2 B \frac{dB}{ds} =$$

$$= \frac{\cos A \operatorname{tg} B \sin A \operatorname{tg} B}{N^2} + \frac{\sin A \sec^2 B \cos A}{NM} =$$

$$= \frac{\sin A \cos A (\operatorname{tg}^2 B + \sec^2 B)}{NM} = \frac{\sin A \cos A (1 + 2\operatorname{tg}^2 B)}{NM}.$$

Подставляя эти значения в наши дифференциальные формулы, получим

$$\left.\begin{aligned} B_2 &= B_1 + \frac{\cos A}{M}s - \frac{\sin^2 A}{MN}\operatorname{tg} B \frac{s^2}{2!} + \dots \\ L_2 &= L_1 + \frac{\sin A}{N\cos B}s + \frac{\operatorname{tg} B \sec B \sin 2A}{MN}\frac{s^2}{2!} + \dots \\ A_{21} &= -A_{12} + 180^\circ + \frac{\sin A \operatorname{tg} B}{N}s + \\ &\quad + \frac{\sin A \cos A (1 + 2\operatorname{tg}^2 B)}{NM}\frac{s^2}{2!} + \dots \end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

Если задача решается на большие расстояния, сфероидичностью Земли пренебрегать уже нельзя и дифференцирование надо выполнять, имея в виду, что M и N суть функции широты. Кроме

того, оказывается уже невозможным ограничиться вторыми членами разложения. Так, при решении задачи на 600—800 *км* приходится удерживать пять членов ряда. Понятно, что при этом получаются громоздкие формулы, операции с которыми весьма неудобны. Поэтому в практике геодезических работ применяются приемы для упрощения полученных формул. Рассмотрим два таких приема.

§ 4. Приемы упрощения формул для решения прямой геодезической задачи

Формулы со средней широтой и средним азимутом. Этот прием упрощения формул основан на том известном факте, что степенной ряд, разложенный по среднему значению аргумента, не содержит членов четных степеней и число членов формулы оказывается в два раза меньше, чем в разложениях по начальному аргументу (3.18).

В самом деле, рассмотрим ряд

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+$$

$$+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\frac{h^4}{4!}f^{IV}(x)+\ldots \qquad (3.19)$$

Напишем этот ряд по среднему значению аргумента $h/2$. Для этого получим значения всех производных для среднего значения аргумента. Для первой производной функции f будем иметь

$$f'\left(x+\frac{h}{2}\right)=f'(x)+\frac{h}{2}f''(x)+\frac{h^2}{8}f'''(x)+\frac{h^3}{48}f^{IV}(x)+\ldots$$

Отсюда

$$f'(x)=f'\left(x+\frac{h}{2}\right)-\frac{h}{2}f''(x)-\frac{h^2}{8}f'''(x)-\frac{h^3}{48}f^{IV}(x)-\ldots$$

Вводя это в ряд (3.19), получаем

$$f(x+h)=f(x)+hf'\left(x+\frac{h}{2}\right)-\frac{h^2}{2}f''(x)-\frac{h^3}{8}f'''(x)-$$

$$-\frac{h^4}{48}f^{IV}(x)-\ldots+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\frac{h^4}{4!}f^{IV}(x)+\ldots$$

Здесь члены $\frac{h^2}{2}f''(x)$ взаимно уничтожаются и остается

$$f(x+h)=f(x)+hf'\left(x+\frac{h}{2}\right)+\frac{h^3}{24}f'''(x)+\frac{h^4}{48}f^{IV}(x)+\ldots \qquad (3.20)$$

Аналогично представим третью производную по среднему

аргументу

$$f'''\left(x+\frac{h}{2}\right)=f'''(x)+\frac{h}{2}f^{\mathrm{IV}}(x)+\frac{h^2}{8}f^{\mathrm{V}}(x)+\ldots,$$

откуда

$$f'''(x)=f'''\left(x+\frac{h}{2}\right)-\frac{h}{2}f^{\mathrm{IV}}(x)-\frac{h^2}{8}f^{\mathrm{V}}(x)-\ldots,$$

и введем ее в (3.20). Получаем

$$f(x+h)=f(x)+hf'\left(x+\frac{h}{2}\right)+\frac{h^3}{24}f'''\left(x+\frac{h}{2}\right)-$$
$$-\frac{h^4}{48}f^{\mathrm{IV}}(x)-\ldots+\frac{h^4}{48}f^{\mathrm{IV}}(x)+\ldots,$$

или

$$f(x+h)=f(x)+hf'\left(x+\frac{h}{2}\right)+\frac{h^3}{24}f'''\left(x+\frac{h}{2}\right)+$$
$$+\frac{h^5}{1920}f^{\mathrm{V}}\left(x+\frac{h}{2}\right)+\ldots \qquad (3.21)$$

Мы видим, что при разложении по среднему аргументу сократились члены с четными степенями h. Применяя этот прием к формулам для передачи координат (3.14), мы получим новые формулы, в которых не будет членов с четными степенями s:

$$\left.\begin{aligned}
B_2-B_1&=s\left(\frac{dB}{ds}\right)_{s/2}+\frac{s^3}{24}\left(\frac{d^3B}{ds^3}\right)_{s/2}+\frac{s^5}{1920}\left(\frac{d^5B}{ds^5}\right)_{s/2}+\ldots,\\
L_2-L_1&=s\left(\frac{dL}{ds}\right)_{s/2}+\frac{s^3}{24}\left(\frac{d^3L}{ds^3}\right)_{s/2}+\frac{s^5}{1920}\left(\frac{d^5L}{ds^5}\right)_{s/2}+\ldots,\\
A_{21}-A_{12}\pm 180^\circ&=s\left(\frac{dA}{ds}\right)_{s/2}+\frac{s^3}{24}\left(\frac{d^3A}{ds^3}\right)_{s/2}+\frac{s^5}{1920}\left(\frac{d^5A}{ds^5}\right)_{s/2}+\ldots,
\end{aligned}\right\} \qquad (3.22)$$

где индекс $s/2$ означает, что функция отнесена к середине дуги s.

Так построенные формулы будут иметь в два раза меньше членов, чем формулы (3.14). При удержании членов пятого порядка, т. е. трех членов разложения, эти формулы обеспечивают необходимую точность при решении геодезической задачи на 600—800 *км*.

Для того чтобы формулы (3.22) представить в развернутом виде, надо в них ввести значения найденных дифференцированием производных (3.16) и (3.17), имея в виду, что N и M суть функции широты, и ввести средние значения аргументов s. При этом значения B, L и A должны быть взяты для средней точки дуги s.

Приближенно принимается

$$B_{\text{ср}} = \frac{B_1 + B_2}{2},$$

$$L_{\text{ср}} = \frac{L_1 + L_2}{2},$$

$$A_{12\text{ср}} = \frac{A_{12} + A_{21} - 180^\circ}{2}.$$

Так как до решения задачи надо знать $B_{\text{ср}}$, $L_{\text{ср}}$ и $A_{12\text{ср}}$, но при этом B_2, L_2 и A_{21} еще не известны, задача решается методом последовательных приближений.

Например, с карты снимаются приближенные значения B_2, L_2, A_{21}. По этим значениям вычисляются приближенные средние значения аргументов $B'_{\text{ср}}$, $L'_{\text{ср}}$, $A'_{12\text{ср}}$. С этими приближенными значениями находят первое приближение координат искомой точки B'_2, L'_2, A'_{21}. По найденным координатам точки B'_2, L'_2, A'_{21} находят новые, более точные значения координат средней точки и вновь, вводя их в формулы (3.22), находят второе приближение координат искомой точки. Обычно второе приближение бывает окончательным.

Упрощение формул методом введения вспомогательной точки. Метод состоит в том, что переход осуществляется не непосредственно от точки a к b, а последовательно, через некоторую точку c (рис. 38), выбранную таким образом, чтобы в формулах часть членов обращалась в нули. Например, выберем точку c так, чтобы она лежала на меридиане aP на пересечении его с нормальным сечением, проходящим через b и перпендикулярным к меридиану aP. Тогда при переходе от a к c оказывается равным нулю азимут A_{ac} и в формулах (3.18) обратятся в нуль все члены, содержащие $\sin A_{ac}$, и формулы будут иметь вид

$$B_c = B_a + \frac{ac}{M} + \ldots,$$

$$L_c = L_a,$$

$$A_{ca} = A_{ac} + 180^\circ.$$

Здесь в формуле для определения широты выпали все члены, содержащие $\sin A$, в частности, выпал третий член разложения. Долгота точки c совпадает с долготой a, обратный азимут получается добавлением к прямому 180°.

При переходе от точки c к точке b прямой азимут A_{cb} оказывается равным $\pi/2$. Поэтому в рядах (3.18) выпадают члены

с $\cos A_{cb}$ и $\sin 2A_{cb}$. Тогда в формуле для широты выпадает первый член разложения, в формуле для долготы — второй, четвертый и т. д. в формуле для азимута — также второй, четвертый и т. д.

§ 5. Решение обратной геодезической задачи

Известны координаты точек B_1, L_1 и B_2, L_2. Требуется найти расстояние s между точками и прямой A_{12} и обратный A_{21} азимуты.

Решение осуществляется методом последовательных приближений. Рассмотрим принцип его на тех же формулах:

$$B_2 = B_1 + \frac{\cos A_{12}}{M} s - \frac{\sin A_{12}}{MN} \operatorname{tg} B_1 \frac{s^2}{4} + \ldots,$$

$$L_2 = L_1 + \frac{\sin A_{12}}{N \cos B_1} s - \frac{\sin 2A_{12} \operatorname{tg} B_1}{MN \cos B_1} \frac{s^2}{4} + \ldots,$$

$$A_{21} = A_{12} + 180^\circ + \frac{\sin A_{12} \operatorname{tg} B_1}{N} s + \\ + \frac{\sin A_{12} \cos A_{12}}{MN} (1 + 2\operatorname{tg}^2 B_1) \frac{s^2}{4} + \ldots$$

Из первых двух формул с учетом только первых членов определим приближенные значения A_{12}^0 и s_0. Подставив их в третью формулу, найдем первое приближение A_{21}. Далее введем найденные значения A_{12}^0 и s_0 в исходные формулы уже с учетом второго члена

$$B_2 = B_1 + s_1 \left(\frac{\cos A_{12}}{M} - \frac{\sin A_{12}}{MN} \operatorname{tg} B_1 \frac{s}{4} \right)_0$$

и найдем первое приближение s_1. Из второй формулы определим аналогичным образом A_{12}, а из третьей — A_{21} и так далее, пока результаты двух последовательных вычислений не совпадут. Обычно бывает достаточно двух-трех приближений.

ГЛАВА 4

ПОНЯТИЕ О РЕДУКЦИОННОЙ ПРОБЛЕМЕ ВЛИЯНИЕ УКЛОНЕНИЯ ОТВЕСНЫХ ЛИНИЙ

§ 1. Редуцирование базисов при методе развертывания геодезических измерений на референц-эллипсоиде

Редукционная проблема состоит в решении задачи отнесения всех геодезических измерений, выполненных на физической поверхности Земли, на референц-эллипсоид. Можно указать два метода решения редукционной проблемы: метод развертывания, применявшийся до тридцатых годов нашего столетия, и метод проектирования. Первый является приближенным, второй — точным. Возможность практического применения второго метода появилась в результате развития геодезической гравиметрии.

Метод развертывания состоит в том, что измеренные на физической поверхности Земли длины линий и углы редуцируются на уровень моря (геоид) и далее откладываются на эллипсоиде без каких-либо изменений.

Проследим более подробно последовательность операций в этом методе при редуцировании измеренных длин.

На физической поверхности Земли измеряется линия ab (рис. 40). Поскольку физическая поверхность Земли может быть наклоненной к горизонту, производится приведение измеренной длины к горизонту — получение так называемого горизонтального проложения $\bar{a}\bar{b}$. Это приведение осуществляется по измеренным вертикальным углам. Далее выполняется перенос длины горизонтального проложения на геоид и получение длины $a'b'$. В первом приближении такое проектирование производится по радиусам сферы среднего радиуса кривизны в данной точке $R=\sqrt{MN}$ на высоту h (рис. 41):

$$\frac{s}{s_0}=\frac{R+h}{R}=1+\frac{h}{R}$$

и

$$s_0=s\left(1+\frac{h}{R}\right)^{-1}.$$

Раскладывая скобку в ряд по малому аргументу h/R, получим

$$s_0 = s - \frac{h}{R}s + \frac{h^2}{R^2}s + \ldots \qquad (4.1)$$

Пренебрегая третьим членом разложения, составляющим в обычных условиях (равнина, $s<100$ *км*) десятые доли миллиметра, получаем приведение за высоту в виде поправки $\frac{h}{R}s\left(1-\frac{h}{R}\right)$. Здесь редуцирование

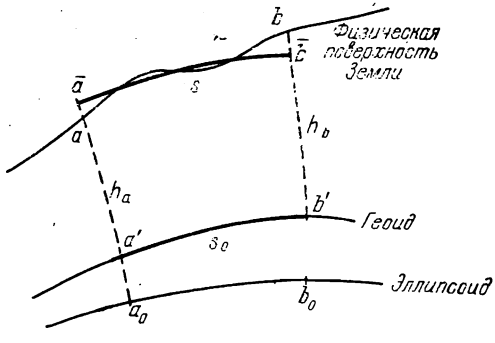


Рис. 40.

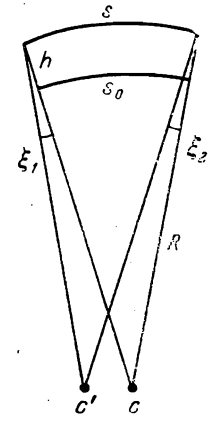


Рис. 41.

базиса выполнено без учета уклонения отвесных линий. Если имеет место уклонение отвесных линий, равное на концах базиса (в точках a и b) соответственно ξ_1 и ξ_2, формула для вычисления приведенной к геоиду длины базиса получает поправку

$$\delta s = \frac{(\xi_2'' - \xi_2'')h}{\rho''},$$

очевидную из рис. 41.

В этом случае формула для приведения базиса к уровню моря будет

$$s_0 = s - \frac{h}{R}s + \frac{h^2}{R^2}s - \frac{\xi_2'' - \xi_1''}{\rho''}h. \qquad (4.2)$$

Так как изменение уклонения отвеса от точки a к b не может быть велико, то и поправка δs всегда мала. Для случая $\xi_2'' - \xi_1'' = 2''$ и $h=0{,}5$ *км* она составит 5 *мм*. Искажения приведенной длины базиса за счет нелинейного изменения ξ в интервале ab практически пренебрежимы.

Следующим шагом в методе развертывания является перенос приведенной на уровень моря длины $a'b'$ на эллипсоид без изменений. Этот перенос осуществляется простым откладыванием длины s_0 от точки a_0 (рис. 40)

$$a_0b_0=a'b'.$$

При этом предполагается знание высот геоида над референц-эллипсоидом. Очевидно, что за счет переноса длины с одной поверхности на другую без каких-либо изменений при укладывании ряда таких отрезков возникнут искажения. Они будут тем больше, чем хуже референц-эллипсоид представляет геоид в данной области. В качестве примера можно указать, что при применении метода развертывания на эллипсоиде Бесселя при ориентировке по Пулкову сдвиг координат для Дальнего Востока по меридиану достигнет нескольких десятков метров.

При редуцировании претерпевают деформацию как длины линий, так и измеренные углы. Вследствие того, что уклонение отвеса в точках a и b не одинаково и что оно не одинаково меняется при переходе на геоид, происходит поворот плоскости нормального сечения уровенных поверхностей в точках линии aa' и проходящей через соответствующие точки линии bb'. Азимут плоскости нормального сечения в точке a и проходящего через точку b будет отличным от азимута такого же сечения в точке a' и проходящего через точку b'. Это и вызывает изменение направлений при редуцировании. При переходе от наблюденных на физической поверхности Земли величин на референц-эллипсоид осуществляется также переход от координат астрономических к координатам геодезическим. Широты, долготы и азимуты получают поправки за счет уклонения отвесных линий.

§ 2. Редуцирование базисов при методе проектирования геодезических измерений на референц-эллипсоид

Метод развертывания получил широкое применение в геодезии, когда недостаточность гравиметрических данных не позволяет поставить задачу определения отклонений геоида от референц-эллипсоида. Появившаяся к тридцатым годам нашего столетия возможность построения поверхности геоида и нахождения высот геоида над эллипсоидом относимости, а также повышение требований к точности геодезических измерений поставили новую проблему в геодезии — так называемую проблему проектирования. Эта проблема была сформулирована Ф. Н. Красовским в середине тридцатых годов. Она состоит в том, что все измеренные на физической поверхности Земли геодезические

элементы (длины, углы) после редуцирования на геоид должны быть еще спроектированы на эллипсоид относимости с помощью известных превышений геоида над эллипсоидом.

Таким образом, при решении этой проблемы геоид терял свое самостоятельное значение как поверхности, представляющей Землю, и приобретал смысл промежуточной переходной поверхности, помогающей осуществить переход от физической поверхности Земли к эллипсоиду относимости. Последовательность расчетов при применении метода проектирования по Ф. Н. Красовскому сохраняется такой же, как и в первом методе. Первым шагом осуществляется приведение длин к горизонту, вторым шагом — перенос на геоид по высотам h и третьим — переход на эллипсоид по известным высотам геоида ζ (рис. 42). Высоты h получаются из нивелировок, высоты ζ находятся гравиметрическим методом при помощи решения задачи Стокса или из астрономо-гравиметрического нивелирования.

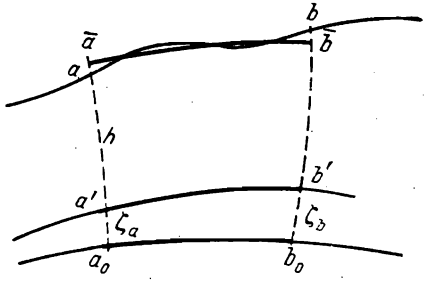


Рис. 42.

§ 3. Влияние уклонения отвесных линий на астрономические широты, долготы, азимуты и горизонтальные углы. Уравнение Лапласа

Уклонения отвесных линий определяются разностью геодезических и астрономических координат и называются абсолютными, если геодезические координаты отнесены к общему земному эллипсоиду, и относительными в случае их отнесения к некоторому данному референц-эллипсоиду. Все астрономо-геодезические измерения, выполненные с помощью инструментов, установленных по уровню, отнесены к уровенной поверхности силы тяжести в данной точке или, после редукции, к уровню моря (к геоиду). Для того чтобы с измеренными величинами производить операции с помощью формул сфероидической геодезии, надлежит осуществить еще переход на эллипсоид и учесть при этом влияние уклонений отвесных линий. Рассмотрим далее, как уклонения отвесных линий изменяют широты, долготы и азимуты при переходе от геоида к эллипсоиду.

Пусть в точке A (рис. 43) известны астрономические широта φ, долгота λ и азимут α_m на точку m. Построим из точки A, как из центра, сферу произвольного радиуса. Рассмотрим точки пересечения сферы различными направлениями из A и дуги

больших кругов между этими точками. Чертеж сделан в плоскости меридиана, проходящего через точку A.

Пусть Z — геодезический зенит в точке A, определяемый нормалью к референц-эллипсоиду, Z_1 — астрономический зенит, определяемый нормалью к уровенной поверхности, проходящей через уровень инструмента, $ZZ_1=u$ — дуга большого круга, равная полному отклонению отвесной линии, P — полюс, m — направление на некоторый предмет, азимут α_m которого определяется.

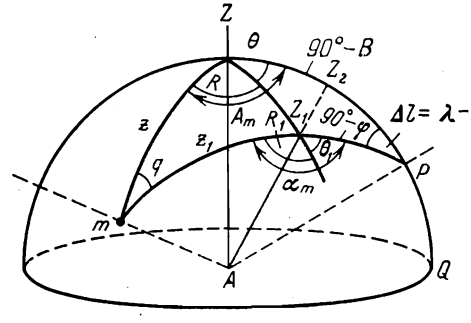


Рис. 43.

Проведем через точку Z_1 дугу большого круга, пересекающую под прямым углом дугу меридиана в точке Z_2. Дуга $ZZ_2=\xi$ — составляющая уклонения отвесной линии в плоскости меридиана. Дуга $Z_1Z_2=\eta$ — составляющая уклонения отвесной линии в плоскости первого вертикала. Угол при полюсе $Z_2PZ_1=\Delta l=\lambda-L$ — разность геодезической и астрономической долгот точки A. Дуга $Z_2P=90°-(B+\xi)$, где B — геодезическая широта точки A. Дуга $Z_1P=90°-\varphi$ — дополнение до астрономической широты точки A. Из сферического прямоугольного треугольника Z_1Z_2P получим

$$\operatorname{tg}[90°-(B+\xi)]=\operatorname{tg}(90°-\varphi)\cos(\lambda-L)$$

или

$$\cos(\lambda-L)=\operatorname{tg}\varphi\operatorname{ctg}(B+\xi) \tag{4.3}$$

и

$$\sin\eta=\sin(\lambda-L)\cos\varphi. \tag{4.4}$$

Имея в виду, что ξ, η и Δl — величины малые, порядка нескольких секунд, напишем последние формулы в приближенном виде, заменив тригонометрические функции аргументами

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(B+\xi),$$

следовательно,

$$B=\varphi-\xi \tag{4.5}$$

и

$$L=\lambda-\eta\sec\varphi. \tag{4.6}$$

Последние формулы показывают, как должны измениться широта и долгота точки при переходе с геоида на эллипсоид

относимости. Найдем выражения для полного уклонения отвесной линии u и его направления θ.

Полагая в силу малости треугольник ZZ_1Z_2 плоским, получим

$$\xi = u\cos\theta,\ \eta = u\sin\theta,$$

и направление θ определится через тангенс угла

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\eta}{\xi} = \frac{(\lambda - L)\cos\varphi}{\varphi - B},$$

полная же величина уклонения отвесной линии выразится через составляющие как

$$u = \frac{\xi}{\cos\theta} = \frac{\eta}{\sin\theta} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

или

$$u = \sqrt{(\varphi - B)^2 + (\lambda - L)^2\cos^2\varphi}. \qquad (4.7)$$

Рассмотрим влияние уклонения отвесной линии на азимут. На рисунке θ — геодезический азимут направления полной составляющей уклонения отвесной линии, θ_1 — астрономический азимут направления полной составляющей уклонения отвесной линии, $A_m = \theta + R$ — геодезический азимут направления на точку m, $\alpha_m = \theta_1 + R_1$ — астрономический азимут того же направления.

Из сферического треугольника ZZ_1P получим выражение разности $\theta_1 - \theta$, т. е. изменение угла θ при переходе от геодезической системы координат к астрономической:

$$-\cos\theta_1 = -\cos\theta\cos(\lambda - L) + \sin\theta\sin(\lambda - L)\sin B.$$

Пренебрегая малыми порядка квадрата уклонения отвесной линии ξ^2, Δl^2, η^2, $\xi\eta$, $\xi\Delta l$, $\eta\Delta l$ и заменяя геодезическую широту через астрономическую, получим

$$\cos\theta - \cos\theta_1 = (\lambda - L)\sin\theta\sin\varphi,$$

но

$$\cos\theta - \cos\theta_1 = -2\sin\frac{\theta + \theta_1}{2}\sin\frac{\theta - \theta_1}{2} = -(\theta - \theta_1)\sin\theta,$$

откуда

$$\theta - \theta_1 = -(\lambda - L)\sin\varphi = -\eta\operatorname{tg}\varphi. \qquad (4.8)$$

Аналогичным образом найдем изменение угла R_1 при переходе к геодезической системе координат. Из сферического треугольника mZZ_1 имеем

$$\cos(180^\circ - R_1) = -\cos R_1 = -\cos R\cos q + \sin R\sin q\cos z,$$

откуда, принимая во внимание малость угла q, получим

$$\cos R_1 - \cos R = q \sin R \cos z,$$

или

$$\cos R_1 - \cos R = 2 \sin \frac{R + R_1}{2} \sin \frac{R - R_1}{2} = q \sin R \cos z.$$

Полагая $\frac{R + R_1}{2} \approx R$, получаем

$$R_1 - R = q \cos z. \tag{4.9}$$

Выразим q через зенитное расстояние и уклонение отвеса из треугольника mZ_1Z:

$$\frac{\sin q}{\sin u} = \frac{\sin R}{\sin z}$$

или, с точностью до квадрата уклонения отвесной линии,

$$q = u \frac{\sin R}{\sin z}. \tag{4.10}$$

Введем (4.10) в (4.9):

$$R_1 - R = u \sin R \operatorname{ctg} z. \tag{4.11}$$

Вычитая (4.11) из (4.8), получим искомую зависимость для азимутов

$$(\theta + R) - (\theta_1 + R_1) = -\eta \operatorname{tg} \varphi - u \sin R \operatorname{ctg} z.$$

Так как $\theta + R = A_m$ и $\theta_1 + R_1 = \alpha_m$, то

$$\alpha_m - A_m = \eta \operatorname{tg} \varphi + \frac{u \sin R}{\operatorname{tg} z}.$$

Преобразуем правую часть уравнения, принимая во внимание (4.7), (4.8) и равенство $R = A_m - \theta$:

$$\alpha_m - A_m = (\lambda - L) \sin \varphi + \frac{\xi \sin A_m - \eta \cos A_m}{\operatorname{tg} z}$$

или

$$A_m = \alpha_m - (\lambda - L) \sin \varphi + \frac{\eta \cos A_m - \xi \sin A_m}{\operatorname{tg} z}. \tag{4.12}$$

Уравнение (4.12) дает влияние уклонения отвесных линий на астрономический азимут. Это влияние складывается из постоянного в данной точке влияния $(\lambda - L) \sin \varphi$ и переменной части, зависящей от азимута A_m наблюдаемого предмета и его зенитного расстояния.

В случае зенитных расстояний, близких к 90°, что обычно имеет место при определении азимутов в триангуляциях I класса,

второй член уравнения (4.12) исчезает:

$$A_m = \alpha_m - (\lambda - L)\sin\varphi. \qquad (4.13)$$

Уравнение (4.13), дающее связь геодезического азимута с астрономическим через широту и долготу, называется уравнением Лапласа, а геодезический азимут, вычисленный с помощью этого уравнения, азимутом Лапласа. Это уравнение играет в геодезии очень важную роль. Оно позволяет вычислить геодезический азимут через измеренные в данном пункте астрономические координаты и геодезическую долготу. Сопоставление такого азимута с геодезическим азимутом, переданным по триангуляции решением геодезической задачи, позволяет судить о наличии боковых искажений в триангуляционной сети. Азимуты Лапласа определяются с точностью, характеризуемой средней квадратической ошибкой,

$$m = \pm\sqrt{m_\alpha^2 + m_\lambda^2 \sin^2\varphi} = \pm\, 0'',7.$$

Поэтому при построении триангуляций предусматривается обязательное определение азимутов Лапласа. Эти азимуты определяются по нескольку в каждом звене, что делает триангуляционную сеть значительно более жесткой.

Возвращаясь опять к формуле (4.12), заметим, что первый поправочный член не зависит от азимута, а является функцией широты и уклонения отвеса в первом вертикале. Он входит как постоянная поправка в измеряемый азимут и не влияет на измерения горизонтальных углов.

Второй поправочный член зависит от уклонения отвесной линии и азимута. Этот член характеризует отличие измеренных горизонтальных направлений от соответствующих им направлений на референц-эллипсоиде. Таким образом, он является поправкой измеренных направлений при редукции их на референц-эллипсоид. Для равнинных районов эта поправка мала, она составляет приблизительно $0'',08$. В горных областях она становится вполне ощутимой.

ГЛАВА 5

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ ИЗ ГРАДУСНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

§ 1. Определение большой полуоси и сжатия по градусным измерениям, выполненным вдоль меридиана

В настоящее время под градусными измерениями понимают совокупность геодезических, астрономических и гравиметрических измерений, выполняющихся для определения размеров и формы Земли. Эта задача неразрывно связана с задачей создания геодезической основы для картографических целей. В качестве поверхности относимости при решении геодезических задач мы принимаем эллипсоид вращения, который определяется двумя элементами: сжатием и большой полуосью. Для определения формы и размеров такого эллипсоида относимости необходимо произвести измерения по крайней мере двух дуг, расположенных под разной широтой, в областях различных кривизн земной поверхности. В самом деле, длина дуги по меридиану определяется формулой (2.49′):

$$s = a(B_2 - B_1)\left\{1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 2B_m\right)e^2 + \ldots\right\}.$$

Если произведено измерение дуги s между широтами B_1 и B_2, то формула (2.49′) представляет уравнение с двумя неизвестными a и e^2 или a и α, так как

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2.$$

Очевидно, что для того, чтобы определить неизвестные a и e^2 или a и α, необходимо и достаточно иметь два уравнения вида (2.49′), в которых дуги s измерены под разными широтами. В противном случае коэффициенты будут пропорциональны и уравнения тождественны. Практически задача определения формы и размеров Земли когда-то решалась именно так. Современная постановка ее отличается тем, что, во-первых, некоторые,

принимаемые за исходные, значения a_0 и e_0^2 уже имеются, и выгоднее искать поправки к ним Δa и Δe_0^2, во-вторых, выгодно измерить не две, а большее число дуг и составить систему больше двух уравнений вида (2.49′), которые можно решить по способу наименьших квадратов.

Итак, будем искать поправки к известным значениям a_0 и e_0^2, тогда новые улучшенные значения большой полуоси и эксцентриситета будут

$$\left.\begin{aligned} a &= a_0 + \Delta a, \\ e^2 &= e_0^2 + \Delta e^2. \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

Внесем эти значения в уравнение (2.49′) и, пренебрегая членами второго порядка малости, получим новое уравнение:

$$s = a_0(B_2 - B_1)\left[1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 2B_m\right)e_0^2\right] + \Delta a(B_2 - B_1)\times$$
$$\times\left[1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 2B_m\right)e_0^2\right] - a_0(B_2 - B_1)\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 2B_m\right)\Delta e^2. \tag{5.2}$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, равно радиусу кривизны меридиана исходного эллипсоида в точке со средней широтой B_m. В самом деле, мы имели (2.26)

$$M^0 = a_0(1 - e_0^2)(1 - e_0^2\sin^2 B_m)^{-3/2}.$$

Развертывая эту функцию в ряд и ограничиваясь членами порядка e_0^4, получим

$$M^0 = a_0(1 - e_0^2)\left(1 + \frac{3}{2}e_0^2\sin^2 B_m\right) = a_0\left[1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 2B_m\right)e_0^2\right].$$

Теперь уравнение (5.2) можно представить так:

$$s = (B_2 - B_1)M^0 + \frac{\Delta a}{a_0}(B_2 - B_1)M^0 -$$
$$- a_0(B_2 - B_1)\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 2B_m\right)\Delta e^2$$

или

$$\frac{s}{M^0} = (B_2 - B_1)\left\{1 + \frac{\Delta a}{a_0} - \frac{a_0}{M^0}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 2B_m\right)\Delta e^2\right\}.$$

Решая систему таких уравнений относительно Δa и Δe^2, находим искомые поправки к полуоси и сжатию. Однако при этом еще не решена задача ориентировки вновь полученного эллипсоида. Поэтому сделаем еще несколько преобразований, кото-

рые помогут выяснить, как решается и этот вопрос. С принятой точностью $s/M^0 = B_2^0 - B_1^0$ — разность широт на исходном эллипсоиде. Имея это в виду, а также пренебрегая в последнем члене величинами порядка четвертой степени эксцентриситета, получим

$$B_2^0 - B_1^0 = (B_2 - B_1)\left\{1 + \frac{\Delta a}{a_0} - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 2B_m\right)\Delta e^2\right\}. \quad (5.3)$$

Геодезические широты точек на новом эллипсоиде выразим через астрономические широты и уклонения отвесных линий. Тогда

$$B_2^0 - B_1^0 = (\varphi_2 - \varphi_1) - (\xi_2 - \xi_1) + (B_2 - B_1)\frac{\Delta a}{a_0} - \\ - (B_2 - B_1)\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 2B_m\right)\Delta e^2.$$

Для выражения дуг в секундах все члены уравнения надо разделить на $\rho'' = 206\,265$. В членах, где разность широт умножается на поправки Δa и Δe^2, положим

$$B_2 - B_1 \approx B_2^0 - B_1^0,$$

т. е. при переходе на новый эллипсоид пренебрежем произведением изменения разности широт на искомые поправки. Очевидно, что отбрасываемый член не больше квадрата поправочных членов. Имея это в виду, напишем

$$\xi_2 = \xi_1 + [(\varphi_2 - \varphi_1) - (B_2^0 - B_1^0)] + (B_2^0 - B_1^0)\frac{\Delta a}{a_0} - \\ - (B_2^0 - B_1^0)\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 2B_m\right)\Delta e^2. \quad (5.4)$$

Обозначая скобки соответственно l, p, q, получим

$$\xi_2 = \xi_1 + l + p\frac{\Delta a}{a_0} + q\Delta e^2. \quad (5.5)$$

Величины l, p, q получаются в результате астрономических наблюдений и определения геодезических координат на исходном эллипсоиде.

Обычно при измерении дуги меридиана астрономические определения производятся в ряде точек, тогда для каждых двух соседних точек могут быть написаны уравнения вида (5.5):

$$\left.\begin{aligned} \xi_2 &= \xi_1 + p_1\frac{\Delta a}{a_0} + q_1\Delta e^2 + l_1, \\ \xi_3 &= \xi_2 + p_2\frac{\Delta a}{a_0} + q_2\Delta e^2 + l_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (5.6)$$

Для удобства решения преобразуем уравнения так, чтобы в правую часть входили уклонения отвеса только в исходной точке. Для этого подставим ξ_2 из первого уравнения во второе и так далее:

$$\xi_2 = \xi_1 + p_1\frac{\Delta a}{a_0} + q_1\Delta e^2 + l_1,$$

$$\xi_3 = \xi_1 + (p_1 + p_2)\frac{\Delta a}{a_0} + (q_1 + q_2)\Delta e^2 + (l_1 + l_2).$$

. . . . . .

Обозначая $\sum_1^i p_i = P_i$, $\sum_1^i q_i = Q_i$, $\sum_1^i l_i = L_i$, получим окончательную систему условных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \xi_2 &= \xi_1 + P_1\frac{\Delta a}{a_0} + Q_1\Delta e^2 + L_1, \\ \xi_3 &= \xi_1 + P_2\frac{\Delta a}{a_0} + Q_2\Delta e^2 + L_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (5.7)$$

Система (5.7) содержит три неизвестные величины

$$\xi_1,\ \Delta a,\ \Delta e^2,$$

которые и находятся по способу наименьших квадратов из условия минимума суммы $\sum \xi_i^2$. При этом ξ_i рассматриваются как случайные ошибки. Определение ξ_1 соответствует определению геодезической широты исходной точки нового эллипсоида, т. е. его ориентировке.

Найденный таким образом новый референц-эллипсоид будет наилучшим образом подходить к той меридианной дуге, по которой его определили.

§ 2. Определение большой полуоси и сжатия по градусным измерениям, выполненным вдоль параллелей

Аналогично тому, как в случае измерения меридианных градусных дуг, большая полуось и сжатие могут быть определены по измеренным широтным дугам. Однако при этом необходимо, чтобы измеряемые дуги лежали под разными широтами. Исходным уравнением для решения этой задачи служит (2.50)

$$s = N\cos B\,\frac{l''}{\rho''},$$

дающее связь длины дуги с разностью долгот и широтой места. Вводя сюда значение N и развертывая знаменатель в ряд, по-

лучаем формулу, связывающую длину измеренной дуги с большой полуосью и эксцентриситетом:

$$s = a\left(1 + \frac{1}{2}e^2 \sin^2 B + \ldots\right)\cos B \frac{l''}{\rho''}. \qquad (5.8)$$

Дальнейший ход рассуждений остается тем же, что и при определении сжатия и большой полуоси по меридианным дугам. При использовании широтных дуг производится отнесение

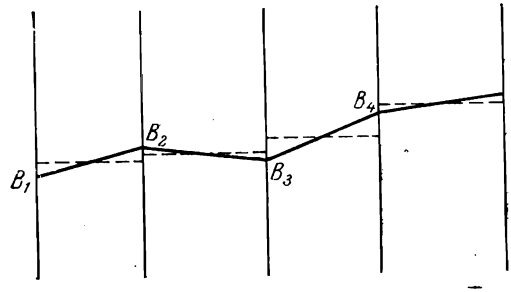


Рис. 44.

каждой частной дуги к своей средней широте (рис. 44) и всех частных дуг к единой общей широте с помощью соотношения

$$s_i = s_0 \frac{N_i \cos B_i}{N_0 \cos B_0}. \qquad (5.9)$$

По нескольким измеренным дугам может быть составлена система условных уравнений, решаемая относительно поправок Δa, Δe^2 к элементам эллипсоида и уклонения отвесной линии в плоскости первого вертикала η в исходной точке.

§ 3. Определение элементов земного эллипсоида по большим астрономо-геодезическим сетям

Метод определения элементов земного эллипсоида по отдельным дугам сейчас почти не применяется. Геодезисты располагают теперь астрономо-геодезическими сетями, покрывающими сплошь или равномерно расположенными рядами обширные области порядка отдельных стран, групп стран или даже континентов. Вывод элементов земного эллипсоида осуществляется при этом по всему имеющемуся астрономо-геодезическому материалу. Как при выводах по отдельной дуге получается эллипсоид, ближе всего представляющий Землю вдоль этой дуги, так при выводах по астрономо-геодезическим съемкам обшир-

ных территорий получаются эллипсоиды, наилучшим образом представляющие именно эти территории.

Пусть мы имеем астрономо-геодезическую сеть, состоящую из большого числа полигонов. По всей сети вычислены координаты геодезических пунктов: широта B^0, долгота L^0, азимут A^0. Индекс «0» вверху означает, что эти координаты отнесены к исходному референц-эллипсоиду, имеющему большую полуось a_0 и сжатие α_0. Кроме того, для геодезических пунктов произведены астрономические наблюдения и определены астрономические координаты: широта φ, долгота λ, азимут α.

Задача состоит в определении наилучшего эллипсоида для территории, на которую задана астрономо-геодезическая сеть, и элементов его ориентировки в теле Земли, т. е. в нахождении новых значений большой полуоси a, сжатия α и уклонений отвесной линии ξ_1 и η_1 в исходной точке. Кроме того, требуется по всей астрономо-геодезической сети осуществить переход от старых геодезических координат B^0, L^0, A^0, заданных на эллипсоиде с большой полуосью и сжатием a_0, α_0, к новым координатам B, L, A на новом эллипсоиде с большой полуосью a и сжатием α.

Задачу естественно свести к отысканию поправок Δa и $\Delta\alpha$ к элементам эллипсоида и dB, dL, dA к координатам. Тогда имеем

$$\left.\begin{aligned} a &= a_0 + \Delta a, \\ \alpha &= \alpha_0 + \Delta\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

Для исходного пункта можем написать формулы перехода от старых координат к новым, учитывая связь между геодезическими и астрономическими координатами (4.1′), (4.2′):

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= B_1^0 + dB_1 = \varphi_1 - \xi_1, \\ L_1 &= L_1^0 + dL_1 = \lambda_1 - \eta_1 \sec\varphi_1, \\ A_1 &= A_1^0 + dA_1 = \alpha_1 - \eta_1 \operatorname{tg}\varphi_1, \end{aligned}\right\} \tag{5.11}$$

Аналогично для любой точки триангуляции

$$\left.\begin{aligned} B_k &= B_k^0 + dB_k = \varphi_k - \xi_k, \\ L_k &= L_k^0 + dL_k = \lambda_k - \eta_k \sec\varphi_k, \\ A_k &= A_k^0 + dA_k = \alpha_k - \eta_k \operatorname{tg}\varphi_k. \end{aligned}\right\} \tag{5.12}$$

Заметим, что в системах (5.11) и (5.12) третье азимутальное уравнение не независимое. Оно легко получается из второго, долготного, умножением его на $\sin\varphi$. В самом деле, выполняя

указанное умножение, получаем

$$(L_k - \lambda_k) \sin \varphi_k = -\eta_k \operatorname{tg} \varphi_k.$$

Но согласно уравнению (4.13) Лапласа

$$(L_k - \lambda_k) \sin \varphi_k = A_k - \alpha_k.$$

Таким образом,

$$\alpha_k - A_k = \eta_k \operatorname{tg} \varphi_k,$$

т. е. мы получили третье уравнение системы (5.12). Значит, следует рассматривать системы, состоящие только из широтных и долготных или широтных и азимутальных уравнений.

Воспользуемся дифференциальными формулами для нахождения dB_k и dL_k. Изменение координат dB и dL зависят от изменения исходных данных (перемещение начальной точки) и изменения размеров эллипсоида. Поэтому можно написать полный дифференциал dB и dL в виде

$$\left.\begin{aligned} dB_k &= \frac{\partial B_k^0}{\partial B_1^0} dB_1 + \frac{\partial B_k^0}{\partial A_1^0} dA_1 + \frac{\partial B_k^0}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial B_k^0}{\partial \alpha} \Delta \alpha, \\ dL_k &= dL_1 + \frac{\partial l_k^0}{\partial B_1^0} dB_1 + \frac{\partial l_k^0}{\partial A_1^0} dA_1 + \frac{\partial l_k^0}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial l_k^0}{\partial \alpha} \Delta \alpha. \end{aligned}\right\} \quad (5.13)$$

Здесь $l_k^0 = L_k - L_1$ — разность долготы данной точки и исходной. Формула не содержит члена с дифференциалом долготы, например $\frac{\partial B_k^0}{\partial L_1} dL_1$, так как долгота не независима, а функционально связана с азимутом и производная по азимуту уже содержит в себе изменения по долготе.

Значения полных дифференциалов (5.13) dB_k и dL_k введем в уравнения координат (5.12) и разрешим их относительно уклонений отвесных линий ξ_k и $\eta_k \sec \varphi_k$:

$$\left.\begin{aligned} \xi_k &= \varphi_k - B_k^0 - dB_k = \\ &= \varphi_k - B_k^0 - \frac{\partial B_k^0}{\partial B_1^0} dB_1 - \frac{\partial B_k^0}{\partial A_1^0} dA_1 - \frac{\partial B_k^0}{\partial a} \Delta a - \frac{\partial B_k^0}{\partial \alpha} \Delta \alpha, \\ \eta_k \sec \varphi_k &= \lambda_k - L_k^0 - dL_k = \\ &= \lambda_k - L_k^0 - dL_1 - \frac{\partial l_k^0}{\partial B_1^0} dB_1 - \frac{\partial l_k^0}{\partial A_1^0} dA_1 - \frac{\partial l_k^0}{\partial a} \Delta a - \frac{\partial l_k^0}{\partial \alpha} \Delta \alpha. \end{aligned}\right\} \quad (5.14)$$

Введем в полученные уравнения значения величин из (5.11):

$$dB_1 = \varphi_1 - B_1^0 - \xi_1,$$
$$dL_1 = \lambda_1 - L_1^0 - \eta_1 \sec \varphi_1,$$
$$dA_1 = \alpha_1 - A_1^0 - \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1.$$

Тогда (5.14) представится в виде

$$\left.\begin{aligned}
\xi_k = \varphi_k - B_k^0 - \frac{\partial B_k^0}{\partial B_1^0}(\varphi_1 - B_1^0 - \xi_1) - \\
- \frac{\partial B_k^0}{\partial A_1^0}(\alpha_1 - A_1^0 - \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1) - \frac{\partial B_k^0}{\partial a}\Delta a - \frac{\partial B_k^0}{\partial \alpha}\Delta\alpha, \\
\eta_k \sec \varphi_k = \lambda_k - L_k^0 - (\lambda_1 - L_1^0) + \eta_1 \sec \varphi_1 - \\
- \frac{\partial l_k^0}{\partial B_1^0}(\varphi_1 - B_1^0 - \xi_1) - \frac{\partial l_k^0}{\partial A_1^0}(\alpha_1 - A_1^0 - \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1) - \\
- \frac{\partial l_k^0}{\partial a}\Delta a - \frac{\partial l_k^0}{\partial \alpha}\Delta\alpha.
\end{aligned}\right\} \quad (5.15)$$

Система (5.15) решает поставленную задачу. Она содержит $2k$ уравнений, в которых искомыми величинами являются поправки к основным элементам эллипсоида Δa и $\Delta\alpha$, элементы ориентировки ξ_1, $\eta_1 \sec \varphi_1$, $\eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1$, или, что то же самое, исправленные координаты исходного пункта $B_1 = \varphi_1 - \xi_1$, $L_1 = \lambda_1 - \eta_1 \sec \varphi_1$, $A_1 = \alpha_1 - \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1$. Коэффициенты, представляющие производные координат k-й точки на исходном эллипсоиде по начальной точке, рассматриваются в § 6.

Система решается по способу наименьших квадратов при условии $\sum(\xi^2 + \eta^2) = \min$.

§ 4. Установление исходных геодезических дат

Для того чтобы выбранный эллипсоид относимости наилучшим образом представлял Землю, надо не только построить эллипсоид с наилучшими значениями большой полуоси и сжатия, но и суметь наилучшим образом ориентировать этот эллипсоид в теле Земли. Ориентирование осуществляется посредством совмещения соответствующей точки эллипсоида с геодезическими координатами B_0, L_0 и азимутом заданного направления A_0 с исходным пунктом триангуляции, имеющим астрономические координаты φ_0, λ_0, и азимутом направления на тот же предмет α_0.

Если говорить более точно, надо не совместить выбранный исходный пункт эллипсоида относимости с исходным пунктом

на геоиде, а расположить его относительно исходного пункта на геоиде на некоторой высоте или глубине так, чтобы поверхности геоида и эллипсоида относимости проходили возможно ближе одна от другой на всем их течении. Основные элементы ориентировки эллипсоида относимости, т. е. геодезические координаты B_0, L_0 и азимут A_0 исходного геодезического пункта и высоту ζ_0 геоида над эллипсоидом в этой точке, принято называть *исходными геодезическими датами.*

В простейшем случае ориентировки эллипсоида относимости в теле Земли можно положить, что в исходном пункте координаты геодезические равны астрономическим и поверхности касаются, т. е.

$$B_0 = \varphi_0,\ L_0 = \lambda_0,\ A_0 = \alpha_0,\ \zeta_0 = 0. \tag{5.16}$$

Первые три уравнения этих условий равносильны утверждению, что в исходном пункте уклонения отвесных линий равны нулю, т. е.

$$\xi_0 = 0,\ \eta_0 = 0. \tag{5.17}$$

Однако такое утверждение в общем случае несправедливо и может повести к значительным искажениям координат, удаленных от исходного пункта. Поэтому при установлении ориентировки эллипсоида относимости в теле Земли в исходном пункте определяют уклонения отвесных линий ξ_0 и η_0 и устанавливают некоторую высоту ζ_0. Условия ориентировки эллипсоида относимости в общем случае можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} B_0 &= \varphi_0 - \xi_0, \\ L_0 &= \lambda_0 - \eta_0 \sec \varphi_0, \\ A_0 &= \alpha_0 - \eta_0 \operatorname{tg} \varphi_0, \\ \zeta &= \zeta_0. \end{aligned}\right\} \tag{5.18}$$

Величины ξ_0 и η_0 находятся при решении системы (5.15) одновременно с получением поправок к большой полуоси и сжатию. Наилучшее решение система (5.15) дает, если все входящие в нее ξ_k и η_k известны из гравиметрических данных. Тогда ξ_0 и η_0 будут близко совпадать с гравиметрическими уклонениями отвеса в исходной точке.

Второй путь нахождения исходных значений ξ_0 и η_0 гравиметрический. Он состоит в вычислении ξ_0 и η_0 по аномалиям силы тяжести. В этом случае, строго говоря, аномалии силы тяжести должны быть известны на всей Земле.

Наилучшую высоту исходного пункта можно получить, если выполнено астрономо-геодезическое или астрономо-гравиметрическое нивелирование. Тогда, если в исходной точке принять высоту геоида над эллипсоидом относимости равной ζ_0, то

в соседней точке высота будет равна высоте в исходной точке плюс приращение высот, определенное методом астрономо-гравиметрического нивелирования:

$$\left.\begin{aligned} \zeta_0 &= \zeta_0, \\ \zeta_1 &= \zeta_0 + \Delta\zeta_{01}, \\ \zeta_2 &= \zeta_0 + \Delta\zeta_{01} + \Delta\zeta_{02} \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (5.19)$$

Нахождение высоты геоида над эллипсоидом ζ_0 в исходной точке равносильно поступательному перемещению эллипсоида в теле геоида по направлению отвеса в исходной точке до того положения, при котором сумма квадратов превышений одной поверхности над другой будет минимальной. Поэтому для нахождения ζ_0 решается система уравнений (5.19) относительно ζ_0 при условии $\sum \zeta_i^2 = 0$.

§ 5. Референц-эллипсоид. Эллипсоид Красовского. Международный эллипсоид

Выполнение геодезических работ на территориях больших стран с соблюдением точностей, достижимых современными техническими средствами и предписываемых практическими потребностями, требует установления специального, наилучшим образом отвечающего рассматриваемой области эллипсоида относимости.

Для унификации геодезических измерений на всей Земле удобно построить общий земной эллипсоид, т. е. такой эллипсоид, при котором условие минимума отклонения квадратов высот геоида $\Sigma\zeta^2 = 0$ выполняется для всей Земли в целом. Такой эллипсоид лучше всего представляет реальную Землю. Однако для построения такого эллипсоида требуется выполнять геодезические наблюдения на всей Земле, т. е. надо иметь однородную геодезическую сеть. В рамках классической геодезии это практически невозможно, так как нельзя производить геодезические измерения на океанах. Кроме того, следует иметь в виду, что такой оптимальный эллипсоид для всей Земли может и не быть оптимальным для данной территории. Однако, если строить референц-эллипсоид по измерениям на небольшой территории, то параметры эллипсоида будут получаться неуверенно. Поэтому исторически сложилось так, что большинство исследователей стремились построить референц-эллипсоид по возможности по большому материалу и по возможности приближающийся к общеземному.

Наиболее широкую известность и практическое применение получили следующие референц-эллипсоиды:

Эллипсоид Бесселя, выведенный в 1841 г. на основании европейских, индийских и перуанских градусных измерений. Этот эллипсоид получил широкое распространение в европейских геодезических работах. В частности, в России он применялся до вывода в 1940 г. эллипсоида Красовского.

В 1866 г. Кларком был выведен эллипсоид, получивший название *эллипсоида Кларка*. При выводе использованы градусные измерения западноевропейские, русские, индийские, перуанские. Этот эллипсоид применялся во Франции и ее колониях. В 1866 г. Кларком был выведен другой эллипсоид, который получил применение в США и Канаде.

В 1924 г. был принят в качестве международного эллипсоид, выведенный Хейфордом в 1909 г. в основном по американским градусным измерениям.

В 1940 г. под руководством крупнейшего советского геодезиста Феодосия Николаевича Красовского (1878—1948) и А. А. Изотова была закончена работа по выводу нового земного эллипсоида, получившего название *эллипсоида Красовского*. Для его вывода были использованы все доступные в то время градусные измерения, а именно градусные измерения СССР, США, Индии, а также гравиметрические съемки, выполненные на территории СССР. В качестве исходного пункта, по которому был ориентирован этот эллипсоид, принят центр круглого зала Пулковской обсерватории. Ориентирование произведено по материалам градусных сетей СССР, из которых найдены значения B_0, L_0, A_0 и величины ξ_0 и η_0. В 1946 г., 7 апреля, постановлением Совета Министров СССР эллипсоид Красовского утвержден в качестве основного эллипсоида относимости для всех геодезических работ СССР.

Размеры и элементы ориентировки эллипсоида Красовского:

большая полуось $a = 6\,378\,245$ *м*,

сжатие $\alpha = 1 : 298{,}3$,

$$B_0 = \varphi_0 - \xi_0 = 59^\circ\,46'\,18''{,}71 - 0''{,}16,$$

$$L_0 = \lambda_0 - \eta_0 \sec B_0 = 30^\circ\,19'\,38''{,}55 + 3''{,}54,$$

$$A_0 = \alpha_0 - \eta_0 \operatorname{tg} B_0 = 121^\circ\,40'\,36''{,}13 + 2''{,}66 \text{ на пункт Бугры},$$

$$\zeta_0 = 0.$$

Эллипсоид Красовского, выведенный по большим астрономо-геодезическим сетям, является эллипсоидом, близко представляющим всю Землю. Его элементы близки к элементам общего земного эллипсоида. Ориентирование его по Пулкову делает его наиболее подходящим для Европы, западной Азии и Северной Африки.

В 1967 г. в США был выведен новый референц-эллипсоид с использованием всех старых и большого объема новых градусных измерений, а также мировой гравиметрической съемки. Этот эллипсоид заменил в качестве международного эллипсоид Хейфорда 1909 г. и получил название *международного эллипсоида 1967 г.*

В следующей таблице приводятся параметры имевших наибольшее применение референц-эллипсоидов:

Таблица 6

Название	Год	a, м	α
Бессель	1841	6 377 397	1 : 299,153
Кларк	1866	6 378 206	: 294,979
Кларк	1880	6 378 249	: 293,466
Хейфорд, Международный	1909	6 378 388	: 297,0
Красовский	1940	6 378 245	: 298,3
Международный	1967	6 378 160	: 298,247

§ 6. Дифференциальные формулы первого рода

Мы уже видели, что уточнение и расширение геодезических сетей неизбежно ведет к выводам новых более точных значений большой полуоси и сжатия эллипсоида относимости и элементов его ориентировки. Переход на новый эллипсоид относимости деформирует всю геодезическую сеть и вызывает изменение координат опорных геодезических пунктов. Поэтому при переходе на новый эллипсоид относимости или при изменении его ориентировки (изменение начальных координат) приходится пересчитывать координаты всех опорных пунктов. Для такого перехода служат так называемые *дифференциальные формулы.*

Применяются две группы дифференциальных формул. Дифференциальные формулы I рода позволяют вычислить поправки координат и направлений, возникающие вследствие изменения начальных данных триангуляции. Дифференциальные формулы II рода дают поправки координат и направлений за счет изменения большой полуоси и сжатия эллипсоида.

Дифференциальные формулы I рода. Пусть имеется начальная точка A триангуляции с координатами B_1, L_1, A_{12}. Азимут взят на точку B с координатами B_2, L_2, A_{21}. Расстояние между точками A и B — s.

Пусть изменились широта начальной точки на dB_1, азимут на dA_{12} и длина линии на ds. Изменение долготы начальной точки легко свести к изменению ds и dA. При постоянных B_1 и A_{12}

$dL_2 = dL_1$. В результате этих изменений координаты второй точки получат приращения dB_2, dL_2, dA_{21}. Напишем приращения координат второй точки в виде полных дифференциалов:

$$\left.\begin{aligned} dB_2 &= \frac{\partial B_2}{\partial B_1}\,dB_1 + \frac{\partial B_2}{\partial s}\,ds + \frac{\partial B_2}{\partial A_{12}}\,dA_{12},\\ dL_2 &= \frac{\partial L_2}{\partial B_1}\,dB_1 + \frac{\partial L_2}{\partial s}\,ds + \frac{\partial L_2}{\partial A_{12}}\,dA_{12} + dL_1,\\ dA_{21} &= \frac{\partial A_{21}}{\partial B_1}\,dB_1 + \frac{\partial A_{21}}{\partial s}\,ds + \frac{\partial A_{21}}{\partial A_{12}}\,dA_{12}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.20)$$

Для краткости обозначим:

$$\left.\begin{aligned} dB_2 &= dB_2^{B_1} + dB_2^{s} + dB_2^{A_{12}},\\ dL_2 &= dL_2^{B_1} + dL_2^{s} + dL_2^{A_{12}} + dL_1,\\ dA_{21} &= dA_{21}^{B_1} + dA_{21}^{s} + dA_{21}^{A_{12}}, \end{aligned}\right\} \qquad (5.21)$$

где индекс вверху показывает, за счет чего произошло приращение координаты.

Решим задачу геометрически.

Найдем изменения координат $dB_2^{B_1}$, $dL_2^{B_1}$, $dA_{21}^{B_1}$, происшедшие за счет изменения широты начальной точки.

1. Рассмотрим изменение широт $dB_2^{B_1}$ (рис. 45).

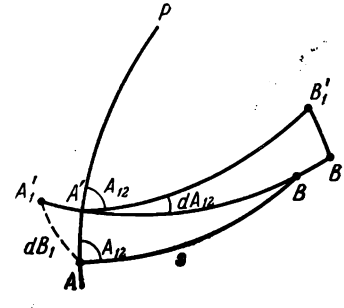


Рис. 45.

А. Повернем линию BA так, чтобы она прошла через точку A'. Так как длина s не изменилась, линия выступит за меридиан AP и примет положение BA_1'.

Б. Протянем линию BA_1 саму по себе до совмещения A_1' с A'. Теперь она займет положение $A'B'$.

В. Линию $A'B'$ повернем у точки A' до направления, определенного азимутом A_{12}.

Изменение широты $dB_2^{B_1}$ сложится за счет изменения широты на дугах BB' и $B'B_1'$.

Для изменения широт, долгот и азимутов ранее были выведены приближенные формулы (3.18). Удержим в них только первые члены разложения:

$$\left.\begin{aligned} B_2 - B_1 &= \frac{\cos A}{M}\,s,\\ L_2 - L_1 &= \frac{\sin A}{N\cos B}\,s,\\ A_{21} - A_{12} &= \frac{\sin A\,\operatorname{tg} B}{N}\,s - 180^\circ. \end{aligned}\right\} \qquad (5.22)$$

Изменение широты на дугах BB' и $B'B_1'$ получим по первой из формул (5.22):

$$s = BB' = A_1'A' = AA_1' \sin(90° - A_{12}) = M_1 dB_1 \cos A_{12}.$$

Внесем это s в первую формулу (5.22), имея в виду, что для дуги $B'B$ $A = A_{21}$ и $M = M_2$. Тогда

$$dB_{BB'} = -\frac{M_1 dB_1 \cos A_{12} \cos A_{21}}{M_2}. \quad (5.23)$$

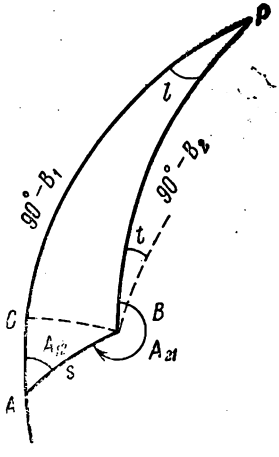


Рис. 46.

Аналогично для $dB_{B_1B'}$

$$s = B_1'B' = AA' = AA_1' \cos(90° - A_{12}) = M_1 dB_1 \sin A_{12}$$

и

$$dB_{B_1'B'} = -\frac{M_1 \sin A_{12} \sin A_{21}\, dB_1}{M_2}. \quad (5.24)$$

Полное изменение широты за счет изменения широты исходной точки сложится из (5.23) и (5.24):

$$dB_2^{B_1} = dB_{BB'} + dB_{B_1'B'} =$$
$$= -\frac{M_1}{M_2}(\cos A_{12} \cos A_{21} + \sin A_{12} \sin A_{21})\, dB_1.$$

Из сферического треугольника (рис. 46) следует

$$\cos l = -\cos A_{12} \cos A_{21} - \sin A_{12} \sin A_{21} \cos s.$$

Полагая s малым и $\cos s = 1$, имеем

$$\cos A_{12} \cos A_{21} + \sin A_{12} \sin A_{21} = -\cos l$$

и

$$dB_2^{B_1} = \frac{M_1}{M_2} \cos l\, dB_1 \qquad (l = L_2 - L_1). \quad (5.25)$$

2. Изменение долготы $dL_2^{B_1}$ сложится из изменений долготы на дугах BB' и $B'B_1'$. Для нахождения их воспользуемся второй формулой (5.22) при тех же значениях s:

$$dL_2^{B_1} = -\frac{\sin A_{21}}{N_2 \cos B_2} s_{BB'} + \frac{\sin(A_{21} + 90°)}{N_2 \cos B_2} s_{B'B_1'} =$$
$$= -\frac{\sin A_{21}}{N_2 \cos B_2} M_1 \cos A_{12} dB_1 + \frac{\cos A_{21}}{N_2 \cos B_2} M_1 \sin A_{12} dB$$

Вынося за скобки общую часть и имея в виду рис. 46, получим

$$dL_2^{B_1} = \frac{M_1\, dB_1}{N_2 \cos B_2}(-\sin A_{21}\cos A_{12} + \sin A_{12}\cos A_{21}) =$$

$$= \frac{M_1 dB_1}{N_2 \cos B_2}\sin B_2 \sin l,$$

или

$$dL_2^{B_1} = \frac{M_1}{N_2}\operatorname{tg} B_2 \sin l\, dB_1. \tag{5.26}$$

3. Для определения изменения обратного азимута $dA_{21}^{B_1}$ вследствие изменения широты начальной точки рассмотрим полярный сферический треугольник ABP (см. рис. 46), в котором проведем BC так, чтобы BC образовала с меридианом AP прямой угол. Тогда $\angle PBC = 90° - t$, $A_{21} = A_{12} + 180° + t$, $dA_{21} = dt$.

Из треугольника BCP имеем

$$\cos(90° - B_2) = \operatorname{ctg} l \operatorname{ctg}(90° - t)$$

или

$$\operatorname{tg} t = \operatorname{tg} l \sin B_2,$$

откуда следует, что изменение азимута есть функция изменения широты и долготы точки B.

Искомое значение dA_{21} получим, дифференцируя последнее выражение и внося в него ранее полученные dB_2 и dl:

$$\frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{dl}{\cos^2 l}\sin B_2 + \operatorname{tg} l \cos B_2 dB_2.$$

Полагаем $\cos^2 t = 1$, $\cos^2 l = 1$ и вносим значения $dl = dL_2^{B_1} - dL_1^{B_1}$ и $dB_2^{B_1}$ из (5.25) и (5.26)

$$dA_{21}^{B_1} = \sin B_2 \frac{M_1}{N_2}\operatorname{tg} B_2 \sin l\, dB_1 + \operatorname{tg} l \cos B_2 \frac{M_1}{M_2}\cos l\, dB_1.$$

Окончательно

$$dA_{21}^{B_1} = \frac{\sin l}{\cos B_2}\left[\frac{M_1}{N_2}\sin^2 B_2 + \frac{M_1}{M_2}\cos^2 B_2\right] dB_1. \tag{5.27}$$

Формулы (5.25)—(5.27) показывают изменения координат точки, происшедшие за счет изменения широты начальной точки.

Найдем теперь изменения координат dB_2^s, dL_2^s, dA_{21}^s за счет изменения длины линии s.

Воспользуемся первой формулой (5.22) в применении к случаю, когда линия s увеличилась на $ds = BB'$ (рис. 47). Эти формулы можно написать для изменений s, имея в виду, что в точке, для которой они пишутся, $M = M_2$, $N = N_2$, $B = B_2$,

а азимут направления $BB' = A_{21} - 180°$. Тогда

$$dB_2^s = -\frac{\cos A_{21}}{M_2}\, ds. \tag{5.28}$$

Аналогично для долготы и азимута

$$dL_2^s = -\frac{\sin A_{21}}{N_2 \cos B_2}\, ds. \tag{5.29}$$

$$dA_{21}^s = -\frac{\sin A_{21} \operatorname{tg} B_2}{N_2}\, ds. \tag{5.30}$$

Найдем изменения координат точки B_2 за счет изменения азимута: $dB_2^{A_{12}}$, $dL_2^{A_{12}}$, $dA_{21}^{A_{12}}$.

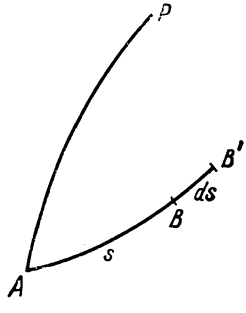


Рис. 47.

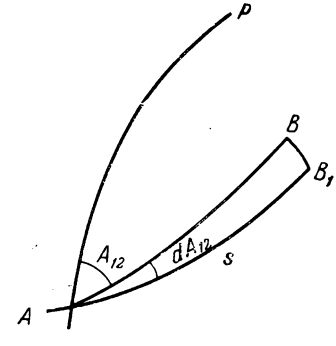


Рис. 48.

При изменении исходного азимута на dA_{12} линия s повернется и конец ее перейдет из B в B_1 (рис. 48). Найдем длину BB_1. Из сферического треугольника ABB_1 получим

$$\frac{\sin \dfrac{BB_1}{R}}{\sin dA_{12}} = \frac{\sin \dfrac{s}{R}}{\sin \dfrac{\pi}{2}},$$

где BB_1/R и s/R — дуги BB_1 и s, выраженные в радианах. Ввиду малости углов BB_1/R и dA_{12} можно написать

$$BB_1 = R \sin \frac{s}{R}\, dA_{12}.$$

Теперь для получения изменения координат из-за изменения исходного азимута воспользуемся теми же формулами (5.22), в которые в качестве s введем элемент BB_1. Получим

$$dB_2^{A_{12}} = \frac{\cos A_{BB_1}}{M_2}\, BB_1.$$

Но

$$A_{BB_1} = A_{21} + \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$dB_2^{A_{12}} = \frac{\sin A_{21}}{M_2} R \sin \frac{s}{R} dA_{12}. \tag{5.31}$$

Аналогично найдем изменение долготы по второй формуле (5.22)

$$dL_2^{A_{12}} = \frac{\cos A_{21}}{N_2 \cos B_2} R \sin \frac{s}{R} dA_{12}. \tag{5.32}$$

Поправка обратного азимута за счет изменения прямого состоит из двух частей: поправки, обусловленной изменением сближения меридианов, и поправки отнесения к приведенной длине геодезической линии. Первая поправка определяется третьей формулой (5.22), в которой примем за A_{12} азимут в точке B, а за $A_{21} + 180°$ — азимут в точке B_1 (рис. 49). Тогда

$$dA_{21}^{A_{12}} = \frac{\sin A_{12}}{N_2} \operatorname{stg} B_2 = dL_2^{A_{12}} \sin B_2,$$

или после введения значения $dL_2^{A_{12}}$

$$dA_{21}^{A_{12}} = \frac{\cos A_{21}}{N_2} \operatorname{tg} B_2 R \sin \frac{s}{R} dA_{12}.$$

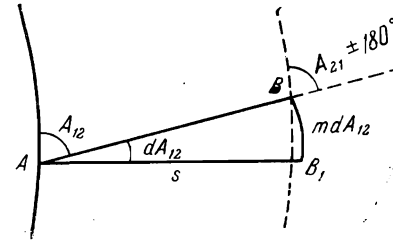


Рис. 49.

Вторую поправку приводим без вывода (см. Ф. Н. Красовский, Руководство по высшей геодезии, Геодезиздат, 1942).

$$\frac{dm}{ds} dA_{12} = \cos \frac{s}{R} dA_{12},$$

где

$$m = R \sin \frac{s}{R}.$$

Полная поправка обратного азимута будет

$$dA_{21}^{A_{12}} = \cos \frac{s}{R} dA_{12} - R \sin \frac{s}{R} \cos A_{21} \frac{\operatorname{tg} B_2}{N_2} dA_{12}. \tag{5.33}$$

Теперь дифференциальные формулы I рода получатся согласно (5.21), если сложить (5.25), (5.28), (5.31); (5.26), (5.29), (5.32)

и (5.27), (5.30), (5.33) соответственно:

$$\left.\begin{aligned} dB_2 &= \frac{M_1}{M_2}\cos l\, dB_1 - \frac{\cos A_{21}}{M_2} ds + \frac{\sin A_{21}}{M_2} R \sin\frac{s}{R}\, dA_{12}, \\ dL_2 &= \frac{M_1}{N_2}\operatorname{tg} B_2 \sin l\, dB_1 - \frac{\sin A_{21}}{N_2 \cos B_2} ds + \\ &\quad + \frac{\cos A_{21}}{N_2 \cos B_2} R \sin\frac{s}{R}\, dA_{12} + dL_1, \\ dA_{21} &= \frac{\sin l}{\cos B_2}\left(\frac{M_1}{N_2}\sin^2 B_2 + \frac{M_1}{M_2}\cos^2 B_2\right) dB_1 - \frac{\sin A_{21}\operatorname{tg} B_2}{N_2} ds + \\ &\quad + \cos\frac{s}{R}\, dA_{12} - R \sin\frac{s}{R}\cos A_{21}\frac{\operatorname{tg} B_2}{N_2} dA_{12}. \end{aligned}\right\} \quad (5.34)$$

§ 7. Дифференциальные формулы второго рода

Пусть координаты начальной точки B_1^0, L_1^0, A_{12}^0 и некоторой точки триангуляции B_2^0, L_2^0, A_{21}^0 вычислены на эллипсоиде, имеющем большую полуось a_1 и сжатие α_1. Требуется получить новые координаты B_2, L_2, A_{21} рассматриваемой точки на другом эллипсоиде с большой полуосью a_2 и сжатием α_2. Будем считать, что координаты исходной точки при переходе на новый эллипсоид не изменятся. Новые координаты получатся добавлением к старым координатам некоторых поправок, полученных в результате перехода на новый эллипсоид. Эти поправки найдем дифференцированием формул (5.22) для разностей координат:

$$(B_2 - B_1)'' = b'' = \rho'' \frac{\cos A_{12}}{M_m} s = \frac{s \cos A_{12}(1 - e^2 \sin^2 B_m)^{3/2}}{a(1 - e^2)} \rho'',$$

$$(L_2 - L_1)'' = l'' = \rho'' \frac{\sin A_{12}}{N_m \cos B} s = \frac{s \sin A_{12}(1 - e^2 \sin^2 B_m)^{1/2}}{a \cos B_m} \rho'',$$

$$180^\circ + (A_{21} - A_{12}) = t'' = \rho'' \frac{\sin A_{12} \operatorname{tg} B_m}{N_m} s = l'' \sin B_m.$$

Индексом m обозначены средние значения величин между точками *1* и *2*. Дифференцируем b'', l'' и t'' по a и α:

$$db'' = \frac{s \cos A_{12}(1 - e^2 \sin^2 B_m)^{3/2}}{a(1 - e^2)} \rho'' \times$$
$$\times \left[-\frac{da}{a} + \left(-\frac{3}{2} \sin^2 B_m \frac{1}{1 - e^2 \sin^2 B_m} + \frac{1}{1 - e^2} \right) de^2 \right].$$

Выражая de через $d\alpha$ из приближенного уравнения

$$e_2 \approx 2\alpha \qquad (de_2 = 2d\alpha),$$

получим

$$db'' = -b''\left[\frac{da}{a} - \left(\frac{2}{1-e^2} - \frac{3\sin^2 B_m}{1-e^2\sin^2 B_m}\right)d\alpha\right]. \qquad (5.35)$$

Формулу можно упростить, если опустить в знаменателе $1-e^2$ и $1-e^2\sin B_m$. Это приведет к погрешности порядка $b''e^2$. Получаемая при этом точность (0″,001—0″,002) обеспечивает перевычисление координат опорных пунктов триангуляции. После указанного упрощения формула (5.35) принимает вид

$$db'' = -b''\left[\frac{da}{a} - (2-3\sin^2 B_m)\,d\alpha\right]. \qquad (5.35')$$

Для долготы имеем

$$dl'' = \frac{s\sin A_m}{\cos B_m}\rho'' \times$$

$$\times\left[\frac{-\frac{1}{2}a(1-e^2\sin^2 B_m)^{-\frac{1}{2}}\sin^2 B_m de^2 - (1-e^2\sin^2 B_m)^{\frac{1}{2}}da}{a^2}\right] =$$

$$= -\frac{s\sin A_m}{\cos B_m}\rho''\frac{(1-e^2\sin^2 B_m)^{\frac{1}{2}}}{a}\left[\frac{da}{a} + \frac{\sin^2 B_m de^2}{2(1-e^2\sin^2 B_m)}\right]$$

или, опуская в знаменателе $1-e^2\sin^2 B$, с той же степенью погрешности получаем

$$dl'' = -l''\left(\frac{da}{a} + \sin^2 B_m d\alpha\right). \qquad (5.36)$$

Для азимута согласно (5.22) можно написать

$$A_{21} - A_{12} + 180° = t = l\sin B_m$$

или, дифференцируя,

$$dt = dl\sin B_m;$$

вводя значения dl из (5.36), получим окончательно

$$dt'' = -l''\sin B_m\left(\frac{da}{a} + \sin^2 B_m d\alpha\right). \qquad (5.37)$$

Выпишем теперь все дифференциальные формулы II рода вместе:

$$\left.\begin{aligned} db'' &= -b''\left[\frac{da}{a} - (2-3\sin^2 B_m)\,d\alpha\right],\\ dl'' &= -l''\left(\frac{da}{a} + \sin^2 B_m d\alpha\right),\\ dA_{12} &= -l''\left(\frac{da}{a} + \sin^2 B_m\, d\alpha\right)\sin B_m. \end{aligned}\right\} \qquad (5.38)$$

ГЛАВА 6

ИЗУЧЕНИЕ ФИГУРЫ ФИЗИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ (ПО МОЛОДЕНСКОМУ)

§ 1. Постановка задачи. Координаты точек и дифференциал дуги на физической поверхности Земли

С принципиальной точки зрения возможно построить строгую теорию фигуры физической поверхности Земли чисто геометрическим способом в замкнутом виде, не прибегая к разложению в ряды, чем широко пользуется сфероидическая геодезия.

Если бы в каждой точке была определена прямоугольная координатная система, оси которой имеют во всех точках одинаковое направление, например, ось Z — параллельно оси вращения Земли, ось X — перпендикулярно к оси Z в плоскости нулевого меридиана, а ось Y — в плоскости запад — восток, то координаты любой точки земной поверхности в этой системе можно было бы определить методом пространственных засечек от одного исходного базиса, определяющего линейный масштаб. Практически в каждой точке имеется своя собственная система координат, задаваемая направлением отвеса, поэтому для определения положения любой точки физической поверхности Земли надо установить связь всех местных систем координат между собой. Эта связь устанавливается двумя углами поворота, с помощью которых направления осей новой системы координат можно привести к направлениям первой системы (рис. 50). Практически определяются астрономические координаты, т. е. всегда известны углы между осями координат и осью вращения Земли (или плоскостью экватора) и осью нулевого меридиана, так что принципиально возможно сведение всех местных систем к единой системе координат.

Для определения положения точки на физической поверхности Земли следует прежде всего установить отсчетную поверхность. Примем за таковую эллипсоид вращения

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1. \tag{6.1}$$

Пространственное положение точки $A(x, y, z)$ на физической поверхности Земли определим криволинейными координатами: H — высота над эллипсоидом (по нормали), B — геодезическая широта, L — геодезическая долгота (рис. 51). Таким

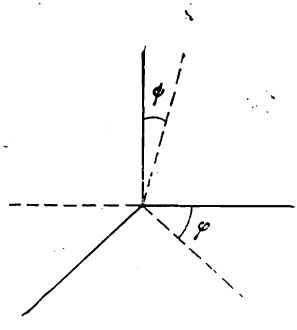


Рис. 50.

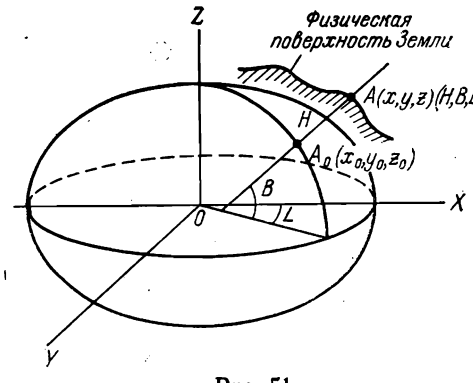


Рис. 51.

образом, можно считать, что физическая поверхность Земли задается уравнением $H = H(B, L)$.

Прямоугольные координаты x_0, y_0, z_0 лежащего на эллипсоиде основания отрезка H определяются согласно (2.22′) и (2.27) формулами

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= N\cos B\cos L,\\ y_0 &= N\cos B\sin L,\\ z_0 &= \frac{b^2}{a^2}N\sin B, \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

где

$$N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2\cos^2 B + b^2\sin^2 B}} = \frac{a^2}{p} \tag{6.3}$$

— радиус сечения плоскостью первого вертикала. Формулы перехода от криволинейных координат H, B, L к прямоугольным x, y, z для произвольной точки пространства будут

$$\left.\begin{aligned} x &= (N+H)\cos B\cos L,\\ y &= (N+H)\cos B\sin L,\\ z &= \left(\frac{b^2}{a^2}N + H\right)\sin B. \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

Найдем теперь дифференциал дуги пространственной кривой в криволинейной системе координат B, L, H. Общее выражение

дифференциала дуги будет

$$ds^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial B}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial B}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial B}\right)^2\right] dB^2 + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial L}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial L}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial z}{\partial L}\right)^2\right] dL^2 + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial H}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial H}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial H}\right)^2\right] dH^2. \quad (6.5)$$

Пользуясь формулой (6.3) для N, можно получить вспомогательные формулы

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dB}(N\cos B) &= M\sin B, \\ \frac{d}{dB}\left(\frac{b^2}{a^2}N\sin B\right) &= M\cos B, \end{aligned}\right\} \quad (6.6)$$

где обозначено

$$\frac{a^2b^2}{p^3} = \frac{Nb^2}{p^2} = M.$$

Теперь, имея в виду (6.4) и (6.6), найдем все частные производные в выражении дифференциала дуги

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial B} &= -(M+H)\sin B\cos L, \\ \frac{\partial y}{\partial B} &= -(M+H)\sin B\sin L, \\ \frac{\partial z}{\partial B} &= (M+H)\cos B, \\ \frac{\partial x}{\partial L} &= -(N+H)\cos B\sin L, \\ \frac{\partial y}{\partial L} &= (N+H)\cos B\cos L, \\ \frac{\partial z}{\partial L} &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial H} &= \cos B\cos L, \\ \frac{\partial y}{\partial H} &= \cos B\sin L,\ \frac{\partial z}{\partial H} = \sin B. \end{aligned}\right\} \quad (6.7)$$

Вводя эти значения в выражение для ds^2, получим следующие значения квадратных скобок равенства (6.5):

$$\left[\left(\frac{\partial x}{\partial B}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial B}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial B}\right)^2\right] = (M+H)^2,$$
$$\left[\left(\frac{\partial x}{\partial L}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial L}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial L}\right)^2\right] = (N+H)^2\cos^2 B,$$
$$\left[\left(\frac{\partial x}{\partial H}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial H}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial H}\right)^2\right] = 1.$$

Теперь легко получить для ds^2 следующее выражение:

$$ds^2 = (M+H)^2 dB^2 + (N+H)^2 \cos^2 B\, dL^2 + dH^2. \qquad (6.8)$$

Направление элемента дуги ds можно определить также зенитным расстоянием z и азимутом A, отсчитываемыми от геодезического зенита и меридиана.

Проектируя отрезок ds на координатные линии, получим

$$\left.\begin{aligned} ds\cos z &= dH, \\ ds\sin z\cos A &= dx = (M+H)\,dB, \\ ds\sin z\sin A &= dy = (N+H)\cos B\, dB, \end{aligned}\right\} \qquad (6.9)$$

откуда

$$ds = \sqrt{dH^2 + [(M+H)\cos A\, dB + (N+H)\sin A\cos B\, dL]^2}. \qquad (6.10)$$

§ 2. Дифференциальные формулы для перехода к новой системе координат

Положение координатной системы X, Y, Z относительно Земли определится, если заданы параметры эллипсоида относимости a и b, координаты исходной точки B_0, L_0, H_0, зафиксирован азимут A_0 одного из направлений, жестко связанных с Землей, и установлена параллельность оси b эллипсоида полярной оси вращения Земли.

Задание этих величин устанавливает связь координатной системы с точками поверхности Земли с точностью до малых изменений углов, вызванных движением полюсов.

Установим связь между изменением прямоугольных и криволинейных координат и параметров эллипсоида. Для этого надо продифференцировать формулы (6.4), считая все входящие в них величины переменными.

Кроме того, учтем поступательное перемещение эллипсоида по осям X, Y, Z на dx_0, dy_0, dz_0 и поворот около точки x_0, y_0, z_0 на малые углы ε_x, ε_y, ε_z. Координаты x, y, z, выраженные уравнениями (6.4), суть функции a, b, H, B, L, причем зависимость от a и b выражается косвенным образом через N, а зависимость от B выражается и непосредственно и через N. Поэтому для дифференциала величины $x = x[N(a, b, B), H, B, L]$ можем написать

$$dx = \frac{\partial x}{\partial N}\frac{\partial N}{\partial a}da + \frac{\partial x}{\partial N}\frac{\partial N}{\partial b}db + \frac{\partial x}{\partial N}\frac{\partial N}{\partial B}dB + \frac{\partial x}{\partial H}dH + \\ + \frac{\partial x}{\partial B}dB + \frac{\partial x}{\partial L}dL. \qquad (6.11)$$

Аналогичные выражения можно получить для dy и dz. Входящие в выражение dx производные найдем дифференцированием формул (6.4) с учетом равенств (6.3) и (6.6)

$$\frac{\partial N}{\partial a} = 2\frac{a}{p} - \frac{a^3}{p^3}\cos^2 B = \frac{1}{a}\left(2N - M\frac{a^2}{b^2}\cos^2 B\right),$$

$$\frac{\partial x}{\partial N}\frac{\partial N}{\partial a}da = \cos B\cos L\frac{\partial N}{\partial a}da = \cos B\cos L\left(\frac{2N}{a} - \frac{Ma}{b^2}\cos^2 B\right)da,$$

$$\frac{\partial N}{\partial b} = -\frac{a^2 b\sin^2 B}{p^3},$$

$$\frac{\partial x}{\partial N}\frac{\partial N}{\partial b}db = \cos B\cos L\frac{\partial N}{\partial b}db = \cos B\cos L\sin^2 B\frac{a^2 b}{p^3} =$$

$$= -M\sin^2 B\cos B\cos L\frac{db}{b},$$

$$\frac{\partial N}{\partial B} = -\frac{a^2}{p^3}(b^2 - a^2)\sin B\cos B,$$

$$\frac{\partial x}{\partial N}\frac{\partial N}{\partial B}dB = \cos B\cos L\frac{\partial N}{\partial B}dB = -\cos^2 B\cos L\sin B\frac{a^2}{p^3}\times$$

$$\times(b^2 - a^2)dB = M\frac{a^2 - b^2}{b^2}\sin B\cos^2 B\cos L\,dB.$$

Вводя эти выражения в равенство (6.11), а также учитывая легко получаемые из (6.4) производные x по B, L, H, получим выражение для дифференциала прямоугольной координаты x в зависимости от дифференциалов полуосей эллипсоида da и db и дифференциалов криволинейных координат dH, dB, dL:

$$dx = \left(\frac{2N}{a} - \frac{Ma}{b^2}\cos^2 B\right)\cos B\cos L\,da -$$

$$-\frac{M}{b}\sin^2 B\cos B\cos L\,db + M\frac{a^2 - b^2}{b^2}\sin B\cos^2 B\cos L\,dB +$$

$$+\cos B\cos L\,dH - (N + H)\sin B\cos L\,dB - (N + H)\cos B\sin L\,dL =$$

$$= -(M + H)\sin B\cos L\,dB - (N + H)\cos B\sin L\,dL +$$

$$+\cos B\cos L\,dH + N\cos B\cos L\frac{da}{a} +$$

$$+ M\sin^2 B\cos L\cos B\left(\frac{da}{a} - \frac{db}{b}\right). \quad (6.12)$$

Здесь не учтено поступательное перемещение эллипсоида по осям X, Y, Z на dx_0, dy_0, dz_0 и поворот эллипсоида вокруг некоторой фиксированной точки x_0, y_0, z_0 на малые углы ε_x, ε_y, ε_z. К полученному значению dx (6.12) надо добавить члены,

представляющие эти перемещения и повороты. Тогда

$$dx = dx_0 + (y - y_0)\varepsilon_z - (z - z_0)\varepsilon_y - (M + H)\sin B \cos L\, dB - \\ - (N + H)\cos B \sin L\, dL + \cos B \cos L\, dH + \\ + N \cos B \cos L \frac{da}{a} + M \sin^2 B \cos B \cos L \left(\frac{da}{a} - \frac{db}{b}\right). \quad (6.13)$$

Аналогичным образом можно получить выражения для дифференциалов dy и dz двух других координат:

$$dy = dy_0 + (z - z_0)\varepsilon_x - (x - x_0)\varepsilon_z - (M + H)\sin B \sin L\, dB + \\ + x\, dL + \cos B \sin L\, dH + N \cos B \sin L \frac{da}{a} + \\ + M \sin^2 B \cos B \sin L \left(\frac{da}{a} - \frac{db}{b}\right), \quad (6.14)$$

$$dz = dz_0 + (x - x_0)\varepsilon_y - (y - y_0)\varepsilon_x + (M + H)\cos B\, dB + \\ + \sin B\, dH + \frac{b^2}{p} \sin B \frac{db}{b} - M \cos^2 B \sin B \left(\frac{da}{a} - \frac{db}{b}\right). \quad (6.15)$$

Можно написать также формулы приращений геодезических координат B, L, H через приращения больших полуосей и сжатия. Для этого выполним следующие преобразования: умножим обе части равенства (6.13) на $\cos B \cos L$, равенства (6.14) на $\cos B \sin L$, а равенства (6.15) на $\sin B$, сложим отдельно левые и правые части полученных соотношений и образуем выражение

$$I_1 = dx \cos B \cos L + dy \cos B \sin L + dz \sin B.$$

Подобным образом умножим обе части равенства (6.13) на $\sin L$, а равенства (6.14) на $\cos L$. Сложив оба полученных соотношения, образуем

$$I_2 = -dx \sin L - dy \cos L.$$

Наконец равенства (6.13)—(6.15) умножим соответственно на $\sin B \cos L$, $\sin B \sin L$ и $\cos B$, сложим и образуем

$$I_3 = -dx \sin B \cos L - dy \sin B \sin L + dz \cos B.$$

Введем в выражения I_1, I_2, I_3 значения dx, dy, dz из (6.13)—(6.15). Тогда, имея в виду (6.4) и вводя обозначения

$$\left.\begin{aligned} dx_0 + \varepsilon_y z_0 - \varepsilon_z y_0 &= d\overline{x}, \\ dy_0 + \varepsilon_z x_0 - \varepsilon_x z_0 &= d\overline{y}, \\ dz_0 + \varepsilon_x y_0 - \varepsilon_y x_0 &= d\overline{z}, \end{aligned}\right\} \quad (6.16)$$

получим формулы, определяющие дифференциал каждой криволинейной координаты dH, dL, dB в зависимости от дифферен-

циалов полуосей эллипсоида da и db и дифференциалов прямоугольных координат dx, dy, dz. Так, для dH получим

$$\left.\begin{aligned}
&\cos B\cos L\,dx+\cos B\sin L\,dy+\sin B\,dz=\\
&=dH+\cos B\cos L\,d\bar{x}+\cos B\sin L\,d\bar{y}+\sin B\,d\bar{z}+\\
&\quad+\frac{a}{N}da+\frac{b^2}{a^2}N\sin^2 B\left(\frac{db}{b}-\frac{da}{a}\right)+\\
&\quad+\frac{a^2-b^2}{p}\sin B\cos B(\varepsilon_y\cos L-\varepsilon_x\sin L).\\
&\text{Для } dL \text{ имеем}\\
&-\sin L\,dx+\cos L\,dy=(N+H)\cos B(dL-\varepsilon_z)+\\
&\quad+\cos L\,d\bar{y}-\sin L\,d\bar{x}+z(\varepsilon_x\cos L+\varepsilon_y\sin L).\\
&\text{Для } dB \text{ имеем}\\
&-\sin B\cos L\,dx-\sin B\sin L\,dy+\cos B\,dz=\\
&=(M+H)\,dB-\sin B\cos L\,d\bar{x}-\sin B\sin L\,d\bar{y}+\\
&\quad+\cos B\,d\bar{z}-(M+N)\sin B\cos B\left(\frac{da}{a}-\frac{db}{b}\right)-\\
&-N\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin B\cos B\frac{db}{b}+(p+H)(\varepsilon_y\cos L-\varepsilon_x\sin L).
\end{aligned}\right\}\quad(6.17)$$

Рассмотрим тот случай связи приращения дифференциалов криволинейных координат dB, dL, dH с изменением параметров a и α эллипсоида, когда система прямоугольных координат жестко связана с Землей. В этом случае приращения координат, возникшие от поступательных и вращательных перемещений Земли, равны нулю, т. е.

$$dx=dy=dz=0;\quad \varepsilon_x=\varepsilon_y=\varepsilon_z=0 \qquad (6.18)$$

при любом преобразовании криволинейных координат.

Преобразуем теперь формулы (6.17). Из первой формулы (6.17), имея в виду (6.18) и (6.15), получим

$$dH=dx_0\cos B\cos L+dy_0\cos B\sin L+dz_0\sin B+\frac{a}{N}da+\\+\frac{b^2}{a^2}N\sin^2 B\left(\frac{db}{b}-\frac{da}{a}\right).$$

Здесь dx_0, dy_0, dz_0 — дифференциалы координат центра эллипсоида с большой полуосью a и сжатием α при переходе к новому эллипсоиду с большой полуосью $\bar{a}$ и сжатием $\bar{\alpha}$; da, db — дифференциалы полуосей, dH — дифференциал высоты.

От приращения полуосей легко перейти к приращению сжатия:

$$\frac{db}{b}-\frac{da}{a}\approx\frac{b-\bar{b}}{b}-\frac{a-\bar{a}}{a}=\frac{\bar{a}}{a}-\frac{\bar{b}}{b}=\frac{\bar{a}}{b}\left[\frac{b}{a}-\frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right]=$$

$$=\frac{\bar{a}}{b}\left(\frac{b-a}{a}-\frac{\bar{b}-\bar{a}}{\bar{a}}\right)=\frac{\bar{a}}{b}(\bar{\alpha}-\alpha).$$

Теперь первая формула (6.17) будет иметь вид

$$dH=\cos B\cos L\,dx_0+\cos B\sin L\,dy_0+\sin B\,dz_0+$$

$$+\frac{a}{N}(a-\bar{a})+\frac{b}{a}N\sin^2 B(\alpha-\bar{\alpha}). \qquad (6.19)$$

Формула точна до малых второго порядка, так как в последнем члене положено $\bar{a}/a=1$. Формула дает изменение координаты H при переходе на новый эллипсоид с большой полуосью $\bar{a}$ и сжатием $\bar{\alpha}$, сдвинутый на dx_0, dy_0, dz_0 относительно эллипсоида с большой полуосью a и сжатием α. Аналогично преобразуем вторую формулу (6.17):

$$dL(N+H)\cos B=-\cos L\,dy_0+\sin L\,dx_0. \qquad (6.20)$$

Третья формула примет вид

$$(M+H)\,dB-\sin B\cos L\,dx_0-\sin B\sin L\,dy_0-\cos B\,dz_0-$$

$$-(M+N)\sin B\cos B\left(\frac{da}{a}-\frac{db}{b}\right)-N\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin B\cos B\,\frac{db}{b}=0.$$

В последней формуле сделаем преобразование

$$\frac{da}{a}-\frac{db}{b}=\frac{\bar{a}}{b}(\alpha-\bar{\alpha}),$$

$$\frac{db}{b}=\frac{b-\bar{b}}{b}=\frac{a(1-\alpha)-\bar{a}(1-\bar{\alpha})}{a(1-\alpha)}\approx\frac{a-\bar{a}}{a}.$$

Полагая $\frac{1-\bar{\alpha}}{1-\alpha}=1$, получим

$$(M+H)\,dB=\sin B\cos L\,dx_0+\sin B\sin L\,dy_0+\cos B\,dz_0+$$

$$+(M+N)\frac{\bar{a}}{b}\sin B\cos B(\alpha-\bar{\alpha})+N\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin B\cos B\,\frac{a-\bar{a}}{a}. \qquad (6.21)$$

Формулы (6.19) — (6.21) дают приращения криволинейных координат точек при переходе от эллипсоида с большой полуосью a и сжатием α к новому эллипсоиду с соответствующими параметрами $\bar{a}$ и $\bar{\alpha}$ и переместившимся центром.

§ 3. Геодезические построения при помощи прямых линий (хорд эллипсоида)

При решении задач сфероидической геодезии приходится иметь дело с построением фигур, целиком лежащих на сфероиде, точнее — эллипсоиде вращения. При этом приходится пользоваться линиями, также лежащими на эллипсоиде, обычно геодезическими линиями. Решение геометрических задач на эллипсоиде вращения выполняется с помощью эллиптических функций, представляемых в виде рядов. В главах 2, 3 мы имели возможность в этом убедиться. При решении одной и той же задачи, но при различных размерах области, на которой выполняется решение, приходится удерживать различное число членов разложения, что приводит к необходимости строить для решения одних и тех же задач, но решаемых в разных условиях, разные формулы. При изменении длин сторон решаемых треугольников часто меняется не только число членов ряда, но и структура формулы и даже метод подхода к решению задачи.

М. С. Молоденский предложил метод решения геодезических задач построением плоских треугольников, состоящих из хорд эллипсоида. В этом случае можно получить точное решение замкнутого вида в элементарных функциях. Задача решается одинаковым методом и с применением одних и тех формул независимо от величины сторон треугольников. Такое построение рабочих формул упрощает как изложение теории задачи, так и практическое решение ее, в особенности в случае применения вычислительных машин.

Вывод основных формул для решения обратной геодезической задачи. Имеем две произвольные точки на поверхности эллипсоида $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Направление отрезка прямой, соединяющего эти точки, определится направляющими косинусами l_{12}, m_{12}, n_{12}, а длина s_{12} формулой

$$s_{12} = \frac{x_2 - x_1}{l_{12}} = \frac{y_2 - y_1}{m_{12}} = \frac{z_2 - z_1}{n_{12}}. \tag{6.22}$$

Совместим плоскость $y = 0$ с меридианом первой точки и перейдем к криволинейным координатам с помощью формул (6.4). Получим

$$x_2 - x_1 = s_{12} l_{12} = (N_2 + H_2) \cos B_2 \cos L_2 - (N_1 + H_1) \cos B_1, \tag{6.23}$$

$$y_2 - y_1 = s_{12} m_{12} = (N_2 + H_2) \cos B_2 \sin L_2, \tag{6.24}$$

$$z_2 - z_1 = s_{12} n_{12} = \left(\frac{b^2}{a^2} N_2 + H_2\right) \sin B_2 - \left(\frac{b^2}{a^2} N_1 + H_1\right) \sin B_1. \tag{6.25}$$

Возведем правые и левые части этих уравнений в квадрат и сложим результаты. Получим выражение для расстояния между нашими точками M_1, M_2 через криволинейные координаты этих точек. Точки M_1, M_2 являются концами хорды M_1M_2. Длина этой хорды равна

$$s_{12}^2 = (N_2 + H_2)^2 \cos^2 B_2 + (N_1 + H_1)^2 \cos^2 B_1 - \\ - 2(N_2 + H_2)(N_1 + H_1) \cos B_1 \cos B_2 \cos L_2 + \\ + \left(\frac{b^2}{a^2} N_2 + H_2\right)^2 \sin^2 B_2 + \left(\frac{b^2}{a^2} N_1 + H_1\right)^2 \sin^2 B_1 - \\ - 2\left(\frac{b^2}{a^2} N_2 + H_2\right)\left(\frac{b^2}{a^2} N_1 + H_1\right) \sin B_1 \sin B_2.$$

Угол ψ между координатными линиями H_1 и H_2 можно определить из следующего равенства (рис. 52):

$$\cos \psi = \sin B_1 \sin B_2 + \cos B_1 \cos B_2 \cos L_2. \tag{6.26}$$

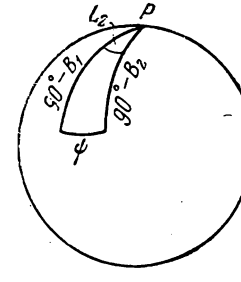


Рис. 52.

Пользуясь этим соотношением, введем в формулу для s_{12}^2 выражение $\cos B_1 \cos B_2 \cos L_2$. Тогда

$$s_{12}^2 = (N_2 + H_2)^2 \cos^2 B_2 + (N_1 + H_1)^2 \cos^2 B_1 - \\ - 2(N_2 + H_2)(N_1 + H_1)[\cos \psi - \sin B_1 \sin B_2] + \\ + \left(\frac{b^2}{a^2} N_2 + H_2\right)^2 \sin^2 B_2 + \left(\frac{b^2}{a^2} N_1 + H_1\right)^2 \sin^2 B_1 - \\ - 2\left(\frac{b^2}{a^2} N_2 + H_2\right)\left(\frac{b^2}{a^2} N_1 + H_1\right) \sin B_1 \sin B_2.$$

Представим $\cos^2 B_2$ и $\cos^2 B_1$ через синусы соответствующих углов, тогда будем иметь

$$s_{12}^2 = (N_2 + H_2)^2 + (N_1 + H_1)^2 - 2(N_2 + H_2)(N_1 + H_1) \cos \psi - \\ - (N_2 + H_2)^2 \sin^2 B_2 - (N_1 + H_1)^2 \sin^2 B_1 + \\ + 2(N_2 + H_2)(N_1 + H_1) \sin B_1 \sin B_2 + \left(\frac{b^2}{a^2} N_2 + H_2\right)^2 \sin^2 B_2 + \\ + \left(\frac{b^2}{a^2} N_1 + H_1\right)^2 \sin^2 B_1 - 2\left(\frac{b^2}{a^2} N_2 + H_2\right)\left(\frac{b^2}{a^2} N_1 + H_1\right) \sin B_1 \sin B_2. \tag{6.27}$$

Выделим отдельно члены, содержащие b^4/a^4, добавим к ним члены, содержащие вторые степени N:

$$\frac{b^4}{a^4}\left(N_2^2 \sin^2 B_2 + N_1^2 \sin^2 B_1 - 2N_1N_2 \sin B_1 \sin B_2\right) - \\ - N_2^2 \sin^2 B_2 - N_1^2 \sin^2 B_1 + 2N_1N_2 \sin B_1 \sin B_2 =$$

$$= \frac{b^4 - a^4}{a^4} N_2^2 \sin^2 B_2 + \frac{b^4 - a^4}{a^4} N_1^2 \sin^2 B_1 -$$

$$- 2\frac{b^4 - a^4}{a^4} N_1 N_2 \sin B_1 \sin B_2 = \frac{b^4 - a^4}{a^4} (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1)^2.$$

Выпишем оставшиеся в равенстве (6.27) члены, за исключением первых трех:

$$- 2N_2 H_2 \sin^2 B_2 - H_2^2 \sin^2 B_2 - 2N_1 H_1 \sin^2 B_1 - H_1^2 \sin^2 B_1 +$$

$$+ 2(N_2 H_1 + N_1 H_2 + H_1 H_2) \sin B_1 \sin B_2 + 2\frac{b^2}{a^2} N_2 H_2 \sin^2 B_2 +$$

$$+ H_2^2 \sin^2 B_2 + 2\frac{b^2}{a^2} N_1 H_1 \sin^2 B_1 + H_1^2 \sin^2 B_1 -$$

$$- 2\left(\frac{b^2}{a^2} H_1 N_2 + \frac{b^2}{a^2} H_2 N_1 + H_1 H_2\right) \sin B_1 \sin B_2 =$$

$$= 2N_2 H_2 \sin^2 B_2 \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) + 2N_1 H_1 \sin^2 B_1 \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) +$$

$$+ 2N_2 H_1 \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \sin B_1 \sin B_2 + 2N_1 H_2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \sin B_1 \sin B_2 =$$

$$= 2\frac{a^2 - b^2}{a^2} (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1)(H_2 \sin B_2 - H_1 \sin B_1).$$

Окончательно получим формулу для определения расстояния между точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$s_{12}^2 = (N_1 + H_1)^2 + (N_2 + H_2)^2 - 2(N_1 + H_1)(N_2 + H_2)\cos\psi -$$

$$- \frac{a^4 - b^4}{a^4} (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin N_1)^2 -$$

$$- 2\frac{a^2 - b^2}{a^2} (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1)(H_2 \sin B_2 - H_1 \sin B_1). \quad (6.28)$$

Определим направление отрезка s_{12} в геодезической горизонтальной системе координат, т. е. через зенитное расстояние z_{12} направления из первой точки на вторую и азимут плоскости, проходящей через отрезок s_{12} и геодезический зенит в первой точке. Рассмотрим сферу единичного радиуса (рис. 53). Система прямоугольных координат X, Y, Z выбрана так, что ось Z направлена по оси вращения. Точкой M_1 обозначено направление геодезического зенита в первой точке (x_1, y_1, z_1), M_2 указывает направление на геодезический зенит во второй точке (x_2, y_2, z_2), A_{12} — геодезический азимут направления из точки (x_1, y_1, z_1) на точку (x_2, y_2, z_2), B_1, B_2 — геодезические широты точек. Из сферических треугольников имеем следующие выражения для

направляющих косинусов:

$$\left.\begin{aligned}\cos(\widehat{XM_2}) &= l_{12} = \cos B_1 \cos z_{12} - \sin B_1 \sin z_{12} \cos A_{12},\\ \cos(\widehat{YM_2}) &= m_{12} = \sin z_{12} \sin A_{12},\\ \cos(\widehat{ZM_2}) &= n_{12} = \sin B_1 \cos z_{12} + \cos B_1 \sin z_{12} \cos A_{12}.\end{aligned}\right\} \quad (6.29)$$

Эти формулы выражают направляющие косинусы отрезка s_{12} через горизонтальные координаты: зенитное расстояние z_{12} и азимут A_{12}. Разрешив формулы (6.29) относительно z_{12} и A_{12}, получим формулы обратного перехода, т. е. от направляющих косинусов к горизонтальным координатам. Для этого построим вспомогательную формулу: умножив первое уравнение (6.29) на $-\sin B_1$ и третье — на $\cos B_1$ и сложив, получаем

$$\sin z_{12} \cos A_{12} = n_{12} \cos B_1 - l_{12} \sin B_1 = h_{12}. \quad (6.30)$$

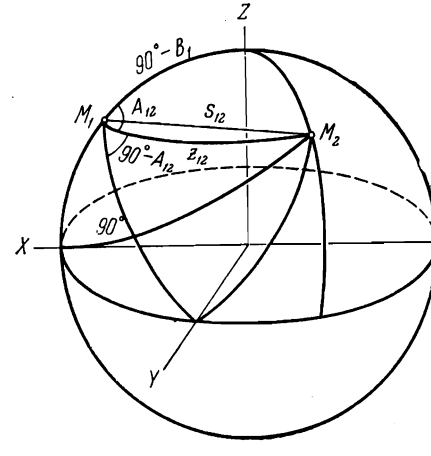


Рис. 53.

Далее умножим первое уравнение (6.29) на $\cos B_1$, а третье — на $\sin B_1$ и сложим:

$$l_{12} \cos B_1 + n_{12} \sin B_1 = \cos z_{12}. \quad (6.31)$$

Наконец, разделив обе части равенства (6.30) на m_{12}, получим

$$\frac{n_{12} \cos B_1 - l_{12} \sin B_1}{m_{12}} = \frac{h_{12}}{m_{12}} = \operatorname{ctg} A_{12}. \quad (6.32)$$

Уравнения (6.31) и (6.32) служат основными соотношениями для выражения горизонтальных координат z_{12} и A_{12} через направляющие косинусы прямой (l_{12}, m_{12}, n_{12}).

Теперь введем в формулу (6.32) значения направляющих косинусов из (6.23) — (6.25):

$$\operatorname{ctg} A_{12} = \frac{\left(\frac{b^2}{a^2} N_2 + H_2\right) \sin B_2 \cos B_1 - \left(\frac{b^2}{a^2} N_1 + H_1\right) \sin B_1 \cos B_1}{(N_2 + H_2) \cos B_2 \sin L_2} -$$

$$- \frac{(N_2 + H_2) \cos B_2 \cos L_2 \sin B_1 + (N_1 + H_1) \cos B_1 \sin B_1}{(N_2 + H_2) \cos B_2 \sin L_2}. \quad (6.33)$$

Преобразуем числитель, который обозначим через I. Сгруппируем члены, содержащие отношение b^2/a^2 и коэффициенты,

стоящие при этих отношениях, причем добавим и вычтем член $N_2 \sin B_2 \cos B_1$:

$$I = \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) N_2 \sin B_2 \cos B_1 - \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) N_1 \sin B_1 \cos B_1 + \\ + N_2 (\sin B_2 \cos B_1 - \cos B_2 \sin B_1 \cos L_2) + \\ + H (\sin B_2 \cos B_1 - \cos B_2 \sin B_1 \cos L_2).$$

Вводя преобразованный числитель в выражение для $\operatorname{ctg} A_{12}$ (6.33), получим

$$\operatorname{ctg} A_{12} = \\ = \frac{\frac{a^2 - b^2}{a^2} (N_1 \sin B_1 - N_2 \sin B_2) \cos B_1}{(N_2 + H_2) \cos B_2 \sin L_2} + \frac{\sin B_2 \cos B_1 - \cos B_2 \sin B_1 \cos L_2}{\cos B_2 \sin L_2}.$$

К числителю второго члена добавим и вычтем $\sin B_1 \cos B_2$. Получим

$$\operatorname{ctg} A_{12} = \\ = \frac{\frac{a^2 - b^2}{a^2} (N_1 \sin B_1 - N_2 \sin B_2) \cos B_1}{(N_2 + H_2) \cos B_2 \sin L_2} + \frac{\sin (B_2 - B_1)}{\cos B_2 \sin L_2} + \sin B_1 \operatorname{tg} \frac{L_2}{2}. \quad (6.34)$$

Меняя местами индексы, получим формулу для обратного азимута, т. е. азимута хорды s_{21} относительно геодезического меридиана и геодезического зенита второй точки:

$$\operatorname{ctg} A_{21} = - \frac{\frac{a^2 - b^2}{a^2} (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1) \cos B_2}{(N_1 + H_1) \cos B_1 \sin L_2} - \\ - \frac{\sin (B_1 - B_2)}{\cos B_1 \sin L_2} - \sin B_2 \operatorname{tg} \frac{L_2}{2}. \quad (6.35)$$

Формулы (6.28), (6.34) и (6.35) дают решение прямой и обратной геодезических задач при любых высоте H и длине хорды s.

Если обе точки M_1 и M_2 лежат на поверхности эллипсоида, а обычно геодезические задачи решаются для такого случая, то $H_1 = H_2 = 0$ и формулы решения геодезических задач значительно упрощаются. Для длины хорды из равенства (6.28) получим

$$s_{12}^2 = N_1^2 + N_2^2 - 2N_1 N_2 \cos \psi - \frac{a^4 - b^4}{a^4} (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1)^2$$

или, добавив и вычтя $2N_1N_2$,

$$s_{12}^2 = (N_1 - N_2)^2 - 4N_1N_2 \sin^2 \frac{\psi}{2} - \frac{a^4 - b^4}{a^4}(N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1)^2. \tag{6.36}$$

Выражение для $\sin^2 \frac{\psi}{2}$ получим из (6.26) в виде

$$\sin^2 \frac{\psi}{2} = \sin^2 \frac{B_2 - B_1}{2} + \cos B_1 \cos B_2 \sin^2 \frac{L_2}{2}.$$

Для азимутов A_{12} и A_{21} имеем следующие два равенства:

$$\operatorname{ctg} A_{12} = \frac{\frac{a^2 - b^2}{a^2}(N_1 \sin B_1 - N_2 \sin B_2) \cos B_1}{N_2 \cos B_2 \sin L_2} + \\ + \frac{\sin (B_2 - B_1)}{\cos B_2 \sin L_2} + \sin B_1 \operatorname{tg} \frac{L_2}{2}, \tag{6.37}$$

$$\operatorname{ctg} A_{21} = -\frac{\frac{a^2 - b^2}{a^2}(N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1) \cos B_2}{N_1 \cos B_1 \sin L_2} - \\ - \frac{\sin (B_1 - B_2)}{\cos B_1 \sin L_2} - \sin B_2 \operatorname{tg} \frac{L_2}{2}. \tag{6.38}$$

Так как обе точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_1 + s_{12}l_{12};\ y + s_{12}m_{12},\ z_1 + s_{12}n_{12})$ лежат на эллипсоидах, то их координаты удовлетворяют уравнению эллипсоида

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{b}\right)^2 = 1,$$

$$\left(\frac{x_1 + s_{12}l_{12}}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + s_{12}m_{12}}{a}\right)^2 + \left(\frac{z_1 + s_{12}n_{12}}{b}\right)^2 = 1.$$

Вычтем из второго уравнения первое:

$$s_{12}^2 \left(\frac{l_{12}^2}{a^2} + \frac{m_{12}^2}{a^2} + \frac{n_{12}^2}{b^2}\right) + 2s_{12}\left(\frac{x_{12}l_{12}}{a^2} + \frac{y_{12}m_{12}}{a^2} + \frac{z_{12}n_{12}}{b^2}\right) = 0.$$

Вместо координат x_1, y_1, z_1 введем криволинейные координаты B_1, L_1 из (6.2):

$$s_{12}^2 \left(\frac{l_{12}^2}{a^2} + \frac{m_{12}^2}{a^2} + \frac{n_{12}^2}{b^2}\right) = \\ = -2s_{12}N_1 \left(\frac{\cos B_1 \cos L_1 l_{12}}{a^2} + \frac{\cos B_1 \sin L_1 m_{12}}{a^2} + \frac{\frac{b^2}{a^2} \sin B_1 n_{12}}{b^2}\right).$$

К левой части последнего равенства добавим и вычтем $n_{12}^2 s_{12}^2/a^2$; получим

$$s_{12}^2\left(\frac{l_{12}^2+m_{12}^2+n_{12}^2}{a^2}+\frac{n_{12}^2}{b^2}-\frac{n_{12}^2}{a^2}\right)=\frac{s_{12}^2}{a^2}\left(1+\frac{a^2-b^2}{b^2}n_{12}^2\right).$$

Так как отсчет долгот идет от меридиана первой точки, то $L_1=0$. В этом случае уравнение примет вид

$$s_{12}\left(1+\frac{a^2-b^2}{b^2}n_{12}^2\right)=-2N_1(\cos B_1 l_{12}+\sin B_1 n_{12}). \qquad (6.39)$$

Имея в виду (6.31), получаем

$$s_{12}\left(1+\frac{a^2-b^2}{b^2}n_2^2\right)=-2N_1\cos z_{12}. \qquad (6.40)$$

Вводя обозначение $\frac{1}{N_1}\left(1+\frac{a^2-b^2}{b^2}n_{12}^2\right)=\frac{1}{R_{12}}$, (6.40) запишем в виде

$$\cos z_{12}=-\frac{s_{12}}{2R_{12}}. \qquad (6.41)$$

При $s_{12}\longrightarrow 0$ R_{12} стремится к радиусу кривизны сечения эллипсоида нормальной плоскостью, проходящей через хорду s_{12} и точку (x_1, y_1, z_1). Так как $n_{12}=-n_{21}$, из (6.40) получаем

$$\frac{\cos z_{12}}{\cos z_{21}}=\frac{N_2}{N_1}. \qquad (6.42)$$

Пользуясь (6.24), (6.29), (6.42) и помня, что $n_{12}=-n_{21}$, получим формулу, которая связывает криволинейные координаты концов хорды эллипсоида с ее геодезическими горизонтальными координатами (z_{12}, A_{12}):

$$\frac{N_2\sin B_1+N_1\sin B_2}{N_1\operatorname{ctg}A_{21}-N_2\operatorname{ctg}A_{12}}=\cos B_1\operatorname{tg}z_{12}\sin A_{12}. \qquad (6.43)$$

Обратная геодезическая задача, как уже формулировалось в главе 3, состоит в том, что требуется определить расстояние между двумя точками и азимуты направлений от первой точки на вторую (A_{12}) и наоборот (A_{21}) при известных координатах точек. В рассматриваемом случае решения задачи по хордам в качестве расстояния принимается, очевидно, отрезок прямой, соединяющий обе точки и являющийся хордой эллипсоида.

Решение задачи дается непосредственно формулами (6.28) для длины s хорды и азимутов (6.34) и (6.35); для случая, когда точка лежит на поверхности эллипсоида,— формулами (6.36) для s и (6.37) и (6.38) для азимутов.

§ 4. Решение прямой геодезической задачи

Прямая геодезическая задача состоит в нахождении координат B_2, L_2, A_{21} точки по известным координатам B_1, L_1, A_{12} некоторой исходной точки и расстоянию между этими точками. Эта задача решается при помощи тех же формул методом последовательных приближений. Кроме того, укажем и непосредственный путь решения прямой задачи для случая точек, лежащих на эллипсоиде.

Из формул (6.23) и (6.24), разделив первую на вторую и имея в виду, что $H = 0$, получим разность долгот

$$\frac{l_{12}}{m_{12}} = \operatorname{ctg} L_2 - \frac{N_1 \cos B_1}{m_{12} s_{12}}, \quad \operatorname{ctg} L_2 = \frac{N_1 \cos B_1}{m_{12} s_{12}} + \frac{l_{12}}{m_{12}}. \qquad (6.44)$$

Введя в (6.44) значения направляющих косинусов (из 6.29), выраженные через широту и зенитное расстояние z_{12} направления s_{12}, получим

$$\operatorname{ctg} L_2 = \frac{1}{\sin A_{12}} \left(\frac{N_1}{s_{12}} \frac{\cos B_1}{\sin z_{12}} + \cos B_1 \operatorname{ctg} z_{12} - \sin B_1 \cos A_{12} \right). \qquad (6.45)$$

Для определения разности широт умножим формулу (6.24) на $-\sin B_1 \operatorname{cosec} L_2$, а (6.25) — на $\frac{a^2}{b^2} \cos B_1$ и сложим. В результате находим

$$-N_2 \cos B_2 \sin L_2 \sin B_1 \operatorname{cosec} L_2 + \frac{b^2}{a^2} N_2 \sin B_2 \frac{a^2}{b^2} \cos B_1 -$$

$$- \frac{b^2}{a^2} N_1 \frac{a^2}{b^2} \cos B_1 \sin B_1 = - s_{12} m_{12} \sin B_1 \operatorname{cosec} L_2 + s_{12} n_{12} \frac{a^2}{b^2} \cos B_1.$$

Производя преобразования, получим

$$N_2 \sin (B_2 - B_1) = N_1 \sin B_1 \cos B_1 + \frac{a^2}{b^2} n_{12} s_{12} \cos B_1 - \frac{\sin B_1}{\sin L_2} m_{12} s_{12}.$$

В этой формуле заменим $N_1 \cos B_1$ выражением из (6.44)

$$N_1 \cos B_1 = m_{12} s_{12} \operatorname{ctg} L_2 - s_{12} l_{12}$$

и внесем значения l_{12} и m_{12} из (6.29). Тогда

$$N_2 \sin (B_2 - B_1) = m_{12} s_{12} \operatorname{ctg} L_2 \sin B_1 -$$

$$- s_{12} l_{12} \sin B_1 + s_{12} \frac{a^2}{b^2} n_{12} \cos B_1 - m_{12} s_{12} \frac{\sin B_1}{\sin L_2} =$$

$$= s_{12} \left(\sin z_{12} \sin A_{12} \sin B_1 \operatorname{ctg} L_2 - \cos B_1 \cos z_{12} \sin B_1 + \right.$$

$$\left. + \sin^2 B_1 \sin z_{12} \cos A_{12} + \frac{a^2}{b^2} n_{12} \cos B_1 - \frac{\sin B_1}{\sin L_2} \sin z_{12} \sin A_{12} \right).$$

Второй и третий члены правой части преобразуем следующим образом:

$$-\sin B_1 \cos z_{12} \cos B_1 + (1 - \cos^2 B) \sin z_{12} \cos A_{12} =$$
$$= -\cos B_1 (\sin B_1 \cos z_{12} + \cos B_1 \sin z_{12} \cos A_{12}) + \sin z_{12} \cos A_{12} =$$
$$= -\cos B_1 n_{12} + \sin z_{12} \cos A_{12}.$$

Теперь

$$\sin (B_2 - B_1) = \frac{s_{12}}{N_2}\left(\sin z_{12} \sin A_{12} \sin B_1 \operatorname{ctg} L_2 + \right.$$
$$\left. + \sin z_{12} \cos A_{12} + \frac{a^2 - b^2}{b^2} n_{12} \cos B_1 - \frac{\sin B_1 \sin z_{12} \sin A_{12}}{\sin L_2}\right),$$

или

$$\sin (B_2 - B_1) = \frac{s_{12}}{N_2}\left(\sin z_{12} \cos A_{12} - \right.$$
$$\left. - \sin A_{12} \sin B_1 \operatorname{tg} \frac{L_2}{2} + \frac{a^2 - b^2}{b^2} n_{12} \cos B_1\right). \quad (6.46)$$

Значения $\cos z_{12}$ и n_{12} определяются по формулам (6.29) и (6.40) методом последовательных приближений.

§ 5. Дифференциальные формулы прямой и обратной геодезических задач

Дифференциальные формулы строятся для того, чтобы можно было исправить результаты решения геодезической задачи при малом изменении исходных данных. Дифференциальные формулы обратной задачи должны дать приращения длины и азимута, возникшие в результате малых изменений широт и долгот. Очевидно, что исходными для вывода дифференциальных формул обратной задачи должны быть уравнения, решающие эту задачу. Для получения приращения длины ds продифференцируем (6.38) в предположении изменяемости B_1, B_2, ΔL. Это дифференцирование с помощью (6.36) и с учетом (6.34) и (6.35) приводит к формуле

$$\frac{s\, ds}{\sin L_2} = N_1 N_2 \cos B_1 \cos B_2\, dL + M_2 N_1 \cos B_1 \operatorname{ctg} A_{21} dB_2 -$$
$$- N_2 M_1 \cos B_2 \operatorname{ctg} A_{12} dB_1$$

или

$$ds = N_1 \cos B_1 \sin A_{12} dL - M_1 \cos A_{12} \sin z_{12} dB -$$
$$- M_2 \cos A_{21} \sin z_{21} dB_2. \quad (6.47)$$

Для получения приращения азимута продифференцируем (6.37) и после преобразований, выполненных с учетом (6.23)—(6.25),

получаем

$$\frac{s\sin z_{12}}{\sin A_{12}}dA_{12} = -(M_1 + s\cos z_{12})\,dB_1 + \\ + M_2\frac{\cos B_1}{\cos B_2}\left(1 - \frac{a^2-b^2}{b^2}\frac{n_{12}s}{N_2}\sin B_2\right)dB_2 - \\ - N_2\cos B_1\left(\operatorname{ctg} A_{21} - \frac{a^2-b^2}{b^2}\frac{l_{21}}{m_{21}}\frac{n_{21}s}{N_2}\right)dL. \quad (6.48)$$

Формулы (6.47) и (6.48) решают задачу введения поправок в расстояния и направления (азимут), возникающих вследствие изменения координат. Формула для обратного азимута получается из (6.18) путем перестановки индексов.

Дифференциальные формулы прямой геодезической задачи, дающие приращения координат точки, возникающие вследствие изменения координат исходной точки, получаются из (6.47) и (6.48), если их разрешить относительно dB_2 и dL_2.

§ 6. Определение высот

Превышения одной точки над другой определяются с помощью геометрического нивелирования. Установив в точке C нивелир по уровню и визируя на рейки, установленные в точках A и B (рис. 54), получаем превышение точки A над B непосредственно по разности отсчетов на рейках $a - b$. Такое превышение $a - b$ называется элементарным нивелирным превышением Δh. Оно определяет элементарное приращение высоты относительно уровенной поверхности, проходящей через точку стояния нивелира на физической поверхности Земли. Если нивелир установить не по уровню, а по нормали к эллипсоиду относимости, то отсчеты будут другими и их разность $a' - b'$ на той же рейке даст величину ΔH элементарного приращения высоты над референц-эллипсоидом. Оба эти превышения будут отличаться на сумму отрезков $aa' + bb'$. Угол ϑ между линиями ab и $a'b'$ есть уклонение отвеса в плоскости чертежа. Очевидно, что длина отрезка $aa' + bb' = \vartheta\Delta l$ (с точностью до квадратов ϑ). Можно записать

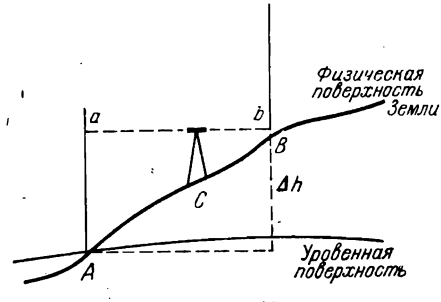


Рис. 54.

$$\Delta h - \Delta H = \vartheta\Delta l.$$

Уклонение отвеса ϑ в данной плоскости можно выразить через уклонение отвеса ξ в плоскости начального меридиана,

η в плоскости первого вертикала и азимута рассматриваемой плоскости

$$\vartheta = \xi \cos A + \eta \sin A.$$

Тогда

$$\Delta H = \Delta h - (\xi \cos A + \eta \sin A)\,\Delta l. \qquad (6.49)$$

Формула устанавливает связь между элементарным нивелирным превышением и приращением высот относительно эллипсоида относимости. Из этой формулы видно, что приращение высот точек физической поверхности Земли над эллипсоидом можно получить с помощью геометрического и астрономического нивелирования. Первый член формулы Δh получается из геометрического нивелирования, второй есть выражение изменения высот за счет уклонений отвесных линий, получаемое с помощью астрономического нивелирования.

Для пунктов A и B, удаленных на конечное расстояние друг от друга, формула (6.49) может быть записана так:

$$H_B - H_A = \int_{AB} dh - \int_{AB} (\xi \cos A + \eta \sin A)\, dl. \qquad (6.50)$$

§ 7. Редукционная задача

Как уже говорилось в главе 4, все измеренные на физической поверхности Земли элементы должны быть отнесены на поверхность отсчетного эллипсоида, т. е. должны быть редуцированы. Редуцированию подлежат азимуты направлений, зенитные расстояния и линейные измерения на базисах.

Для получения формулы редуцирования азимутов воспользуемся формулой (6.34), выражающей азимут, и образуем разность котангенсов азимута при $H = H$ и $H = 0$. Воспользуемся известным тригонометрическим соотношением

$$\operatorname{ctg} A_{12}(H) - \operatorname{ctg} A_{12}(0) = -\frac{\sin [A_{12}(H) - A_{12}(0)]}{\sin A_{12}(H) \sin A_{12}(0)}.$$

С другой стороны, из (6.34)

$$\operatorname{ctg} A_{12}(H) - \operatorname{ctg} A_{12}(0) =$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{a^2}\left[\frac{(N_1 \sin B_1 - N_2 \sin B_2)\cos B_1}{(N_2 + H)\cos B_2 \sin L_2} - \frac{(N_1 \sin B_1 - N_2 \sin B_2)\cos B_1}{N_2 \cos B_2 \sin L_2}\right].$$

Последние два члена выражения (6.34), как не зависящие от высоты, дают в разности нуль. Приравнивая правые части этих уравнений, получим

$$\sin [A_{12}(H) - A_{12}(0)] =$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{a^2}\frac{H}{N_2}\frac{\cos B_1 \sin A_{12}(0) \sin A_{12}(H)}{N_2 + H}\left[\frac{N_1 \sin B_1 - N_2 \sin B_2}{\cos B_2 \sin L_2}\right].$$

Для вывода редукции базиса за высоту H воспользуемся формулой (6.9). Напишем выражение для дифференциала дуги по (6.10) для случая $H = 0$. Так как, редуцируя на эллипсоид, мы пользуемся ортогональной проекцией элемента дуги ds на эллипсоид, то $\sin z = 1$. Таким образом,

$$ds_0 = M \cos A \, dB + N \sin A \cos B \, dL$$

или, представляя ds_0 как разность $ds \sin z$ нередуцированного значения проекции ds на уровенную поверхность на высоте H и поправки за редукцию, получим

$$ds_0 = ds \sin z - H(\cos A \; dB + \sin A \cos B \; dL) = ds \sin z - H \; d\psi,$$

где $d\psi$ — угол между координатными линиями H, проходящими через концы отрезка ds.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ГРАВИМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ ИЗУЧЕНИЯ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ

Земля образовалась и приняла свою форму под воздействием силы тяготения. В наш предмет не входит рассмотрение процесса образования Земли. Получилась ли она в результате конденсации облака холодных пылевых частиц с последующим разогревом, или из горячего газа, или даже была вырвана близко прошедшим гравитирующим телом из недр Солнца,— во всех случаях именно гравитация была силой, образовавшей Землю и придавшей ей современную форму.

На более позднем этапе, когда Земля уже существует как небесное тело, именно гравитация определяет ее форму, в основном близкую к эллипсоиду вращения, и в значительной степени отклонения ее от этой осредненной формы: возвышающиеся континенты и горные области, заполненные водой впадины морей. Сила тяжести управляет процессами, протекающими на поверхности и в недрах Земли. Очевидно, что, изучая силу тяжести, мы можем изучить фигуру Земли и объяснить основные черты ее, а также понять многие процессы, протекающие в ее недрах.

Основы гравитационной теории фигуры Земли были заложены Клеро, исходившим из теории ньютонова потенциала. Теория Клеро приводит нас к понятию общей формы Земли как эллипсоида вращения или, лучше сказать, сфероида.

Для удобства теоретических, а также и практических построений, задачу изучения формы Земли разбивают на две части: определение общего земного сфероида и изучение отклонений уровенной поверхности силы тяжести Земли, так называемого геоида, от этого сфероида. В гравитационном поле это соответствует нормальной его части и аномалиям. Первая задача была решена, как уже сказано, Клеро, вторая поставлена и решена Стоксом.

Однако реальная физическая или, как часто говорят геологи, дневная поверхность Земли отличается от уровенной поверхности или геоида существенно больше, чем этот последний отличается от общего земного сфероида. Задача изучения фигуры реальной Земли, когда под фигурой Земли понимается ее физическая поверхность, поставлена и решена вполне строго М. С. Молоденским.

В такой же последовательности изложен материал в этой, второй части книги: нормальное гравитационное поле и общий земной сфероид, аномалии и геоид и физическая поверхность Земли. Но гравитационную теорию фигуры Земли нельзя рассматривать совершенно независимо от геометрической, так же как и геометрическая была бы неполной без гравиметрической. Изучение силы тяжести дает все необходимое для построения формы, но не обеспечивает масштаб этого построения. Геометрический метод должен дать величину эллипсоида относимости — его большую полуось, гравиметрический же метод необходим при определении высот физической поверхности Земли. Измеряемое ускорение силы тяжести $g_e = \frac{fM}{a^2}$ позволяет обеспечить определение большой полуоси a земного эллипсоида, однако при знании другой величины fM или, поскольку гравитационная постоянная f известна экспериментальным путем, массы Земли M. Сочетание геодезических данных, когда a определяется геометрическим методом, и гравиметрических, дающих экспериментально значения g, позволяет определить массу Земли M или произведение fM,— так называемую стоксову константу.

ГЛАВА 7

ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ ГРАВИМЕТРИИ И ТЕОРИИ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ В РОССИИ

§ 1. Идеи Ломоносова о природе тяготения

Вопросы земного притяжения и измерения его волновали научную мысль в России на самых ранних стадиях развития российской науки. Они были предметом исследований только что образованной Академии. Большое внимание уделил этой проблеме М. В. Ломоносов (1711—1765) — один из удивительных гениев человечества, прозрения которого часто опережали свое время на много десятков лет.

Современник Ньютона Ломоносов в своей работе «Заметки о тяжести тел», написанной в сороковых годах 18 века, высказывает ряд глубоких философских замечаний по вопросам силы тяжести. Он говорит, в частности, что «тяжесть покоящегося тела есть не что иное, как задержанное движение»... и далее: «А так как стремление тяжелого тела к центру Земли есть не что иное, как тяжесть, равно как и приращение движения тяжелого тела, устремляющегося к центру Земли, то нет никакого сомнения, что они происходят от одной и той же причины. Следовательно, достаточное основание тяжести состоит в дви-

жении некоего тела, непрерывно толкающего тяжелые тела к центру Земли».

Ломоносов, будучи ученым-материалистом, не мог представить себе дальнодействия тяготения без материального посредника. Он не мог представить движения без материи и материи без движения и с этих позиций попытался высказать гипотезу о механизме тяготения. Он предположил, что всю Вселенную наполняет некая «тяготительная» материя, которая находится в постоянном движении, ее частицы движутся во всех направлениях. На данное тело они падают равномерно со всех сторон. Если в среде такой материи представить два тела, то они будут взаимно экранировать поток частиц, направленный на них, давление со стороны экранирующего тела уменьшится и, значит, тела начнут сближаться, толкаемые частицами.

Через 30 лет, в 1762 г., теория тяготения, основанная на тех же принципах, была разработана Ж. Лесажем, который, однако, не знал об идеях Ломоносова. В отличие от Ньютона, который в своих исследованиях шел чисто индуктивным путем и вывел закон всемирного тяготения на основании обобщения опыта, Ломоносов считал, что «познав причину тяготения, можно будет расчленить различия удельного веса тела» и объяснить явления и поныне непонятные: действие на расстоянии, мгновенность распространения. На этом пути нельзя было ожидать успеха, впрочем, Ломоносов высказывался по проблеме силы тяжести довольно аккуратно.

Интересуясь проблемой тяготения, Ломоносов указал и некоторые пути измерения силы тяжести. Он предложил, а позже попытался осуществить инструмент для измерения изменений силы тяжести под влиянием лунно-солнечных приливов, так называемый «универсальный барометр». По существу, этот барометр не зависел от давления атмосферы, а являлся газовым гравиметром, в котором в сообщающихся сосудах вес ртутного столба уравновешивался газом. Идея такого газового гравиметра возродилась через 180 лет и была воплощена в гравиметре Г. Гаалька в тридцатых годах нашего столетия. Ломоносов много сил положил также на попытку обнаружения отклонения отвесных линий и их вариаций.

§ 2. Первые маятниковые определения

Развитие Клеро в середине 18 века теории фигуры Земли вызвало интерес к определению периода колебания маятника. Поскольку напряженность силы тяжести определяет период колебания маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

было предложено использовать маятник для определения силы тяжести g, а по значениям наблюдаемых g изучить форму уровенной поверхности, представляющей Землю.

В начале 19 века французские ученые начали попытки применить нитяной маятник. В 1818 г. английским физиком Кетером был сконструирован оборотный маятник, основанный на том, что всякое физическое тело имеет два взаимных центра качания, таких, что периоды колебания около этих центров одинаковы. Тогда возможно измерить расстояние l между этими центрами, которое играет роль длины в идеальном маятнике, и, определив период, вычислить напряжение силы тяжести g.

Маятниками Кетера было определено значение силы тяжести в довольно большом количестве пунктов в разных частях Земли.

Первые русские измерения силы тяжести были произведены Ф. П. Литке (1797—1882) во время его кругосветного путешествия 1826—1829 гг. Он произвел измерения на Аляске в Ситхе, Петропавловске-Камчатском, в Тихом океане на островах Кусаке в Каролинском архипелаге, Гуам в группе Марианских островов, на одном из островов Бонини — Сима, в Вальпарайсо и на острове Св. Елены. В 1830 г. М. Ф. Рейнеке с тем же прибором произвел измерения в Кандалакше.

Обработав наблюдения маятников, Литке сделал заключение о наличии положительных гравитационных аномалий на океанических островах. Главной причиной аномалий, по мнению Литке, является наличие плотного базальтового основания у островных пунктов. «В тех же пунктах, которые лежали на толстых слоях известняка и песчаника, величины аномалий оказались почти втрое меньше». Результаты произведенных измерений силы тяжести Литке использовал для вывода сжатия Земли. Однако, имея большой процент островных, т. е. резко аномальных пунктов, Литке не мог получить правильный результат. Справедливо оценив это обстоятельство, он добавил к своим наблюдениям шесть наблюдений англичан и, совместно обработав эти данные, получил для сжатия Земли величину 1:288. По этому поводу в «Путешествии вокруг света на военном шлюпе „Сенявин"» Литке пишет: «...Наблюдения над постоянным маятником в девяти пунктах. Эти, согласно с произведенными прежде разными наблюдателями, показали более значительное сжатие Земли против выводимого из неравенства движения Луны. Общий вывод сжатия из этих наблюдений выходит 1:269, но в соединении с некоторыми другими приближается к 1:288».

Почти одновременно с Литке произвел ряд маятниковых измерений силы тяжести в Прибалтике и на Кавказе профессор

Дерптского университета И. Ф. Паррот (1829). Им были, в частности, произведены наблюдения на Арарате в монастыре Св. Якова на высоте 1940 *м*. Материалы Паррота, обработанные В. Я. Струве, дали сжатие Земли для пунктов Дерпт — Тифлис 1:312,5 и для пунктов Дерпт — Арарат 1:279,3.

В 1848 г. профессор астрономии Петербургского университета А. Н. Савич (1810—1883) поставил перед Русским географическим обществом вопрос об организации наблюдений силы тяжести на территории России. В качестве первой части программы он предложил выполнить маятниковые определения вдоль ряда Русско-Скандинавского градусного измерения, идущего от Торнео в Финляндии до Измаила на Дунае и к тому времени уже заканчиваемого.

Однако от предложения до осуществления прошло немало времени. В шестидесятые годы проблемой заинтересовались Академия наук и Корпус военных топографов и наконец, в 1865 г. А. Н. Савич и профессор Р. Э. Ленц, получив новый прибор с оборотными маятниками фирмы Репсольд, приступили к работе. Основной задачей работ было изучение фигуры Земли. В своем отчете А. Н. Савич отмечал, что увеличение силы тяжести с удалением от экватора наблюдается только в средних цифрах опыта, но что практически в каждом пункте имеются существенные уклонения от теоретически ожидаемых величин. Эти уклонения значительно превышают возможные погрешности измерений и объясняются, с одной стороны, отличием истинной земной поверхности от эллипсоида вращения, а с другой,— геологическими особенностями вблизи каждого пункта наблюдения. Поэтому местные уклонения силы тяжести «мы вправе принимать за физические явления, которые находятся в тесной связи с внутренним устройством Земли и преимущественно с устройством земной коры».

Экспедиция Савича работала три года и за это время выполнила измерения в Торнео, Николайштадте, Ревеле, Пулкове, Вильно, Якобштадте, Дерпте, Белине, Кременце, Каменец-Подольске, Кишиневе и Измаиле.

По северной части дуги Савич получил сжатие 1:296, однако по всей дуге результат оказался более далеким от истины — 1:309.

В 1876 г. директор Пулковской обсерватории О. В. Струве попросил военных топографов произвести наблюдения силы тяжести на Кавказе. Работу начал И. И. Стебницкий, руководивший в то время геодезическими работами на Кавказе, и продолжил П. П. Кульберг, измеривший силу тяжести с маятниками Репсольда во Владикавказе, Гудаутах, Душете, Батуме, Елисаветполе, Шемахе и Баку, и позже в Крыму, в Симферополе и Ялте.

§ 3. Московская аттракция. Идеи о применении гравиметрического метода для изучения строения земной коры

В тридцатых годах прошлого столетия при построении Корпусом военных топографов триангуляции под Москвой были замечены значительные расхождения координат, полученных из обработки триангуляций, с астрономическими. В. Я. Струве (1793—1864) обратил на это внимание тогдашнего директора Московской обсерватории Б. Я. Швейцера (1816—1873), который предпринял в этом направлении специальные исследования.

Прежде всего Швейцер вычислил широту колокольни Ивана Великого от ряда различных пунктов триангуляции Московской, Тверской, Новгородской, Смоленской и Петербургской губерний. Этим он предполагал исключить местные аномалии или неточности в определении координат отдельных пунктов, от которых вычислялась широта колокольни.

Была получена величина

$$B - \varphi = 8'',9,$$

т. е. отвес отклонялся на 8″,9 к северу.

В 1848 г. Швейцер произвел специальное определение широт шести подмосковных пунктов, для которых подтвердилась аномальность района. В 1853 г. он организовал экспедицию по определению широты еще 14 подмосковных пунктов. В 1859 г. было определено еще 50 широт уже с лучшим инструментом, а в 1861 г. к ним было добавлено еще 40 пунктов, определенных Троицким. В результате этих работ вышла монография Швейцера «Исследование местной аттракции, существующей около Москвы». В ней приводится карта уклонений отвесных линий под Москвой. Швейцер указывает, что в 12 *км* к югу от Москвы в направлении юго-западо-запад проходит линия нулевых отклонений отвеса, к северу от которой расположена область положительных аномалий, а к югу — отрицательных. Линия наибольших положительных (порядка 10″) отклонений отвеса проходит через Москву, а линия наибольших отрицательных (порядка 5″) — через Наро-Фоминск.

Швейцер попытался объяснить эти аномалии наличием масс меньшей плотности, чем окружающие породы, залегающих к северу от Москвы в виде полосы шириной 620 верст, и масс избыточной плотности, залегающих к югу в виде полосы, распространенной на 60 верст. В 1862—1863 гг. Ф. Слудский и Троицкий определили отклонение отвеса еще в 152 точках, после чего имелись данные приблизительно для 250 точек.

В 1863 г. Слудским было предпринято более подробное теоретическое исследование этого вопроса.

Так появилось первое в России исследование уклонения отвесных линий и первые указания на геофизический смысл аномалий силы тяжести и на метод разведочной гравиметрии, получивший в наши дни широкое применение.

В 1888 г. на Московской обсерватории начал работать П. К. Штернберг (1865—1920), который поставил маятниковые определения силы тяжести. Совместно с Ф. А. Бредихиным (1831—1904) в 1888—1889 г. он произвел определение силы тяжести на Московской обсерватории с оборотным маятником Репсольда. В 1916—1917 г. он произвел гравиметрические наблюдения под Москвой с маятниковым прибором Штюкрата с целью сопоставить гравиметрические данные с уклонениями отвесных линий. Наблюдения были проведены по профилю Киев — Московская обсерватория — Нескучный сад — Узкое — Подольск — Молоди. Этот профиль, получивший название «разреза Штернберга», должен был показать, как ведут себя аномалии силы тяжести в направлении наибольших градиентов отклонений отвеса. В работах Штернберга принимали участие московские астрономы А. А. Михайлов и И. А. Казанский.

Работы по гравиметрической съемке Московской аномалии велись до 1917 г. С 1917 г. П. К. Штернберг целиком посвятил себя боевой революционной деятельности. Когда началась гражданская война, П. К. Штернберг был назначен комиссаром 2-й армии Восточного фронта. В ноябре 1919 г. он, будучи на фронте, простудился и с тяжелым плевритом в декабре был привезен в Москву. В ночь на 31 января 1920 г. П. К. Штернберг скончался.

Работы по исследованию Московской аттракции были продолжены А. А. Михайловым и И. А. Казанским и в 1926 г. обработаны последним. В 1930 г. И. А. Казанский перешел на работу в Центральный научно-исследовательский институт геодезии, аэросъемки и картографии (ЦНИИГАиК), где совместно с Ф. Н. Красовским проводил в жизнь идею организации общей гравиметрической съемки СССР, подготовляя таким образом решение Совета Труда и Обороны от 1932 г. В 1936 г. И. А. Казанский указывал на принципиальную возможность использования гравиметрической съемки при астрономическом нивелировании. Метод был разработан в дальнейшем М. С. Молоденским и получил название астрономо-гравиметрического нивелирования. Цепь специальных работ по геодезической гравиметрии, начатая Швейцером и Слудским, Штернбергом, Казанским и Михайловым, получила блестящее продолжение в фундаментальных работах М. С. Молоденского и его сотрудников В. Ф. Еремеева и М. И. Юркиной.

§ 4. Развитие идей в области теории фигуры Земли

В 1884 г. Русское географическое общество включило маятниковые наблюдения в план своих постоянных исследований и была образована Комиссия по изучению силы тяжести на территории России под председательством И. И. Стебницкого. В Комиссию вошли О. В. Струве, С. Д. Рыльке, А. А. Тилло, Э. И. Форш, Н. Я. Цингер, К. В. Шарнгорст.

Комиссия разработала план маятниковых определений с целью изучения фигуры Земли. В первую очередь планировались гравиметрические определения вдоль ряда триангуляции по 52-й параллели. Работы были поручены А. И. Вилькицкому.

В период 1888—1889 гг. Ф. А. Бредихин, директор астрономической обсерватории Московского университета и П. К. Штернберг определили силу тяжести в семи пунктах европейской части России. В начале 90-х годов А. И. Вилькицкий и профессор А. П. Соколов составили первый каталог маятниковых определений на территории России.

В 1894 г. Р. Штернек, австрийский геодезист и изобретатель маятникового прибора для относительных измерений силы тяжести, осуществил связь Пулкова с Веной — в то время основным исходным пунктом маятниковых работ, а в 1896 г. астрономическая обсерватория Казанского университета начала систематические измерения с прибором Штернека под руководством проф. Д. И. Дубяго и доц. Д. И. Баранова. Эта серия работ велась вплоть до первой мировой войны.

Гравиметрические работы вызывали все больший интерес и постепенно расширялись, имея основной целью изучение фигуры Земли.

Глубокое теоретическое исследование проблемы фигуры Земли было выполнено в восьмидесятые годы прошлого столетия профессором Московского университета Ф. А. Слудским (1841—1897). В 1888 г. Слудский опубликовал свою «Общую теорию фигуры Земли». За фигуру Земли Слудский принимает уровенную поверхность, совпадающую с поверхностью океанов и продолженную на область континентов при их мысленном выравнивании. Примечательно то, что Слудский считает, что в связи с незнанием распределения масс внутри Земли следует отказаться от каких-либо гипотез об этом распределении и оперировать с фактическим значением потенциала во внешних точках. Этим он предвосхитил идеи М. С. Молоденского, решившего краевую задачу теории потенциала для физической поверхности Земли.

Слудский поставил задачу сохранить в разложении потенциала Земли члены до 4-го порядка. Построив теорию, он произвел вычисления сжатия Земли, высот геоида и уклонений

отвеса. Он получил сжатие для эллипсоида вращения 1 : 292,7, а для трехосного эллипсоида — 1 : 297,1. Высоты геоида и уклонения отвесных линий он вычислил для 134 точек, по которым построил линию нулевых высот геоида и перехода его из области положительных в область отрицательных высот. При этом Слудский пришел к интересному выводу, что геоид имеет положительные высоты над океаном и отрицательные над континентом, диаметрально разойдясь в этом мнении с Гельмертом. Этот вывод, сделанный на основании анализа наблюденных значений силы тяжести, Слудский объяснил неоднородным распределением масс, а именно наличием избытка масс под океанами. Однако он понимал недостаточность данных для обоснованных выводов и делал их весьма осторожно. Он писал в Бюллетене общества испытателей природы: «Имеющиеся теперь наблюдения над маятниками не решают даже вопроса о существовании аномалий общих. Требуется покрыть и океан и континенты сплошной сетью определений величины силы тяжести. Эта чрезвычайно трудная практическая задача, без всякого сомнения, будет разрешена со временем».

Несколько позже, в девяностые годы прошлого — первые годы нашего века развернулась научная деятельность петербургского астронома А. А. Иванова (1867—1939). Он построил разложение в ряд земного потенциала силы тяжести и, использовав 367 маятниковых наблюдений, вывел сжатие Земли, которое получилось равным 1:297,2. Ивановым была высказана мысль о несимметрии северного и южного полушарий. Проведенные для этого вычисления имевшихся в его распоряжении мировых маятниковых измерений привели к различию в экваториальной константе g_e для северного и южного полушарий на 20 *мгл*.

А. А. Иванов осуществил также определение абсолютного значения ускорения силы тяжести методом свободного падения тел и методом нитяного маятника.

§ 5. Обобщение теории фигуры Земли в работах Молоденского

В послереволюционный период развитие гравиметрии в СССР приобрело новые формы, будучи поставлено на службу государству. В 1932 г. вышло постановление Совета Труда и Обороны о сплошной маятниковой съемке всей страны и в течение десятилетия было почти полностью осуществлено. Широким фронтом развернулись работы по применению гравиметрического метода при поисках и разведке полезных ископаемых, создавалась высокоточная аппаратура.

Развитие гравиметрии, несколько задержавшееся в период второй мировой войны, получило новый импульс в послевоен-

ные годы. Широкое развитие, в частности, получила морская гравиметрия.

Уже невозможно в кратком очерке охватить весь грандиозный размах исследований и в послевоенный период. Крупным достижением как советской, так и мировой науки в области теории фигуры Земли явилась теория М. С. Молоденского, поставившего проблему совершенно по-новому и решившего краевую задачу гравиметрии не для тех или иных абстрактных поверхностей, представляющих идеализированную модель Земли, а для реальной Земли, для ее физической поверхности.

В теории Молоденского удивительно просто решена, казалось бы, неразрешимая строго проблема редукций введением системы нормальных высот и расчетом нормального поля для физической поверхности Земли. Переход к физической поверхности Земли освободил задачу от условия необходимости знания распределения масс внутри Земли или необходимости построения каких-либо гипотез о внутреннем строении Земли. Решение краевой задачи Молоденского для физической поверхности Земли привело к строгим формулам для высот геоида, включающим решение проблемы Стокса как первое приближение.

ГЛАВА 8

НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ НЬЮТОНОВА ПОТЕНЦИАЛА

§ 1. Сила тяжести

Согласно закону всемирного тяготения две материальные точки притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Для двух точечных масс эта сила имеет выражение

$$\boldsymbol{F} = -f\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

где $f = 6{,}673 \cdot 10^{-8}$ *см*^{3}/*г*·*сек*^{2} — гравитационная постоянная, m_1 и m_2 — массы точек, r — расстояние между ними. Закону всемирного тяготения подчинено взаимодействие между всеми телами. Для Земли, состоящей из непрерывно протяженных масс, взаимодействующей с точечной массой m_1, закон всемирного тяготения можно записать в интегральной форме

$$\boldsymbol{F} = -fm_1\int\frac{\boldsymbol{r}\,dm}{r^3},$$

где $\boldsymbol{r}$ — геоцентрический радиус-вектор массы m_1.

Притяжение зависит от взаимодействующих масс. Однако если имеется только одна масса, то можно считать, что она развивает в окружающем пространстве силовое поле, такое, что если в любую точку этого поля поместить единичную массу, то между массами возникает взаимодействие, определяемое формулой

$$\boldsymbol{F} = -f\int\frac{\boldsymbol{r}\,dm}{r^3},$$

т. е. равное силе, отнесенной к единичной массе. Такая сила, отнесенная к единичной массе, называется *напряженностью поля*. Напряженность поля определяет ускорение, с каким будет падать к массе m другая масса, помещенная в силовом поле

этой массы. Численно ускорение притяжения равно напряженности данного поля.

Земля вращается с постоянной угловой скоростью. Поэтому на точку с массой m_1, находящуюся в поле земного притяжения, действует еще центробежная сила инерции

$$\boldsymbol{P} = m_1 \rho \omega^2,$$

где ρ — расстояние от оси вращения, ω — угловая скорость. Центробежная сила, отнесенная к массе, также определит центробежную составляющую ускорения свободного падения. Равнодействующая притяжения и центробежной силы

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{P} = \mathcal{F}$$

называется силой тяжести.

Кроме этих двух основных составляющих силы тяжести, имеется еще составляющая, возникающая вследствие различия притяжения Луной и Солнцем центра Земли и рассматриваемой точечной массы. Величина и направление этой составляющей периодически изменяются в зависимости от положения Луны, Солнца и центра Земли относительно рассматриваемой точки.

Лунно-солнечная составляющая рассматривается как возмущение силы тяжести.

Ускорение силы тяжести получается отнесением силы тяжести $\mathcal{F}$ к единичной массе:

$$\boldsymbol{g} = -f \int \frac{r\, dm}{r^3} + \rho \omega^2. \tag{8.1}$$

В системе СИ за единицу ускорения силы тяжести принимается ускорение, которое развивает масса в 1 *кг* под действием силы в 1 *н* (ньютон): $\frac{кг \cdot м}{с^2}$. Было предложено называть эту единицу галилео (сокращение *Gl*) в честь Г. Галилея, впервые измерившего силу тяжести. Полное ускорение силы тяжести Земли g составляет 9,8 таких единиц. Однако чаще употребляется в качестве исходной единицы величина 10^{-2} галилео, равная единице в системе СГС, т. е. ускорение, развиваемое массой в 1 грамм под действием силы в 1 дину. Такая единица называется гал (сокращенно *гал*). И гал, и тем более галилео — единицы слишком большие. В практике применяются обычно единицы, составляющие одну тысячную долю гала и называемые миллигал (сокращение *мгл*) или даже одну миллионную гала и называемые микрогал (сокращенно *мкгл*):

$$10^3\ мкгл = 1\ мгл = 10^{-3}\ гал = 10^{-5}\ Gl = 10^{-6}\ g.$$

Полное среднее ускорение силы тяжести на земной поверхности равно 979,1 гала.

Ускорение силы тяжести изменяется по поверхности Земли, во-первых, за счет изменения центробежной силы, равной нулю на полюсах и достигающей максимума на экваторе, и, во-вторых, за счет сплюснутости Земли. В силу этого сила тяжести увеличивается от экватора к полюсам, т. е. оба эффекта действуют в одну сторону.

Кроме этих правильных изменений, сила тяжести изменяется также вследствие аномального распределения масс. Эти изменения не превышают нескольких десятых долей гала.

От экватора до полюса ускорение силы тяжести изменяется приблизительно на 5 гал:

$$\frac{g_p - g_e}{g_e} = \frac{1}{189}.$$

Легко подсчитать также отношение центробежной силы на экваторе к силе тяжести:

$$q = \frac{a\omega^2}{g_e}. \tag{8.2}$$

Полагая радиус экватора $a = 637\ 824\ 500$ *см*, $\omega = \frac{2\pi}{86\,164}$, где в знаменателе стоит число средних секунд в звездных сутках, и $g_e = 978\,049$, получим

$$q = \frac{1}{288{,}365}.$$

Разность $\frac{g_p - g_e}{g_e} - q = \frac{1}{189} - \frac{1}{288} = \frac{1}{549}$ характеризует величину изменения ускорения силы тяжести за счет сплюснутости Земли.

При изучении ускорения силы тяжести приходится иметь дело с составляющими ее по трем координатным осям X, Y, Z, которые выберем следующим образом: ось Z направлена по оси вращения Земли, оси X, Y — в экваториальной плоскости, причем ось X лежит в плоскости начального меридиана. Напишем для g составляющие по осям координат:

$$\left.\begin{aligned} g_x &= -f\int_v \cos(F, x)\frac{dm}{r^2} + \rho\omega^2\cos(\widehat{P, x}),\\ g_y &= -f\int_v \cos(F, y)\frac{dm}{r^2} + \rho\omega^2\cos(\widehat{P, y}),\\ g_z &= -f\int_v \cos(F, z)\frac{dm}{r^2} + \rho\omega^2\cos(\widehat{P, z}). \end{aligned}\right\} \tag{8.3}$$

Направляющие косинусы для $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{P}$, очевидно, выражаются

следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\cos(\widehat{F,x}) &= \frac{X-x}{r},\\ \cos(\widehat{F,y}) &= \frac{Y-y}{r},\\ \cos(\widehat{F,z}) &= \frac{Z-z}{r},\end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos(\widehat{P,x}) &= \frac{x}{\rho},\\ \cos(\widehat{P,y}) &= \frac{y}{\rho},\\ \cos(\widehat{P,z}) &= 0,\end{aligned}\right\} \tag{8.4'}$$

где x, y, z — координаты притягиваемой точки с единичной массой и X, Y, Z — координаты притягивающей точки с массой dm, а

$$r = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2}. \tag{8.5}$$

Внося значения направляющих косинусов в (8.3), получим

$$\left.\begin{aligned}g_x &= -f\int_v \frac{X-x}{r^3}\,dm + x\omega^2,\\ g_y &= -f\int_v \frac{Y-y}{r^3}\,dm + y\omega^2,\\ g_z &= -f\int_v \frac{Z-z}{r^3}\,dm.\end{aligned}\right\} \tag{8.6}$$

§ 2. Потенциал силы тяжести

Для простоты вместо трех составляющих ускорения силы тяжести вводится потенциальная функция, определяющаяся как функция, производные которой по прямоугольным координатам равны проекциям ускорения силы на соответствующие координатные оси. Согласно этому определению потенциал силы притяжения будет

$$V = f\int \frac{dm}{r}, \tag{8.7}$$

а потенциал центробежной силы

$$U = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2). \tag{8.8}$$

В самом деле, дифференцируя V и U по x, y, z последовательно и имея в виду (8.5), легко убеждаемся в этом.

Потенциал W силы тяжести определится как сумма V и U:

$$W = V + U,$$

или

$$W = f\int \frac{dm}{r} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2). \tag{8.9}$$

Производная потенциала по любому направлению равна составляющей силы, действующей в этом направлении:

$$\frac{dW}{ds} = g_s. \tag{8.10}$$

Докажем справедливость (8.10). Пусть материальная точка с массой $m = 1$ переместилась из A в бесконечно близкую точку A'. Перемещение $AA' = ds$. Составляющие перемещения по осям координат будут

$$\left.\begin{aligned} dx &= ds\cos(ds, x),\\ dy &= ds\cos(ds, y),\\ dz &= ds\cos(ds, z). \end{aligned}\right\} \tag{8.11}$$

Рассмотрим дифференциал потенциала:

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x}dx + \frac{\partial W}{\partial y}dy + \frac{\partial W}{\partial z}dz. \tag{8.12}$$

В выражение для полного дифференциала (8.12) введем из (8.11) dx, dy, dz и значения производных по определению:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = g_x = g\cos(g, x),$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = g_y = g\cos(g, y),$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = g_z = g\cos(g, z).$$

Тогда

$$dW = g\,ds[\cos(g, x)\cos(s, x) + \cos(g, y)\cos(s, y) + \cos(g, z)\cos(s, z)].$$

Но выражение в скобках равно $\cos(g, s)$, следовательно,

$$dW = g\cos(g, s)ds. \tag{8.10'}$$

Из этого свойства потенциала вытекают два важных следствия, позволяющих вникнуть в физическую сущность введенного понятия.

Из (8.10) видно, что приращение потенциала есть работа, совершаемая силой при перемещении единичной точечной массы в поле силы тяжести.

Рассмотрим случай перемещения точки в направлении, перпендикулярном к направлению действия силы g. Тогда $\cos(g, s) = 0$ и из (8.10′)

$$dW = 0.$$

Интегрируя, получаем уравнение

$$W = \text{const}. \tag{8.13}$$

Как функциональная зависимость между координатами в пространстве это уравнение есть уравнение некоторой поверхности, обладающей тем свойством, что в любой ее точке сила направлена по нормали к ней. Работа силы при перемещении массы по этой поверхности равна нулю ($dW = 0$). На материальную точку, расположенную на этой поверхности, не действуют тангенциальные составляющие силы, так как сила нормальна ей и, стало быть, эта поверхность будет поверхностью равновесия жидкости; по ней устанавливается уровень жидкости. Поэтому такая поверхность называется *уровенной*. Иначе ее зовут *эквипотенциальной* из-за постоянства на ней потенциала.

Придавая константе в уравнении (8.13) различные значения, мы получим семейство уровенных поверхностей, обладающее тем свойством, что соседние уровенные поверхности никогда не могут пересекаться или касаться. В противном случае у них оказалась бы одна общая точка, в которой для обеих поверхностей потенциал обращался бы в одну и ту же постоянную C, но в силу уравнения (8.13) это означало бы, что во всех точках обеих поверхностей потенциалы равны тому же значению C, т. е. поверхности совпадают полностью.

Если константе задать такое значение, чтобы уровенная поверхность (8.13) совпадала с невозмущенным уровнем воды в океанах, то мы получим уравнение геоида.

Теперь рассмотрим случай перемещения точки вдоль линии действия силы g. Тогда

$$\cos(g, s) = 1 \text{ и } ds = \frac{dW}{g}. \tag{8.14}$$

В уравнении (8.14) ds — элементарное перемещение по нормали к уровенным поверхностям, dW — приращение потенциала при переходе от одной уровенной поверхности к другой. Эти две бесконечно близкие поверхности определяются уравнениями

$$W = C \text{ и } W = C + dC.$$

Из уравнения (8.14) заключаем, что расстояние между двумя бесконечно близкими уровенными поверхностями обратно пропорционально действующей силе.

Так как на каждой поверхности потенциал постоянен, то и приращение потенциала при переходе точки с одной уровенной поверхности на другую есть величина постоянная, не зависящая от положения точки на этой поверхности. Это значит, что приращение потенциала не зависит от пути перемещения материальной точки (*1* или *2* на рис. 55), а есть лишь функция конечных точек перемещения. В частности, приращение потенциала по замкнутому контуру равно нулю.

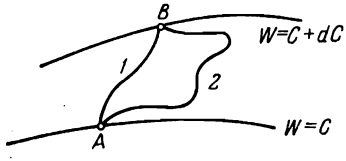


Рис. 55.

Из двух функций, входящих в выражение потенциала силы тяжести (8.9), вторая — потенциал центробежной силы — является простой непрерывной функцией, зависящей только от положения точки. Она не требует специального рассмотрения. Потенциал притяжения зависит от распределения масс и расположения исследуемой точки относительно этих масс. Поэтому следует рассмотреть особо некоторые свойства потенциала притяжения.

§ 3. Регулярность потенциала притяжения на бесконечности

Потенциал притяжения V является функцией, регулярной на бесконечности, т. е.

$$\lim_{r\to\infty} rV = fM, \tag{8.15}$$

где M — общая масса возбуждающего потенциал V тела. Сам же потенциал V при стремлении r к бесконечности обращается в нуль:

$$\lim_{r\to\infty} V = 0.$$

Чтобы доказать равенство (8.15), напишем выражения потенциала притяжения, развиваемого массой M, заключенной в конечном объеме, на точку A (рис. 56):

$$V = f\int \frac{dm}{r}.$$

Далее, предположив все массы тела сосредоточенными в ближайшей к A точке тела m', напишем выражение потенциала

$$V' = f\int \frac{dm}{r'},$$

развиваемого массой M в этом случае. Аналогично для случая

масс, сосредоточенных в наиболее удаленной от A точке m'',

$$V'' = f\int \frac{dm}{r''}.$$

Здесь r' и r'' — соответственно расстояния от A до ближайшей

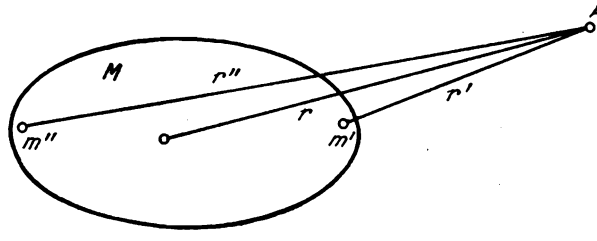


Рис. 56.

и самой удаленной точек. Очевидно, что эти три случая можно связать неравенством

$$f\int \frac{dm}{r''} < f\int \frac{dm}{r} < f\int \frac{dm}{r'}.$$

В крайних частях этого неравенства в знаменателе имеем постоянные величины r' и r''. Помня, что $\int dm = M$ — масса тела, можно написать

$$f\frac{M}{r''} < V < f\frac{M}{r'}.$$

Умножая это неравенство на r и переходя к пределу при $r\to\infty$, $r'\to\infty$, $r''\to\infty$, получаем искомое соотношение

$$\lim_{r\to\infty} rV = fM,$$

так как

$$\lim_{r\to\infty}\frac{r}{r'} = \lim_{r\to\infty}\frac{r}{r''} = 1.$$

§ 4. Потенциал простого слоя

В уравнении (8.7) элемент массы dm заменим произведением плотности на элемент объема $d\tau$:

$$dm = \sigma\, d\tau.$$

Тогда интеграл (8.7) запишется как интеграл, взятый по объему τ:

$$V = f\int_{\tau} \frac{\sigma\, d\tau}{r}. \qquad (8.16)$$

Если притягивающие массы расположены на поверхности S в виде слоя малой толщины h, то элемент объема, в котором находится элементарная масса, будет $d\tau = h\,ds$, где ds — элемент поверхности. Элементарная масса получится как произведение плотности σ на элемент объема $\sigma h\,ds$, и интеграл (8.16) примет вид

$$V = f\int\int_S \frac{\sigma h\,ds}{r}.$$

Если слой S сжимать к толщине $h \to 0$, притом так, чтобы произведение σh оставалось конечной величиной

$$\lim_{h\to 0} \sigma h = \sigma',$$

то мы получим поверхностную плотность σ', а интеграл (8.16) обратится в

$$V = \int\int_S \frac{\sigma' ds}{r}, \tag{8.16'}$$

так называемый *потенциал простого слоя.*

Во всякой точке, не лежащей на поверхности S, выражение (8.16′) представляет собой конечную непрерывную функцию, имеющую непрерывные частные производные любого порядка. Эти частные производные могут быть получены путем дифференцирования (8.16′) под знаком интеграла. Соответствующие проекции сил притяжения в точке x, y, z, не лежащей на поверхности S, выразятся формулами:

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x} = f\int\int_S \frac{X-x}{r^3}\sigma' dS;\quad F_y = \frac{\partial V}{\partial y} = f\int\int_S \frac{Y-y}{r^3}\sigma' dS;$$

$$F_z = \frac{\partial V}{\partial z} = f\int\int_S \frac{Z-z}{r^3}\sigma' dS.$$

Первые производные функции V, определяемой формулой (8.16′), при прохождении точки x, y, z через поверхность S претерпевают разрыв непрерывности, изменяясь при движении по нормали скачком на величину $4\pi f\sigma'$. Рассмотрим случай, когда точка приближается к поверхности S, не пересекая эту поверхность. Производные потенциала простого слоя при приближении точки к поверхности будут иметь некоторый предел, различный в зависимости от того, как приближается точка: извне или изнутри. Пусть точка приближается к S по направлению нормали n. При этом значком i будем обозначать приближение точки B к поверхности изнутри, а значком e приближение точки A

извне. Обе точки A и B на поверхности стремятся к C. Напишем два предельных значения производных потенциала простого слоя для случая внешнего и внутреннего стремления точки к поверхности S:

$$\frac{dV_C^e}{dn} = \lim_{A\to C}\frac{dV_A^e}{dn} = -\lim_{A\to C} f\iint_S \frac{\sigma'\cos(r_A, n)}{r_A^2}\,dS,$$

$$\frac{dV_C^i}{dn} = \lim_{B\to C}\frac{dV_B^i}{dn} = -\lim_{B\to C} f\iint_S \frac{\sigma'\cos(r_B, n)}{r_B^2}\,dS.$$

Чтобы установить характер изменения первых производных при подходе точки к поверхности, выделим на поверхности S бесконечно малую область S_0 с центром в точке C, и интегралы, входящие в предельные выражения для производной, разобьем на два: по области S_0 и по всей остальной поверхности $S-S_0$:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dV_C^e}{dn} &= -\lim_{A\to C} f\iint_{S-S_0}\frac{\sigma'\cos(r_A, n)}{r_A^2}\,dS - \lim_{A\to C} f\iint_{S_0}\frac{\sigma'\cos(r_A, n)}{r_A^2}\,dS,\\ \frac{dV_C^i}{dn} &= -\lim_{B\to C} f\iint_{S-S_0}\frac{\sigma'\cos(r_B, n)}{r_B^2}\,dS - \lim_{B\to C} f\iint_{S_0}\frac{\sigma'\cos(r_B, n)}{r_B^2}\,dS.\end{aligned}\right\} \tag{8.17}$$

Первые слагаемые обоих равенств, для которых область S_0 исключена, имеют одинаковый предел:

$$\lim_{A\to C} f\iint_{S-S_0}\frac{\sigma'\cos(r_A, n)}{r_A^2}\,dS = \lim_{B\to C} f\iint_{S-S_0}\frac{\sigma'\cos(r_B, n)}{r_B^2}\,dS = \iint_{S-S_0}\frac{\sigma'\cos(r_C, n)}{r_C^2}\,dS. \tag{8.18}$$

Рассмотрим теперь, какие значения примут вторые интегралы (8.17). Так как область S_0 бесконечно мала, ее можно рассматривать как часть плоского простого слоя.

Рассмотрим притяжение точки плоским однородным простым слоем. Проекция на ось Z силы притяжения точки A элементом ds (рис. 57) будет

$$\frac{dV_A}{dz} = F_z^A = -f\sigma'\iint_S \frac{\cos(r,z)}{r^2}\,dS.$$

Введем полярные координаты ρ, α в координатной плоскости XY. Элемент поверхности ds выразим в полярных координатах:

$ds = \rho\, d\rho\, d\alpha$. Однако, поскольку для данной точки A $z = \text{const}$ и $z^2 + \rho^2 = r^2$, то

$$\rho\, d\rho = r\, dr.$$

Кроме того, $\cos(r, z) = z/r$. Имея это в виду, проекцию силы F_z^A напишем в виде

$$F_z^A = -f\sigma' z \int\limits_{|z|}^{\sqrt{z^2+a^2}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{dr\, d\alpha}{r^2} = -2\pi f\sigma' \left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{a^2+z^2}}\right) \operatorname{sign} z.$$

При приближении точки A к C второй член в скобках обращается в нуль. Знак силы притяжения определяет знак z. При подходе из области положительных z знак силы сохраняется отрицательным, для области отрицательных z — наоборот:

$$F_z^A = -2\pi f\sigma' \operatorname{sign} z. \qquad (8.19)$$

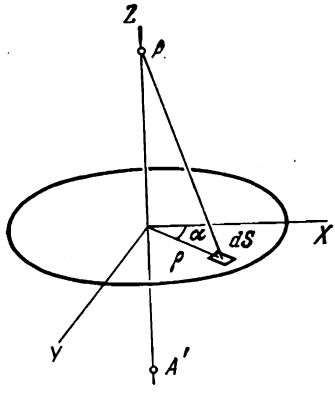


Рис. 57.

Применим теперь соотношения (8.19) к (8.17), кроме того, изменим написание первого слагаемого в соответствии с (8.18) и будем неограниченно уменьшать область S_0:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dV_C^e}{dn} &= -\int\!\!\int_S \frac{\sigma' \cos(r_C, n)}{r_C^2}\, dS - 2\pi f\sigma', \\ \frac{dV_C^i}{dn} &= -\int\!\!\int_S \frac{\sigma' \cos(r_C, n)}{r_C^2}\, dS + 2\pi f\sigma'. \end{aligned}\right\} \qquad (8.20)$$

Вычитая вторую формулу (8.20) из первой, получим

$$\frac{dV_C^e}{dn} - \frac{dV_C^i}{dn} = -4\pi f\sigma'. \qquad (8.21)$$

В случае подхода к поверхности не по нормали, а по произвольному направлению l выражения (8.20) и (8.21), получают добавочный множитель $\cos(l, n)$:

$$\frac{dV_C^e}{dl} - \frac{dV_C^i}{dl} = -4\pi f\sigma' \cos(l, n). \qquad (8.21')$$

Формула (8.21) выведена Ш. Кулоном. Формулы (8.20) известны под названием формул Племели.

§ 5. Потенциал шара на внешнюю точку

Найдем потенциал, развиваемый бесконечно тонким сферическим слоем S на внешнюю точку A (рис. 58). Для этого напишем потенциал притяжения простого слоя для сферы S:

$$V = f\int \frac{\sigma' ds}{r}.$$

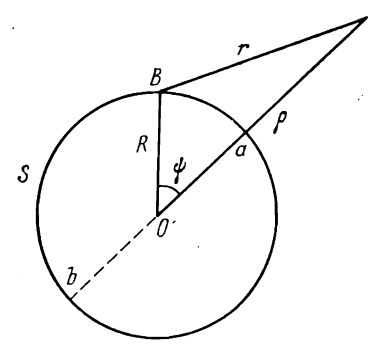


Рис. 58.

Представим далее элемент ds поверхности сферы в сферических координатах. Начало координат расположим в центре шара. Полярное расстояние ψ будем изменять от направления OA до $\psi = \pi$. Долготу λ будем изменять от плоскости чертежа до $\lambda = 2\pi$. Элемент поверхности сферического слоя будет $ds = R^2 \sin\psi\, d\psi\, d\lambda$.

Вводя это значение ds в выражение потенциала сферического слоя, получим

$$V = f\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sigma' R^2 \sin\psi\, d\psi\, d\lambda}{r}.$$

Полагая поверхностную плотность постоянной и интегрируя по λ, получим

$$V = 2\pi f\sigma' \int_0^{\pi} \frac{R^2 \sin\psi\, d\psi}{r}.$$

Для того чтобы проинтегрировать это выражение, перейдем к новой переменной интеграции r. Геометрически очевидно, что

$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\psi.$$

Дифференцируя, получаем

$$r\, dr = R\rho \sin\psi\, d\psi$$

или

$$\frac{R^2 \sin\psi\, d\psi}{r} = \frac{R}{\rho} dr.$$

Тогда

$$V = 2\pi f\sigma' \frac{R}{\rho} \int_{\rho-R}^{\rho+R} dr = 4\pi f\sigma' \frac{R^2}{\rho} = f\frac{m}{\rho}, \qquad (8.22)$$

так как $4\pi R^2$ — поверхность сферы, а $4\pi R^2\sigma' = m$. Пределы интегрирования определяются положением самой близкой (a) и самой удаленной (b) точек сферы. Потенциал притяжения сферического слоя на внешнюю точку равен потенциалу притяжения материальной точки, расположенной в центре сферы и имеющей массу, равную массе сферического слоя.

Чтобы перейти к потенциалу слоя конечной толщины, надо выражение (8.22) проинтегрировать по R в пределах от R_1 до R, заменив предварительно поверхностную плотность $\sigma' = \frac{dm}{ds}$ (ds — элемент поверхности) на объемную плотность $\sigma = \frac{dm}{d\tau}$, где $d\tau = ds\,dR$ — элемент объема. Пользуясь очевидным равенством $\sigma' = \sigma\,dR$, получаем

$$V = \frac{4\pi f\sigma}{\rho}\int_{R_1}^{R} R^2 dR = \frac{4}{3}\pi f\frac{\sigma}{\rho}(R^3 - R_1^3). \tag{8.23}$$

Для полного шара.

$$R_1 = 0 \quad \text{и} \quad V = \frac{4}{3}\pi f\frac{\sigma}{\rho}R^3. \tag{8.24}$$

Вспомнив, что $\frac{4}{3}\pi R^3$ есть объем шара, получаем

$$V = f\frac{M}{\rho}, \tag{8.25}$$

где M — масса однородного шара. Это уравнение означает, что потенциал притяжения материального шара на внешнюю точку равен потенциалу, развиваемому материальной точкой, расположенной в центре шара и имеющей массу, равную массе шара.

§ 6. Потенциал шара на внутреннюю точку

Для нахождения потенциала шара на внутреннюю точку найдем сначала потенциал шарового слоя на внутреннюю точку. Для этого воспользуемся формулой (8.22), только заменим в ней пределы интегрирования, которое будем теперь вести от $R - \rho$ до $R + \rho$ (рис. 59):

$$V = 2\pi f\sigma\frac{R}{\rho}\int_{R-\rho}^{R+\rho} dr = 4\pi f\sigma R. \tag{8.25'}$$

Чтобы распространить, это выражение на слой конечной толщины, надо проинтегрировать (8.25′) от ρ до R:

$$V = 4\pi f\sigma\int_{\rho}^{R} R\,dR = 2\pi f\sigma(R^2 - \rho^2). \tag{8.26}$$

Для нахождения потенциала полного шара на внутреннюю точку разобьем шар на две части S_1 и S_0 так, чтобы исследуемая точка A лежала на сфере, служащей границей между этими частями.

Пусть радиус сферы, на которой лежит точка A, равен ρ. Потенциал шарового слоя S_0 на точку A будет

$$V_0 = 2\pi f\sigma(R^2 - \rho^2)$$

в соответствии с (8.26).

Потенциал шара S_1 на внешнюю точку A будет в соответствии с (8.24)

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi f\sigma\rho^2.$$

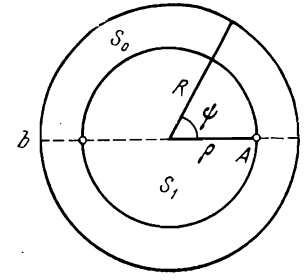


Рис. 59.

Потенциал всего шара на точку A получится как сумма потенциалов шарового слоя S_0 и шара S_1

$$V = V_0 + V_1 = 2\pi f\sigma(R^2 - \rho^2) + \frac{4}{3}\pi f\sigma\rho^2 = \frac{2}{3}\pi f\sigma(3R^2 - \rho^2). \tag{8.27}$$

Для того чтобы получить силы притяжения шаром внешней и внутренней точек, надо полученные выражения потенциала продифференцировать по ρ.

Сила, развиваемая шаром на внешнюю точку,

$$F = -f\frac{M}{\rho^2}. \tag{8.28}$$

и на внутреннюю

$$F_{in} = -\frac{4}{3}\pi f\sigma\rho. \tag{8.29}$$

Имея в виду, что масса шара радиуса ρ есть

$$m = \frac{4}{3}\pi\sigma\rho^3,$$

выражение (8.29) представим в виде

$$F_{in} = -f\frac{m}{\rho^2},$$

т. е. сила притяжения, развиваемая однородным шаром на внутреннюю точку, отстоящую на расстоянии ρ от центра шара ($\rho < R$), равна силе притяжения однородного шара радиуса ρ

или силе притяжения материальной точки, расположенной в центре шара и имеющей массу шара радиуса ρ. Внешний по отношению к притягиваемой точке слой шара на эту точку не действует. Соответственно сила притяжения однородным шаром центра шара равна нулю.

§ 7. Уравнения Лапласа и Пуассона

Оператором Лапласа или вторым дифференциальным оператором называется выражение

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\nabla^2 V. \tag{8.30}$$

Если V — потенциал притяжения, то для точек, расположенных вне притягивающих масс,

$$\nabla^2 V=0. \tag{8.31}$$

Это легко показать дифференцированием. Имея в виду, что

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{X-x}{r},$$

получим

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left[f\int\frac{dm}{r^3}(X-x)\right]=$$

$$=f\int\left\{\frac{1}{r^3}-3\frac{(X-x)}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x}\right\}dm=-f\int\left\{\frac{1}{r^3}-3\frac{(X-x)^2}{r^5}\right\}dm.$$

Аналогично,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=-f\int\left\{\frac{1}{r^3}-3\frac{(Y-y)^2}{r^5}\right\}dm,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-f\int\left\{\frac{1}{r^3}-3\frac{(Z-z)^2}{r^5}\right\}dm.$$

Складывая все три уравнения, получаем $\nabla^2 V=0$, поскольку

$$(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2=r^2.$$

Для того чтобы получить значение оператора Лапласа для потенциала силы тяжести $\nabla^2 W$, надо к выражению (8.31) добавить сумму вторых производных потенциала центробежной силы:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=2\omega^2.$$

Тогда для точки, расположенной вне масс,

$$\nabla^2 W = 2\omega^2. \tag{8.31'}$$

Для точек, расположенных внутри масс, имеет место уравнение Пуассона, и второй дифференциальный оператор обращается потенциалом притяжения в величину, равную $-4\pi f\sigma$. Чтобы это показать, потенциал V притяжения на точку, расположенную внутри масс, разделим на две части (рис. 60): на потенциал V_1 сферы малого радиуса R, внутри которой находится исследуемая точка, и на потенциал V_2 всех остальных масс, расположенных вне сферы. При этом плотность вещества внутри сферы радиуса R будем считать постоянной. В этих предположениях для V_2 имеет место уравнение Лапласа $\nabla^2 V_2 = 0$, поскольку точка является внешней для всех масс, лежащих вне сферы R. Что касается V_1, то для него можно написать выражение потенциала однородного шара на внутреннюю точку

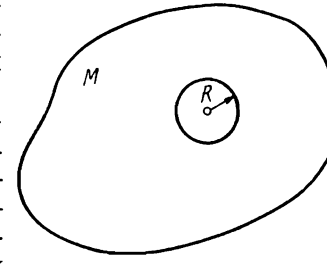


Рис. 60.

$$V_1 = \frac{2}{3}\pi f\sigma(3R^2 - \rho^2).$$

Дифференцируя это равенство дважды по x, y и z, получим

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{4}{3}\pi f\sigma, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{4}{3}\pi f\sigma, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{4}{3}\pi f\sigma.$$

Суммируя эти три выражения, с учетом (8.31) получаем

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \nabla^2 V = -4\pi f\sigma. \tag{8.32}$$

Чтобы получить уравнение для потенциала силы тяжести, к (8.32) надо добавить сумму вторых производных потенциала центробежной силы:

$$\nabla^2 W = -4\pi f\sigma + 2\omega^2. \tag{8.32'}$$

§ 8. Формула Остроградского

Пусть задана замкнутая поверхность S такая, что прямые, параллельные оси Z, пересекаются с поверхностью не более чем в двух точках, и пусть задана непрерывная и имеющая непрерывные производные функция $U(x, y, z)$. Рассмотрим интеграл по объему, охватываемому поверхностью S, от производной

функции U:

$$\iiint_{\tau} \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z}\, d\tau.$$

Так как $d\tau = dz\, d\sigma$, его можно представить через интеграл по плоской области Σ (рис. 61) следующим образом:

$$\iiint_{\tau} \frac{\partial U}{\partial z}\, d\tau = \iint_{\Sigma} ds \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial U}{\partial z}\, dz = \iint_{\Sigma} [U(x, y, z_2) - U(x, y, z_1)]\, ds,$$

или

$$\iiint_{\tau} \frac{\partial U}{\partial z}\, d\tau = \iint_{\Sigma} U(x, y, z_2)\, ds - \iint_{\Sigma} U(x, y, z_1)\, ds. \qquad (8.33)$$

Интеграл по плоской области Σ можно заменить интегралом по поверхности S, пользуясь соотношением

$$ds = dS \cos(n, z),$$

где n — внешняя нормаль к поверхности S.

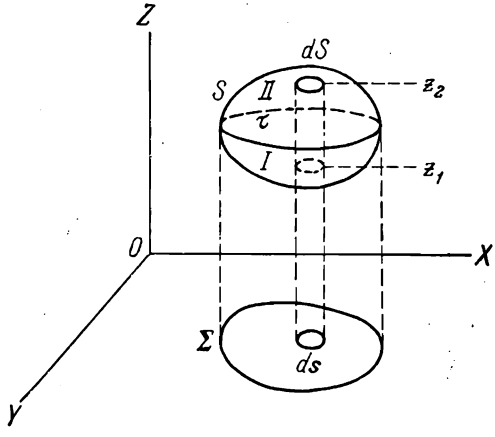


Рис. 61.

Так как поверхность S дважды пересекается прямыми, параллельными оси Z, то разделим ее на две области I и II (см. рис. 61) так, чтобы первое пересечение было в области I и второе в области II.

Тогда интегралы правой части выражения (8.33), взятые по плоской области Σ, выразим через интегралы, взятые по соответствующим областям поверхности S:

$$\iiint_{\tau} \frac{\partial U}{\partial z}\, d\tau = \iint_{II} U(x, y, z) \cos(n, z)\, dS + \iint_{I} U(x, y, z) \cos(n, z)\, dS. \qquad (8.34)$$

Здесь у второго интеграла правой части изменился знак, так как угол, образованный внешней нормалью области I с осью Z, тупой, поэтому $\cos(n, z) < 0$ и $ds = \cos(n, z)\, dS$.

Правая часть выражения (8.34) представляет собой интеграл, взятый по всей поверхности S, т. е.

$$\iiint_{\tau} \frac{\partial U}{\partial z}\, d\tau = \iint_{S} U(x, y, z) \cos(n, z)\, dS. \tag{8.35}$$

Беря производные по x и y, мы получим тем же путем выражения

$$\iiint_{\tau} \frac{\partial U}{\partial x}\, d\tau = \iint_{S} U(x, y, z) \cos(n, x)\, dS, \tag{8.35'}$$

$$\iiint_{\tau} \frac{\partial U}{\partial y}\, d\tau = \iint_{S} U(x, y, z) \cos(n, y)\, dS. \tag{8.35''}$$

Суммируя все равенства (8.35), получим формулу Остроградского

$$\iiint_{\tau} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\right) d\tau = \iint_{S} U\,[\cos(n, x) + \cos(n, y) + \cos(n, z)]\, dS. \tag{8.36}$$

§ 9. Основные преобразования Грина

Рассмотрим интеграл

$$I = \iiint_{\tau} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) d\tau, \tag{8.37}$$

взятый по объему τ, ограниченному поверхностью S. Слагаемые подынтегрального выражения представим в виде

$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right) - U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \tag{8.38}$$

. . . . . .

после чего интеграл (8.37) приведется к следующему виду:

$$I = \iiint_{\tau} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(U\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(U\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right] d\tau -$$

$$- \iiint_{\tau} U\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right] d\tau.$$

Первое из слагаемых правой части преобразуем с помощью формулы Остроградского (8.36) и представим в виде интеграла

по поверхности

$$I = \int\int_S U\left[\frac{\partial V}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(n, y) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(n, z)\right] dS - \\ - \int\int\int_\tau U \nabla^2 V \, d\tau,$$

где

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Так как

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(n, y) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(n, z) = \frac{\partial V}{\partial n},$$

напишем

$$\int\int\int_\tau \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) d\tau = \\ = \int\int_S U \frac{\partial V}{\partial n} dS - \int\int\int_\tau U \nabla^2 V \, d\tau. \quad (8.39)$$

Левая часть равенства (8.39) не меняется от перестановки функций U и V. Поэтому, меняя местами функции U и V (в (8.39)) и производя вычитание, получим формулу Грина

$$\int\int\int_\tau (U \nabla^2 V - V \nabla^2 U) \, d\tau = \int\int_S \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n}\right) dS. \quad (8.40)$$

Применим формулу Грина к функции $V = 1/r$, где r — расстояние от точки M_0, в которой определяется функция V, до текущей точки M. Пусть точка M_0 лежит вне области τ. Тогда $1/r$ удовлетворяет во всех точках уравнению Лапласа, так что

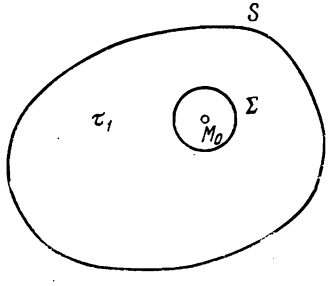


Рис. 62.

$$-\int\int\int_\tau \frac{1}{r} \nabla^2 U \, d\tau + \int\int_S \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n} dS - \\ = \int\int_S U \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS = 0. \quad (8.41)$$

Рассмотрим случай, когда точка M_0 лежит внутри области τ. Функция $V = 1/r$ теперь стремится к бесконечности при $r \to 0$, и формулу (8.40) применять непосредственно нельзя.

Ограничим точку M_0 сферой Σ радиуса ρ (рис. 62). Рассматриваемые функции U и $1/r$ непрерывны в области τ_1, ограниченной поверхностями S и Σ. К этой области и следует теперь применить (8.40)

$$\iiint_{\tau_1}\left[U\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\nabla^2(U)\right]d\tau=$$

$$=\iint_S\left[U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\right]dS+\iint_\Sigma\left[U\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\right]dS,$$

Заметим, что функция $1/r$ в τ_1 удовлетворяет уравнению Лапласа и для сферы Σ $\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}=-\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial r}=\dfrac{1}{r^2}$; поэтому

$$-\iiint_{\tau_1}\frac{\nabla^2U}{r}d\tau=\iint_S\left[U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\right]dS+$$

$$+\iint_\Sigma\frac{U}{r^2}dS-\iint_\Sigma\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}dS. \quad (8.42)$$

Будем стремить радиус сферы Σ к нулю. Тогда интеграл по объему τ_1 будет стремиться к интегралу по объему τ. Последний интеграл правой части равенства (8.42) будет стремиться к нулю. В самом деле, на сфере $r=\rho$ — величина постоянная. Пользуясь теоремой о среднем, получим

$$\lim_{\rho\to0}\iint_\Sigma\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}dS=\lim_{\rho\to0}\frac{1}{\rho}\iint_\Sigma\frac{\partial U}{\partial n}dS=$$

$$=\lim_{\rho\to0}\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{\rho_{ср}}\iint_\Sigma dS=\lim_{\rho\to0}\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{\rho_{ср}}4\pi\rho=0,$$

так как $\dfrac{\partial U}{\partial n}$ по условию ограничена во всех точках области τ.

Преобразуем второй интеграл, распространенный на сферу Σ. Применяя к нему теорему о среднем и помня, что на сфере величина r принимает постоянное значение, равное радиусу сферы ρ, получим

$$\iint_\Sigma\frac{1}{r^2}U\,dS=\frac{1}{\rho^2}\iint_\Sigma U\,dS=\frac{1}{\rho^2}U(M_\rho)\iint_\Sigma dS=$$

$$=\frac{1}{\rho^2}U(M_\rho)4\pi\rho^2=4\pi U(M_\rho).$$

В пределе при $\rho\to0$ $\iint_\Sigma\frac{1}{r^2}U\,dS=4\pi U(M_0)$.

Теперь формулу (8.42) легко написать в виде

$$-\iiint_{\tau}\frac{\nabla^2 U}{r}\,d\tau-\iint_S U\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS+\iint_S\frac{1}{r}\,\frac{\partial U}{\partial n}\,dS=4\pi U(M_0). \tag{8.43}$$

Если точка M_0 лежит на поверхности S, то $\iint_\Sigma \frac{1}{r^2}U\,dS=2\pi U(M_0)$, так как интеграл берется по полусфере и

$$-\iiint_{\tau}\frac{\nabla^2 U}{r}\,d\tau-\iint_S U\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS+\iint_S\frac{1}{r}\,\frac{\partial U}{\partial n}\,dS=2\pi U(M_0). \tag{8.44}$$

Из формул (8.43) и (8.44) получим значение функции U в любой точке M, находящейся внутри области τ или на ее границе, через объемный и поверхностный интегралы

$$U(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial U}{\partial n}-U\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dS-\frac{1}{4\pi}\iiint_{\tau}\frac{1}{r}\,\nabla^2 U\,d\tau \tag{8.45}$$

(внутри области τ),

$$U(M_0)=\frac{1}{2\pi}\iint_S\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial U}{\partial n}-U\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dS-\frac{1}{2\pi}\iiint_{\tau}\frac{1}{r}\,\nabla^2 U\,d\tau \tag{8.46}$$

(на поверхности S).

Эти формулы называются формулами Грина.

Если функция U гармоническая, то $\nabla^2 U=0$, и мы получаем следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
&\iint_S\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial U}{\partial n}-U\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dS=0 \text{ для внешней области,}\\
&\iint_S\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial U}{\partial n}-U\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dS=2\pi U_0 \text{ на поверхности,}\\
&\iint_S\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial U}{\partial n}-U\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dS=4\pi U \text{ для внутренней области.}
\end{aligned}\right\} \tag{8.47}$$

Применим формулу Грина (8.41), (8.45), (8.46) для потенциала масс, распространенных в объеме τ, ограниченном

поверхностью S. Пусть $U=V$ — потенциал притяжения; тогда для точек, расположенных внутри объема τ, ограниченного поверхностью S, имеет место уравнение Пуассона

$$\nabla^2 V=-4\pi\sigma f.$$

Поэтому входящий в формулы Грина интеграл, содержащий $\nabla^2 V$, примет вид

$$\iiint_{\tau}\frac{\nabla^2 V}{r}\,d\tau=-4\pi f\iiint_{\tau}\frac{\sigma\,d\tau}{r}=-4\pi V. \tag{8.48}$$

Вводя значение (8.48) последовательно в (8.41), (8.45) и (8.46), получаем формулы Грина для потенциала:

$$\iint_S\left[\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dS=-4\pi V(M)\text{ для внешней области,} \tag{8.49}$$

$$\iint_S\left[\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dS=0\text{ для внутренней области,} \tag{8.50}$$

$$\iint_S\left[\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dS=-2\pi V(M)\text{ для поверхности } S. \tag{8.51}$$

§ 10. Преобразование формулы Грина по Молоденскому

Как следует из формул (8.49) и (8.51), потенциал V при переходе из внешнего пространства на поверхность S претерпевает разрыв непрерывности и изменяется скачком на величину

$$\frac{1}{2\pi}\iint_S\left[\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dS.$$

Соответственно этому значение потенциала V на поверхности и во внешнем пространстве определяется различными формулами.

Преобразуем формулу (8.49) таким образом, чтобы она описывала поведение потенциала и во внешнем пространстве, и на S. В качестве поверхности S будем рассматривать сферу радиуса R. Формула (8.49), будучи записана в виде

$$V(M)=-\frac{1}{4\pi}\iint_S\left[\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dS, \tag{8.52}$$

справедлива только тогда, когда точка M находится вне сферы S. Для того чтобы сделать ее справедливой и для S, добавим в правую часть разрывную функцию, которая вне сферы S равна нулю, а на сфере $\frac{1}{2}V(M)$. Нетрудно показать, что функция $-\frac{1}{4\pi}\int\int_S V_0 \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS$ как раз и обладает требуемым свойством (V_0 — значение функции на сфере S). В самом деле, эта функция равна нулю вне сферы S по теореме Гаусса и равна $\frac{1}{2}V(M)$ на S. Теперь преобразование Грина (8.52) принимает вид

$$V(M) = -\frac{1}{4\pi}\int\int_S \left[\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - (V - V_0)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dS. \quad (8.53)$$

Преобразуем аналогично и первый член формулы, т. е. вместо

$$-\frac{1}{4\pi}\int\int_S \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}dS$$

введем

$$-\frac{1}{4\pi}\int\int_S \frac{1}{r}\left(\frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial V_0}{\partial n}\right)dS. \quad (8.54)$$

Добавленный член равен

$$\frac{1}{4\pi}\int\int_S \frac{1}{r}\frac{\partial V_0}{\partial n}dS = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial V_0}{\partial n}\int\int_S \frac{1}{r}dS = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial V_0}{\partial n}\frac{4\pi R^2}{\rho} = \frac{R^2}{\rho}\frac{\partial V_0}{\partial n},$$

так как потенциал сферы равен потенциалу ее центра с той же массой. Этот член надо вычесть из (8.53), если первый член подынтегрального выражения записан в виде (8.54). Тогда преобразование Грина приобретет вид

$$V(M) = -\frac{1}{4\pi}\int\int_S \left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial V_0}{\partial n}\right) - (V - V_0)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dS - \frac{R^2}{\rho}\frac{\partial V_0}{\partial \rho}. \quad (8.55)$$

Здесь еще учтено, что $\frac{\partial V_0}{\partial n}$ — значение производной в точке пересечения сферы с радиусом-вектором ρ. Поэтому производная по нормали совпадает с производной по радиусу-вектору:

$$\frac{\partial V_0}{\partial n} = \frac{\partial V_0}{\partial \rho}.$$

§ 11. Оператор Лапласа в ортогональной криволинейной системе координат

Пусть x, y, z — декартовы координаты и пусть $U(x, y, z)$ — некоторая произвольная функция этих координат. Рассмотрим значение оператора Лапласа

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \tag{8.56}$$

в системе криволинейных ортогональных координат u, v, w. Формулы преобразования координат от системы u, v, w к системе x, y, z будут

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(u, v, w), \\ y &= \psi(u, v, w), \\ z &= \chi(u, v, w). \end{aligned}\right\} \tag{8.57}$$

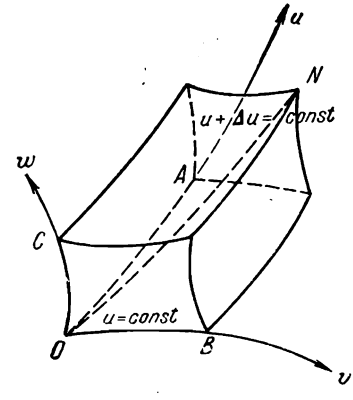


Рис. 63.

Если координатам u, v, w дать малые приращения Δu, Δv, Δw и провести через точки с координатами u и $u+\Delta u$, v и $v+\Delta v$, w и $w+\Delta w$ координатные поверхности $u=\text{const}$, $v=\text{const}$, $w=\text{const}$ и $u+\Delta u=\text{const}$, $v+\Delta v=\text{const}$ и $w+\Delta w=\text{const}$, то последние своим пересечением образуют малый параллелепипед, представленный на рис. 63.

Рассмотрим, как будут изменяться координаты x, y, z при изменении криволинейных координат на Δu, Δv, Δw. Дадим приращение координате u, т. е. перейдем из точки u, v, w в точку $u+\Delta u$, v, w (на рисунке из точки O в точку A). Координаты в точке O

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v, w), \\ y &= \psi(u, v, w), \\ z &= \chi(u, v, w). \end{aligned}$$

Координаты в точке A

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v, w) + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\Delta u, \\ y &= \psi(u, v, w) + \frac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u, \\ z &= \chi(u, v, w) + \frac{\partial \chi}{\partial u}\Delta u. \end{aligned}$$

Длина отрезка OA в ортогональных криволинейных координатах представится как квадратный корень из суммы квадратов приращений координат x, y, z

$$OA = \Delta u \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial u}\right)^2};$$

аналогично получим выражения для двух других сторон параллелепипеда:

$$OB = \Delta v \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial v}\right)^2},$$

$$OC = \Delta w \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial w}\right)^2}.$$

Для краткости обозначим:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial u}\right)^2} &= h_1, \\ \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial v}\right)^2} &= h_2, \\ \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial w}\right)^2} &= h_3. \end{aligned}\right\} \tag{8.58}$$

Тогда для отрезков OA, OB, OC, выраженных в декартовых координатах, получим в криволинейных координатах выражения

$$\left.\begin{aligned} OA &= h_1 \Delta u, \\ OB &= h_2 \Delta v, \\ OC &= h_3 \Delta w. \end{aligned}\right\} \tag{8.59}$$

Элементарное расстояние между произвольными точками при приращении всех координат (на чертеже это дуга ON) будет равно

$$ON = \Delta S = \sqrt{OA^2 + OB^2 + OC^2} = \sqrt{h_1^2 \Delta u^2 + h_2^2 \Delta v^2 + h_3^2 \Delta w^2}. \tag{8.60}$$

Площади граней параллелепипеда будут

$$\left.\begin{aligned} \Delta\sigma_1 &= OB \cdot OC = h_2 h_3 \Delta v \Delta w, \\ \Delta\sigma_2 &= OC \cdot OA = h_3 h_1 \Delta w \Delta u, \\ \Delta\sigma_3 &= OA \cdot OB = h_1 h_2 \Delta u \Delta v, \end{aligned}\right\} \tag{8.61}$$

а объем элементарного параллелепипеда

$$\Delta\tau = OA \cdot OB \cdot OC = h_1 h_2 h_3 \Delta u \Delta v \Delta w. \tag{8.62}$$

Применим к элементарному объему формулу Грина, связывающую объемный интеграл с интегралом по поверхности. Напишем формулу Грина для функций U и V

$$\iiint_{\tau}(U\nabla^2 V - V\nabla^2 U)\,d\tau = -\iint_{\sigma}\left(V\frac{dU}{dn} - U\frac{dV}{dn}\right)d\sigma \qquad (8.63)$$

и положим $V=-1$. Тогда

$$\iiint_{\tau}\nabla^2 U\,d\tau = -\iint_{\sigma}\frac{dU}{dn}\,d\sigma. \qquad (8.64)$$

Для того чтобы выражение (8.64) применить к рассмотренному элементарному объему, надо в него подставить значения $d\tau$ и $d\sigma$ из выражений (8.61) и (8.62), причем в правой части надо ввести все шесть значений $\frac{dU}{dn}d\sigma$, соответствующих всем граням элементарного параллелепипеда. Применим формулу (8.64) к элементарному объему; тогда знак интеграла в левой части можно опустить, а в правой части интеграл заменить суммой выражений $\frac{dU}{dn}d\sigma$ для всех шести граней:

$$\nabla^2 U\,d\tau = \nabla^2 U h_1 h_2 h_3\,\Delta u\,\Delta v\,\Delta w = \sum_{i=1}^{\sigma}\frac{dU}{dn}\,d\sigma_i. \qquad (8.65)$$

Составим выражения вида $\frac{\partial U}{\partial n}d\sigma$ для двух граней рассматриваемого параллелепипеда, а именно для граней, образованных поверхностями

$$\bar{u}=u \quad \text{и} \quad \bar{u}=u+\Delta u.$$

На грани $\bar{u}=u$

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \lim_{n\to 0}\frac{\Delta U}{\Delta n} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta U}{(h_1+\varepsilon)\,\Delta u} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial U}{\partial u}, \qquad (8.66)$$

где ε — бесконечно малая величина.

Введем значения $\frac{\partial U}{\partial n}$ и $\Delta\sigma$ в выражение (8.65)

$$\frac{\partial U}{\partial n}\,d\sigma = \frac{1}{h_1}\frac{\partial U}{\partial u}h_2 h_3 \Delta v\,\Delta w. \qquad (8.67)$$

Обозначим

$$\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial U}{\partial u} = -\lambda(u, v, w). \qquad (8.68)$$

Тогда для грани $\bar{u}=u$

$$\left[\frac{\partial U}{\partial n}\Delta\sigma\right]_u = -\lambda(u, v, w)\,\Delta v\,\Delta w. \qquad (8.69)$$

Для противоположной грани $\bar{u}=u+\Delta u$ в выражении (8.66) знак нормали изменится на обратный, координата u получит

приращение Δu:

$$\left[\frac{\partial U}{\partial n}\,d\sigma\right]_{u+\Delta u} = \lambda(u+\Delta u, v, w)\,\Delta v\,\Delta w = \\ = \lambda(u, v, w)\,\Delta v\,\Delta w + \frac{\partial \lambda}{\partial u}\,\Delta u\,\Delta v\,\Delta w. \quad (8.70)$$

Складывая значения выражения (8.66) для обеих граней, т. е. (8.69) с (8.70), получим

$$\left[\frac{\partial U}{\partial n}\,\Delta\sigma\right]_u + \left[\frac{\partial U}{\partial n}\,\Delta\sigma\right]_{u+\Delta u} = \frac{\partial \lambda}{\partial u}\,\Delta u\,\Delta v\,\Delta w = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial U}{\partial u}\right)\Delta u\,\Delta v\,\Delta w. \quad (8.71)$$

Аналогично для граней v и $v+\Delta v$, w и $w+\Delta w$

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{\partial U}{\partial n}\,\Delta\sigma\right]_v + \left[\frac{\partial U}{\partial n}\,\Delta\sigma\right]_{v+\Delta v} &= \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial U}{\partial v}\right)\Delta u\,\Delta v\,\Delta w,\\ \left[\frac{\partial U}{\partial n}\,\Delta\sigma\right]_w + \left[\frac{\partial U}{\partial n}\,\Delta\sigma\right]_{w+\Delta w} &= \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial U}{\partial w}\right)\Delta u\,\Delta v\,\Delta w.\end{aligned}\right| \quad (8.71')$$

Внося эти значения в уравнение (8.65) под знак суммы, получим

$$\Delta_2 U h_1 h_2 h_3\,\Delta u\,\Delta v\,\Delta w = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial U}{\partial u}\right)\Delta u\,\Delta v\,\Delta w + \\ + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial U}{\partial v}\right)\Delta u\,\Delta v\,\Delta w + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial U}{\partial w}\right)\Delta u\,\Delta v\,\Delta w.$$

Сокращая найденное выражение на $\Delta u\,\Delta v\,\Delta w$ и деля обе части на $h_1 h_2 h_3$, получим значение оператора Лапласа в криволинейных координатах

$$\nabla^2 U = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial U}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial U}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial U}{\partial w}\right)\right\}. \quad (8.72)$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда криволинейные координаты суть цилиндрические:

$$\left.\begin{aligned}x &= r\cos\varphi,\\ y &= r\sin\varphi,\\ z &= z.\end{aligned}\right\} \quad (8.73)$$

Значения операторов h_1, h_2, h_3 будут

$$h_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1,$$

$$h_2^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2,$$

$$h_3^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2 = 1.$$

Вводя их в (8.72), получим

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial U}{\partial z}\right)\right\},$$

или

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Это — известное выражение оператора Лапласа в цилиндрических координатах. Оно легко получается, если в (8.56) ввести значения (8.73).

То же легко проделать для сферических координат:

$$x = r\sin\theta\cos\lambda, \quad y = r\sin\theta\sin\lambda, \quad z = r\cos\theta.$$

Значения коэффициентов h_1, h_2, h_3 будут

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r\sin\theta.$$

Подставляя эти значения в (8.72), получим оператор Лапласа в сферических координатах:

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\lambda^2}\right)\right\}.$$

ГЛАВА 9

СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

При исследовании фигуры Земли по гравитационному полю очень плодотворным оказался метод разложения потенциала в ряд по сферическим функциям. Этот же метод представления потенциала оказался весьма удобным и при изучении фигуры и гравитационного поля Земли по возмущениям в движении искусственных спутников.

Метод позволяет представить гравитационное поле, заданное на сферической Земле, в виде суммы гармоник, причем чем выше порядковый номер гармоники, тем меньше длина ее волны. Задание коэффициентов такого тригонометрического ряда очень удобно для различного рода вычислений, особенно на электронных вычислительных машинах. В этой главе мы рассмотрим некоторые общие свойства сферических функций.

§ 1. Определение сферических функций

Всякий однородный многочлен n-й степени, выраженный в сферических координатах ρ, θ, λ, может быть представлен в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от ρ, а другая — только от сферических координат θ и λ:

$$U_n = \rho^n Y_n(\theta, \lambda), \tag{9.1}$$

где

$$Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{m_1+m_2+m_3=n} C_n^{(m_1 m_2 m_3)} \sin^{m_1+m_2}\theta \cos^{m_3}\theta \cos^{m_1}\lambda \sin^{m_2}\lambda. \tag{9.2}$$

Если выбранный многочлен U_n есть многочлен гармонический, т. е. он удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0,$$

то он называется объемной сферической функцией, а многочлен $Y_n(\theta, \lambda)$, определяемый формулой (9.2), называется поверхностной сферической функцией.

Сферическая функция (9.2) является многочленом относительно синусов и косинусов углов θ и λ.

Множители, содержащие θ, будем в дальнейшем рассматривать как функцию $\cos\theta$, т. е.

$$\sin^{m_1+m_2}\theta\cos^{m_3}\theta = (1-\cos^2\theta)^{\frac{m_1+m_2}{2}}\cos^{m_3}\theta.$$

Другой множитель, содержащий только λ, представим в виде тригонометрического многочлена относительно синусов и косинусов целых кратностей λ.

Выберем теперь элементарные гармонические многочлены так, чтобы каждый из них представлял произведение некоторой функции от $\cos\theta$ на косинус или синус угла $m\lambda$, где m изменяется от 0 до n. Тогда мы получим элементарные сферические функции

$$\left.\begin{aligned} &P_n^0(\cos\theta),\ P_n^{(1)}(\cos\theta)\cos\lambda,\ P_n^2(\cos\theta)\cos 2\lambda,\ \ldots \\ &\qquad\qquad \ldots,\ P_n^{(n)}(\cos\theta)\cos n\lambda; \\ &P_n^{(1)}(\cos\theta)\sin\lambda,\ \ldots,\ P_n^{(n)}(\cos\theta)\sin n\lambda. \end{aligned}\right\} \quad (9.3)$$

Всякая сферическая функция порядка n может быть представлена в виде

$$Y_n(\theta,\lambda) = \sum_{m=0}^{n} P_n^m(\cos\theta)(A_{nm}\cos m\lambda + B_{nm}\sin m\lambda), \quad (9.4)$$

где A_{nm} и B_{nm} — произвольные постоянные.

§ 2. Дифференциальные уравнения для сферических функций. Многочлены Лежандра

Гармонический многочлен U_n удовлетворяет уравнению Лапласа, которое в сферических координатах имеет вид (гл. 8, § 11)

$$\frac{1}{\rho^2}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial U}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\lambda^2}\right\} = 0. \quad (9.5)$$

Будем искать U в виде

$$U = f(\rho)\,Y(\theta,\lambda).$$

Подстановка этого выражения в (9.5) даст

$$\frac{1}{\rho^2}Y(\theta,\lambda)\frac{d}{d\rho}\left[\rho^2\frac{df(\rho)}{d\rho}\right] + \frac{f(\rho)}{\rho^2}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\lambda)}{\partial\theta}\right] + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta,\lambda)}{\partial\lambda^2}\right\} = 0.$$

Мы получили равенство, в котором левая часть есть функция только ρ, а правая — только θ и λ. Это может иметь место лишь

в случае, когда обе части равенства равны одной и той же постоянной. Таким образом, уравнение (9.5) распалось на два дифференциальных уравнения:

$$\frac{1}{f(\rho)}\frac{d}{d\rho}[\rho^2 f'(\rho)] = k \tag{9.6}$$

и

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\lambda^2}+kY=0. \tag{9.7}$$

Так как U определяется формулой (9.1), то функция $f(\rho)=\rho^n$. Подставив это значение в (9.6), получим

$$\frac{1}{\rho^n}\frac{d}{d\rho}(\rho^2 n\rho^{n-1}) = k$$

или

$$n(n+1)\rho^n = k\rho^n,$$

откуда

$$k = n(n+1).$$

Введя значение k в (9.7), мы получим уравнение, которому должна удовлетворять всякая сферическая функция n-го порядка:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_n}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\lambda^2}+n(n+1)Y_n=0. \tag{9.8}$$

Сферическая функция в общем виде есть линейная комбинация одночленов, каждый из которых является произведением функции только от θ на функцию только от λ, поэтому будем искать частное решение (9.8) в виде

$$P_n(\theta)L_n(\lambda).$$

Это решение введем в (9.8)

$$\frac{L_n}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial P_n}{\partial\theta}\right)+\frac{P_n}{\sin^2\theta}\frac{d^2 L_n}{d\lambda^2}+n(n+1)P_n L_n=0.$$

Это уравнение распадается на два, так как, разделив переменные, мы получаем равенство, в котором левая часть есть функция только θ, а правая — только λ. Поэтому обе части можно приравнять одной и той же постоянной l. Получим уравнение

$$\frac{d^2 L_n}{d\lambda^2} = -lL_n, \tag{9.9}$$

$$\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP_n}{d\theta}\right)+[n(n+1)\sin^2\theta - l]P_n = 0. \tag{9.10}$$

Постоянная l должна быть квадратом целого числа, так как иначе функция L_n не будет линейной комбинацией косинуса и синуса.

Положим $l=m^2$. Тогда L_n представится выражениями вида $\cos m\lambda$ и $\sin m\lambda$.

Множитель P_n определяется уравнением (9.10), в котором l заменено через m^2. Кроме того, перейдем от $\sin\theta$ к $\cos\theta$ и обозначим $\cos\theta=x$:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right]+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P=0. \tag{9.11}$$

Это основное уравнение для сферических функций. Частные решения этого уравнения и будут сферическими функциями.

Будем искать решение уравнения (9.11). Для этого рассмотрим вспомогательную функцию

$$y=(x^2-1)^p, \tag{9.12}$$

где p — целое положительное число. Беря логарифмические производные от обеих частей равенства (9.12), получим

$$\frac{y'}{y}=\frac{2px}{x^2-1}$$

или

$$(1-x^2)\frac{dy}{dx}+2pxy=0. \tag{9.13}$$

Значит, функция (9.12) удовлетворяет дифференциальному уравнению (9.13).

Продифференцируем это уравнение $k+1$ раз с помощью формулы Лейбница для вычисления высших производных:

$$\frac{d^n(UV)}{dx^n}=\sum_{s=0}^{n}C_n^s\frac{d^{n-s}U}{dx^{n-s}}\frac{d^sV}{dx^s}, \tag{9.14}$$

где

$$C_n^s=\frac{n!}{(n-s)!\,s!}.$$

Получим

$$(1-x^2)\frac{d^{k+2}y}{dx^{k+2}}-(2k-2p+2)x\frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}}+(2p-k)(k+1)\frac{d^ky}{dx^k}=0. \tag{9.15}$$

Рассмотрим функцию

$$z=\frac{d^k(x^2-1)^p}{dx^k}\qquad(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2p). \tag{9.16}$$

Эта функция удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$(1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2}-(2k-2p+2)x\frac{dz}{dx}+(2p-k)(k+1)z=0. \quad (9.17)$$

Это легко показать, если в (9.17) ввести (9.16), после чего получится уравнение (9.15). Теперь перепишем уравнение (9.11), обозначив искомую функцию через z. Получим

$$(1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2}-2x\frac{dz}{dx}+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]z=0. \quad (9.17')$$

При $m=0$ получим *уравнение Лежандра*

$$(1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2}-2x\frac{dz}{dx}+n(n+1)z=0. \quad (9.18)$$

Оно совпадает с уравнением (9.17) при $p=k=n$. Значит, частное решение (9.16) является также при $p=k=n$ частным решением уравнения (9.18). Это решение

$$z=C\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}. \quad (9.19)$$

Здесь C — произвольная постоянная. Положим $C=\frac{1}{2^n n!}$. Возвращаясь к уравнению (9.11), мы видим, что решение (9.19) является для случая $m=0$ также и его решением, так что

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}. \quad (9.20)$$

Полученная таким образом функция называется *многочленом Лежандра.*

Формула (9.20), определяющая многочлены Лежандра и позволяющая выполнить непосредственные вычисления их для любых значений n, называется *формулой Родрига.*

Полагая $n=0$, 1, 2, 3 и 4, находим многочлены Лежандра 0, 1, 2, 3 и 4 порядков:

$$P_0(x)=1,$$

$$P_1(x)=x=\cos\theta,$$

$$P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(3\cos 2\theta+1),$$

$$P_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x=\frac{1}{8}(5\cos 3\theta+3\cos\theta),$$

$$P_4(x)=\frac{35}{8}x^4-\frac{15}{4}x^2+3=\frac{1}{64}(35\cos 4\theta+20\cos 2\theta+9).$$

Рассмотрим уравнение (9.11) для случая $m \neq 0$. Введем подстановку $z = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \zeta$. Получим уравнение

$$(1 - x^2)\frac{d^2\zeta}{dx} - 2(m + 1)\, x \frac{d\zeta}{dx} + [n(n + 1) - m(m + 1)]\, \zeta = 0. \quad (9.21)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (9.17) при $p = n$ и $k = n + m$, поэтому уравнение заведомо имеет частное решение

$$\zeta = C \frac{d^{n+m}(x^2 - 1)^n}{dx^{n+m}},$$

а значит, уравнение (9.11′) имеет решение

$$z = C(1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}(x^2 - 1)^n}{dx^{n+m}},$$

которое мы получаем переходом от ζ к z.

Выберем постоянную так же, как в формуле (9.19), и введем обозначения, принятые ранее. Тогда получим

$$P_n^m(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}. \quad (9.22)$$

Функции P_n^m, определенные уравнениями (9.22), называются *присоединенными функциями Лежандра.*

Полагая $n = 2$, $n = 3$ и $m = 1, 2, 3$, получим значения присоединенных функций в явном виде.

Присоединенные функции Лежандра первых порядков имеют следующий вид:

$$P_1^1(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \sin\theta,$$

$$P_2^1(x) = 3(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} x = \frac{3}{2}\sin 2\theta,$$

$$P_2^2(x) = 3(1 - x^2) = \frac{3}{2}(1 - \cos 2\theta),$$

$$P_3^1(x) = \frac{3}{2}(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}(5x^2 - 1) = \frac{3}{8}(\sin\theta + 5\sin 3\theta),$$

$$P_3^2(x) = 15(1 - x^2)\, x = \frac{15}{4}(\cos\theta - \cos 3\theta),$$

$$P_3^3(x) = 15(1 - x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{15}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta).$$

Многочлен Лежандра является частным решением линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка (9.18).

Согласно теории линейных дифференциальных уравнений, если известно частное решение его $P_n(x)$, то можно при помощи квадратур найти второе частное решение $Q_n(x)$, линейно независимое от первого. Общее решение будет

$$z = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x).$$

Решение $Q_n(x)$ может быть представлено в виде

$$Q_n(x) = P_n(x) \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{(1-x^2) P_n^2(x)}. \tag{9.23}$$

Функции $Q_n(x)$ называются *функциями Лежандра второго рода*. Они являются трансцендентными функциями и могут быть вычислены по формуле (9.23). Выпишем функции Лежандра второго рода для $n = 0, 1, 2, 3$:

$$Q_0 = \operatorname{arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x},$$

$$Q_1 = P_1(x) Q_0(x) - 1 = \frac{1}{2} x \ln \frac{x+1}{x-1} - 1,$$

$$Q_2 = P_2(x) Q_0(x) - \frac{3}{2} x,$$

$$Q_3 = P_3(x) Q_0(x) - \frac{5}{2} x^2 + \frac{2}{3}.$$

Аналогично присоединенная функция Лежандра $P_n^m(x)$ есть частное решение уравнения (9.11). Поэтому второе, линейно независимое решение этого уравнения можно найти при помощи квадратур:

$$Q_n^m(x) = P_n^m(x) \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{(1-x^2) \left[P_n^m(x)\right]^2}.$$

Функции $Q_n^m(x)$ называются *присоединенными функциями Лежандра второго рода.*

Общее решение уравнения (9.11) будет

$$z = C_1 P_n^m(x) + C_2 Q_n^m(x).$$

§ 3. Некоторые свойства многочленов Лежандра

1. Многочлены Лежандра являются функциями, ортогональными в области $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Функции $f_i(x)$, где $i = 0, 1, 2, \ldots$, называются ортогональными на отрезке $[a, b]$, если выполня-

ются условия

$$\int_a^b f_n(x) f_m(x)\,dx = 0 \quad \text{при} \quad n \neq m. \tag{9.24}$$

Напишем условие (9.24) для многочленов Лежандра, заданных в виде (9.20). Область задания определим в соответствии с пределами изменения косинуса от -1 до $+1$:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x)\,dx = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{+1} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} P_m(x)\,dx.$$

Проинтегрируем по частям, полагая $P_m(x) = u$, $\frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}\,dx = dv$:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \left\{ \left[\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}} P_m(x) \right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} \frac{dP_m(x)}{dx} \cdot \frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\,dx \right\}.$$

Функция $(x^2-1)^n$ имеет корнями кратности n значения $+1$ и -1, $(n-1)$-я производная функции имеет те же корни; поэтому первый член квадратной скобки обращается в нуль. Оставшийся с правой стороны интеграл снова берем по частям, причем получаемый при этом неинтегральный член опять обратится в нуль, а под интегралом повысится порядок производной первого сомножителя и понизится — второго:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x)\,dx = -\frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{+1} \frac{d^2 P_m(x)}{dx^2} \cdot \frac{d^{n-2}(x^2-1)^n}{dx^{n-2}}\,dx.$$

Продолжаем процесс интегрирования по частям до тех пор, пока не получим под интегралом $(m+1)$-ю производную от $P_m(x)$. Но так как $P_m(x)$ есть многочлен m-й степени, то его $(m+1)$-я производная обращается в нуль. Поэтому обращается в нуль и все подынтегральное выражение, а стало быть, и сам интеграл, чем и доказывается сформулированное положение.

2. Интеграл от квадрата многочлена Лежандра порядка n, взятый в пределах от -1 до $+1$, равен

$$\int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2\,dx = \frac{2}{2n+1}. \tag{9.25}$$

Чтобы это показать, в левую часть выражения (9.25) введем значение $P_n(x)$ из (9.20) и произведем интегрирование по частям:

$$\int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2\,dx = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{+1} P_n(x)\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2^n n!}\left\{\left[P_n(x)\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1}\frac{dP_n(x)}{dx}\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\,dx\right\}.$$

Здесь, как уже показывалось, первый член фигурной скобки в результате подстановки обращается в нуль. Продолжая процесс интегрирования по частям до получения производной порядка n от $P_n(x)$, получим

$$\int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2\,dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{+1}\frac{d^n P_n(x)}{dx^n}(x^2-1)^n\,dx. \qquad (9.26)$$

Вычислим отдельно стоящий под интегралом множитель $\frac{d^n P_n(x)}{dx^n}$, пользуясь для $P_n(x)$ выражением (9.20):

$$\frac{d^n P_n(x)}{dx^n} = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{dx^{2n}}.$$

Это есть производная порядка $2n$ от многочлена с наивысшей степенью $2n$ и с коэффициентом при x^{2n}, равным единице. Дифференцируя $2n$ раз многочлен степени $2n$ с коэффициентом при наивысшей степени, равным единице, получим произведение

$$2n(2n-1)(2n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1 = (2n)!.$$

Поэтому

$$\frac{d^n P_n(x)}{dx^n} = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{dx^{2n}} = \frac{1}{2^n n!}(2n)!.$$

Вводя это в (9.26), получим

$$\int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2\,dx = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}(2n)!\int_{-1}^{+1}(x^2-1)^n\,dx =$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^n\,dx. \qquad (9.27)$$

Рассмотрим отдельно входящий в (9.27) интеграл

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^n\,dx.$$

Он берется методом понижения степени после замены переменных $x = \sin\varphi$

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^n\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\varphi\,d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\varphi\,d\varphi.$$

Но

$$\int \cos^m\varphi\,d\varphi = \frac{1}{m}\cos^{m-1}\varphi\sin\varphi + \frac{m-1}{m}\int \cos^{m-2}\varphi\,d\varphi,$$

так что

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^n\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\varphi\,d\varphi =$$

$$= \left[\frac{2}{2n+1}\cos^{2n}\varphi\sin\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2n}{2n+1}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1}\varphi\,d\varphi.$$

Подстановка пределов обращает первый член правой части в нуль, так что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\varphi\,d\varphi = \frac{2n}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1}\varphi\,d\varphi.$$

Продолжая этот процесс, после n-кратного применения формулы понижения получаем

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^n\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{2n}{2n+1}\frac{(2n-2)\ldots 2}{(2n-1)\ldots 3}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\varphi = \frac{2n(2n-2)\ldots 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3}\cdot 2.$$

Вводя это значение в (9.27) и выполняя соответствующие сокращения, получим

$$\int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2\,dx = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{2n(2n-2)\ldots 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3}\cdot 3.$$

Умножив числитель и знаменатель на $2n(2n-2)\dots 2 = 2^n n(n-1)\dots 2\cdot 1 = 2^n n!$, получаем искомое

$$\int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2\,dx = \frac{2\cdot(2n)!\,2^n n!\,2^n n!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)\,2n(2n-1)\dots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{2}{2n+1}.$$

3. Коэффициент у высшей степени x многочлена Лежандра равен $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$. Этот коэффициент получим из (9.20), выполняя дифференцирование функции $(x^2-1)^n$.

При n-кратном дифференцировании исчезнут все члены степени меньше n, а коэффициент при x^n будет

$$2n(2n-1)(2n-2)\dots[2n-(n-1)].$$

Тогда коэффициент при высшей степени полинома будет

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)\dots(n+1)}{2^n n!}.$$

Умножив все это на $n!$, получим

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)\dots}{2^n(n!)^2} = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}. \tag{9.28}$$

4. Многочлены Лежандра при аргументах $+1$ и -1 равны 1 и $(-1)^n$.

Функцию $(x^2-1)^n$, входящую в (9.20), представим в виде произведения $(x-1)^n(x+1)^n$. Теперь производную этого произведения представим формулой Лейбница

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \frac{n}{1!}u^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v^{(2)} + \dots + uv^{(n)}.$$

Тогда получим

$$\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} = \left[\frac{d^n}{dx^n}(x-1)^n\right](x+1)^n + \frac{n^2}{1!}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x-1)^n\right](x+1)^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!}\left[\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x-1)^n\right](x+1)^{n-2} + \dots + \frac{(n!)^2}{n!}(x-1)^n. \tag{9.29}$$

Рассмотрим производные в квадратных скобках:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^n}{dx^n}(x-1)^n = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1 = n!,\\
&\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x-1)^n = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot(x-1),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x-1)^n = n(n-1)(n-2)\ldots(k+1)(x-1)^k.
\end{aligned}\right\} \quad (9.30)$$

Равенство (9.29) после введения в него (9.30) представим в виде

$$\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} = n!(x+1)^n + \frac{n(n-1)\ldots 2\cdot n^2}{1!}(x-1)(x+1)^{n-1} +$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots 3n^2(n-1)^2}{2!}(x-1)^2(x+1)^{n-2} + \ldots + n!(x-1)^n.$$

Чтобы получить формулу (9.20), умножим обе части равенства на $\frac{1}{2^n n!}$:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} = \frac{n!}{2^n n!}(x+1)^n +$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots 2\cdot n^2}{2^n n!}(x-1)(x+1)^{n-1} +$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots 3\cdot n^2(n-1)^2}{2!2^n n!}(x-1)^2(x+1)^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n!}{2^n n!}(x-1)^n.$$

Полагая теперь в этом выражении $x=1$ и $x=-1$, получим

$$P_n(1) = 1 \quad \text{и} \quad P_n(-1) = (-1)^n.$$

§ 4. Рекуррентная формула для многочленов Лежандра

Всякий многочлен n-й степени относительно x может быть представлен в виде линейной функции от полиномов Лежандра порядка не выше n. Поэтому многочлен $(n+1)$-й степени относительно x, получающийся при умножении полинома $P_n(x)$ на x, можно представить в виде

$$xP_n(x) = c_0P_{n+1}(x) + c_1P_n(x) + c_2P_{n-1}(x) + c_3P_{n-2}(x) + \ldots, \quad (9.31)$$

где $c_0, c_1, c_2, \ldots$ — постоянные коэффициенты.

Покажем сначала, что все коэффициенты, начиная с c_3, обращаются в нули. Для этого умножим обе части равенства на $P_{n-2}(x)$ и возьмем интеграл в пределах от -1 до $+1$. Тогда на основании свойства ортогональности получим

$$\int_{-1}^{+1} xP_{n-2}(x)\,P_n(x)\,dx = 0 = c_3 \int_{-1}^{+1} P_{n-2}(x)\,P_{n-2}(x)\,dx = c_3 \frac{2}{2n+1},$$

т. е. $c_3 = 0$. Аналогично, умножая на P_{n-3}, получим $c_4 = 0$ и так далее.

Покажем, что коэффициент c_1 также равен нулю. Для этого обратим внимание на то, что многочлен Лежандра всегда имеет только степени четности порядка многочлена n. Поэтому четность многочлена $c_1P_n(x)$ совпадает с четностью n, тогда как четность $xP_n(x)$ равна четности $n+1$. В этом случае равенство возможно лишь при условии, что $c_1 = 0$.

Наивысшая степень x в произведении $xP_n(x)$ равна $(n+1)$. Член, содержащий такую же степень x в правой части равенства (9.31), может быть лишь в слагаемом, содержащем $P_{n+1}(x)$. Равенство (9.31) имеет место только при условии, что коэффициенты при высших степенях в левой части и члена $P_{n+1}(x)$ в правой равны

$$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} = c_0 \frac{[2(n+1)]!}{2^{n+1}[(n+1)!]^2};$$

отсюда

$$c_0 = \frac{2(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n+1}{2n+1}.$$

Для того чтобы найти значение c_2, положим в (9.31) $x = 1$. Тогда на основании свойства $P_n(1) = 1$ получим

$$1 = c_0 + c_2 \quad \text{и} \quad c_2 = 1 - c_0 = 1 - \frac{n+1}{2n+1} = \frac{n}{2n+1}.$$

Найденные значения коэффициентов подставим в формулу (9.31)

$$xP_n(x) = \frac{n+1}{2n+1} P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}(x)$$

или

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x). \qquad (9.32)$$

Это соотношение позволяет построить многочлен порядка $n+1$ по двум полиномам предыдущих порядков.

§ 5. Разложение функции $1/r$ в ряд по многочленам Лежандра

Потенциал в точке M с координатами x, y, z, возбуждаемый единичной массой, сосредоточенной в точке P (рис. 64) с координатами X, Y, Z, определится как

$$U(r) = \frac{1}{r} = \frac{1}{[(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2]^{1/2}}, \tag{9.33}$$

причем расстояние между точками M и P можно представить

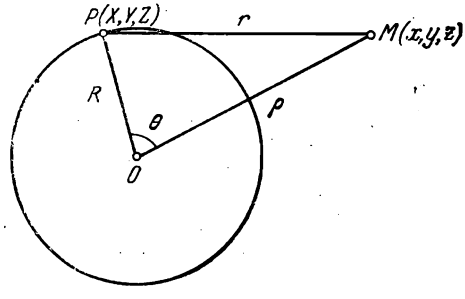


Рис. 64.

как функцию угла θ и расстояния ρ:

$$r = \sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\theta}, \tag{9.34}$$

или, в случае сферы единичного радиуса $R = 1$,

$$r = \sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho\cos\theta}. \tag{9.34'}$$

Тогда потенциал (9.33) представим как

$$U(\rho) = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho\cos\theta}}. \tag{9.35}$$

Выражение (9.35) разложим в ряд Маклорена:

$$U(\rho) = U(0) + \frac{\rho}{1!}U'(0) + \frac{\rho^2}{2!}U''(0) + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}U^{(n)}(0).$$

Найдем значения производных от функции U:

$$U(0) = 1,$$

$$U'(0) = -\left[\frac{\rho - \cos\theta}{(1 + \rho^2 - 2\rho\cos\theta)^{3/2}}\right]_{\rho=0} = \cos\theta,$$

$$U''(0) = \left[\frac{3(\rho - \cos\theta)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right]_{\rho=0} = 3\cos^2\theta - 1,$$

$$U'''(0) = \left[\frac{15(\rho - \cos\theta)^3}{r^7} + \frac{9(\rho - \cos\theta)}{r^5}\right]_{\rho=0} = 3(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$$

и т. д. Вводя эти значения в ряд Маклорена, получим

$$U(\rho) = \frac{1}{r} = 1 + \rho\cos\theta + \rho^2\frac{3\cos^2\theta - 1}{2} + \rho^3\frac{5\cos^3\theta - 3\cos\theta}{2} + \ldots \tag{9.36}$$

Мы получили разложение, члены которого пропорциональны полиномам Лежандра, так что (9.36) можно записать в следующем виде:

$$U(\rho) = \frac{1}{r} = P_0(\cos\theta) + \rho P_1(\cos\theta) + \rho^2 P_2(\cos\theta) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\rho^n P_n(\cos\theta). \tag{9.37}$$

Область сходимости этого ряда определяется областью сходимости ряда Маклорена $\rho < 1$. В случае сферы радиуса $R \neq 1$ область сходимости $\rho < R$.

Если $\rho > 1$, то сходящимся будет ряд обратных величин $\frac{1}{\rho}$. Тогда в ряд (9.37) может быть разложено выражение

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\rho^2} - 2\frac{1}{\rho}\cos\theta}} = \frac{\rho}{r}.$$

Для него мы можем написать разложение (9.37), заменив ρ на $1/\rho$. Это не изменит результата, так как ρ не входит в производные от функции $1/r$. Отличие разложения будет лишь в том, что все множители ρ разложения (9.37) должны быть заменены множителями $1/\rho$ и перед разложением нужно поставить общий множитель $1/\rho$, так что

$$U(\rho) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\rho}\left[P_0(\cos\theta) + \frac{1}{\rho}P_1(\cos\theta) + \frac{1}{\rho^2}P_2(\cos\theta) + \ldots\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\rho^{n+1}}P_n(\cos\theta). \tag{9.38}$$

Если $R \neq 1$, то (9.35) можно написать в виде

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \rho^2 - 2\rho R\cos\theta}} = \frac{1}{\rho\sqrt{1 + \frac{R^2}{\rho^2} - 2\frac{R}{\rho}\cos\theta}}$$

и разложение (9.37) представить следующей формулой:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{\rho^2} - 2\frac{R}{\rho}\cos\theta}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{R^n}{\rho^{n+1}}P_n(\cos\theta). \tag{9.39}$$

§ 6. Некоторые свойства присоединенных функций Лежандра

Присоединенные функции Лежандра ортогональны на отрезке $[-1, +1]$, т. е.

$$\int_{-1}^{+1} P_k^m(x)\, P_n^m(x)\, dx = 0 \quad \text{при} \quad k \neq n. \tag{9.40}$$

Для доказательства этого свойства следует написать уравнение (9.11) для $P_k^m(x)$ и $P_n^m(x)$, умножить первое из полученных уравнений на $P_n^m(x)$ и второе на $P_k^m(x)$ и вычесть одно из другого. Полученную разность проинтегрировать в интервале -1, $+1$. При подстановке пределов исчезают члены, содержащие $(1-x^2)$, и получается равенство (9.40). Для присоединенных функций Лежандра имеет место равенство

$$\int_{-1}^{+1} \left[P_n^m(x)\right]^2 dx = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!} \tag{9.41}$$

или, если $x = \cos\theta$,

$$\int_0^{2\pi} \left[P_n^m(\cos\theta)\right]^2 d\cos\theta = \frac{2\pi}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$$

Для доказательства этого свойства воспользуемся формулой (9.22), написанной для присоединенной функции $(m+1)$-го порядка:

$$P_n^{m+1}(x) = (1-x^2)^{\frac{m+1}{2}}\frac{d^{m+1}P_n(x)}{dx^{m+1}},$$

которую представим в следующем виде:

$$P_n^{m+1}(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m P_n(x)}{dx^m}\right] + \\ + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}xm(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}\frac{d^m P_n(x)}{dx^m} = \\ = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{dP_n^m(x)}{dx} + mx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}P_n^m(x).$$

Возведем это равенство в квадрат и проинтегрируем от -1 до $+1$:

$$\int_{-1}^{+1}\left[P_n^{m+1}(x)\right]^2 dx = \int_{-1}^{+1}(1-x^2)\left[\frac{dP_n^m(x)}{dx}\right]^2 dx + \\ + \int_{-1}^{+1} 2mxP_n^m(x)\frac{dP_n^m(x)}{dx}\,dx + \int_{-1}^{+1}\frac{m^2x^2}{1-x^2}\left[P_n^m(x)\right]^2 dx. \tag{9.42}$$

Берем по частям первый и второй интегралы правой части:

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)\left[\frac{dP_n^m(x)}{dx}\right]^2 dx = \left[(1-x^2)P_n^m(x)\frac{dP_n^m(x)}{dx}\right]_{-1}^{+1} - \\ - \int_{-1}^{+1} P_n^m(x)\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n^m(x)}{dx}\right] dx.$$

$$\int_{-1}^{+1} 2mxP_n^m(x)\frac{dP_n^m(x)}{dx}dx = \int_{-1}^{+1} mx\frac{d}{dx}\left[P_n^m(x)\right]^2 dx = \\ = \{mx\left[P_n^m(x)\right]^2\}_{-1}^{+1} - m\int_{-1}^{+1}\left[P_n^m(x)\right]^2 dx.$$

При подстановке пределов первые члены правых частей написанных равенств обращаются в нули, так как P_n^m содержит множитель $(1-x^2)$ (см. (9.22)). Поэтому запишем (9.41) в следующем виде:

$$\int_{-1}^{+1}\left[P_n^{(m+1)}(x)\right]^2 dx = -\int_{-1}^{+1} P_n^m(x)\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n^m(x)}{dx}\right]dx - \\ - m\int_{-1}^{+1}\left[P_n^m(x)\right]^2 dx + \int_{-1}^{+1}\frac{m^2x^2}{1-x^2}\left[P_n^m(x)\right]^2 dx.$$

Преобразуем первый интеграл, имея в виду уравнение (9.11):

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n^m(x)}{dx}\right] = (1-x^2)\frac{d^2P_n^m(x)}{dx^2} - 2x\frac{dP_n^m(x)}{dx} = \\ = -\left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P_n^m(x).$$

Тогда будем иметь

$$\int_{-1}^{+1}\left[P_n^{m+1}(x)\right]^2 dx = \int_{-1}^{+1}\left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]\left[P_n^m(x)\right]^2 dx - \\ - m\int_{-1}^{+1}\left[P_n^m(x)\right]^2 dx + \int_{-1}^{+1}\frac{m^2x^2}{1-x^2}\left[P_n^m(x)\right]^2 dx = [n(n+1) - \\ - m(m+1)]\int_{-1}^{+1}\left[P_n^m(x)\right]^2 dx = (n-m)(n+m+1)\int_{-1}^{+1}\left[P_n^m(x)\right]^2 dx.$$

Эту формулу применим к $P_n^m(x)$:

$$\int_{-1}^{+1} [P_n^m(x)]^2\,dx = (n-m+1)(n+m)\int_{-1}^{+1} [P_n^{m-1}(x)]^2 dx.$$

Процесс понижения порядка присоединенного многочлена продолжаем до получения справа полинома $P_n^0(x) = P_n(x)$. Тогда

$$\int_{-1}^{+1} [P_n^m(x)]^2\,dx = (n-m+1)(n-m+2)(n-m+3)\ldots$$

$$\ldots n(n+m)(n+m-1)(n+m-2)\ldots(n+1)\int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2\,dx$$

или, имея в виду (9.25),

$$\int_{-1}^{+1} [P_n^m(x)]^2\,dx = (n+m)(n+m-1)\ldots(n-m+1)\times$$

$$\times\frac{(n-m)(n-m-1)\ldots 2\cdot 1}{(n-m)(n-m-1)\ldots 2\cdot 1}\cdot\frac{2}{2n+1} = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$$

§ 7. Интегральные соотношения для сферических функций

Пусть даны две функции U и V, гармонические внутри области, ограниченной поверхностью S. Тогда имеет место формула Грина

$$\int\int_S \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right) dS = 0 \tag{9.43}$$

(n — направление внутренней нормали к поверхности S).

Выберем в качестве поверхности сферу S радиуса R с центром в начале координат. В качестве функций U и V возьмем

$$\left.\begin{aligned} U &= \rho^n Y_n(\theta,\lambda),\\ V &= \rho^m Y_m(\theta,\lambda).\end{aligned}\right\} \tag{9.44}$$

Внесем значения U и V в (9.43), имея в виду, что $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial R}$ и $dS = R^2\sin\theta\,d\theta\,d\lambda$. Тогда

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} [-\rho^n Y_n(\theta,\lambda)\,m\rho^{m-1}Y_m(\theta,\lambda) +$$

$$+\rho^m Y_m(\theta,\lambda)\,n\rho^{n-1}Y_n(\theta,\lambda)]\,\rho^2\sin\theta\,d\theta\,d\lambda =$$

$$= \rho^{m+n+1}(n-m)\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_n(\theta,\lambda)\,Y_m(\theta,\lambda)\sin\theta\,d\theta\,d\lambda = 0$$

или

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_n(\theta, \lambda)\, Y_m(\theta, \lambda) \sin\theta\, d\theta\, d\lambda = 0. \tag{9.45}$$

Это соотношение выражает ортогональность функций Y на поверхности сферы.

Применим теперь преобразование Грина (8.41) к функции V, заданной соотношением (9.44), и к функции $1/l$, где $l = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\psi}$. Геометрический смысл ρ, ρ', ψ и их связь с ранее введенными величинами r, R ясны из рис. 65.

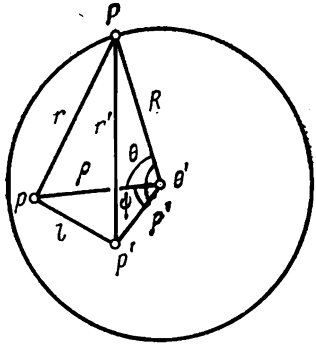


Рис. 65.

Для точки p с координатами ρ, θ, λ мы имели разложение

$$\frac{1}{r} = \sum \frac{\rho^n}{R^n} P_n(\cos\theta).$$

Для точки p' с координатами ρ', θ', λ' получим

$$\frac{1}{r'} = \sum \frac{\rho'^n}{R^n} P_n(\cos\theta').$$

Наконец, для точки p' относительно p имеем

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^n P_n(\cos\psi),$$

или, если положить $\rho = R$, т. е. сферу радиуса R провести через точку p,

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho'}{R}\right)^n P_n(\cos\psi).$$

Напишем преобразование Грина (8.49) для внешней точки

$$V(p') = \frac{1}{4\pi} \iint \left[V \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{l}\right) - \frac{1}{l}\frac{\partial V}{\partial n}\right] dS =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left[R^m Y_m(\theta, \lambda) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{\rho'^n}{R^{n+1}} P_n(\cos\psi) + \right.$$

$$\left. + mR^{m-1} Y_m(\theta, \lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho'^n}{R^{n+1}} P_n(\cos\psi) \right] R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\lambda.$$

Делая элементарные преобразования подынтегрального выражения и развертывая $V(p')$, получим

$$\rho'^m Y_m(\theta', \lambda') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho'^n R^{m-n}}{4\pi} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} [(n+1) Y_m(\theta, \lambda) P_n(\cos\psi) + m Y_m(\theta, \lambda) P_n(\cos\psi)] \sin\theta \, d\theta \, d\lambda =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho'^n R^{m-n}}{4\pi} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (n+m+1) Y_m(\theta, \lambda) P_n(\cos\psi) \sin\theta \, d\theta \, d\lambda.$$

Это равенство выполняется тождественно для всех значений $\rho' < R$. Поэтому коэффициенты у одинаковых степеней ρ справа и слева равны. Значит, при $n \neq m$

$$\frac{R'^{m-n}}{4\pi}(n+m+1) \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_m(\theta, \lambda) P_n(\cos\psi) \sin\theta \, d\theta \, d\lambda = 0 \qquad (9.46)$$

и при $n = m$

$$Y_n(\theta', \lambda') = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_n(\theta, \lambda) P_n(\cos\psi) \sin\theta \, d\theta \, d\lambda. \qquad (9.47)$$

Равенство (9.46) доказывает ортогональность на сфере функций Y_m и P_n.

В силу ортогональности Y и P у Y под интегралом в (9.47) может быть опущен индекс, и тогда

$$Y_n(\theta', \lambda') = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y(\theta, \lambda) P_n(\cos\psi) \sin\theta \, d\theta \, d\lambda$$

или, переходя к элементу поверхности при радиусе сферы, равном единице,

$$Y_n(\theta', \lambda') = \frac{2n+1}{4\pi} \int_S Y(\theta, \lambda) P_n(\cos\psi) \, d\sigma. \qquad (9.47')$$

§ 8. Разложение в ряды по сферическим функциям

Пусть мы имеем некоторую функцию $f(\theta, \lambda)$, которая разлагается в равномерно сходящийся ряд вида

$$f(\theta, \lambda) = Y_0(\theta, \lambda) + Y_1(\theta, \lambda) + \ldots + Y_n(\theta, \lambda) + \ldots, \qquad (9.48)$$

где Y_n определяется уравнением (9.4). Определим вид этого ряда, выраженного через сферические функции Лежандра.

Подставив значения $Y_n(\theta, \lambda)$ из (9.4), функцию $f(\theta, \lambda)$ можно записать в виде

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \lambda) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_0 P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n} (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) P_n^m(\cos\theta) \right]. \tag{9.49}$$

Умножим обе части этого равенства на $\cos k\lambda\, d\lambda$ и проинтегрируем от 0 до 2π:

$$\int_0^{\pi} f(\theta, \lambda) \cos k\lambda\, d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_0 P_n(\cos\theta) \int_0^{2\pi} \cos k\lambda\, d\lambda + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{n} \left[A_{nm} \int_0^{2\pi} \cos m\lambda \cos k\lambda\, d\lambda + B_{nm} \int_0^{2\pi} \sin m\lambda \cos k\lambda\, d\lambda \right] P_n^m(\cos\theta) \right\}$$

Так как $\int_0^{2\pi} \cos k\lambda\, d\lambda = 0$, то первый член нашего выражения обращается в нуль. При $k \neq 0$ и $k \neq m$ $\int_0^{2\pi} \cos m\lambda \cos k\lambda\, d\lambda = 0$, при $k \neq 0$ и $k = m$ $\int_0^{2\pi} \cos m\lambda \cos k\lambda\, d\lambda = \pi$. Поэтому второй член не равен нулю лишь для случая $k = m$. Наконец,

$$\int_0^{2\pi} \sin m\lambda \cos k\lambda\, d\lambda = 0$$

при любых значениях k и m. Поэтому

$$\int_0^{2\pi} f(\theta, \lambda) \cos m\lambda\, d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} A_{nm} \pi P_n^m(\cos\theta).$$

Обе части последнего равенства умножим на $P_n^m(\cos\theta)\, d\cos\theta$ и проинтегрируем в пределах от -1 до $+1$:

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} f(\theta, \lambda) \cos m\lambda P_n^m(\cos\theta) d\cos\theta\, d\lambda = A_{nm}\pi \int_{-1}^{+1} \left[P_n^m(\cos\theta) \right]^2 d\cos\theta.$$

Интеграл, стоящий в правой части, равен $\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$ согласно (9.41). Поэтому

$$\left.\begin{aligned} A_{nm} &= \frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{2n+1}{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,\lambda)\cos m\lambda P_n^m(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\lambda, \\ B_{nm} &= \frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{2n+1}{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,\lambda)\sin m\lambda P_n^m(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\lambda \end{aligned}\right\} \quad (9.50)$$

(B_{nm} находится аналогично тому, как это сделано для A_{nm}).

Найдем теперь коэффициент A_0. Для этого проинтегрируем уравнение (9.49) по λ в пределах от 0 до 2π. Так как

$$\int_0^{2\pi}\cos m\lambda\, d\lambda = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi}\sin m\lambda\, d\lambda = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} f(\theta,\lambda)\, d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} A_0 P_n(\cos\theta)\int_0^{2\pi} d\lambda = 2\pi\sum_{n=0}^{\infty} A_0 P_n(\cos\theta).$$

Умножая полученное равенство на $P_n(\cos\theta)\,d(\cos\theta)$ и интегрируя по $\cos\theta$ в пределах от -1 до $+1$, получим

$$\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} f(\theta,\lambda)\, P_n(\cos\theta)\, d(\cos\theta)\, d\lambda = 2\pi\int_{-1}^{+1} A_0\,[P_n(\cos\theta)]^2\, d(\cos\theta).$$

В силу свойства (9.25)

$$A_0 = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,\lambda)\, P_n(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\lambda. \quad (9.51)$$

§ 9. Теорема сложения

Ряд (9.48) умножим на $P_n(\cos\psi)\sin\theta\, d\theta\, d\lambda$ и проинтегрируем по поверхности сферы единичного радиуса

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,\lambda)\, P_n(\cos\psi)\sin\theta\, d\theta\, d\lambda =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_0(\theta,\lambda)\, P_n(\cos\psi)\sin\theta\, d\theta\, d\lambda + \ldots$$

Интегралы от произведений $Y_m(\theta, \lambda) P_n(\cos\psi)$ при $n \neq m$ обращаются в нуль, а при $n=m$ в силу (9.47) они равны

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta, \lambda) P_n(\cos\psi) \sin\theta \, d\theta \, d\lambda =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_n(\theta, \lambda) P_n(\cos\psi) \sin\theta \, d\theta \, d\lambda = \frac{4\pi Y_n(\theta', \lambda')}{2n+1}. \quad (9.52)$$

Напишем теперь разложение для $Y(\theta', \lambda')$ согласно (9.4) с коэффициентами, определенными равенствами (9.50) и (9.51):

$$Y_n(\theta', \lambda') = \frac{2n+1}{4\pi}\left[\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta, \lambda) P_n(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta \, d\lambda\right] \times$$

$$\times P_n(\cos\theta') + \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{2n+1}{2\pi} \times$$

$$\times \left\{\left[\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta, \lambda) \cos m\lambda P_n^m(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta \, d\lambda\right] \cos m\lambda' + \right.$$

$$\left. + \left[\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta, \lambda) \sin m\lambda P_n^m(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta \, d\lambda\right] \sin m\lambda'\right\} P_n^m(\cos\theta')$$

или, сделав элементарные преобразования,

$$Y_n(\theta', \lambda') = \frac{2n+1}{4\pi}\left\{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta, \lambda) P_n(\cos\theta) P_n(\cos\theta') \sin\theta \, d\theta \, d\lambda + \right.$$

$$+ 2 \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta, \lambda) P_n^m(\cos\theta) \times$$

$$\left. \times P_n^m(\cos\theta') \cos m(\lambda - \lambda') \sin\theta \, d\theta \, d\lambda\right\}. \quad (9.53)$$

Заменив $Y_n(\theta', \lambda')$ посредством (9.47) и (9.48)

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta, \lambda) P_n(\cos\psi) \sin\theta \, d\theta \, d\lambda = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,\lambda)\left[P_n(\cos\theta) P_n(\cos\theta') + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta) P_n^m(\cos\theta') \cos m(\lambda - \lambda')\right] \sin\theta \, d\theta \, d\lambda,$$

получим

$$P_n(\cos\psi) = P_n(\cos\theta)\,P_n(\cos\theta') + \\ + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\,P_n^m(\cos\theta')\,P_n^m(\cos\theta)\cos m(\lambda-\lambda'), \qquad (9.54)$$

где

$$\cos\psi = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\lambda-\lambda').$$

Равенство (9.54), выражающее теорему сложения сферических функций, показывает, как многочлен Лежандра полярного расстояния ψ, являющегося одной стороной сферического треугольника, может быть выражен через сферические функции полярных расстояний, являющихся двумя другими сторонами сферического треугольника Ppp' (рис. 65).

§ 10. Нормирование сферических функций. Интегральное уравнение элементарных сферических функций

Подберем такой множитель, что, будучи на него умноженной, сферическая функция $P(\cos\theta)$ обратится в функцию $F(\theta', \lambda')$, удовлетворяющую условию

$$\int\int [F_n^m(\theta', \lambda')]^2\, d\sigma' = 1$$

(θ', λ' — координаты текущей точки на сфере, θ, λ — координаты полюса). Функция F выбрана при этом следующим образом:

$$F(\theta, \lambda) = \sqrt{\frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\,P_n^m(\cos\theta)\begin{matrix}\cos m\lambda \\ \sin m\lambda\end{matrix} = F_n^m(\theta, \lambda)$$

при $m = 1, 2, \ldots, 2n$

и

$$F(\theta, \lambda) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}}\,P_n(\cos\theta) = F_n(\theta, \lambda) \quad \text{при} \quad m = 0.$$

Введем эти функции (нормированные сферические функции, или, как их еще называют, элементарные) в уравнение (9.54) теоремы сложения. Учтем при этом, что

$$\int\int F_n^m(\theta', \lambda')\, d\sigma = 0, \quad \int\int F_n^m(\theta', \lambda')\, F_{n'}^{m'}(\theta', \lambda')\, d\sigma' = 0,$$

если есть хотя бы одна пара чисел n, m и n', m', не равных между собой. Введем нормированные сферические функции в (9.54):

$$P_n(\cos\psi) = \frac{4\pi}{2n+1}\sum_{m=0}^{2n} F_n^m(\theta, \lambda)\, F_n^m(\theta', \lambda'). \qquad (9.55)$$

Рассмотрим интегральное уравнение, которому удовлетворяют нормированные сферические функции в точках самой сферы. Для внутреннего полюса $\theta, \lambda, \rho<1$ имеет место разложение

$$\frac{1}{r}=\sum_{0}^{\infty}\rho^n P_n(\cos\psi).$$

Заменим $P_n(\cos\psi)$ с помощью (9.55)

$$\frac{1}{r}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4\pi\rho^n}{2n+1}\sum_{m=0}^{2n}F_n^m(\theta,\lambda)\,F_n^m(\theta',\lambda').$$

Умножаем обе части равенства на $F_n^m(\theta', \lambda')$ и интегрируем по сфере. При этом справа в силу ортогональности обратятся в нуль все члены с различными индексами, а совпавшие индексы дадут единицу. $F_n^m(\theta, \lambda)$, как величину постоянную для данного полюса, вынесем за интеграл. Тогда получается

$$\int\int\frac{F_n^m(\theta',\lambda')}{r}\,d\sigma'=\frac{4\pi\rho^n}{2n+1}F_n^m(\theta,\lambda). \tag{9.56}$$

Для внешнего полюса $\rho>1$ аналогично

$$\int\int\frac{F_n^m(\theta',\lambda')}{r}\,d\sigma'=\frac{4\pi}{2n+1}\frac{1}{\rho^{n+1}}F_n^m(\theta,\lambda), \tag{9.56'}$$

и, если полюс лежит на самой сфере $\rho=1$,

$$\int\int\frac{F_n^m(\theta',\lambda')}{r}\,d\sigma'=\frac{4\pi}{2n+1}F_n^m(\theta,\lambda). \tag{9.56''}$$

Интеграл левой части есть потенциал простого слоя с непрерывной плотностью $F_n^m(\theta', \lambda')$, т. е. он сходится.

§ 11. Практика разложения по сферическим функциям

Пусть нам задана некоторая функция полярного расстояния и долготы $f(\theta, \lambda)$, например, функция распределения аномалий силы тяжести или рельефа. Согласно (9.49) ее можно разложить в следующий ряд по сферическим функциям, который, в отличие от (9.49), мы пишем в развернутом виде

$$\begin{aligned}f(\theta,\lambda)=&A_0P_0(\cos\theta)+A_{10}P_1(\cos\theta)+(A_{11}\cos\lambda+B_{11}\sin\lambda)P_1^1(\cos\theta)+\\&+A_{20}P_2(\cos\theta)+(A_{21}\cos\lambda+B_{21}\sin\lambda)P_2^1(\cos\theta)+\\&+(A_{22}\cos2\lambda+B_{22}\sin2\lambda)P_2^2(\cos\theta)+\ldots+\\&+A_{p0}P_p(\cos\theta)+(A_{p1}\cos\lambda+B_{p1}\sin\lambda)P_p^1(\cos\theta)+\ldots+\\&+(A_{pp}\cos p\lambda+B_{pp}\sin p\lambda)P_p^p(\cos\theta)+\ldots.\end{aligned} \tag{9.57}$$

Коэффициенты разложения A_{nm} и B_{nm} требуется определить из системы заданных значений функции $f(\theta, \lambda)$. Каждая строка разложения является так называемым «игреком Лапласа» Y в соответствии с (9.48) и содержит сферические многочлены только одного порядка. Первые члены каждой строки состоят из многочленов Лежандра $P_n(\cos\theta)$ и не зависят от долготы. Известно, что многочлен Лежандра $P_n(x)$ имеет n вещественных корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$, расположенных симметрично относительно $x=0$, что соответствует n значениям θ, симметричным относительно $\theta = \pi/2$, т. е. относительно экватора. Этими корнями сфера делится на $n+1$ широтную зону. При переходе от одной зоны к другой меняется знак функции $P_n(x)$. Так, например, многочлен третьего порядка $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ имеет корни $x_1 = 0$, $x_2 = +\sqrt{\frac{3}{5}} = +0{,}774$; $x_3 = -0{,}774$, что соответствует полярным расстояниям 0°, 39°30′ и 140°30′ (рис. 66). Эти полярные расстояния делят сферу на 4 зоны, внутри которых функция $P_3(x)$ имеет знаки, указанные на рис. 66. Эти первые члены каждой строки разложения носят название *зональных сферических функций.*

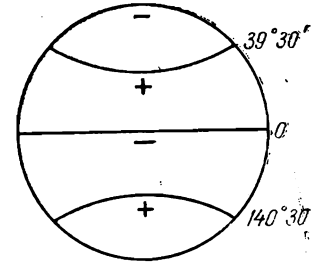


Рис. 66.

Вторые и последующие члены каждой строки — произведения присоединенных функций Лежандра на сумму синусов и косинусов кратных дуг. Общий вид этих членов согласно (9.22)

$$(A_{nm}\cos m\lambda + B_{nm}\sin m\lambda)\sin^m\theta\frac{d^m P_n(\cos\theta)}{d(\cos\theta)^m}. \qquad (9.58)$$

У последних членов каждой строки $n = m$. В этом случае $\frac{d^n P_n(\cos\theta)}{d(\cos\theta)^n} = \text{const}$ и сферические функции имеют вид

$$A_{nn}\sin^n\theta\cos n\lambda \quad \text{и} \quad B_{nn}\sin^n\theta\sin n\lambda.$$

Первый множитель $\sin^n\theta$ этих функций обращается в нуль при $\theta=0$ и $\theta=\pi$, т. е. на полюсах сферы. Вторые множители $\sin n\lambda$ и $\cos n\lambda$ обращаются в нуль на меридианах, отстоящих друг от друга на π/n. В секторах, ограниченных этими меридианами, функции имеют один знак, изменяющийся при переходе через меридиан. Такие функции называются *секториальными сферическими функциями.* На рис. 67 показан ход изменения знаков секториальных функций пятого порядка.

Наконец все промежуточные члены каждой строки, для которых $n \neq m$, имеют вид (9.58). Многочлен $\frac{d^m P_n(\cos\theta)}{d(\cos\theta)^m}$ имеет $n-m$ вещественных корней, которым соответствуют $n-m$ значений полярного расстояния θ. На этих $n-m$ параллелях функция (9.58) обращается в нуль. При переходе через эти параллели функция меняет знак. Сфера делится этими параллелями на $n-m+1$ зон, в которых знак функции попеременно изменяется. Кроме того, каждый множитель $\sin m\lambda$ или $\cos m\lambda$ обращается в нуль при $2m$ значениях долготы λ. Таким образом, сфера делится на $2m+1$ секторов, имеющих ширину π/m, внутри которых функция имеет один и тот же знак, однако меняющийся при переходе через меридиан, где функция обращается в нуль. Таким образом, сфера делится системой параллелей и меридианов на сферические трапеции (рис. 68), в каждой из которых функция сохраняет постоянный знак. Рассматриваемые члены разложения представляют функцию в этих сферических трапециях и называются *тессеральными сферическими функциями*. На рис. 68 показано деление сферы на зональные, секториальные и тессеральные области задания сферических функций для различных порядков n и m.

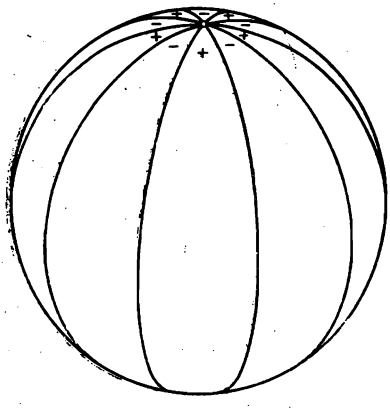


Рис. 67.

В разложении (9.57) первые члены каждой строки суть зональные функции, последние — секториальные и промежуточные — тессеральные. Каждая строка разложения (9.57) содержит $2n+1$ членов, из которых один зональный (первый), два секториальных (последние) и $2(n-1)$ тессеральных. Общее число членов разложения (9.57) равно $n(n+2)+1$.

В практике разложения гравитационного поля Земли по сферическим функциям первый член является зональной функцией нулевого порядка. Он характеризует среднее значение ускорения силы тяжести, т. е. определяет гравитационную постоянную g_e. Первый член третьей строки — зональная функция второго порядка — характеризует сжатие. Второй член второй строки является секториальной функцией первого порядка и характеризует трехосность Земли. Последующие члены разложения характеризуют детали отклонения геоида от сфероида, заданного первыми тремя членами.

Уравнение (9.57) представляет уравнение с $n(n+2)+1$ неизвестными коэффициентами A_{nm} и B_{nm}. Функции P_n^m (основные многочлены Лежандра и присоединенные функции) могут быть вычислены и задаются таблично. Если функция $f(\theta, \lambda)$ известна в какой-либо точке θ_i, λ_i, то, подставив это известное значение в левую часть (9.57), введя θ_i, λ_i и P_n^m и вычислив их, мы получим одно уравнение с $n(n+2)+1$ неизвестными A_{nm} и B_{nm}. Если значение $f(\theta, \lambda)$ определить в $n(n+2)+1$ точках, то мы получим

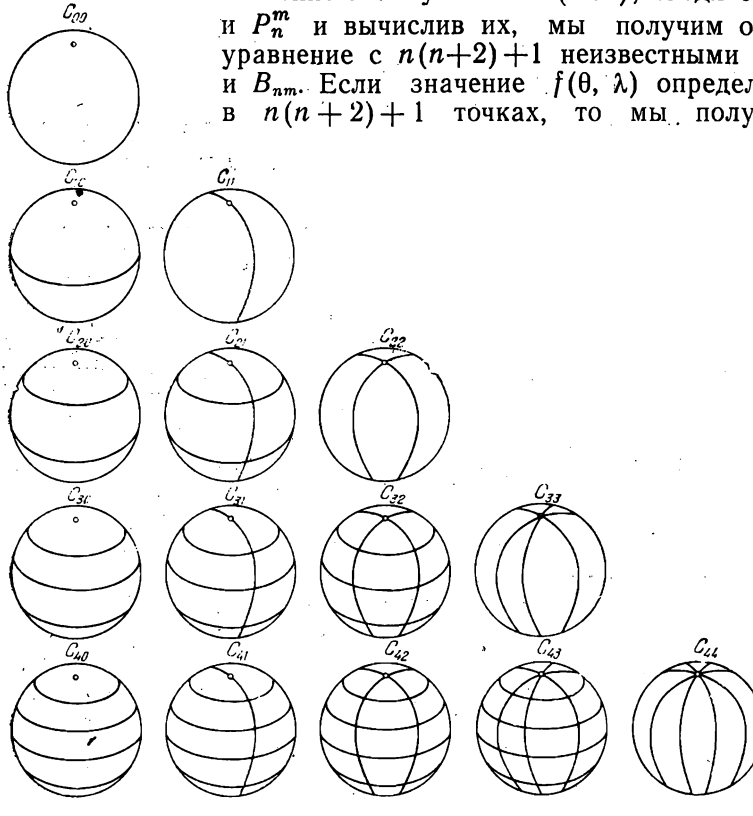


Рис. 68.

систему $n(n+2)+1$ уравнений и, значит, мы сможем определить все коэффициенты разложения. Значения многочленов P_n^m до восьмого порядка даны в таблицах Тальквиста, краткие таблицы есть в справочном сборнике Янке и Эмде, а также приведены в работе И. Д. Жонголовича «Внешнее гравитационное поле Земли и фундаментальные постоянные, связанные с ним» (Гостехиздат, 1948).

ГЛАВА 10

НОРМАЛЬНОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ. НОРМАЛЬНЫЙ ЗЕМНОЙ ЭЛЛИПСОИД

§ 1. Теорема Клеро о распределении силы тяжести на земной поверхности

Рассматривая Землю как однородную вращающуюся жидкость, все массы которой взаимодействуют по закону всемирного тяготения, Ньютон показал, что фигурой Земли будет сжатый эллипсоид вращения, имеющий сжатие $\alpha = 1/230$. Позже Клеро, предположив также, что Земля жидкая, и основываясь на законах гидростатики, установил фигуру уровенной поверхности, определяющей Землю, и доказал общую теорему о распределении силы тяжести на этой поверхности. При этом Клеро считал, что плотность в Земле изменяется с глубиной так, что каждый бесконечно тонкий слой, заключенный между двумя софокусными эллипсоидами, имеет постоянную плотность. Между этими слоями плотность может изменяться по любому закону.

В этих предположениях Клеро вывел два уравнения, связывающих значения силы тяжести на земной поверхности с положением точки и сжатием Земли. Эти уравнения часто называются *теоремой Клеро*. Они имеют следующий вид:

$$\gamma = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 B), \tag{10.1}$$

$$\beta = \frac{5}{2} q - \alpha. \tag{10.2}$$

Здесь B — широта места, $q = \frac{\omega^2 a}{\gamma_e}$, где ω — угловая скорость вращения Земли, a — большая полуось земного эллипсоида. Смысл постоянных γ_e и β, входящих в уравнения (10.1) и (10.2), легко раскрыть, если формулу (10.1) написать для экватора и полюса.

Пусть γ определено для экватора ($B = 0$); тогда $\gamma = \gamma_e$, т. е. γ_e — значение силы тяжести на экваторе. Эту величину называют *экваториальной постоянной*.

Если γ определено для полюса ($B = \pi/2$), то $\gamma_p = \gamma_e(1 + \beta)$. Отсюда

$$\beta = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e}, \tag{10.3}$$

т. е. β есть отношение избытка силы тяжести на полюсе над силой тяжести на экваторе к последней.

Теорема Клеро позволяет по измеренным значениям силы тяжести найти сжатие α уровенного эллипсоида и при известной из геодезических измерений полуоси a построить земной эллипсоид, или, наоборот, для известного уровенного эллипсоида найти закон изменения силы тяжести на нем.

В рассмотренном варианте задача решена с точностью до малых порядка сжатия.

Формулу (10.1) с числовыми коэффициентами γ_e и β часто называют *формулой нормального распределения силы тяжести* в силу того, что она дает закон распределения силы тяжести на идеальной Земле, т. е. на Земле, имеющей форму эллипсоида вращения со сжатием α.

В работе Клеро предполагалось, что поверхность Земли с достаточной точностью совпадает с невозмущенной поверхностью океана, которая в свою очередь с достаточной точностью представляется эллипсоидом вращения, и что все отвесные линии на земной поверхности совпадают с нормалями к этому эллипсоиду.

Однако уже в начале XIX в. из материалов многих градусных измерений стало ясно, что различие в кривизнах дуг на земной поверхности не есть следствие ошибок измерений, а реально существующий факт, и что отвесные линии не совпадают с нормалями к эллипсоиду. Тогда и было введено понятие геоида — уровенной поверхности, совпадающей на океанах с уровнем невозмущенной воды, как поверхности всюду нормальной отвесным линиям. В этом случае измеренные в триангуляции горизонтальные углы должны давать углы на геоиде, приведенные к горизонту базисы — длины дуг, параллельных геоиду, астрономические координаты φ и λ должны определять направления нормали к геоиду, а результаты нивелирования — высоты над геоидом.

Таким образом, введение геоида на первых порах не внесло ничего нового в обработку астрономо-геодезических данных, а только заменило поверхность относимости. Вместо эллипсоида в качестве фигуры Земли начали принимать геоид.

Такое представление фигуры Земли и связь астрономических и триангуляционных измерений с геоидом позволили при обработке триангуляций пользоваться методом развертывания, т. е. все измеренные на физической поверхности элементы —

углы, длины, координаты — редуцировались за счет высоты точек измерений на поверхность геоида, на котором и откладывались эти редуцированные элементы. В 1849 г. Д. Г. Стокс опубликовал ставшие впоследствии знаменитыми работы, в которых, во-первых, доказал, что изменение силы тяжести на земной поверхности и зависимость его от сжатия эллипсоида не обязательно связаны с гипотезой гидростатического равновесия Земли, во-вторых, поставил и решил в частном случае задачу определения внешнего потенциала силы тяжести при данной внешней поверхности и известных на ней значениях силы тяжести и потенциала.

В качестве внешней уровенной поверхности Стокс принял эллипсоид вращения.

Часто применяется другой способ задания потенциала силы тяжести, основанный на применении сферических функций. В этом случае потенциал представляется в виде ряда. Оставляя ограниченное число членов разложения — обычно главные сферические функции нулевого, второго и четвертого порядков,— получают удобные формулы для представления потенциала и силы тяжести.

Такому заданию потенциала и силы тяжести соответствует некоторая уровенная поверхность, представляющая идеализированную Землю, но эта поверхность уже не будет эллипсоидом. Также, соответственно, не будут совпадать и потенциалы, представленные тем и другим методом. Уровенную поверхность, представляющую Землю во втором способе, близкую по форме к эллипсоиду, будем называть сфероидом. С точностью до величин порядка сжатия все способы дают совпадающие результаты.

Определенный таким образом для некоторой идеализированной Земли потенциал силы тяжести, по возможности близкий к потенциалу реальной Земли и имеющий достаточно простой вид, называется *нормальным потенциалом*. Он определяется для удобства решения различных задач, связанных с определением фигуры Земли и ее внешнего гравитационного поля. Благодаря его введению изучение самого внешнего потенциала заменяется изучением малых отступлений реального потенциала от известного нормального. Уровенная поверхность, для которой определен нормальный потенциал силы тяжести, называется нормальной.

В случае определения нормального потенциала методом Стокса это будет нормальный эллипсоид. Сила тяжести, заданная определенным таким образом потенциалом, будет называться *нормальной силой тяжести*.

Стоксом была решена также обратная задача — задача построения внешней уровенной поверхности (геоида) относительно

уровенной поверхности нормального потенциала по значениям силы тяжести на геоиде. Вопрос о том, что сила тяжести известна не на геоиде, а на физической поверхности Земли, и возникающие в связи с этим затруднения оставляем пока в стороне.

§ 2. Теорема Стокса

Если тело известной массы M равномерно вращается около неизменной оси со скоростью ω и если задана уровенная поверхность S потенциала силы тяжести, целиком охватывающая массу, то потенциальная функция силы тяжести и ее первые производные будут однозначно определены на поверхности S и во всем внешнем пространстве.

Допустим существование двух различных значений потенциала силы тяжести W_1 и W_2 на S и во внешнем пространстве, соответствующих двум распределениям массы M внутри S. На поверхности S эти потенциальные функции сохраняют постоянные значения:

$$W_1 = C_1, \quad W_2 = C_2.$$

Поскольку потенциал силы тяжести складывается из потенциала притяжения V и потенциала центробежной силы $W = V + U$ и поскольку последний является только функцией координат и не зависит от масс, можем написать

$$W_1 - W_2 = V_1 - V_2 = T.$$

T есть также потенциальная функция, принимающая на поверхности S значение $C_1 - C_2$.

Воспользуемся преобразованием Грина в виде

$$I = \iiint_{\tau} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau = \iint_{S+\Sigma} T \frac{\partial T}{\partial n}\, d\sigma - \iiint_{\tau} T \nabla^2 T\, d\tau,$$

где объемный интеграл распространен по пространству, заключенному между уровенной поверхностью S и поверхностью некоторой сферы Σ радиуса R, целиком охватывающей поверхность S, а поверхностный интеграл — по поверхностям S и Σ. В силу того, что T — функция гармоническая и для нее во внешнем пространстве оператор Лапласа обращается в нуль, для нашего случая имеем

$$I = \iint_{\Sigma} T \frac{\partial T}{\partial n}\, d\sigma - \iint_{S} T \frac{\partial T}{\partial n}\, d\sigma.$$

Второй интеграл имеет знак минус, потому что внешняя нормаль к поверхности S является внутренней к объему τ.

Рассмотрим первый из интегралов выражения I при неограниченно возрастающем радиусе R сферы Σ. В этом случае в силу основных свойств потенциала притяжения

$$V \to \frac{fM}{R}, \quad \frac{\partial V}{\partial n} \to \frac{fM}{R^2}.$$

Поэтому

$$\left.\begin{aligned} |V_1 - V_2| = |T| &< \frac{fM}{R}, \\ \left|\frac{\partial V_1}{\partial n} - \frac{\partial V_2}{\partial n}\right| = \frac{\partial T}{\partial n} &< \frac{fM}{R^2}. \end{aligned}\right\} \tag{10.4}$$

Заменяя во втором интеграле I подынтегральные выражения, согласно (10. 4), бо́льшими величинами и увеличивая тем самым каждый элемент интеграла, имеем

$$\left|\iint_\Sigma T \frac{\partial T}{\partial n}\, d\sigma\right| < \frac{f^2M^2}{R^3} \iint_\Sigma d\sigma = 4\pi \frac{f^2M^2}{R}.$$

При $R \to \infty$ правая часть неравенства стремится к нулю. Тем более $\iint_\Sigma T \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma \to 0$ при $R \to \infty$.

Теперь

$$I = -\iint_S T \frac{\partial T}{\partial n}\, d\sigma.$$

По условию на S $T = C_1 - C_2$. Тогда

$$I = -(C_1 - C_2) \iint_S \left(\frac{\partial V_1}{\partial n} - \frac{\partial V_2}{\partial n}\right) d\sigma.$$

Согласно формуле Грина можем написать

$$\iint_S \frac{\partial V_1}{\partial n}\, d\sigma = \iiint_\tau \nabla^2 V_1 dx\, dy\, dz,$$

где объемный интеграл распространен на внутренний объем уровенной поверхности S, для которого имеет место уравнение Пуассона

$$\nabla^2 V = -4\pi f\sigma,$$

где σ — плотность. Поэтому

$$\iint_S \frac{\partial V_1}{\partial n}\, d\sigma = -4\pi f \iiint_\tau \sigma d\tau = -4\pi f M.$$

Аналогично, имеем

$$\iint_S \frac{\partial V_2}{\partial n}\, d\sigma = -4\pi f \iiint_\tau \sigma\, d\tau = -4\pi f M.$$

Таким образом,

$$I = \int_S \int \frac{dV_1}{dn} d\sigma - \int_S \int \frac{dV_2}{dn} d\sigma = 0$$

или

$$I = \int_\tau \int \int \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau = 0.$$

Вследствие того, что каждый член в подынтегральной функции не меньше нуля, в каждой точке области τ имеем $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$ во всем внешнем пространстве.

В силу определения T

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} = \frac{\partial W_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial W_1}{\partial y} = \frac{\partial W_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial W_1}{\partial z} = \frac{\partial W_2}{\partial z},$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \frac{\partial V_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_1}{\partial z} = \frac{\partial V_2}{\partial z},$$

что означает $V_1 - V_2 = \text{const}$ во всем внешнем пространстве. При неограниченном возрастании R потенциал $V_1 \to 0$ и $V_2 \to 0$; значит, $V_1 - V_2 \to 0$, т. е. $V_1 = V_2$. Таким образом, во всем внешнем пространстве, в том числе на поверхности S, $V_1 \equiv V_2$. Следовательно,

$$W_1 \equiv W_2,$$

т. е. предположительно разные функции W_1 и W_2, соответствующие различным распределениям масс внутри уровенной поверхности, оказываются при заданных условиях неизбежно совпадающими, что и доказывает единственность внешнего потенциала.

§ 3. Потенциал силы тяжести для уровенной поверхности, заданной в форме эллипсоида вращения

Задача нахождения потенциала силы тяжести для уровенной поверхности, заданной в форме эллипсоида вращения, состоит в построении функции во внешнем пространстве при заданных граничных условиях на уровенном эллипсоиде, т. е. в решении внешней задачи Дирихле для эллипсоида вращения. Поскольку потенциал центробежной силы $U = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$ не зависит от массы тела и формы, задача сводится к нахождению такой функции, которая во всем внешнем к заданной уровенной поверхности пространстве удовлетворяет следующим условиям:

1. Непрерывна, конечна и имеет непрерывные и конечные первые производные, а на бесконечности регулярна, т. е.

$$\lim_{r\to\infty} rV = fM.$$

2. Обращает в нуль второй дифференциальный параметр:

$$\nabla^2 V = 0,$$

т. е. удовлетворяет уравнению Лапласа.

3. На уровенной поверхности принимает значения

$$V_0 = \text{const} - \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2). \qquad (10.5)$$

Строгое решение этой задачи для эллипсоида вращения было дано П. Пицетти. В 1945 г. решение этой же задачи в более изящной форме предложено М. С. Молоденским. В дальнейшем изложении будем придерживаться пути, предложенного Молоденским.

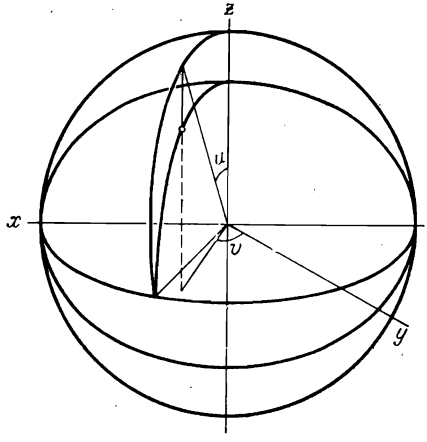


Рис. 69

Пусть в качестве уровенной поверхности задан эллипсоид вращения, целиком охватывающий массы M. Его уравнение в декартовых координатах будет

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \qquad (10.6)$$

где a — большая (экваториальная) и b — малая (полярная) полуоси.

Пусть угловая скорость вращения такого эллипсоида около полярной оси будет ω. Напишем уравнение эллипсоида в криволинейных координатах u и v:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\sin u \sin v,\\ y &= a\sin u \cos v,\\ z &= b\cos u. \end{aligned}\right\} \qquad (10.7)$$

Здесь u — дополнение до 90° приведенной широты, v — долгота; при этом u и v изменяются в пределах от 0 до π и от 0 до 2π соответственно. Геометрически координаты u и v представлены на рис. 69. Для общности и простоты дальнейшего решения будем рассматривать a и b как переменные величины,

зависящие от w следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} a &= c \operatorname{ch} w, \\ b &= c \operatorname{sh} w. \end{aligned}\right\} \tag{10.8}$$

Тогда формулы перехода от декартовых координат x, y, z к криволинейным u, v, w будут

$$\left.\begin{aligned} x &= c \sin u \sin v \operatorname{ch} w, \\ y &= c \sin u \cos v \operatorname{ch} w, \\ z &= c \cos u \operatorname{sh} w. \end{aligned}\right\} \tag{10.9}$$

Формулы (10.9) представляют уравнение поверхности второго порядка в параметрической форме. Приравнивая в них постоянной w, v или u, получим координатные поверхности:

1. $w = w_0 = \text{const}$

$$\begin{aligned} x &= c \operatorname{ch} w_0 \sin u \sin v, \\ y &= c \operatorname{ch} w_0 \sin u \cos v, \\ z &= c \operatorname{sh} w_0 \cos u. \end{aligned}$$

Согласно (10.8)

$$c^2 = a^2 - b^2$$

и

$$\operatorname{th} w_0 = \frac{b}{a}.$$

Вводя новые константы $c \operatorname{ch} w_0 = a$, $c \operatorname{sh} w_0 = b$, получаем уравнение эллипсоида вращения (10.7).

2. $v = v_0 = \text{const}$

$$\begin{aligned} x &= c \operatorname{ch} w \sin u \sin v_0, \\ y &= c \operatorname{ch} w \sin u \cos v_0, \\ z &= c \operatorname{sh} w \cos u \end{aligned}$$

z не зависит от v_0; два первых уравнения определяют плоскость $y = x \operatorname{ctg} v_0$, проходящую через ось аппликат.

3. $u = u_0 = \text{const}$. Полагая $c \sin u_0 = a$, $c \cos u_0 = b$, получим

$$\begin{aligned} x &= a \sin v \operatorname{ch} w, \\ y &= a \cos v \operatorname{ch} w, \\ z &= b \operatorname{sh} w, \end{aligned}$$

или $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = \operatorname{ch}^2 w - \operatorname{sh}^2 w = 1$ — уравнение гиперболоида вращения.

Выбранные таким образом криволинейные координаты геометрически представляют собой линии, образованные: пересечением эллипсоида с плоскостью, пересечением эллипсоида с гиперболоидом, пересечением гиперболоида с плоскостью.

Покажем, что координатные поверхности $u = c$, $v = c$, $w = c$ образуют ортогональную систему. Условием ортогональности являются равенства

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)} &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0,\\
\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(v, w)} &= \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w} = 0,\\
\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(w, u)} &= \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial u} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (10.10)$$

Для того чтобы доказать ортогональность u и w, надо образовать частные производные от функций (10.9) по u, v, w и убедиться, что суммы произведений производных декартовых координат по двум криволинейным координатам обращаются в нуль.

Образуем частные производные от декартовых координат по криволинейным:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u} &= c\cos u \sin v \operatorname{ch} w, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = c\cos u\cos v \operatorname{ch} w,\\
\frac{\partial x}{\partial v} &= c\sin u\cos v \operatorname{ch} w, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -c\sin u \sin v \operatorname{ch} w,\\
\frac{\partial x}{\partial w} &= c\sin u \sin v \operatorname{sh} w, \quad \frac{\partial y}{\partial w} = c\sin u\cos v \operatorname{sh} w,\\
\frac{\partial z}{\partial u} &= -c\sin u \operatorname{sh} w,\\
\frac{\partial z}{\partial v} &= 0,\\
\frac{\partial z}{\partial w} &= c\cos u \operatorname{ch} w.
\end{aligned}\right\} \qquad (10.11)$$

Вводя (10.11) в (10.10), легко убеждаемся в справедливости нашего утверждения. В самом деле,

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)} = c^2 \sin u\cos u \sin v\cos v \operatorname{ch}^2 w -$$
$$- c^2 \sin u\cos u \sin v\cos v \operatorname{ch}^2 w = 0,$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, w)} = c^2 \sin^2 v \sin u\cos u \operatorname{sh} w \operatorname{ch} w +$$
$$+ c^2 \cos^2 v \sin u\cos u \operatorname{sh} w \operatorname{ch} w - c^2 \sin u\cos u \operatorname{sh} w \operatorname{ch} w = 0,$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(v, w)} = c^2 \sin^2 u \sin v\cos v \operatorname{sh} w \operatorname{ch} w -$$
$$- c^2 \sin^2 u \sin v\cos v \operatorname{sh} w \operatorname{ch} w = 0.$$

Для выбранной системы координат напишем оператор Лапласа

$$\nabla^2 U = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial U}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial U}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial U}{\partial w}\right)\right\}, \quad (10.12)$$

где

$$\left.\begin{aligned} h_1^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,\\ h_2^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,\\ h_3^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2. \end{aligned}\right\} \quad (10.13)$$

Вводя в (10.13) соответствующие значения частных производных из (10.11), получим

$$\begin{aligned} h_1^2 &= c^2\cos^2 u\sin^2 v\,\mathrm{ch}^2 w + c^2\cos^2 u\cos^2 v\,\mathrm{ch}^2 w + c^2\sin^2 u\,\mathrm{sh}^2 w =\\ &= c^2(1-\sin^2 u)\,\mathrm{ch}^2 w + c^2\sin^2 u\,\mathrm{sh}^2 w =\\ &= c^2\,\mathrm{ch}^2 w - c^2\sin^2 u\,(\mathrm{ch}^2 w - \mathrm{sh}^2 w) = c^2(\mathrm{ch}^2 w - \sin^2 u),\\ h_2^2 &= c^2\sin^2 u\cos^2 v\,\mathrm{ch}^2 w + c^2\sin^2 u\sin^2 v\,\mathrm{ch}^2 w = c^2\sin^2 u\,\mathrm{ch}^2 w,\\ h_3^2 &= c^2\sin^2 u\sin^2 v\,\mathrm{sh}^2 w + c^2\sin^2 u\cos^2 v\,\mathrm{sh}^2 w + c^2\cos^2 u\,\mathrm{ch}^2 w =\\ &= c^2(\sin^2 u\,\mathrm{sh}^2 w + \cos^2 u\,\mathrm{ch}^2 w) =\\ &= c^2(\sin^2 u\,\mathrm{sh}^2 w + \mathrm{ch}^2 w - \sin^2 u\,\mathrm{ch}^2 w) = c^2(\mathrm{ch}^2 w - \sin^2 u). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} h_1^2 &= h_3^2 = c^2(\mathrm{ch}^2 w - \sin^2 u),\\ h_2^2 &= c^2\sin^2 u\,\mathrm{ch}^2 w. \end{aligned}\right\} \quad (10.14)$$

Введем значения h_1, h_2, h_3 из (10.13) в оператор (10.12)

$$\begin{aligned} \nabla^2 U = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\Bigg\{&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{c^2\sin u\,\mathrm{ch}\,w\sqrt{\mathrm{ch}^2 w-\sin^2 u}}{c\sqrt{\mathrm{ch}^2 w-\sin^2 u}}\frac{\partial U}{\partial u}\right)+\\ &+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{c^2\sqrt{\mathrm{ch}^2 w-\sin^2 u}\sqrt{\mathrm{ch}^2 w-\sin^2 u}}{c\sin u\,\mathrm{ch}\,w}\frac{\partial U}{\partial v}\right)+\\ &+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{c^2\sqrt{\mathrm{ch}^2 w-\sin^2 u}\sin u\,\mathrm{ch}\,w}{c\sqrt{\mathrm{ch}^2 w-\sin^2 u}}\frac{\partial U}{\partial w}\right)\Bigg\} =\\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(c\sin u\,\mathrm{ch}\,w\frac{\partial U}{\partial u}\right)+\right.\\ &\left.+\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{c(\mathrm{ch}^2 w-\sin^2 u)}{\sin u\,\mathrm{ch}\,w}\frac{\partial U}{\partial v}\right]+\frac{\partial}{\partial w}\left(c\sin u\,\mathrm{ch}\,w\frac{\partial U}{\partial w}\right)\right\}. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Искомая потенциальная функция V — гармоническая по условию, поэтому для нее имеет место уравнение Лапласа

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(c\sin u\,\mathrm{ch}\,w\frac{\partial V}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(c\frac{\mathrm{ch}^2 w-\sin^2 u}{\sin u\,\mathrm{ch}\,w}\frac{\partial V}{\partial v}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial w}\left(c\sin u\,\mathrm{ch}\,w\frac{\partial V}{\partial w}\right)=0. \quad (10.16)$$

В силу основного свойства уровенной поверхности потенциальная функция на ней принимает постоянное значение. Поэтому для нашей уровенной поверхности, заданной в виде эллипсоида вращения (10.6), имеет место уравнение $W=W_0$ и, согласно условию (10.5), для потенциала притяжения на поверхности эллипсоида справедливо уравнение

$$V_0=W_0-\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)_0. \quad (10.17)$$

Потенциал центробежной силы преобразуем к выбранной нами криволинейной системе координат (10.9)

$$x^2+y^2=c^2\sin^2 u\sin^2 v\,\mathrm{ch}^2 w+c^2\sin^2 u\cos^2 v\,\mathrm{ch}^2 w=c^2\sin^2 u\,\mathrm{ch}^2 w.$$

Тогда

$$V_0=W_0-\frac{\omega^2}{2}c^2\sin^2 u\,\mathrm{ch}^2 w_0. \quad (10,17')$$

В выражении потенциала центробежной силы индекс приписывается только координате w, поскольку эллипсоид, для поверхности которого мы пишем уравнение (10.17′), получается из (10.9) обращением w в константу w_0.

Далее проблема состоит в решении внешней задачи Дирихле при краевых условиях (10.17′), т. е. в построении функции V, непрерывной вместе с первыми производными во всем внешнем пространстве, регулярной на бесконечности, обращающей оператор Лапласа в нуль и принимающей на поверхности эллипсоида (10.4) значения (10.17′).

В силу доказанной единственности решения задачи Дирихле построенная любым образом функция, удовлетворяющая этим условиям, будет искомым потенциалом V.

Поскольку краевое условие от v не зависит, будем и саму функцию искать не зависящей от v. Представим решение в виде суммы частных решений, не зависящих от v, вида

$$A_n\varphi_n(u)\psi_n(w), \quad (10.18)$$

где A_n — произвольный множитель.

Каждое из таких частных решений должно удовлетворить уравнению Лапласа (10.16), в котором после введения (10.18)

член, дифференцируемый по v, исчезает:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\sin u \operatorname{ch} w \frac{\partial [A_n \varphi_n(u) \psi_n(w)]}{\partial u}\right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial w}\left\{\sin u \operatorname{ch} w \frac{\partial [A_n \varphi_n(u) \psi_n(w)]}{\partial w}\right\} = 0$$

или

$$\psi_n(w) \operatorname{ch} w \frac{d}{du}\left[\sin u \frac{d\varphi_n(u)}{du}\right] + \varphi_n(u) \sin u \frac{d}{dw}\left[\operatorname{ch} w \frac{d\psi_n(w)}{dw}\right] = 0.$$

Разделяя переменные, получаем

$$-\frac{1}{\varphi_n(u) \sin u} \frac{d}{du}\left[\sin u \frac{d\varphi_n(u)}{du}\right] = \frac{1}{\psi_n(w) \operatorname{ch} w} \frac{d}{dw}\left[\operatorname{ch} w \frac{d\psi_n(w)}{dw}\right].$$

Левая часть полученного равенства не зависит от w, а правая — от u. Так как эти части равны между собой, то это означает, что каждая из них есть постоянная k, к которой мы их приравниваем. Выбор этой постоянной остается в нашей воле.

В развернутой форме получим два уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\varphi_n}{du^2} + \operatorname{ctg} u \frac{d\varphi_n}{du} + k\varphi_n(u) = 0, \\ &\frac{d^2\psi_n}{dw^2} + \operatorname{th} w \frac{d\psi_n}{dw} - k\psi_n(w) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{10.19}$$

Уравнения (10.19) при $k = n(n+1)$ при любом целом положительном или равном нулю n представляют собой дифференциальные уравнения Лежандра. Эти уравнения имеют своими частными решениями систему многочленов Лежандра $P_n(\cos u)$ и функции Лежандра второго рода $Q_n(\cos u)$. Второе решение не ограничено. Следовательно, можно принять $\varphi_n(u) = P_n(\cos u)$. Тогда частное решение (10.18) представится в виде

$$A_n \psi_n(w) P_n(\cos u). \tag{10.20}$$

Вид функции $\psi_n(w)$ мы пока искать не будем.

Искомая функция V, решающая задачу Дирихле, представляется суммой частных решений (10.20), т. е.

$$V = \sum A_n P_n(\cos u) \psi_n(w). \tag{10.21}$$

Подберем теперь коэффициенты этого ряда так, чтобы удовлетворить краевое условие (10.17′). Для этого внесем найденное решение в уравнение (10.17′) и положим в нем $w = w_0$

$$V_0 = \sum A_n P_n(\cos u) \psi_n(w_0) = W_0 - \frac{\omega^2}{2} c^2 \sin^2 u \operatorname{ch}^2 w_0.$$

В этом равенстве выразим $\sin^2 u$ через полиномы Лежандра

$$\sin^2 u = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(3\cos^2 u - 1) = \frac{2}{3}P_0(u) - \frac{2}{3}P_2(u).$$

Тогда

$$V_0 = \sum A_n P_n(\cos u)\,\psi_n(w_0) =$$
$$= W_0 - \frac{1}{2}\omega^2 c^2 \operatorname{ch}^2 w_0 \left[\frac{2}{3}P_0(\cos u) - \frac{2}{3}P_2(\cos u)\right].$$

В последнее разложение входят полиномы только нулевого и второго порядка — это может иметь место лишь в том случае, когда коэффициенты при всех отсутствующих полиномах равны нулю. Сохраняются только коэффициенты A_0 и A_2:

$$V = A_0 P_0(\cos u)\,\psi_0(w) + A_2 P_2(\cos u)\,\psi_2(w).$$

Это и есть искомая функция. В ней остались не определенными значения функции ψ, которые будут найдены позже.

Для получения потенциала силы тяжести к потенциалу тяготения V надо добавить потенциал центробежной силы

$$W = A_0\psi_0(w) + A_2\psi_2(w)\,P_2(\cos u) + \frac{1}{2}\omega^2 c^2 \sin^2 u \operatorname{ch}^2 w. \quad (10.22)$$

Найденное значение потенциала будет удовлетворять условиям теоремы Стокса, т. е. оно непрерывно вместе со своими первыми производными и регулярно на бесконечности. Это следует из непрерывности и регулярности многочленов Лежандра и потенциала центробежной силы. Кроме того, при условии соответствующего подбора функций $\psi_0(w)$ и $\psi_2(w)$ оно удовлетворяет уравнению Лапласа. Значит, если будут подобраны удовлетворяющие этим же условиям функции $\psi_0(w)$ и $\psi_2(w)$, то будет найдено решение проблемы Стокса. Это решение в силу ранее доказанной теоремы будет единственным.

Подберем теперь значения функций ψ_0 и ψ_2. Очевидно, это можно сделать с помощью второго уравнения (10.19).

Как уже говорилось, уравнение (10.19) при $k = n(n+1)$ является уравнением Лежандра. Чтобы привести его к канонической форме уравнения Лежандра, надо ввести подстановку $x = i \operatorname{sh} w$. Тогда получим

$$(x^2 - 1)\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + 2x\frac{d\psi_n}{dx} - n(n+1)\psi_n = 0.$$

Частным решением этого уравнения являются функции Лежандра I и II рода, т. е. $P_n(x)$ и $Q_n(x)$; общим решением будет линейная комбинация этих многочленов

$$\psi_n = c_n' P_n(x) + c_n'' Q_n(x).$$

Нас интересуют функции ψ_0 и ψ_2, так как только они входят в найденное нами значение потенциала (10.22). Поэтому требуется найти решение

$$\left.\begin{aligned}\psi_0 &= c_0' P_0(x) + c_0'' Q_0(x)\\ \psi_2 &= c_2' P_2(x) + c_2'' Q_2(x).\end{aligned}\right\} \quad (10.23)$$

и

Входящие в (10.23) функции Лежандра имеют вид

$$P_0(x) = 1, \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2},$$

$$Q_0(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} = ik\pi - i\,\mathrm{arcctg\,sh}\,w,$$

$$Q_2(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)\ln\frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{2}x.$$

Найдем теперь величины $A_0\psi_0$ и $A_2\psi_2$. Пользуясь (10.23) и значениями функций Лежандра, получим

$$A_0\psi_0 = A_0c_0'P_0(x) + A_0c_0''Q_0(x) = A_0c_0' + A_0c_0''\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1},$$

$$A_2\psi_2 = A_2c_2'\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) + A_2c_2''\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)\ln\frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{2}x\right].$$

Введем подстановку $x = i\,\mathrm{sh}\,w$ и новые константы c_1, c_2, c_3, c_4, в которые будут входить A_0 и A_2. Получим

$$\left.\begin{aligned}A_0\psi_0 &= c_1 + c_2\,\mathrm{arcctg\,sh}\,w,\\ A_2\psi_2 &= \frac{c_3}{2}(3\,\mathrm{sh}^2 w + 1) +\\ &\quad + \frac{c_4}{2}(3\,\mathrm{ch}^2 w + 1)\,\mathrm{arcctg\,sh}\,w - \frac{3}{2}c_4\,\mathrm{sh}\,w.\end{aligned}\right\} \quad (10.24)$$

Теперь потенциал притяжения V эллипсоида будет

$$V = c_1 + c_2\,\mathrm{arcctg\,sh}\,w + P_2(\cos u)\left[\frac{c_3}{2}(3\,\mathrm{sh}^2 w + 1) + \right.$$
$$\left. + \frac{c_4}{2}(3\,\mathrm{sh}^2 w + 1)\,\mathrm{arcctg\,sh}\,w - \frac{3}{2}c_4\,\mathrm{sh}\,w\right] \quad (10.25)$$

и потенциал силы тяжести $W = V + U$

$$W = c_1 + c_2\,\mathrm{arcctg\,sh}\,w + P_2(\cos u)\left[\frac{c_3}{2}(3\,\mathrm{sh}^2 w + 1) + \right.$$
$$\left. + \frac{c_4}{2}(3\,\mathrm{sh}^2 w + 1)\,\mathrm{arcctg\,sh}\,w - \frac{3}{2}c_4\,\mathrm{sh}\,w\right] + \frac{\omega^2 a^2}{2}\sin^2 u.$$

Определим константы c_1, c_2, c_3, c_4. Пользуясь (10.9), получим

$$x^2+y^2+z^2=\rho^2=c^2[\sin^2 u \operatorname{ch}^2 w+(1-\sin^2 u)\operatorname{sh}^2 w]=$$
$$=c^2(\sin^2 u+\operatorname{sh}^2 w),$$

откуда

$$\operatorname{sh} w=\frac{1}{c}\sqrt{\rho^2-c^2\sin^2 u},$$

c/ρ — величина ограниченная ($c^2=a^2-b^2$). Поэтому при больших ρ величиной $c^2\sin^2 u$ можно пренебречь по сравнению с ρ^2. Выберем достаточно большое ρ, так как константа, полученная при любом ρ, остается постоянной при всех других значениях ρ; тогда $\operatorname{sh} w=\rho/c$, откуда $\operatorname{arctg}\operatorname{sh} w=\rho/c$, а значит $\operatorname{arcctg}\operatorname{sh} w=c/\rho$.

Кроме того, для больших ρ потенциал эллипсоида малого сжатия можно считать равным потенциалу шара

$$V=\frac{fM}{\rho}.$$

Введем это значение в (10.25):

$$V=\frac{fM}{\rho}=c_1+c_2\frac{c}{\rho}+$$
$$+P_2(\cos u)\left[\frac{c_3}{2}\left(3\frac{\rho^2}{c^2}+1\right)+\frac{c_4}{2}\left(3\frac{\rho^2}{c^2}+1\right)\frac{c}{\rho}-\frac{3}{4}c_4\frac{\rho}{c}\right]. \quad (10.25')$$

Напишем V для такого значения u, при котором $P_2(\cos u)$ обращается в нуль. Для этого надо взять такое u, для которого $\cos^2 u=\frac{1}{3}$, так как $P_2(\cos u)=\frac{3}{2}\cos^2 u-\frac{1}{2}$. Тогда получим

$$V_u=c_1+c_2\frac{c}{\rho}=\frac{fM}{\rho},$$

откуда

$$c_1=0, \quad c_2=\frac{fM}{c}.$$

Далее, вводя c_1 и c_2 в (10.25'), видим, что квадратная скобка в (10.25') обращается в нуль. Чтобы удовлетворить этому условию, оба слагаемые должны быть нулями, а поскольку коэффициент при c_3 существенно положительный, то $c_3=0$. Для определения c_4 положим $w=w_0$; тогда потенциал силы тяжести обращается в константу W_0, которая определяет исходный эллипсоид. При этом значении w

$$\operatorname{ch} w_0=\frac{a}{c}; \quad \operatorname{sh} w_0=\frac{b}{c}.$$

Напишем потенциал силы тяжести для случая $w = w_0$ с учетом найденных значений c_1, c_2, c_3:

$$W_0 = \frac{fM}{c}\operatorname{arctg}\frac{c}{b} + \left(\frac{3}{2}\cos^2 u - \frac{1}{2}\right)\frac{c_4}{2}\left[\left(\frac{3b^2}{c^2}+1\right)\operatorname{arctg}\frac{c}{b} - 3\frac{b}{c}\right] + \frac{\omega^2 a^2}{2}\sin^2 u. \tag{10.26}$$

При этом c_4 должно обращать в нуль коэффициент при переменном члене, т. е. при $\cos^2 u$, так как W_0 — константа:

$$\frac{\omega^2 a^2}{2} - \frac{3}{4}c_4\left[\left(\frac{3b^2}{c^2}+1\right)\operatorname{arctg}\frac{c}{b} - 3\frac{b}{c}\right] = 0,$$

откуда

$$c_4 = \frac{2}{3}\omega^2 a^2\left[\left(\frac{3b^2}{c^2}+1\right)\operatorname{arcctg}\frac{c}{b} - 3\frac{b}{c}\right]^{-1}.$$

Отсюда же находим выражение для W_0 — потенциала на эллипсоиде:

$$W_0 = \frac{fM}{c}\operatorname{arctg}\frac{c}{b} + \frac{\omega^2 a^2}{3}. \tag{10.26'}$$

Окончательно для потенциала силы тяжести имеем

$$W = \frac{fM}{c}\operatorname{arcctg}\operatorname{sh} w + \frac{\omega^2 a^2}{3}\frac{P_2(\cos u)}{\left(\frac{3b^2+c^2}{c^2}\operatorname{arctg}\frac{c}{b} - 3\frac{b}{c}\right)} \times \left[(3\operatorname{sh}^2 w + 1)\operatorname{arcctg}\operatorname{sh} w - 3\operatorname{sh} w\right] - \frac{\omega^2 a^2}{2}\sin^2 u. \tag{10.27}$$

§ 4. Формула Пицетти — Сомильяна

Теперь, когда найдено значение потенциала для внешнего пространства идеальной Земли, легко получить теоретическое значение силы тяжести на ней. Для этого достаточно W из (10.22) продифференцировать по нормали к поверхности идеальной Земли

$$\gamma = -\frac{\partial W}{\partial n}.$$

Эта поверхность является эллипсоидом вращения и определяется уравнениями (10.9) при $W = \text{const}$. Нормаль к этой поверхности характеризуется тем, что при движении по ней координаты u и v остаются неизменными, т. е. $du = dv = 0$.

Элемент дуги в криволинейных координатах u, v, w выражается формулой

$$ds^2 = h_1^2 du^2 + h_2^2 dv^2 + h_3^2 dw^2.$$

Тогда для элемента нормали dn можно написать

$$dn = ds = h_3 dw.$$

В выражении для производной потенциала по нормали заменим элемент dn полученным значением

$$\gamma = -\frac{\partial W}{\partial n} = -\frac{\partial W}{h_3 dw}.$$

Чтобы получить значение силы тяжести на поверхности уровенного эллипсоида, выполним дифференцирование с учетом (10.8) и положим $w = w_0$:

$$\gamma = -\frac{1}{h_3}\frac{\partial W}{\partial w_0} = \frac{-1}{c\sqrt{\operatorname{ch}^2 w_0 - \sin^2 u}} \times$$
$$\times \left[A_0 \psi_0'(w_0) + A_2 \psi_2'(w_0) P_2(\cos u) + \omega^2 c^2 \sin^2 u \operatorname{ch} w \operatorname{sh} w\right].$$

Учитывая (10.8), получаем

$$\gamma = \frac{-1}{c\sqrt{\operatorname{ch}^2 w_0 - \sin^2 u}} \left[A_0 \psi_0'(w_0) + \right.$$
$$\left. + A_2 \psi_2'(w_0) P_2(\cos u) + \omega^2 ab \sin^2 u\right]. \quad (10.28)$$

Отсюда видно, что закон изменения силы тяжести на уровенном эллипсоиде вращения можно записать в виде

$$\gamma = \frac{\overline{A}\cos^2 u + \overline{B}\sin^2 u}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 w_0 - \sin^2 u}}. \quad (10.29)$$

В самом деле, раскрыв $P_2(\cos u) = \frac{1}{2}(3\cos^2 u - 1)$, выражение (10.28) можно представить в виде

$$A\cos^2 u + B\sin^2 u + \text{const},$$

в котором в свою очередь постоянную величину можно выразить через квадраты косинусов и синусов, чем и доказывается сделанное утверждение.

Постоянные A и B определим из следующих соображений. Рассмотрим ускорения силы тяжести для экватора и для полюса. Дополнения до приведенной широты будут соответственно равны

$$u = \pi/2, \quad u = 0.$$

Тогда

$$\gamma_e = \frac{B}{\operatorname{sh} w_0} = \frac{Bc}{b}, \quad \gamma_p = \frac{A}{\operatorname{ch} w_0} = \frac{Ac}{a},$$

откуда

$$A = \gamma_p \frac{a}{c}, \quad B = \gamma_e \frac{b}{c}.$$

Вводя найденные значения A и B в (10.29), получим

$$\gamma = \frac{\gamma_p a \cos^2 u + \gamma_e b \sin^2 u}{c \sqrt{\operatorname{ch}^2 w_0 - \sin^2 u}}.$$

Преобразуем знаменатель с учетом (10.8)

$$c\sqrt{\operatorname{ch}^2 w_0 - \sin^2 u} = \sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2 w_0 - c^2 \sin^2 u} = \sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 u} =$$
$$= \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\sin^2 u} = \sqrt{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u}$$

и

$$\gamma = \frac{\gamma_p a \cos^2 u + \gamma_e b \sin^2 u}{\sqrt{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u}}. \tag{10.30}$$

Остается перейти в выражении (10.30) от дополнения приведенной широты u к геодезической широте B. Связь приведенной широты $\bar{u}$ и геодезической B дается уравнением

$$\operatorname{tg} \bar{u} = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} B = \frac{b}{a} \operatorname{tg} B,$$

где $\bar{u} = 90° - u$. Вводя это значение $\bar{u}$, получим

$$\operatorname{ctg} u = \operatorname{tg} \bar{u} = \frac{b}{a} \operatorname{tg} B.$$

Подставим его в (10.30):

$$\gamma = \frac{\gamma_p a \sin^2 \bar{u} + \gamma_e b \cos^2 \bar{u}}{\sqrt{a^2 \sin^2 \bar{u} + b^2 \cos^2 \bar{u}}} = \frac{\gamma_p a \operatorname{tg}^2 \bar{u} + \gamma_e b}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \bar{u} + b^2}\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \bar{u}}} =$$
$$= \frac{\frac{b}{a}\frac{1}{\cos^2 B}(\gamma_p b \sin^2 B + \gamma_e a \cos^2 B)}{b\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 B}\,\frac{1}{a \cos B}\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}.$$

Сократив одинаковые коэффициенты, получим

$$\gamma = \frac{\gamma_e a \cos^2 B + \gamma_p b \sin^2 B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}. \tag{10.31}$$

Это *формула Пицетти — Сомильяна*. Она дает связь значения ускорения силы тяжести с широтой места для идеальной Земли, представляемой уровенным эллипсоидом вращения.

§ 5. Формула Клеро

Формула Сомильяна дает точное выражение ускорения силы тяжести на поверхности уровенного эллипсоида. Если ее представить в виде ряда и ограничиться первыми членами его, то мы получим уже известную нам формулу Клеро.

Обозначим $\frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} = \beta$. Подставив значения γ_p и малой полуоси $b = a(1-\alpha)$ в формулу (10.31), получим

$$\gamma = \frac{a\gamma_e \cos^2 B + \gamma_e(1+\beta)\, a(1-\alpha)\sin^2 B}{\sqrt{a^2\cos^2 B + a^2(1-\alpha)^2 \sin^2 B}}.$$

Разложим теперь знаменатель в степенной ряд и, произведя перемножение членов, ограничимся членами второго порядка малости, т. е. членами, содержащими квадрат сжатия или произведение $\alpha\beta$:

$$\gamma = \gamma_e [\cos^2 B + (1+\beta)(1-\alpha)\sin^2 B]\,[\cos^2 B + (1-\alpha)^2 \sin^2 B]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \gamma_e [1 + (\beta - \alpha - \alpha\beta)\sin^2 B]\,[1 - (2\alpha - \alpha^2)\sin^2 B]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \gamma_e [1 + (\beta - \alpha - \alpha\beta)\sin^2 B] \times$$

$$\times \left[1 + \frac{1}{2}(2\alpha - \alpha^2)\sin^2 B + \frac{3}{8}(2\alpha - \alpha^2)^2 \sin^4 B + \ldots\right] =$$

$$= \gamma_e \left[1 + \beta \sin^2 B - \left(\frac{1}{4}\alpha\beta + \frac{1}{8}\alpha^2\right)\sin^2 2B + \ldots\right].$$

Мы получили уравнение Клеро с точностью до малых второго порядка

$$\gamma = \gamma_e(1 + \beta \sin^2 B - \beta_1 \sin^2 2B), \qquad (10.32)$$

где

$$\beta_1 = \frac{1}{4}\beta\alpha + \frac{1}{8}\alpha^2. \qquad (10.33)$$

Остается найти связь β со сжатием α, т. е. получить второе уравнение теоремы Клеро, имеющее при удержании членов порядка сжатия вид

$$\beta = \frac{5}{2}q - \alpha.$$

Для этого введем в выражение для силы тяжести (10.28) значения $A_0\psi_0'(\omega_0)$ и $A_2\psi_2'(\omega_0)$, которые получим, дифференцируя (10.24) с учетом значений найденных констант c_1, c_2, c_3, c_4

и равенств (10.8):

$$A_0\psi_0'(w_0) = -c_2\frac{1}{1+\operatorname{sh}^2 w_0}\operatorname{ch} w_0 = -c_2\frac{c}{a} = -\frac{fM}{a},$$

$$A_2\psi_2'(w_0) =$$

$$= \left[3\left(\operatorname{arctg}\frac{c}{b} - \frac{c}{b}\right)\frac{ab}{c^2} + \frac{c}{a}\right]c_4 = \frac{2}{3}\omega^2 a^2 \frac{3\left(\operatorname{arctg}\frac{c}{b} - \frac{c}{b}\right)\frac{ab}{c^2} + \frac{c}{a}}{\left(1+\frac{3b^2}{c^2}\right)\operatorname{arctg}\frac{c}{b} - 3\frac{b}{c}}.$$

Теперь выражение силы тяжести (10.28) примет вид

$$\gamma = \frac{1}{c\sqrt{\operatorname{ch}^2 w_0 - \sin^2 u}}\times$$

$$\times\left[\frac{fM}{a} - \frac{2}{3}\omega^2 a^2 \frac{3\left(\operatorname{arctg}\frac{c}{b} - \frac{c}{b}\right)\frac{ab}{c^2} + \frac{c}{a}}{\left(1+3\frac{b^2}{c^2}\right)\operatorname{arctg}\frac{c}{b} - 3\frac{b}{c}} P_2(\cos u) - \omega^2 ab\sin^2 u\right].$$

Преобразуем в этом выражении знаменатель так, как это уже делалось при получении формулы (10.30), а в квадратной скобке представим $\sin^2 u$ через многочлены Лежандра: $\sin^2 u = \frac{2}{3}[1 - P_2(\cos u)]$; тогда

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u}}\left\{\frac{fM}{a} - \frac{2}{3}\omega^2 a^2 P_2(\cos u)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{3\left(\operatorname{arctg}\frac{c}{b} - \frac{c}{b}\right)\frac{ab}{c^2} + \frac{c}{a}}{\left(1+3\frac{b^2}{c^2}\right)\operatorname{arctg}\frac{c}{b} - 3\frac{b}{c}} + \frac{2}{3}\omega^2 ab\,[P_2(\cos u) - 1]\right\}. \quad (10.34)$$

Преобразуем уравнение (10.30):

$$\gamma = \frac{\gamma_p a\cos^2 u + \gamma_e b\sin^2 u}{\sqrt{a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u}}.$$

Выразив в числителе $\cos^2 u$ и $\sin^2 u$ через многочлен Лежандра

$$\cos^2 u = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}P_2(\cos u),$$

получим

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u}}\left[\frac{1}{3}a\gamma_p + \frac{2}{3}b\gamma_e + \frac{2}{3}(a\gamma_p - b\gamma_e)P_2(\cos u)\right]. \quad (10.35)$$

Формулы (10.34) и (10.35) выражают одну и ту же величину — силу тяжести на уровенном эллипсоиде. Значит, выра-

жение в квадратной скобке (10.35) равно выражению в фигурной скобке (10.34) и соответственно равны коэффициенты при $P_2(\cos u)$ и свободные члены обоих выражений. После упрощений получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{3}a\gamma_p + \frac{2}{3}b\gamma_e &= \frac{fM}{a} - \frac{2}{3}\omega^2 ab, \\ a\gamma_p - b\gamma_e &= \omega^2 ab\left[1 - \frac{3\left(\operatorname{arctg}\frac{c}{b} - \frac{c}{b}\right)\frac{a^2}{c^2} + \frac{c}{b}}{\left(1+3\frac{b^2}{c^2}\right)\operatorname{arctg}\frac{c}{b} - 3\frac{b}{c}}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (10.36)$$

После простых преобразований квадратной скобки будем иметь

$$a\gamma_p - b\gamma_e = \frac{2\omega^2 ac^2}{b}\,\frac{\frac{c}{b} - \operatorname{arctg}\frac{c}{b}}{\left(\frac{c^2}{b^2}+3\right)\operatorname{arctg}\frac{c}{b} - 3\frac{c}{b}}. \qquad (10.37)$$

Уравнение (10.37) вместе с формулой Пицетти — Сомильяна (10.31) представляет собой точное выражение теоремы Клеро для уровенной поверхности, заданной в форме эллипсоида вращения. Теорема Клеро показывает, что при известных элементах эллипсоида a и α (или, что одно и то же, a и b), а также угловой скорости вращения его ω и экваториальной постоянной γ_e возможно получить значение ускорения силы тяжести в любой точке на поверхности эллипсоида.

В формулу Пицетти — Сомильяна (10.31) входит еще величина γ_p, которая выражается через основные параметры полученным соотношением (10.37). Так же как от формулы (10.31), мы приходим к (10.32) — обычному написанию теоремы Клеро; раскладывая в ряд (10.37) и удерживая члены порядка квадрата сжатия, мы получим обычную форму написания второй части теоремы Клеро.

Введем в (10.37) второй эксцентриситет $e' = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b} = \frac{c}{b}$:

$$a\gamma_p - b\gamma_e = \frac{2\omega^2 abe'^2\,(e' - \operatorname{arctg} e')}{(e'^2+3)\operatorname{arctg} e' - 3e'}. \qquad (10.38)$$

Разложим $\operatorname{arctg} e'$ в ряд

$$\operatorname{arctg} e' = e' - \frac{e'^3}{3} + \frac{e'^5}{5} - \frac{e'^7}{7} + \ldots,$$

используем приближенное равенство

$$e'^2 = 2\alpha + 3\alpha^2,$$

выражающее второй эксцентриситет через сжатие, и выразим

b через a и α. Тогда

$$\gamma_p a - \gamma_e a(1-\alpha) = \frac{5}{2}\omega^2 a^2(1-\alpha)\left(1+\frac{18}{35}\alpha\right).$$

Деля обе части равенства на $a\gamma_e$, получим

$$\frac{\gamma_p-\gamma_e}{\gamma_e}+\frac{\gamma_e}{\gamma_e}\alpha=\frac{5}{2}\frac{\omega^2 a}{\gamma_e}\left(1-\frac{17}{35}\alpha\right)$$

или

$$\frac{\gamma_p-\gamma_e}{\gamma_e}+\alpha=\frac{5}{2}\frac{\omega^2 a}{\gamma_e}-\frac{17}{14}\frac{\omega^2 a}{\gamma_e}\alpha. \tag{10.39}$$

Обозначая $\frac{\gamma_p-\gamma_e}{\gamma_e}=\beta$ и $\frac{\omega^2 a}{\gamma_e}=q$, получим окончательный вид второй формулы Клеро с точностью до квадрата сжатия

$$\beta+\alpha=\frac{5}{2}q-\frac{17}{14}q\alpha \tag{10.40}$$

и с точностью до первой степени сжатия

$$\beta=\frac{\gamma_p-\gamma_e}{\gamma_e}=\frac{5}{2}q-\alpha. \tag{10.41}$$

§ 6. Потенциал силы тяжести, заданный в виде разложения в ряд по сферическим функциям

Потенциал притяжения объемных масс имеет вид

$$V=f\int\frac{dm}{r}.$$

Для того чтобы развернуть это выражение в ряд, надо представить $1/r$ в виде ряда многочленов Лежандра и произвести почленное интегрирование.

Ранее было получено разложение величины $1/r$ по многочленам Лежандра (9.39)

$$\frac{1}{r}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R^n}{\rho^{n+1}}P_n(\cos\theta).$$

Вводя значения первых многочленов Лежандра, развернем сумму (9.39):

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\rho}+\frac{R}{\rho^2}\cos\theta+\frac{1}{2}\frac{R^2}{\rho^3}(3\cos^2\theta-1)+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{R^3}{\rho^4}(5\cos^3\theta-3\cos\theta)+\ldots+\frac{R^n}{\rho^{n+1}}P_n(\cos\theta)+\ldots. \tag{10.42}$$

Разложение (10.42) внесем в формулу для объемного потенциала:

$$V = f\int\frac{dm}{r} = f\int\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R^n}{\rho^{n+1}}P_n(\cos\theta)\,dm.$$

Проведем интегрирование первых трех членов разложения. Остальные члены запишем в общем виде

$$V = f\int\frac{dm}{\rho} + f\int\frac{R}{\rho^2}\cos\theta\,dm + f\int\frac{R^2}{2\rho^3}(3\cos^2\theta - 1)\,dm + \\ + f\sum_{n=3}^{\infty}\int\frac{R^n}{\rho^{n+1}}P_n(\cos\theta)\,dm. \qquad (10.43)$$

Произведем последовательное интегрирование трех выделенных членов. При этом следует иметь в виду, что $\rho = \text{const}$.

1) $\int dm = M$ — полная масса Земли.

2) $\int R\cos\theta\,dm = 0$, если начало координат выбрать в центре масс.

Последнее утверждение можно доказать следующим образом. Напишем два выражения для r^2:

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = (x^2+y^2+z^2) + \\ + (\xi^2+\eta^2+\zeta^2) - 2(x\xi + y\eta + z\zeta) = \rho^2 + R^2 - 2(x\xi + y\eta + z\zeta),$$

$$r^2 = \rho^2 + R^2 - 2\rho R\cos\theta.$$

Здесь x, y, z — координаты притягиваемой точки, ξ, η, ζ — текущие координаты элемента массы (рис. 70). Сравнивая оба выражения для r, получаем

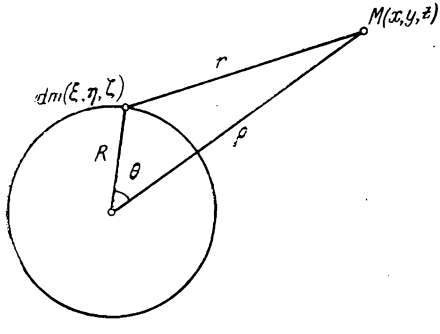


Рис. 70.

$$\cos\theta = \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{\rho R}.$$

Поэтому

$$\int R\cos\theta\,dm = \int R\frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{\rho R}\,dm = \\ = \frac{1}{\rho}\left[x\int\xi\,dm + y\int\eta\,dm + z\int\zeta\,dm\right].$$

Если начало координат выбрать в центре масс, то координаты

центра масс равны нулю:

$$\bar{\xi}_0 = \frac{\int \xi\, dm}{\int dm} = 0, \quad \bar{\eta}_0 = \frac{\int \eta\, dm}{\int dm} = 0, \quad \bar{\zeta}_0 = \frac{\int \zeta\, dm}{\int dm} = 0.$$

Отсюда имеем

$$\int \xi\, dm = \int \eta\, dm = \int \zeta\, dm = 0,$$

что и доказывает написанное равенство.

3) Рассмотрим третий член

$$\frac{1}{2\rho^3} \int R^2 (3\cos^2\theta - 1)\, dm.$$

Чтобы раскрыть значение этого выражения, представим R и $\cos\theta$ через координаты $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$:

$$\frac{1}{2\rho^3} \int R^2 (3\cos^2\theta - 1)\, dm =$$

$$= \frac{1}{2\rho^3} \int \left[\frac{3}{\rho^2} (x\xi + y\eta + z\zeta)^2 - R^2\right] dm =$$

$$= \frac{1}{2\rho^5} \int [3x^2\xi^2 + 3y^2\eta^2 + 3z^2\zeta^2 - \rho^2 R^2]\, dm =$$

$$= \frac{1}{2\rho^5} \int [3x^2\xi^2 + 3y^2\eta^2 + 3z^2\zeta^2 - R^2(x^2 + y^2 + z^2)]\, dm.$$

Здесь опущены произведения вида

$$\int xy\xi\eta\, dm = xy \int \xi\eta\, dm,$$

так как это произведения инерции или так называемые центробежные моменты, которые обращаются в нуль в случае, если координатные оси выбраны совпадающими с главными осями инерции. Полученный интеграл разобьем на члены, содержащие x^2, y^2 и z^2, и внесем значение $R^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$. Тогда получим

$$\frac{1}{2\rho^5}\left[\int x^2 (3\xi^2 - R^2)\, dm + \int y^2 (3\eta^2 - R^2)\, dm + \right.$$
$$\left. + \int z^2 (3\zeta^2 - R^2)\, dm\right] = \frac{1}{2\rho^5}\left[\int x^2 (2\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2)\, dm + \right.$$
$$\left. + \int y^2 (2\eta^2 - \zeta^2 - \xi^2)\, dm + \int z^2 (2\zeta^2 - \xi^2 - \eta^2)\, dm\right]. \quad (10.44)$$

Введем обозначения

$$\left.\begin{aligned} \int (\eta^2 + \zeta^2)\, dm = A, \quad \int (\zeta^2 + \xi^2)\, dm = B, \\ \int (\xi^2 + \eta^2)\, dm = C. \end{aligned}\right\} \quad (10.45)$$

Это — моменты инерции тела относительно осей ξ, η, ζ соответственно. С помощью (10.45) представим интегралы, входящие в выражение (10.44), следующим образом:

$$\int (2\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2)\, dm = B + C - 2A,$$

$$\int (2\eta^2 - \zeta^2 - \xi^2)\, dm = C + A - 2B,$$

$$\int (2\zeta^2 - \xi^2 - \eta^2)\, dm = A + B - 2C.$$

Тогда (10.44) примет вид

$$\frac{1}{2\rho^5}[x^2(B + C - 2A) + y^2(C + A - 2B) + z^2(A + B - 2C). \quad (10.46)$$

Представим это выражение в сферических координатах:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho \cos\varphi \cos\lambda, \\ y &= \rho \cos\varphi \sin\lambda, \\ z &= \rho \sin\varphi, \end{aligned}\right\} \quad (10.47)$$

где φ — широта, λ — долгота. Представляя $\cos^2\lambda$ через функцию двойного угла, получим

$$\frac{1}{2\rho^3}\int R^2(3\cos^2\theta - 1)\, dm =$$

$$= \frac{1}{2\rho^3}\left(C - \frac{A+B}{2}\right)(1 - 3\sin^2\varphi) + \frac{3}{4\rho^3}(B - A)\cos^2\varphi \cos 2\lambda. \quad (10.48)$$

Внесем полученные значения интегралов в формулу для разложения потенциала (10.43), причем $\sin^2\varphi$ заменим через косинус полярного расстояния $\cos^2\theta$, где θ — полярное расстояние от полюса Земли,

$$V = \frac{fM}{\rho} + \frac{f}{2\rho^3}\left(C - \frac{A+B}{2}\right)(1 - 3\cos^2\theta) +$$

$$+ \frac{3f}{4\rho^3}(B - A)\sin^2\theta \cos 2\lambda + f\sum_{n=3}^{\infty}\int \frac{R^n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos\theta)\, dm. \quad (10.49)$$

Если пренебречь членами разложения выше второго порядка, то мы получаем значение потенциала трехосной Земли, используемое при получении нормальной формулы с долготным членом

$$V = \frac{fM}{\rho} + \frac{f}{2\rho^3}\left(C - \frac{A+B}{2}\right)(1 - 3\cos^2\theta) +$$

$$+ \frac{3f}{4\rho^3}(B - A)\sin^2\theta \cos 2\lambda, \quad (10.50)$$

или, представляя второй член через сферические функции,

$$V = \frac{fM}{\rho} - \frac{f}{\rho^3}\left(C - \frac{A+B}{2}\right) P_2(\cos\theta) + \\ + \frac{3}{4}\frac{f}{\rho^3}(B - A)\sin^2\theta\cos 2\lambda. \quad (10.50')$$

Если рассматривать Землю как тело вращения, то моменты инерции относительно экваториальных осей равны $A = B$; тогда третий член в (10.49) исчезает, а второй принимает вид

$$\frac{f}{2\rho^3}(C - A)(1 - 3\cos^2\theta) = -\frac{f}{\rho^3}(C - A)\,P_2(\cos\theta).$$

Вынося $\frac{fM}{R}$ за скобки, представим потенциал (10.49) в виде

$$V = \frac{fM}{R}\left\{\frac{R}{\rho} - \frac{(C-A)}{MR^2}\frac{R^3}{\rho^3}P_2(\cos\theta) - \sum_{n=3}^{\infty}\frac{R}{M}\int\frac{R^n}{\rho^{n+1}}P_n(\cos\theta)\,dm\right\}. \quad (10.51)$$

Обозначим $\frac{(C-A)}{MR^2} = J_2$. Эта константа характеризует сжатие Земли. Аналогично можно ввести для членов разложения высшего порядка величины $J_3, J_4, \ldots, J_n$, которые характеризуют динамические свойства Земли. Тогда выражение (10.51) можно записать в виде

$$V = \frac{fM}{R}\left\{\frac{R}{\rho} - J_2\frac{R^3}{\rho^3}P_2(\cos\theta) - \sum_{n=3}^{\infty}J_n\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+1}P_n(\cos\theta)\right\}. \quad (10.52)$$

Чтобы получить потенциал силы тяжести, надо добавить к (10.52) потенциал центробежной силы

$$\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \frac{\omega^2}{2}\rho^2\sin^2\theta = \frac{\omega^2\rho^2}{3}[1 - P_2(\cos\theta)].$$

Теперь потенциал силы тяжести Земли, рассматриваемой в виде тела вращения, выраженный через сферические функции, будет

$$W = \frac{fM}{R}\left\{\frac{R}{\rho} - J_2\frac{R^3}{\rho^3}P_2(\cos\theta) - \sum_{n=3}^{\infty}J_n\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+1}P_n(\cos\theta)\right\} + \\ + \frac{\omega^2\rho^2}{3}[1 - P_2(\cos\theta)].$$

Первые два члена и член, зависящий от вращения, определяют нормальный потенциал

$$W = \frac{fM}{R}\left\{\frac{R}{\rho} - J_2\frac{R^3}{\rho^3}P_2(\cos\theta) + \frac{\omega^2\rho^2}{3}[1 - P_2(\cos\theta)]\right\}. \quad (10.53)$$

Этому потенциалу соответствует уровенная поверхность в виде сфероида, который с точностью до сжатия совпадает с эллипсоидом вращения. Получим уравнение этого сфероида и установим связь J_2 со сжатием. Для этого в уравнении (10.53) заменим $P_2(\cos\theta)$ через синус геоцентрической широты, а угловую скорость ω — через q: $q = \frac{\omega^2 R}{\gamma_e} = \frac{\omega^2 R^3}{fM}$, откуда $\omega^2 = \frac{qfM}{R^3}$. Тогда

$$W = \frac{fM}{\rho} - \frac{f}{2\rho^3}MR^2J_2(1 - 3\sin^2\varphi') + \frac{qfM}{2R^3}\rho^2\cos^2\varphi'.$$

Приравнивая W константе, получим семейство уровенных поверхностей. Чтобы из них выбрать нормальный сфероид, надо определить константу таким образом, чтобы полученная поверхность наилучшим образом совпадала с поверхностью Земли, т. е. надо положить на экваторе $\rho = R$, $\varphi' = 0$. Тогда $C = \frac{fM}{R}\left(1 + \frac{J_2}{2} + \frac{q}{2}\right)$ и уравнение сфероида будет

$$\frac{fM}{\rho}\left\{1 + \frac{J_2}{2}\frac{R^2}{\rho^2}(1 - 3\sin^2\varphi') + \frac{q}{2}\frac{\rho^3}{R^3}\cos^2\varphi'\right\} = \frac{fM}{R}\left(1 + \frac{J_2}{2} + \frac{q}{2}\right). \quad (10.54)$$

Полученное уравнение можно представить в виде

$$\frac{\rho}{R} = \frac{1 + J_2\frac{R^2}{2\rho^2}(1 - 3\sin^2\varphi') + \frac{q}{2}\frac{\rho^3}{R^3}\cos^2\varphi'}{1 + \frac{J_2}{2} + \frac{q}{2}}.$$

Раскладывая в ряд знаменатель и делая перемножение с удержанием членов порядка сжатия, получим

$$\frac{\rho}{R} = 1 - \left(\frac{3J_2}{2} + \frac{q}{2}\right)\sin^2\varphi'. \quad (10.55)$$

Это есть уравнение сфероида со сжатием

$$\alpha = \frac{3J_2}{2} + \frac{q}{2}. \quad (10.56)$$

Таким образом, уровенная поверхность модели Земли с нормальным гравитационным полем представляет собой сфероид. Этот сфероид является геоидом идеальной Земли. Разность между потенциалом W реальной Земли и нормальным потен-

циалом U называют возмущающим потенциалом и обозначают $T = W - U$.

В зависимости от выбора нормального потенциала разложение для T будет иметь различный вид. Если U выбрать так, чтобы fM и J_2 в (10.53) точно равнялись соответствующим величинам в (10.49), то возмущающий потенциал будет равен

$$T = f \sum_{n=3}^{\infty} \int \frac{R^n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos\theta)\, dm. \qquad (10.57)$$

Разложение (10.57) и в этом случае содержит сферическую функцию второго порядка, так как присоединенные функции сохранятся. Разложение (10.57) показывает, что при благоприятном выборе нормального потенциала произведения

$$\left|\rho^3 T\right|, \quad \left|\rho^4 \frac{\partial T}{\partial x}\right|, \quad \left|\rho^4 \frac{\partial T}{\partial y}\right|, \quad \left|\rho^4 \frac{\partial T}{\partial z}\right| \qquad (10.58)$$

могут остаться величинами, ограниченными при неограниченном удалении точки от Земли ($\rho/R \to \infty$).

§ 7. Формулы нормального значения силы тяжести

Формулы (10.31) и (10.32) с числовыми коэффициентами α, γ_e, γ_p или γ_e, β, β' получили название формул нормального распределения силы тяжести или просто нормальных формул. Они дают значения силы тяжести в зависимости от широты места для уровенной поверхности некоторой идеальной Земли, заданной в форме эллипсоида вращения.

Уравнения (10.31) и (10.32) получены при единственном предположении, что внешняя форма Земли представляется эллипсоидом вращения малого сжатия и что вне этого эллипсоида нет никаких масс. Возможно получение уравнения типа (10.32) также и в предположении, что Земля представляется наилучшим образом трехосным эллипсоидом, конечно, тоже с малым экваториальным сжатием. Тогда формула (10.32) приобретает член, зависящий от долготы:

$$\gamma = \gamma_e[1 + \beta \sin^2 B - \beta' \sin^2 2B + \beta'' \cos^2 B \cos 2(\lambda - \lambda_0)]. \qquad (10.59)$$

Уравнение (10.32) устанавливает закон распределения силы тяжести на уровенном эллипсоиде. Формально соотношение (10.32) позволяет определить сжатие Земли только по трем определениям силы тяжести. Уравнение имеет три неизвестных: γ_e, β, β'. Если определить силу тяжести в трех произвольных точках с различными широтами B, мы получим три уравнения для нахождения трех искомых величин.

Все это справедливо лишь для эллипсоидальной Земли. Сила тяжести на истинной Земле подчиняется закону (10.31) или (10.59) только в первом приближении. В каждой данной точке сила тяжести и уровенные поверхности могут отклоняться от идеальной схемы вследствие специфики распределения масс. Поэтому для того чтобы найти сжатие уровенного эллипсоида и закон распределения силы тяжести на нем, наилучшим образом соответствующие истинной Земле, поступают следующим образом: определяют силу тяжести в возможно большем числе точек, возможно равномернее распределенных по земной поверхности, подставляют эти значения в уравнения (10.32), (10.59) и, решая по способу наименьших квадратов систему условных уравнений, находят значения γ_e, β, а для трехосного эллипсоида — и β'', и λ_0. Коэффициент β' при решении системы условных уравнений вида (10.32) в силу малости определяется крайне неуверенно. Обычно его определяют простым расчетом, задаваясь сжатием Земли и величиной q. Подставляя найденные численные значения в формулу (10.32) или (10.59), получают закон распределения силы тяжести на земной поверхности. Этот закон представляет истинное распределение силы тяжести наилучшим образом. Конечно, это уравнение будет тем ближе к истине, чем подробнее изучено гравитационное поле Земли. Найденному таким образом уравнению с числовыми коэффициентами будет соответствовать вполне определенный эллипсоид со сжатием α.

Формулы нормального распределения силы тяжести выводились многими авторами, однако в настоящее время практически применяются лишь две из них. Это формула Гельмерта 1901—1909 гг. для эллипсоида вращения и формула Кассиниса 1930 г., принятая как международная. Было выполнено еще несколько выводов нормальной формулы, в частности И. Д. Жонголовичем в 1952 г., Гейсканеном в 1957 г., Уотила в 1957 г., Н. П. Грушинским в 1962 г. и др. Ниже приводятся эти формулы с краткими пояснениями.

1. Формула нормальной силы тяжести Гельмерта 1901—1909 гг. получена по 1603 гравиметрическим станциям, разбитым на 9 широтных зон, каждая из которых разделена на криволинейные трапеции со стороной в 10°. Из числа станций исключены станции, расположенные на островах, вблизи берегов и на горах. Формула имеет вид

$$\gamma_0 = 978{,}030(1 + 0{,}005302 \sin^2 B - 0{,}000007 \sin^2 2B). \quad (10.60)$$

Эта формула получена методом разложения потенциала в ряд многочленов Лежандра, в котором удержаны вторая и четвертая гармоники. Поэтому фигурой относимости в этом случае будет сфероид, однако в принятом приближении не отли-

чающийся от эллипсоида вращения, соответствующего формуле (10.31). Сфероид, соответствующий формуле Гельмерта, имеет сжатие $\alpha = 1/298{,}2$. При выводе формулы по гравиметрическим данным получены коэффициенты g_e и β. Коэффициент $\beta' = 0{,}000007$ вычислен Гельмертом в соответствии с гипотезой Вихерта и Дарвина о внутреннем строении Земли. Из решения уравнения (10.31) этот коэффициент получается неуверенно. При современной гравитационной изученности Земли формула Гельмерта представляется слабо обоснованной и устаревшей. Тем не менее она применяется в практике советских гравиметрических работ в силу двух основных обстоятельств: эллипсоид, представляемый этой формулой, имеет сжатие, почти совпадающее со сжатием эллипсоида Красовского ($\alpha = 1/298{,}3$), который принят в качестве эллипсоида относимости для геодезических работ СССР и который, по-видимому, достаточно хорошо представляет всю Землю (современное значение сжатия 1/298,26). Переход на новую формулу громоздок и требует большой дополнительной работы.

Сейчас в формулу Гельмерта вносится поправка на новую потсдамскую систему, равная — 14 миллигал.

В 1971 г. на ассамблее Международного союза геофизики и геодезии в Москве была рекомендована новая формула нормального значения силы тяжести, получившая название системы 1967 г. Эта формула имеет вид

$$\gamma = 9\,780\,318(1 + 0{,}0053024 \sin^2\varphi - 0{,}0000059 \sin^2 2\varphi)$$

или

$$\gamma = 9\,780\,318{,}5(1 + 0{,}005278895 \sin^2\varphi + 0{,}000023462 \sin^4\varphi).$$

Для перехода от формулы Кассиниса к системе 1967 г. следует ввести поправку

$$-17{,}2 + 13{,}6 \sin^2\varphi \ \textit{мгл}.$$

2. Формула Кассиниса 1930 г., принятая как международная на Стокгольмском международном геодезическом конгрессе в 1930 г.:

$$\gamma_0 = 978{,}049[1 + 0{,}0052884 \sin^2 B - 0{,}0000059 \sin^2 2B]. \quad (10.62)$$

В этой формуле по гравиметрическим данным получен лишь коэффициент $g_e = 978{,}049$. Коэффициенты β и β' найдены по формулам (10.33) и (10.41) для эллипсоида Хейфорда со сжатием $\alpha = 1/297{,}0$, также предложенного в качестве международного на том же конгрессе.

3. Формула Жонголовича 1952 г. получена из обработки 26 000 гравиметрических пунктов. По этим пунктам были образованы средние значения аномалий для криволинейных тра-

пеций, равных по площади трапеции под экватором со сторонами 10°. Вся Земля была разбита на 410 площадок, в 229 из которых имелись наблюденные значения силы тяжести. Представленный таким образом потенциал гравитационного поля разлагался в ряд по сферическим функциям.

Таким путем Жонголович получил следующие формулы нормальной силы тяжести:

для эллипсоида вращения

$$\left.\begin{aligned} \gamma_0 &= 978{,}0573\,[1 + 0{,}0052837\sin^2 B - 0{,}0000059\sin^2 2B], \\ \alpha &= \frac{1}{296{,}6}, \end{aligned}\right\} \tag{10.63}$$

для трехосного эллипсоида

$$\gamma_0 = 978{,}0573\,[1 + 0{,}005268\sin^2 B - 0{,}0000059\sin^2 2B + 0{,}0000155\cos^2 B\cos 2(\lambda + 6°)], \tag{10.64}$$

наименьшее сжатие $\alpha = 1/298{,}1$.

4. Вывод формулы нормального значения силы тяжести Гейсканена сделан в 1957 г. При этом все гравиметрические наблюдения объединялись по площадкам со сторонами $1° \times 1°$. Всего имели гравиметрические данные 6679 таких площадок (у Жонголовича имели характеристику 4378 таких площадок). Средние аномалии по одноградусным площадкам объединялись в средние по площадям со сторонами $5° \times 5°$. Коэффициенты формулы (10.31) получены из решения системы условных уравнений методом наименьших квадратов. Решение находилось для двух систем уравнений, представляющих одноградусные и пятиградусные площадки. Результаты в обоих случаях получены близкие.

Приводим формулу Гейсканена 1957 г., полученную по 5° площадкам для эллипсоида вращения

$$\left.\begin{aligned} \gamma_0 &= 978{,}0497\,[1 + 0{,}0052902\sin^2 B - 0{,}0000059\sin^2 2B], \\ \alpha &= \frac{1}{297{,}2} \end{aligned}\right\} \tag{10.65}$$

и для трехосного эллипсоида

$$\gamma_0 = 978{,}0516\,[1 + 0{,}0052910\sin^2 B - 0{,}0000059\sin^2 2B + 0{,}0000106\cos^2 B\cos 2(\lambda + 6°)]. \tag{10.66}$$

Примерно в то же время Уотилой были вычислены параметры формулы нормального распределения для Земли. Вывод получен путем решения системы условных уравнений, которые со-

ставлялись для средних значений силы тяжести в трапециях со сторонами 1° дуги под экватором.

Уотилой также решена задача отдельно для северного и южного полушарий, причем получено значительное расхождение между направлением большой экваториальной оси в северном и южном полушариях. Задача решена для аномалии силы тяжести с редукцией в свободном воздухе и с изостатической редукцией (табл. 7).

Таблица 7

Область использования аномалий	γ_e	$\beta \cdot 10^3$	α^{-1}_{max}	α^{-1}_{min}	λ_0
Аномалии в свободном воздухе, *мгл*					
Северное полушарие	978 044,9	5,30294	297,7	299,0	3°,5W
Южное полушарие	057,5	29041	296,5	297,7	79°,0E
Вся Земля	048,0	29803	297,2	298,4	8°,5W
Изостатические аномалии, *мгл*					
Северное полушарие	978 044,7	5,30307	297,5	299,0	7°,0W
Южное полушарие	051,5	5,29455	296,6	298,3	84°,5E
Вся Земля	045,5	5,30157	297,5	298,5	18°,0W

В 1962 г. Уотила уточнил свои результаты и получил нормальные формулы по аномалиям в свободном воздухе

$$\gamma = 978047{,}8[1 + 0{,}0052974 \sin^2 \varphi - 0{,}00000586 \sin^2 2\varphi]$$

и по изостатистическим аномалиям

$$\gamma = 978045{,}1[1 + 0{,}0053009 \sin^2 \varphi - 0{,}00000585 \sin^2 2\varphi].$$

Аналогично, но на существенно ином материале Н. П. Грушинский в 1962 г. получил коэффициенты для формулы нормального значения силы тяжести для всей Земли и раздельно для северного и южного полушария (табл. 8).

Таблица 8

Область использования аномалий	γ_e	$\beta \cdot 10^3$	α^{-1}	λ_0
Северное полушарие	978050,1	0,0052889	297,1	15°W
Южное полушарие	057,1	52905	297,2	25°E
Вся Земля	053,1	52883	297,0	7°W

Вычисления велись по осредненным значениям аномалий в пределах равновеликих трапеций 5°×5° под экватором. Всего было использовано 842 таких трапеции с известными значениями аномалий. Это составляет 51% покрытия гравитационными данными всей Земли. Для пустых трапеций принимались гипотетические данные, полученные по разложению аномального гравитационного поля по сферическим функциям до восьмого порядка. В этом первом приближении для пустых трапеций

Таблица 9

Автор	Год	Область Земли	$(a-b)$ м	λ
По геодезическим определениям				
Гельмерт	1915	—	230±51	17°W
Беррот	1916	—	150±58	10 W
Гейсканен	1924	—	345±38	18 E
Гейсканен	1929	—	165±57	38 E
Хирвонен	1933	—	139±16	19 W
Изотов	1948	—	213	15 E
Красовский	1936	—	213	10 E
Гейсканен	1938	—	354	25 W
Гейсканен	1938	—	303	3°W
По гравиметрическим определениям				
Жонголович	1952	Вся Земля	—	6°W
Гейсканен	1957	Вся Земля	—	6 W
Гейскнен	1957	Сев. полушарие	—	10 W
Гейсканен	1957	Южн. полушарие	—	56 E
Уотила	1959	Вся Земля	—	830′W
Уотила	1959	Сев. полушарие	—	330′W
Уотила	1959	Южн. полушарие	—	79 30′E
Грушинский	1961	Вся Земля	—	7 W
Грушинский	1961	Сев. полушарие	—	15 W
Грушинский	1961	Южн. полушарие	—	25°E

принимались интерполированные или нулевые значения аномалий, в зависимости от общей изученности. Выводы подтвердили асимметрию северного и южного полушарий, однако разница λ_0 для разных полушарий здесь оказалась меньше, а именно 15°W и 25°E. Для всей Земли λ_0 оказалось близким к результатам, полученным Уотилой.

В свое время много внимания уделялось так называемой трехосности Земли. Приводимая здесь таблица 9 свидетель-

ствует о неуверенности определения этой трехосности. Направление большой экваториальной оси в зависимости от использованного материала колеблется по долготе в пределах от $+38°$ до $-25°$, т. е. направление этой оси определяется с угловым разбросом в 60°. Вывод же об асимметрии северного и южного полушарий еще более ставит под сомнение правомочность трактовать изменение экваториального радиуса Земли как трехосность. Естественнее изменения экваториального радиуса считать крупной волной геоида, имеющей к тому же различный ход в северном и южном полушариях. Это согласуется также с теоретическим положением о неустойчивости трехосных вращающихся фигур, за исключением сильно вытянутого, типа сигары, трехосного эллипсоида Якоби, которым никак невозможно аппроксимировать Землю.

§ 8. Представление формулы нормального значения силы тяжести через коэффициенты разложения по сферическим функциям

В последнее время для характеристики гравитационного поля и фигуры Земли обычно пользуются коэффициентами разложения аномалий по сферическим функциям. В соответствии с этим нормальная формула силы тяжести, представленная в общем виде формулой (10.31) или формулой (10.32), может быть представлена в виде суммы сферических гармоник. Для получения выражения нормального значения силы тяжести через сферические многочлены и соответствующие коэффициенты разложения воспользуемся формулой Пицетти — Сомильяна

$$\gamma = \gamma_e \frac{1 + (\beta - \alpha - \alpha\beta)\sin^2 B}{\sqrt{1 - (2\alpha - \alpha^2)\sin^2 B}}. \tag{10.67}$$

Выражение (10.67) разложим в ряд по α и β, ограничиваясь их вторым порядком, и представим в полученном выражении степени $\sin B$ через функции Лежандра:

$$\left.\begin{aligned} \sin^2 B &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} P_2(\sin B), \\ \sin^4 B &= \frac{1}{5} + \frac{4}{7} P_2(\sin B) + \frac{8}{35} P_4(\sin B), \end{aligned}\right\} \tag{10.68}$$

$$\sin^2 \lambda = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\lambda. \tag{10.69}$$

Тогда нормальная формула значения силы тяжести может быть записана в виде

$$\gamma = A_{00} + A_{20} P_2^0(\sin B) + A_{40} P_4^0(\sin B), \tag{10.70}$$

где коэффициенты A_{n0} могут быть выражены через β:

$$\left.\begin{aligned} A_{00} &= \gamma_e\left(1+\frac{1}{3}\beta-\frac{8}{15}\beta_1-\frac{8}{35}\beta_2-\frac{23}{35}\beta_3\right),\\ A_{20} &= \gamma_e\left(\frac{2}{3}\beta-\frac{8}{21}\beta_1-\frac{8}{21}\beta_2-\frac{64}{231}\beta_3\right),\\ A_{40} &= \gamma_e\left(\frac{32}{35}\beta_1+\frac{128}{385}\beta_2+\frac{184}{5005}\beta_3\right), \end{aligned}\right\} \qquad (10.71)$$

$$\beta_1=\frac{1}{4}\alpha\beta+\frac{1}{8}\alpha^2,\ \beta_2=\frac{3}{8}\alpha^2\beta+\frac{1}{4}\alpha^3,\ \beta_3=\frac{1}{2}\alpha^3\beta+\frac{3}{8}\alpha^4.$$

Чтобы убедиться, что коэффициенты A_{00}, A_{20}, A_{40} есть действительно коэффициенты разложения по многочленам Лежандра, надо в уравнение (10.70) ввести значения многочленов Лежандра и значения A_{n0} из (10.71), после чего мы получим формулу нормального значения силы тяжести в ее обычном написании

$$\gamma=\gamma_e(1+\beta\sin^2 B-\beta_1\sin^2 2B).$$

Аналогично для трехосного эллипсоида нормальная формула может быть записана в таком виде:

$$\gamma=A_{00}+A_{20}P_2(\sin B)+A_{40}P_4(\sin B)+$$
$$+(A_{22}\cos 2\lambda+B_{22}\sin 2\lambda)P_2^2(\sin B). \qquad (10.72)$$

Долготы меридианов экстремального сжатия получатся по формуле

$$\operatorname{tg} 2\lambda_0=\frac{B_{22}}{A_{22}}. \qquad (10.73)$$

Численные значения коэффициентов разложения по сферическим функциям, полученные И. Д. Жонголовичем для трехосного эллипсоида, следующие:

для трехосного эллипсоида:

$$\begin{aligned} A_{00} &= 979776{,}84\pm 1{,}8\ \textit{мгл}\\ A_{20} &= \ \ 3442{,}98\pm 4{,}2,\\ A_{40} &= \ \ 5{,}27\ \ -,\\ A_{22} &= \ \ \ \ 4{,}91\pm 1{,}2,\\ B_{22} &= -1{,}12\pm 1{,}2, \end{aligned}$$

для двухосного эллипсоида:

$$\left.\begin{aligned} A_{00} &= 979776{,}84\pm 1{,}8\ \textit{мгл},\\ A_{20} &= 3442{,}98\pm 4{,}2,\\ A_{40} &= 5{,}27. \end{aligned}\right\} \qquad (10.74)$$

Соответственно нормальные формулы силы тяжести, выраженные через многочлены Лежандра, по И. Д. Жонголовичу имеют вид

для трехосной Земли:

$$\gamma = 979776{,}84 + 3442{,}98\,P_2(\sin B) + 5{,}27P_4(\sin B) + (\sin B), \\ +(4{,}91\cos 2\lambda - 1{,}12\sin 2\lambda)P_2^2 \qquad (10.75)$$

для двухосной Земли:

$$\gamma = 979776{,}84 + 3442{,}98P_2(\sin B) + 5{,}27P_4(\sin B). \quad (10.76)$$

§ 9. Нормальный геоид

До сих пор, выделяя нормальную составляющую гравитационного поля, мы ограничивались зональными сферическими гармониками второго и четвертого порядков. Такому нормальному полю соответствует поверхность относимости в виде сфероида. Геоид отстоит от этого сфероида относимости на расстояниях, определяемых аномалиями высот ζ. Нормальная формула Кассиниса, принятая за международную, будучи выражена через сферические функции, имеет вид

$$\gamma = 978049[1 + 0{,}00175965 + 0{,}00352335P_{20}(\sin B) + \\ +0{,}00000539P_{40}(\sin B)]. \quad (10.77)$$

Использование этой формулы означает, что при образовании аномалий в нормальную часть включены гармоники, учитывающие только сжатие, определяемое гармоникой $P_{20}(\sin B)$, и зональная волна $P_{40}(\sin B)$, имеющая небольшую амплитуду. Гармоники более высоких порядков включаются при этом в аномалии. Такому выбору нормальной формулы соответствует фигура относимости в виде сфероида вращения. Все отброшенные члены образуют аномалии.

Сохранение в качестве нормальной формулы всего бесконечного ряда приведет к тому, что такая формула будет представлять полное гравитационное поле, а соответствующей ей фигурой относимости будет фигура, полностью совпадающая с геоидом. При выборе нормальной формулы естественно включить в нее хорошо известную, обусловленную большими волнами геоида часть гравитационного поля, отнеся все остальное к аномалиям.

Разложение потенциала в ряд известно сейчас достаточно надежно до гармоник 18 порядка. Наиболее устойчивыми получаются гармоники до восьмого порядка. Поэтому удобно построить нормальное гравитационное поле, включающее гармоники до восьмого порядка.

Потенциал силы тяжести можно представить следующей формулой:

$$W(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{fM}{\rho}\left[1 + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{\rho}\right)^n (C_{nm}\cos m\lambda + \right.$$

$$\left. + S_{nm}\sin m\lambda)\, P_{nm}(\sin\varphi)\right] + \frac{\omega^2\rho^2}{3}[1 - P_{20}(\sin\varphi)]. \quad (10.78)$$

Здесь ρ, φ, λ — сферические координаты точки, в которой определяется потенциал. Последнее слагаемое правой части есть потенциал центробежной силы, обусловленный суточным вращением Земли, ω — угловая скорость суточного вращения, коэффициенты C_{nm}, S_{nm} — стоксовы коэффициенты, не зависящие от координат точки; они являются функцией фигуры Земли и распределения в ней масс. В общем виде они выражаются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} C_{n0} &= f\int_v \sigma(\rho, \varphi, \lambda)\,\rho^n P_{n0}(\sin\varphi)\,dv, \\ \begin{matrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{matrix} &= f\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_v \sigma(\rho, \varphi, \lambda)\,\rho^n P_{nm}(\sin\varphi)\begin{matrix}\cos m\lambda \\ \sin m\lambda\end{matrix} dv, \end{aligned}\right\} \quad (10.79)$$

где ρ, φ, λ — текущие координаты в теле Земли.

Двойной ряд представляет реальное поле Земли во всех его деталях. Каждая деталь рельефа, малейшая неоднородность плотности внутри Земли находят отражение в гравитационном поле, описанном выражением (10.78). Однако использование выражения (10.78) ограничено незнанием коэффициентов C_{nm}, S_{nm} высоких порядков.

Уравнение геоида получим, приравняв потенциал $W(\rho, \varphi, \lambda)$ константе $C = W_0$, которую выберем так, чтобы она была равна потенциалу в точке геоида с координатами $\rho = R$, $\varphi = 0$, $\lambda = 0$. Тогда уравнение геоида представится выражением

$$W(\rho, \varphi, \lambda) = W_0. \quad (10.80)$$

Отсюда можно выразить радиус-вектор ρ геоида как функцию координат φ, λ, представленную в виде разложения

$$\rho(\varphi, \lambda) = R\left[1 + a_{00} + \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}(a_{kl}\cos l\lambda + \right.$$

$$\left. + b_{kl}\sin l\lambda)\, P_{kl}(\sin\varphi)\right], \quad (10.81)$$

$$\frac{1}{\rho^n} = \frac{1}{R^n}[1 - na_{00} - n\sum\sum(a_{kl}\cos l\lambda + $$

$$+ b_{kl}\sin l\lambda)\, P_{kl}(\sin\varphi)], \quad (10.82)$$

где a_{kl}, b_{kl} — пока не известные коэффициенты, которые подлежат определению. Для этого подставим $\rho(\varphi, \lambda)$ и $1/\rho^n$ в уравнение геоида. При выполнении этой подстановки появляются произведения рядов. В этих произведениях удержим члены до порядка C_{20}^2. Квадрат сферической функции $P_{20}^2(\sin\varphi)$ представим соотношением

$$P_{20}^2(\sin\varphi) = \frac{1}{5} + \frac{2}{7} P_{20}(\sin\varphi) + \frac{18}{35} P_{40}(\sin\varphi).$$

Тогда, ограничиваясь порядком $n = 8$ и сравнивая коэффициенты при одинаковых порядках сферических функций, получим

$$\left.\begin{aligned} a_{00} &= \frac{1}{2} C_{20} - 3C_{22} - \frac{3}{8} C_{40} - \frac{q}{6} + \frac{2}{5} qC_{20} - \frac{1}{15} q^2 - \frac{3}{5} C_{20}^2, \\ a_{20} &= C_{20} - \frac{q}{3} + \frac{13}{14} qC_{20} - \frac{33}{14} C_{20}^2 - \frac{q^2}{21}, \\ a_{40} &= C_{40} + \frac{6}{35} qC_{20} + \frac{4}{35} q^2 - \frac{54}{35} C_{20}^2, \end{aligned}\right\} \tag{10.83}$$

и для остальных коэффициентов

$$\left.\begin{aligned} a_{nm} &= C_{nm}\left(1 + \frac{2}{3} q\right), \quad b_{nm} = S_{nm}\left(1 + \frac{2}{3} q\right) \\ &(n = 3, 5, 6, 7, 8, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{10.84}$$

где

$$q = \frac{\omega^2 R^3}{fM}.$$

Для построения нормальной формулы силы тяжести надо получить значение γ на поверхности геоида как функции только координат φ и λ.

Полная величина нормального значения силы тяжести может быть вычислена по формуле

$$\gamma = -\sqrt{\left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{}{\rho\cos\varphi}\frac{\partial W}{\partial \lambda}\right)^2} \approx$$

$$\approx -\frac{\partial W}{\partial \rho} - \frac{1}{2\rho^2 \dfrac{\partial W}{\partial \rho}}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 - \frac{1}{\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda}\right)^2\right]. \tag{10.85}$$

Дифференцируя W по ρ, λ, φ, получаем

$$-\frac{\partial W}{\partial \rho} = \frac{fM}{\rho^2} + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(n+1)\frac{fMR^n}{\rho^{n+1}}[(C_{nm}\cos m\lambda +$$

$$+ S_{nm}\sin m\lambda) P_{nm}(\sin\varphi)] - \frac{2}{3}\omega^2\rho[1 - P_{20}(\sin\varphi)$$

и т. д. Удерживая члены до квадрата C_{20}, получим

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial \rho} &= -\frac{fM}{\rho^2}\left\{1 + 3C_{20}\frac{R^2}{\rho^2}P_{20}(\sin\varphi) + \right.\\
&\quad + 3C_{22}\frac{R^2}{\rho^2}P_{22}(\sin\varphi)\cos 2\lambda + 5C_{40}\frac{R^4}{\rho^4}P_{40}(\sin\varphi) - \\
&\quad \left. - \frac{2}{3}q - \frac{\rho^3}{R^2}[1 - P_{20}(\sin\varphi)]\right\},\\
\frac{\partial W}{\partial \varphi} &= \frac{fM}{\rho}\left\{C_{20}\frac{R^2}{\rho^2}P_{21}(\sin\varphi) - \right.\\
&\quad - 2C_{22}\frac{R^2}{\rho^2}P_{21}(\sin\varphi)\cos 2\lambda + C_{40}\frac{R^4}{\rho^4}P_4(\sin\varphi) - \\
&\quad \left. - \frac{q}{3}\frac{\rho^3}{R^3}P_{21}(\sin\varphi)\right\},\\
\frac{\partial W}{\partial \lambda} &= -2\frac{fM}{\rho^3}R^3C_{22}P_{22}(\sin\varphi)\sin 2\lambda.
\end{aligned}\right\} \quad (10.86)$$

Подставляя значение (10.86) в формулу (10.85) для γ, а также вводя значения $1/\rho$ и $1/\rho^n$ согласно (10.81) и (10.82), получим

$$\gamma = \frac{fM}{R^2}\left[1 + g_{00} + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(g_{nm}\cos m\lambda + \right.$$
$$\left. + h_{nm}\sin m\lambda)P_{nm}(\sin\varphi)\right]. \quad (10.87)$$

Если пренебречь членами второго и третьего порядка малости, кроме C_{20}^2, и положить $\rho/R = 1$ и $P_{21}^2(\sin\varphi) = -\frac{72}{35}P_{40}(\sin\varphi) + \frac{6}{7}P_{20}(\sin\varphi) + \frac{6}{5}$, то для коэффициентов g_{nm} и h_{nm} получим следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned}
g_{00} &= -\frac{2}{3}q - 2a_{00} + \left(\frac{2}{15}q - \frac{12}{5}C_{20}\right)a_{20} - \frac{2}{3}qa_{00} - \\
&\quad - \frac{2}{5}qC_{20} + \frac{3}{5}C_{20}^2 + \frac{1}{15}q^2,\\
g_{20} &= 3C_{20} + \frac{2}{3}q - \left(2 + \frac{10}{21}q + \frac{24}{7}C_{20}\right)a_{20} + \\
&\quad + \left(\frac{2}{3}q - 12C_{20}\right)a_{00} - \frac{2}{7}qC_{20} + \frac{3}{7}C_{20}^2 + \frac{1}{21}q^2,\\
q_{40} &= 5C_{40} - \left(2 + \frac{2}{3}q\right) + \left(\frac{12}{35}q - \frac{216}{35}C_{20}\right)a_{20} - \\
&\quad - \frac{36}{65}C_{20}^2 - \frac{4}{35}q^2 + \frac{24}{35}qC_{20}
\end{aligned}\right\} \quad (10.88)$$

и для остальных членов

$$\left.\begin{aligned} g_{nm} &= (n+1)\,C_{nm} - \left(2+\frac{2}{3}\,q\right)a_{nm}, \\ h_{nm} &= (n+1)\,S_{nm} - \left(2+\frac{2}{3}\,q\right)b_{nm}, \end{aligned}\right\} \tag{10.89}$$

где $n = 3, 5, 6, 7, 8$, $m = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Подставляя в формулу для g_{nm} и h_{nm} вместо a_{nm} и b_{nm} их выражения через C_{nm}, S_{nm} и q, получим окончательно

$$\left.\begin{aligned} g_{00} &= -\frac{1}{3}\,q - C_{20} + 6C_{22} + \frac{3}{4}\,C_{40} - \frac{3}{5}\,qC_{20} - \\ &\qquad - \frac{3}{5}\,C_{20}^2 + \frac{16}{45}\,q_2, \\ g_{20} &= C_{20} - \frac{4}{3}\,q + \frac{6}{7}\,qC_{20} - \frac{30}{7}\,C_{20}^2 + \frac{4}{21}\,q^2, \\ g_{40} &= 3C_{40} + \frac{96}{35}\,qC_{20} - \frac{16}{35}\,q^2 - \frac{144}{35}\,C_{20}^2, \end{aligned}\right\} \tag{10.90}$$

$$\left.\begin{aligned} g_{nm} &= (n-1-2q)\,C_{nm}, \\ h_{nm} &= (n-1-2q)\,S_{nm}, \end{aligned}\right\} \quad (n = 3, 5, 6, 7, 8). \tag{10.91}$$

Уравнение (10.87) при удержании всех членов разложения представляет гравитационное поле на поверхности геоида. В том виде, как оно написано у нас, т. е. с удержанием гармоник до восьмого порядка, уравнение учитывает основные крупные ондуляции геоида и поля силы тяжести. Воспользовавшись этим, мы можем принять выражение (10.87), в котором сохранены члены разложения до восьмого порядка, за нормальное поле. Это значит, что в аномальной части оставлены как зональные, так и тессеральные гармоники с длиной волны $L < L_8$, что соответствует на земной поверхности расстояниям, равным 2500 *км* (25°) под экватором. Волны аномалий большей длины учитывает сама нормальная формула. Учет гармоник до 18 порядка при составлении нормальной формулы, что сейчас возможно, уменьшит длину волны, учитываемой нормальной формулой до 1000 *км*, т. е до 10°. При использовании обычной нормальной формулы, например, формулы Кассиниса, удерживаются волны порядка $n=2$, что означает отнесение к нормальному полю волны протяженностью 10 000 *км*, т. е. нормальное поле учитывает только сжатие Земли.

Конечно, нормальная формула вида (10.87) сложнее принятых формул, однако, если учесть, что в практике вычисления аномалий используются обычно таблицы или счет ведется на вычислительных машинах, это усложнение не имеет существенного значения. Однажды составленные таблицы нормальных

значений обеспечат практические операции столь же просто, как это делают таблицы, применяемые сейчас.

Коэффициенты нормальной формулы (10.87) до восьмого порядка были вычислены по исходным значениям параметров гравитационного поля Земли, полученным по спутниковым данным. Использованы коэффициенты, полученные Смитсонианской астрофизической обсерваторией и опубликованные в 1973 г. в книге «Стандартная Земля-3».

Разности между нормальными значениями силы тяжести, вычисленными по формуле Кассиниса и отнесенными к международному эллипсоиду со сжатием $\alpha = 1/297{,}0$ и вычисленными по формуле (10.87) с удержанием зональных и тессеральных гармоник до восьмого порядка, показаны на карте-схеме мира (рис. 71). Точками обозначены области отрицательных разностей. На рис. 72 дана карта-схема осредненных аномалий, полученных по нормальной формуле восьмого порядка γ_8.

Нормальное значение силы тяжести, вычисленное с удержанием гармоник восьмого порядка, периодически становится то меньше, то больше значения γ, вычисленного по формуле Кассиниса, следуя за крупными волнами геоида.

Осредненное поле аномалий, образованное по нормальной формуле γ_8, как и следовало ожидать, сильно отличается от поля аномалий, полученного с обычной международной формулой или вообще с любой принятой формулой нормальной силы тяжести, соответствующей тем или иным эллипсоидам относимости. Оно более спокойно и амплитуда аномалий меньше.

§ 10. Масса и средняя плотность Земли

Поскольку напряженность силы тяжести γ зависит от массы Земли и скорости ее вращения, то по известным значениям силы тяжести, скорости вращения и большой полуоси можно определить массу Земли. Решение этой задачи по гравиметрическим и геодезическим материалам дает единственный способ определения массы Земли непосредственно в системе СГС. Астрономический способ определения массы Земли, основанный на законах Кеплера о движении планет, дает значение массы Земли, отнесенное к массе Солнца. В тех же единицах можно получить массы других планет. Массы спутников, например, Луны, можно получить выраженными в массах центральных тел. Но все это дается в относительных единицах. Определение массы Земли в абсолютной системе единиц позволяет в эту систему привести значения масс всех небесных тел. Кроме того, знание массы необходимо для определения плотности Земли. В силу сказанного точное определение массы Земли гравиметрическим методом представляет большой интерес.

Масса Земли получается непосредственно из формулы (10.36), точнее говоря, из этой формулы получается значение произведения fM:

$$fM = \frac{1}{3} a^2\gamma_p + \frac{2}{3} ab\gamma_e + \frac{2}{3} \omega^2 a^2 b. \qquad (10.92)$$

Представим эту формулу в таком виде, чтобы в нее явно входили сжатие и β:

$$fM = \frac{1}{3} a^2\gamma_e(1+\beta) + \frac{2}{3} a^2(1-\alpha)\gamma_e + \frac{2}{3} \omega^2 a^3(1-\alpha) =$$

$$= a^2\gamma_e\left[1 + \frac{\beta}{3} - \frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{3}\frac{\omega^2 a}{\gamma_e}(1-\alpha)\right].$$

Помня, что $\omega^2 \frac{a}{\gamma_e} = q$ и $\beta = \frac{5q}{2} - \alpha$, получим для произведения

Таблица 10

Автор	Год	Гравитационная постоянная $f \cdot 10^{-11}$, $м^3/кг \cdot сек^2$	Средняя плотность Земли σ, $г/см^3$
Крутильный метод			
Г. Кавендиш (Англия)	1798	6,75±0,05	5,45±0,04
Ф. Райх (Германия)	1838	6,64±0,06	5,54±0,05
Ф. Бейли (Англия)	1843	6,63±0,07	5,55±0,05
А. Корню и Ж. Бейль (Франция)	1873	6,64±0,017	5,54±0,014
Ч. Бойс (Англия)	1895	6,658±0,007	5,527±0,006
Р. Этвеш (Венгрия)	1896	6,657±0,013	5,526±0,010
К. Браун (Австрия)	1897	6,649±0,002	5,529±0,002
Г. Бюргес (Франция)	1902	6,64	5,55
П. Хейль (США)	1930	6,670±0,005	5,510±0,004
И. Зарадничек (Чехословакия)	1933	6,66±0,04	5,52±0,04
П. Хейль и П. Хржановский (США)	1942	6,673±0,003	5,513±0,003
Я. Реннер (Венгрия)	1968	6,670±0,008	5,510±0,007
М. Сагитов (СССР)	1975	6,6742±0,0006	5,5135±0,0005
Метод взвешивания			
Ф. Йолли (Германия)	1878	6.47±0,11	5,69±0,10
Д. Пойнтинг (Англия)	1891	6,70±0,04	5,49±0,03
Ф. Рихарц и О. Кригер (Германия)	1898	6,683±0,011	5,505±0,009
Мензель и И. Вилзинг (Германия)	1899	6,594±0,015	5,579±0,012

fM окончательное выражение

$$fM = a^2\gamma_e\left(1 - \alpha + \frac{3}{2}q - \frac{2}{3}q\alpha\right). \qquad (10.93)$$

Вводя в (10.93) числовые значения для f, a, γ_e, α, q, получим массу Земли в системе СГС. Примем

$$a = 6\,378\,245 \text{ м},$$
$$\gamma_e = 978\,050 \text{ мгл},$$
$$\alpha = 1 : 298{,}3,$$
$$q = 0{,}0034677,$$
$$f = 6{,}673 \cdot 10^{-8}.$$

Тогда получим массу Земли равной $M = 5{,}9737 \cdot 10^{27}$ г, а среднюю плотность $\sigma_m = \frac{3}{4}\frac{M}{\pi a^2 b} = 5{,}517$.

Входящие в (10.93) величины, кроме f, известны до шести значащих цифр, т. е. до 0,001%. Величина f известна до четвертой значащей цифры, т. е. до 0,1%. Следовательно, точность определения массы Земли лимитируется точностью определения гравитационной постоянной f. Таким образом, пока масса Земли известна с точностью до 0,1%.

В таблице 10 приводится сводка значений гравитационной постоянной f и средней плотности Земли по определениям различных авторов.

§ 11. Различные формы представления потенциала притяжения через сферические функции

В дальнейшем изложении мы будем пользоваться различными представлениями потенциала притяжения, поэтому приводим здесь их основные формы.

Наиболее широко применяется форма записи, рекомендованная Международным Астрономическим Союзом

$$V = \frac{fM}{r}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n\left(\frac{a_e}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi) + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{a_e}{r}\right)^n P_{nm}(\sin\varphi)\left(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda\right)\right].$$

Здесь f — гравитационная постоянная,

M и a_e (часто R) — масса и средний экваториальный радиус Земли,

r, φ, λ — геоцентрические сферические координаты точки,

P_n — полином Лежандра n-го порядка,

$P_{nm}(\sin\varphi)$ — присоединенные сферические функции,

J_n, C_{nm}, S_{nm} — безразмерные постоянные, характеризующие форму и гравитационное поле Земли.

Принята также иная форма записи, а именно:

$$V = \frac{fM}{r}\left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} I_n \left(\frac{a_e}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} I_{nm}\left(\frac{a_e}{r}\right)^n P_{nm}(\sin\varphi)\cos m(\lambda - \lambda_{nm})\right].$$

Постоянные, входящие в эту формулу, связаны с постоянными формулы (10.94) следующими соотношениями:

$$I_n = -I_n;\ C_{nm} = I_{nm}\cos m\lambda_{mn},\ S_{nm} = I_{nm}\sin m\lambda_{nm}$$

или

$$I_{nm} = \sqrt{C_{nm}^2 + S_{nm}^2}. \qquad (10.96)$$

Наконец, часто пользуются рядом с коэффициентами вида

$$P_n^m(\sin\varphi) = \sqrt{\frac{2(n-m)!\,(2n+1)}{(n+m)!}}\,P_{nm}(\sin\varphi);$$

тогда

$$V = \frac{fM}{r}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n\left(\frac{a_e}{r}\right)^n P_n^m(\sin\varphi) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{a_e}{r}\right)^n P_n^m(\sin\varphi)\,(A_{nm}\cos m\lambda + B_{nm}\sin m\lambda)\right],$$

где

$$A_{nm} = C_{nm}\sqrt{\frac{(n+m)!}{2(n-m)!\,(2n+1)}},$$

$$B_{nm} = S_{nm}\sqrt{\frac{(n+m)!}{2(n-m)!\,(2n+1)}}.$$

Первый член этих формул дает потенциал притяжения шарообразной Земли, член первой одинарной суммы — зональные гармоники потенциала. Они характеризуют Землю как тело вращения. Нечетные зональные гармоники и долготные члены, для которых $n + m$ нечетно, характеризуют асимметрию Земли относительно плоскости экватора.

ГЛАВА 11

ПРОБЛЕМА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ЗЕМЛИ. РЕДУКЦИИ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

§ 1. Понятие регуляризации. Смысл введения редукций

Теорема Стокса (гл. 10, § 2) устанавливает единственность построения потенциала силы тяжести на поверхности Земли и во всем внешнем пространстве, независимо от распределения масс, при условии, что за поверхность Земли принята уровенная поверхность, целиком охватывающая эти массы. Мы видели ранее, что Землю удобно аппроксимировать эллипсоидом вращения. Далее будет показано, что форма Земли действительно очень близка к этой фигуре. Отклонение геоида, т. е. уровенной поверхности, очень близко представляющей Землю, от поверхности хорошо подобранного и ориентированного эллипсоида вращения ограничивается всего несколькими десятками метров. Задавая уровенную поверхность в виде эллипсоида вращения, мы должны выбрать его так, чтобы все массы были внутри него.

Возвращаясь к разложению потенциала в ряд, мы также видим (гл. 10, § 6), что этот ряд сходится только при условии, что $\rho/r<1$, т. е., что нет масс вне поверхности идеального геоида. Таким образом, теория фигуры Земли должна строиться в предположении, что вне уровенной поверхности, представляющей Землю, нет масс.

Однако если рассматривать в качестве уровенной поверхности эллипсоид, наилучшим образом представляющий Землю, то неизбежно остаются массы, выступающие за поверхность эллипсоида, например, континенты. Возникает задача построения такой идеальной Земли, у которой все массы лежат внутри ограничивающей ее уровенной поверхности. Операция устранения выступающих за уровенную поверхность масс получила название *регуляризации* Земли. Возможны два основных пути решения этой задачи.

1. Перенесение всех масс тем или иным способом внутрь уровенной поверхности. При этом необходимо позаботиться о том, чтобы общая масса Земли и форма уровенной поверхности

изменились по возможности мало. Простое снятие масс без переноса внутрь вызывает большие деформации уровенной поверхности и поэтому неудобно при решениях задач, связанных с определением фигуры Земли. Такая регуляризация требует знания распределения масс в земной коре.

2. Отказ от уровенной поверхности, близко совпадающей с реальной Землей, и построение поверхности относимости на высоте, охватывающей все выступающие массы Земли, например, на высоте 10 *км* (геоид Бриллюэна.) Задача в этом случае может быть решена строго, так как не приходится иметь дело с потенциалом внутри масс, однако решение в этом случае имеет ограниченный практический смысл. Аномалии на такой поверхности будут сглаженными. Будут ускользать детали гравитационного поля, важные в таком приложении, как гравитационная разведка. Наконец, вряд ли удобно представлять Землю поверхностью, в основном отдаленной от реальной Земли и приближающейся к ней лишь в области самых высоких гор, т. е. в небольшом числе отдельных точек.

В этом смысле геоид Листинга несравненно удобнее, так как он на двух третях поверхности Земли, т. е. на океанах, точно совпадает с физической поверхностью Земли, а на остальной территории проходит в основном на расстоянии нескольких сотен метров под физической поверхностью Земли и лишь в районах плоскогорий и горных цепей отдален на несколько километров.

Наблюдения силы тяжести могут производиться на физической поверхности Земли, на разных высотах над Землей, под землей и под водой. Значения силы тяжести, отнаблюденные в столь различных условиях, несопоставимы между собой; тем более несопоставимы они с нормальным гравитационным полем, построенным для фигуры относимости в виде эллипсоида вращения. Все наблюденные значения силы тяжести должны быть отнесены в теории Стокса к некоторой единой уровенной поверхности. Так возникает редукционная проблема. При этом должно быть как-то учтено влияние масс, расположенных между точкой наблюдения и поверхностью относимости. Здесь редукционная проблема совпадает с проблемой регуляризации Земли, поскольку в обоих случаях стоит вопрос о том, как поступить с массами, расположенными между точкой наблюдения и поверхностью относимости. Однако не всякая редукция ведет к регуляризации Земли. При осуществлении редукции силы тяжести на уровенный эллипсоид требуется знать высоты точек наблюдения над эллипсоидом,— так называемые геодезические высоты. Однако эти высоты неизвестны. Из нивелировок получаются высоты точек наблюдения над геоидом. Строго говоря, и это не совсем точно. В главе 14 будет показа-

но, что геоид практически неопределим и что строго могут быть определены высоты над квазигеоидом — некоторой вспомогательной поверхностью, совпадающей с геоидом на океанах и отклоняющейся от геоида до 2 *м* в горных областях. Пока будем считать, что высоты над геоидом или над уровнем моря известны. С помощью известных высот и производится редуцирование силы тяжести.

Пусть сила тяжести определяется на физической поверхности Земли в точке A (рис. 73). Для сравнения с нормальным полем ее надо редуцировать на эллипсоид относимости в точку B, на расстояние, равное геодезической высоте H. Геодезическая высота H неизвестна, поэтому редуцирование производится на уровень моря, т. е. на геоид в точку B', по высоте h над уровнем моря. Таким образом, редуцирование производится не на ту поверхность, для которой в предыдущей главе определено нормальное значение силы тяжести.

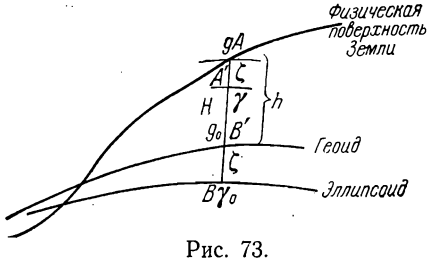


Рис. 73.

Введение нормальной формулы силы тяжести, дающей простое выражение для распределения силы тяжести на некоторой идеализированной Земле, близкой к реальной, позволяет заменить изучение силы тяжести изучением небольших уклонений ее от некоторых нормальных значений, определяющихся достаточно простой формулой. Эти уклонения $\Delta g = g_0 - \gamma_0$ получили название *аномалий силы тяжести*. Здесь γ_0 — нормальное значение силы тяжести, отнесенное к референц-эллипсоиду, g_0 — измеренное значение силы тяжести, отнесенное, как уже говорилось, к геоиду. Такая аномалия называется смешанной. Если бы мы знали геодезическую высоту H и осуществляли редуцирование на поверхность эллипсоида, то аномалия образовалась бы из сравнения величин, отнесенных к одной и той же поверхности. Такая аномалия называется *чистой*.

Сложность проблемы редуцирования состоит также и в том, что при переносе силы тяжести из одной точки (на физической поверхности Земли) в другую (на геоиде) необходимо знать, как изменяется силовое поле вдоль линии переноса (редуцирования). Для этого надо знать силовое поле в любой точке внутри масс, лежащих под точкой наблюдения, или распределение масс.

При регуляризации Земли надо сохранить массу Земли и форму уровенной поверхности или знать, какое изменение уровенной поверхности при этом происходит. Поэтому при лю-

бом переносе масс в лучшем случае должно быть известно их распределение.

Редуцирование необходимо во всех приложениях гравиметрии, однако в различных случаях к нему предъявляются разные требования. При решении вопроса о фигуре Земли и прочих вопросов геодезической гравиметрии необходимо строгое сохранение условия отсутствия масс вне уровенной поверхности. Из этого приходится исходить и при выборе редукций. При геологическом истолковании результатов гравиметрической съемки совершенно безразличны вопросы сохранения общей массы или общее сохранение формы уровенной поверхности. В этом случае редукцию следует провести так, чтобы в остаточном поле аномалий наиболее рельефно проявились особенности распределения масс в данной области. Таким образом, мы видим, выбор метода редукции и решение вопроса регуляризации Земли целиком зависят от того, какая задача стоит перед исследователем. Мы, естественно, должны наибольшее внимание уделить вопросу выбора редукций, сохраняющих условия теории Стокса. Вопросам редукций силы тяжести посвящено большое количество работ. Это объясняется, с одной стороны, важностью вопроса, а с другой,— неясностью его и отсутствием безусловно удовлетворительного решения.

М. С. Молоденским разработан способ решения всех задач геодезической гравиметрии и теории фигуры Земли без регуляризации Земли. Этот путь принципиально состоит в отказе от геоида как от неопределяемой поверхности и в построении решения всех задач геодезической гравиметрии для физической поверхности Земли. Но и в этом случае проблема редукции не снимается, а только упрощается тем, что редуцирование должно производиться теперь в нормальном силовом поле. Нормальное значение силы тяжести, определенное на эллипсоиде, не должно зависеть от реального распределения масс и характеризует некоторую идеальную Землю. Поэтому при редуцировании нормального значения силы тяжести γ с поверхности эллипсоида на уровень физической поверхности Земли принципиальные трудности, возникающие из-за незнания реального распределения масс в земной коре при редуцировании наблюденной силы тяжести на геоид, отпадают. В этом случае не наблюденное значение g переносится из A в B', а нормальное значение γ переносится из B на физическую поверхность Земли. Однако по той же причине незнания геодезических высот H перенос осуществляется не в точку A, а в некоторую точку A', отстоящую от точки A на то же расстояние ζ, на которое геоид отстоит от эллипсоида относимости: $AA' = BB'$. Образования таким образом аномалия

$$\Delta g = g_н - \gamma,$$

где $g_н$ — наблюденное значение силы тяжести в некоторой точке физической поверхности Земли, γ — нормальное значение силы тяжести в точке, отстоящей на величину $\zeta = AA'$ от физической поверхности Земли, будет также смешанной, но рассматриваем мы ее теперь уже на реальной физической поверхности Земли. Величина ζ называется аномалией высоты.

Так образованные аномалии позволили построить теорию фигуры физической поверхности Земли. Они также удобнее для геологических интерпретаций, так как относятся к реальной поверхности, под которой ищутся аномальные массы.

Отнесение наблюденной силы тяжести к геоиду или нормальной силы тяжести к физической поверхности Земли может быть осуществлено по-разному. В зависимости от того, какой способ редуцирования применен при образовании аномалии, получает название и сама аномалия. Так образуются аномалии в свободном воздухе, аномалии Буге, изостатические и др.

Будем пользоваться и в дальнейшем стандартными обозначениями: γ — нормальное значение силы тяжести, γ_0 — то же на эллипсоиде, g — наблюденное значение силы тяжести, g_0 — наблюденное значение, редуцированное на уровень моря.

§ 2. Регуляризация Земли методом инверсии

Примером одного из способов регуляризации может служить метод инверсии. Этот метод был предложен польским геофизиком М. Рудзским как метод регуляризации, не деформирующий уровенную поверхность. Метод состоит в переносе всех выступающих за уровенную поверхность масс внутрь этой поверхности таким образом, чтобы потенциал этих масс в исследуемой точке не изменился.

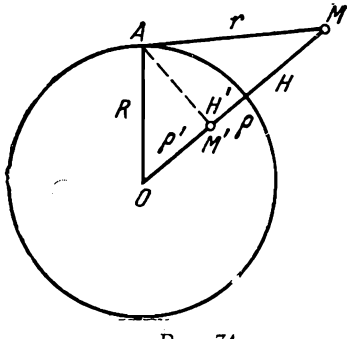


Рис. 74.

Будем считать уровенную поверхность сферой. При этом мы пренебрегаем ошибками третьего порядка малости относительно сжатия. Рассмотрим потенциал, развиваемый массой точки M, расположенной вне сферы, на точку A, лежащую на сфере (рис. 74). Он будет

$$V = f\frac{m}{r} = \frac{fm}{\sqrt{\rho^2 + R^2 - 2\rho R\cos\psi}},$$

где $\rho = R + H$, R — радиус сферы, H — высота точки над сферой, m — масса в точке M.

Перенесем теперь массу m из точки M по радиусу внутрь сферы в точку M' и изменим массу m таким образом, чтобы

потенциал V', развиваемый трансформированной массой m' в точке A, остался неизменным. Для того чтобы произвести такую трансформацию, надо положить

$$\rho' = OM' = \frac{R^2}{\rho},\quad m' = m\frac{R}{\rho}.$$

Тогда

$$V' = \frac{fm'}{\sqrt{\rho'^2 + R^2 - 2\rho' R\cos\psi}}.$$

Введем выражение новых значений радиуса ρ' и массы m' через старые:

$$V' = \frac{fm\frac{R}{\rho}}{\sqrt{\frac{R^4}{\rho^2} + R^2 - 2\frac{R^2}{\rho}R\cos\psi}} = \frac{fm\frac{R}{\rho}}{\frac{R}{\rho}\sqrt{R^2+\rho^2-2\rho R\cos\psi}} = V.$$

Заметим при этом, что при такой транспозиции масс их надо опустить под поверхность на глубину, почти равную высоте H точки M, а массу уменьшить на незначительную величину. В самом деле,

$$-H' = R - \rho' = R - \frac{R^2}{\rho} = R - \frac{R^2}{R+H}.$$

Разлагая знаменатель в ряд и удерживая члены квадрата отношения H/R, получаем

$$-H' = R - R\left(1+\frac{H}{R}\right)^{-1} = H\left(1-\frac{H}{R}\right).$$

То же получаем и для массы

$$m' = m\frac{R}{\rho} = m\frac{R}{R+H} = m\left(1-\frac{H}{R}\right).$$

Этот способ получил название *метода инверсии*, поскольку при нем все внешние массы почти зеркально отображаются внутрь. Метод инверсии не получил широкого распространения.

§ 3. Редукция в свободном воздухе

Смысл редукции состоит в том, чтобы произвести приведение наблюденных значений силы тяжести в пунктах, расположенных на различных высотах, к поверхности, определяющей начало счета высот, не принимая при этом во внимание влияние масс, расположенных между этой поверхностью и точкой наблюдения,. Это редуцирование за высоту и, если известно изменение силы тяжести с высотой, т. е. вертикальный градиент

$\frac{\partial g}{\partial z}$, то оно производится просто. Если при выполнении редуцирования за высоту принята ортометрическая система высот, то поверхностью относимости является геоид. В силу определения геоида как уровенной поверхности, совпадающей с поверхностью океанов, принято говорить о приведении силы тяжести на уровень моря. Название «редукция в свободном воздухе» неточно. Редуцирование производится без учета каких-либо масс, в том числе и масс воздуха. Точнее было бы назвать эту редукцию редукцией в пустоте. Редукция в свободном воздухе с добавлением поправки за рельеф местности называется редукцией Фая или Гельмерта в честь ученых, введших ее употребление. Введем редукцию в свободном воздухе в предположении шарообразной Земли.

Изменение силы тяжести с высотой характеризуется величиной $\frac{dg}{dH}$. В нашем предположении

$$\frac{dg}{dH} = \frac{dg}{dR} = \frac{d^2W}{dR^2},$$

где R — радиус.

Имея в виду, что $W = fM/R$ и $fM/R^2 = \gamma$, получим для вертикального градиента силы тяжести

$$\frac{dg}{dH} = 2\frac{fM}{R^3} = 2\frac{\gamma}{R},$$

или

$$dg = 2\frac{\gamma}{R}\,dH,$$

где γ — принятое значение ускорения силы тяжести. Интегрируя это выражение по H от 0 до H, получаем значение приращения силы тяжести при изменении высоты в этих пределах

$$g_H - g_0 = 2\frac{\gamma}{R}\int_0^H dH = 2\frac{\gamma}{R}H. \qquad (11.1)$$

Введем числовые значения для γ и R, а именно их средние значения $\gamma = 979\,773$, $R = 6\,371\,087$. Тогда

$$g_H - g_0 = 0{,}3086H, \qquad (11.2)$$

где H выражена в метрах, а результат в миллигалах.

Можно вычислить вертикальный градиент нормального гравитационного поля, исходя из уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 2\omega^2 - 4\pi f\sigma.$$

Имея в виду, что

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial \gamma}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{\gamma}{R_x}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{\gamma}{R_y},$$

получаем

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z} = 2\omega^2 + \gamma\left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y}\right) - 4\pi f\sigma.$$

Перейдя к нормальному гравитационному полю вне эллипсоида и выбрав оси координат в плоскости меридиана и первого вертикала, получаем

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z} = 2\omega^2 + \gamma\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N}\right).$$

Вводя значение M и N и удерживая величины порядка сжатия, имеем

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z} = \frac{\gamma}{a}(2 + e^2 - 2e^2 \sin^2 B)$$

или, интегрируя от 0 до H и вводя числовые значения γ, a, e,

$$\delta g_H = 0{,}3086(1 + 0{,}00071 \cos 2B)H. \qquad (11.3)$$

Поправку силы тяжести в свободном воздухе часто рассматривают как разность притяжения шаром точки, расположенной на его поверхности и на высоте H над ним. Примем Землю за шар радиуса R. Притяжение такой Землей точки, расположенной на ее поверхности, будет определяться формулой

$$\gamma_0 = -f\frac{M}{R^2}.$$

Притяжение той же Землей точки, расположенной на высоте H, будет

$$\gamma_H = -f\frac{M}{(R+H)^2}.$$

Очевидно, что изменение силы тяжести при переходе от точки, находящейся на высоте H, к точке на поверхности Земли равно с точностью до квадрата отношения H/R

$$\delta g = \gamma_H - \gamma_0 = -\frac{fM}{(R+H)^2} + \frac{fM}{R^2} =$$

$$= \frac{fM}{R^2}\left[1 - \left(1 + \frac{H}{R}\right)^{-2}\right] = 2\frac{fM}{R^2}\frac{H}{R} = \frac{2\gamma}{R}H.$$

Редукция в свободном воздухе, как это видно из вывода, учитывает изменение нормальной силы тяжести с высотой. Приближенно ее можно применить и к реальному гравитацион-

ному полю. Изменение силы тяжести с высотой в соответствии с (11.2) равно приблизительно 1 *мгл* на 3 *м* изменения высоты. Отсюда вытекают требования к точности определения высот при гравиметрической съемке. При современных гравиметрических измерениях получают обычно точность порядка $\pm 0{,}01 - \pm 0{,}1$ *мгл*. Для того чтобы ошибки определения высоты не искажали заметно результатов гравиметрических измерений, требуется определять высоты с точностью $\pm 0{,}03 - \pm 0{,}3$ *м*. Такое определение высот является весьма трудоемкой, а в некоторых условиях и сложной задачей, особенно при организации массовых гравиметрических определений.

Введение редукции в свободном воздухе, бесспорно, необходимо при вычислении любых аномалий силы тяжести. При помощи этой редукции наблюдения силы тяжести относятся к общей, единой для всех наблюдений поверхности. В случае применения метода Молоденского с помощью редукции в свободном воздухе осуществляется приведение нормального значения силы тяжести, определенного на эллипсоиде, к физической поверхности Земли и тем самым отнесение аномалий к этой же поверхности.

Аномалия силы тяжести в свободном воздухе для регуляризированной Земли есть разность между значением g_0 ускорения силы тяжести, редуцированным в свободном воздухе к уровню геоида, т. е. на глубину H, и нормальным значением γ_0 ускорения силы тяжести на эллипсоиде относимости

$$\Delta g_{\text{св.в}} = \left(g + \frac{2g_{\text{ср}}}{R} H\right) - \gamma_0, \tag{11.4}$$

где $g_{\text{ср}}$ — среднее значение g по высоте H. Редуцирование при этом должно производится в реальном силовом поле Земли, однако из-за незнания такового оно производится фактически в нормальном поле.

При рассмотрении фигуры и гравитационного поля реальной Земли аномалия в свободном воздухе образуется как разность между фактически наблюденным на физической поверхности Земли значением ускорения силы тяжести g и редуцированным в нормальном силовом поле на высоту H его нормальным значением γ_0

$$\Delta g_{\text{св.в}} = g - \gamma_0\left(1 - 2\frac{H}{R}\right). \tag{11.5}$$

Практически, если не учитывать тонкие эффекты, формулы (11.4) и (11.5) дают одинаковую величину аномалий.

При введении поправки в свободном воздухе мы не принимаем во внимание влияния масс, расположенных между точкой наблюдения и точкой приведения, т. е. эти массы сохраняются.

§ 4. Притяжение плоского слоя

Вывод многих излагаемых в дальнейшем методов редукции основывается на теории притяжения плоского слоя. Рассмотрим эту задачу.

Пусть дан слой в виде плоского материального диска (рис. 75). Потенциал, развиваемый в точке A элементом этого диска, будет

$$V = f\frac{dm}{\rho} = f\frac{dm}{\sqrt{z^2+r^2}}. \qquad (11.6)$$

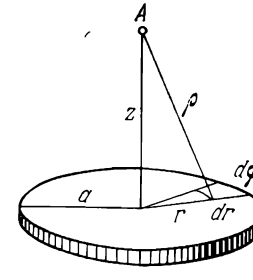


Рис. 75.

Притяжение элементом диска точки A получим, продифференцировав потенциал (11.6) по z,

$$d\delta g = dV = -f\frac{z\,dm}{(z^2+r^2)^{3/2}}. \qquad (11.7)$$

Чтобы определить притяжение точки A всем диском, надо проинтегрировать (11.7) по всей массе диска. Считая плотность диска однородной, представим элемент масс dm в виде

$$dm = \sigma r\,d\varphi\,dr\,dz. \qquad (11.8)$$

Вводя (11.8) в (11.7) и выполняя интегрирование по всем трем координатам, находим притяжение диском точки A

$$\delta g = -f\sigma\int_{z_1}^{z_2}\int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{z\,dz\,r\,dr\,d\varphi}{(z^2+r^2)^{3/2}}. \qquad (11.9)$$

Интегрирование ведем в следующей последовательности: сначала интегрируем по φ от 0 до 2π, далее по r от нуля и до a и наконец на полную толщину пластины от z_1 до z_2, где z_1 и z_2 — расстояния от точки A до нижней и верхней граней пластины.

Тогда

$$\delta g = -f\sigma\int_{z_1}^{z_2}\int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{z\,dz\,r\,dr\,d\varphi}{(z^2+r^2)^{3/2}} = 2\pi f\sigma\int_{z_1}^{z_2} z\,dz\int_0^a\frac{r\,dr}{(z^2+\sigma^2)^{3/2}} =$$

$$= 2\pi f\sigma\int_{z_1}^{z_2} z\,\frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}}\Big|_0^a dz = 2\pi f\sigma\int_{z_1}^{z_2}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}-1\right)dz =$$

$$= 2\pi f\sigma\left(\sqrt{z_2^2+a^2}-\sqrt{z_1^2+a^2}-z_2+z_1\right). \qquad (11.10)$$

Раскладывая в ряд квадратные корни и удерживая члены порядка z^2/a^2:

$$\sqrt{z^2+a^2} = a\sqrt{1+\frac{z^2}{a^2}} \approx a\left(1+\frac{1}{2}\frac{z^2}{a^2}\right),$$

получим

$$\delta g = 2\pi f\sigma\left(a+\frac{a}{2}\frac{z_2^2}{a^2}-a-\frac{a}{2}\frac{z_1^2}{a^2}+z_1-z_2\right) =$$

$$= 2\pi f\sigma\left[(z_1-z_2)+\frac{z_2^2-z_1^2}{2a}\right]. \quad (11.11)$$

Это основная формула для притяжения плоского слоя. Если протяженность слоя велика по сравнению с расстоянием z до притягиваемой точки, то отношение z/a мало́, тем более мало́ отношение $(z_2^2-z_1^2)/2a$, и тогда с точностью до квадрата этого отношения,

$$\delta g = 2\pi f\sigma(z_1-z_2). \quad (11.12)$$

Это выражение не зависит от расстояния z точки от плоского слоя, а зависит лишь от толщины слоя (z_1-z_2), т. е.

$$\delta g = 2\pi f\sigma(z_1-z_2) = \text{const}.$$

Иными словами, притяжение плоскости слоем материальной точки с точностью до квадрата z/a не зависит от расстояния точки от слоя. Для бесконечного слоя это положение справедливо без оговорок.

§ 5. Поправка за рельеф местности

Поправка за рельеф местности имеет целью учесть влияние притяжения всех форм внешнего рельефа и привести значение силы тяжести в данной точке к такому, которое было бы, если бы под точкой располагался ровный слой масс, без выступов и впадин. Поправка за рельеф местности всегда увеличивает наблюденное значение силы тяжести независимо от того, находятся ли вблизи исследуемой точки возвышенности или, наоборот, впадины. В самом деле, наличие избыточных масс CDE (рис. 76), расположенных выше точки наблюдения, вызовет добавочную силу, направленную к этим массам. Вертикальная составляющая CK этой силы уменьшит значение g. Недостаток масс в области ABC также уменьшит величину g относительно того значения ее, которое

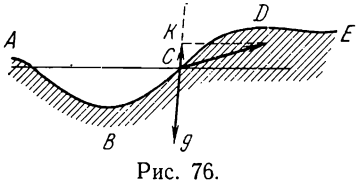


Рис. 76.

должна бы иметь эта величина в случае равномерного заполнения массами всей области, расположенной ниже точки наблюдения. Таким образом, в случае неровной местности вокруг точки наблюдения, когда влияния этих неровностей становятся ощутимыми, должна вводиться поправка за рельеф. Введение в измеренные значения силы тяжести поправки за рельеф местности обязательно при любых редукциях. Пренебрежение этими поправками (когда они велики) при решении геодезических задач ведет к оставлению масс за уровенной поверхностью и нарушению условий Стокса, а при решении геологических задач — к искажению исследуемого аномального поля, вызванного подземными невидимыми массами за счет внешних видимых масс. Для учета влияния окружающего рельефа применяют разные способы, например: 1) разбиение всей местности на участки, представляющие криволинейные призмы, и учет влияния каждого такого участка отдельно по упрощенной формуле в предположении, что высота в нем постоянна, 2) представление местности в виде наклонной плоскости и учет влияния призмы с наклонной верхней гранью, 3) введение поправки за рельеф по характерным точкам.

Рассмотрим эти способы.

1. Окружающую местность представим в виде кругового цилиндра (рис. 77) и рассмотрим притяжение вырезанной из этого цилиндра призмы *abdcefig* на точку *O*. Высота призмы H, радиусы цилиндров внутреннего и внешнего соответственно a_1 и a_2. Притяжение кругового цилиндра дает формула (11.10).

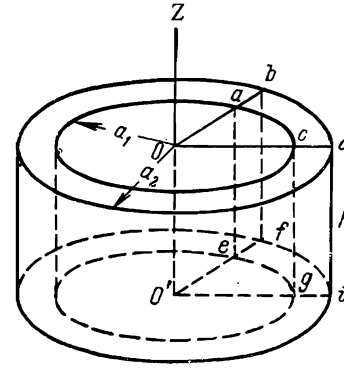


Рис. 77.

Для того чтобы из притяжения цилиндра выделить притяжение кольца, имеющего внешний радиус a_2 и внутренний a_1, надо вычислить притяжение двух цилиндров: притяжение цилиндра с радиусом a_2 и притяжение цилиндра с радиусом a_1, а затем из первого значения вычесть второе. Проделав эту операцию, для притяжения кольца получим

$$\delta g = 2\pi f\sigma\left(\sqrt{a_2^2+z_2^2}-\sqrt{a_2^2+z_1^2}+z_1-z_2-\sqrt{a_1^2+z_2^2}+\right.$$

или

$$\left.+\sqrt{a_1^2+z_1^2}-z_1+z_2\right)$$

$$\delta g = 2\pi f\sigma\left(\sqrt{a_2^2+z_2^2}-\sqrt{a_2^2+z_1^2}-\sqrt{a_1^2+z_2^2}+\sqrt{a_1^2+z_1^2}\right). \tag{11.13}$$

Если точка лежит на призме $z_2 = 0$, то

$$\delta g = 2\pi f\sigma\left(\sqrt{a_1^2 + z_1^2} - \sqrt{a_2^2 + z_1^2} + a_2 - a_1\right). \qquad (11.14)$$

Если мы хотим из притяжения кольца выделить притяжение призмы, составляющей $1/n$ часть всего кольца, то надо величину, полученную для δg (11.13) или (11.14), разделить на n:

$$\delta g = \frac{2\pi f\sigma}{n}\left(\sqrt{a_1^2 + z_1^2} - \sqrt{a_2^2 + z_1^2} + a_2 - a_1\right). \qquad (11.15)$$

Для случая, когда точка не лежит на верхней плоскости призмы, формула (11.15) примет вид

$$\delta g = \frac{2\pi f\sigma}{n}\left(\sqrt{a_2^2 + z_2^2} - \sqrt{a_2^2 + z_1^2} - \sqrt{a_1^2 + z_2^2} + \sqrt{a_1^2 + z_1^2}\right). \qquad (11.16)$$

Для того чтобы вычислить поправку за рельеф в данной точке, вся местность вокруг этой точки разбивается на криволинейные призмы системой радиусов и концентрических окружностей. Для каждой призмы, образованной парой соседних окружностей и радиусов, вычисляется притяжение по формуле (11.15) или (11.16) и значения для всех призм складываются. Обычно расчеты производятся с помощью палеток, которые накладываются на гипсометрическую карту так, чтобы центр палетки совпадал с исследуемой точкой. Для каждой криволинейной трапеции снимается с карты средняя высота местности, т. е. толщина призмы $z_2 - z_1$ и высота точки над призмой z, затем вычисляется выражение в скобке (11.16) и умножением этой скобки на соответствующий коэффициент получается поправка за притяжение данной призмы. Полная поправка получается суммированием влияния всех таких призм:

$$\delta g = \frac{2\pi f\sigma}{n}\sum\sum\left(\sqrt{a_{ij}^2 + z_i^2} - \sqrt{a_{i+1,j}^2 + z_i^2} + a_{i+1} - a_i\right). \qquad (11.17)$$

Влияние рельефа убывает пропорционально квадрату расстояния. Поэтому влияние даже не очень удаленных незначительных неровностей рельефа оказывается мало ощутимым. Практически поправки за рельеф вводятся только при работе в сильно всхолмленной и горной местности.

2. Второй способ основан на применении формулы

$$\delta g = f\sigma a\int_0^{\pi}(1 - \cos i)\,d\alpha, \qquad (11.18)$$

дающей вертикальную составляющую притяжения масс, заключенных между горизонтальной плоскостью OB и наклонной

OA и ограниченной круговым цилиндром радиуса a (рис. 78). Использование метода наклонной плоскости выгодно в случае ровной, но наклоненной в каком-либо направлении местности, в случае двустороннего ската, седловин и некоторых иных достаточно характерных форм рельефа.

При расчетах влияния рельефа местности обычно пользуются таблицами или номограммами, например, номограммами, составленными П. И. Лукавченко («Таблицы и номограммы для вычисления поправки силы тяжести за рельеф», Гостоптехиздат, 1951).

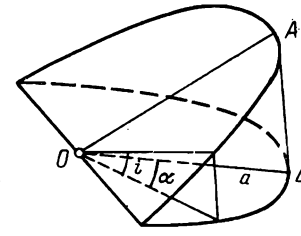


Рис. 78.

3. Способ введения поправок за рельеф по характерным точкам состоит в том, что на местности (по карте) выбирают точки, в которых происходят характерные изменения форм рельефа. Поправки за рельеф между двумя соседними характерными точками интерполируют по тому или иному простому закону, например, линейному или гиперболическому. Последний предложен В. М. Березкиным *), им же составлены соответствующие таблицы и номограммы.

Влияние рельефа местности убывает пропорционально квадрату расстояния. Поэтому уже сравнительно близко от исследуемой точки это влияние становится мало ощутимым. Практически поправки за рельеф учитываются только при работе в горной или сильно всхолмленной местности.

§ 6. Поправка за промежуточный слой и аномалия Буге

Наиболее часто применяемыми наряду с аномалиями в свободном воздухе являются *аномалии Буге*. По своей идее они были введены для того, чтобы представить гравитационное поле регуляризированной Земли. При образовании аномалий Буге регуляризация достигается тем, что из гравитационного поля Земли исключается влияние внешних выступающих за поверхность геоида масс. Это исключение осуществляется введением поправки Буге, состоящей из притяжения плоского слоя, расположенного между точкой наблюдения и поверхностью приведения.

Притяжение плоского слоя дается формулой (11.10). Преобразуем эту формулу, имея в виду, что рассматриваемая точка

*) Изв. высших учебных заведений, серия геология и разведка, №№ 10 и 11, 1960 г.

лежит на верхней границе бесконечного плоского слоя, которым мы аппроксимируем промежуточный слой. Тогда $z = 0$, а $z_2 = H$ — толщина слоя равна высоте точки над уровнем моря.

В этом случае формула (11.10) примет вид

$$\delta g = 2\pi f\sigma\left(\sqrt{H^2 + a^2} - a - H\right).$$

Вынося за знак радикала a и разлагая корень квадратный в ряд по степеням малой величины H/a, получим

$$\delta g = 2\pi f\sigma\left[a\left(1 + \frac{1}{2}\frac{H^2}{a^2} + \ldots\right) - a - H\right].$$

Пренебрегая членами выше первой степени отношения H/a, находим

$$\delta g_{\text{Б}} = -2\pi f\sigma H\left(1 - \frac{H}{2a}\right). \tag{11.19}$$

Это формула для вычисления *поправки Буге.*

Подставляя сюда численные значения $\pi = 3{,}14$, $f = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$, получим притяжение промежуточного слоя в виде

$$\delta g_{\text{Б}} = -4{,}19 \cdot 10^{-8}\sigma H\left(1 - \frac{H}{2a}\right)$$

или, выражая $\delta g_{\text{Б}}$ в миллигалах,

$$\delta g_{\text{Б}} = 0{,}0419\sigma H\left(1 - \frac{H}{2a}\right). \tag{11.20}$$

Обычно вторым членом этого выражения пренебрегают и тогда

$$\delta g_{\text{Б}} = 0{,}0419\,\sigma H. \tag{11.21}$$

Аномалия Буге образуется как разность приведенного к уровню моря значения ускорения силы тяжести с поправкой за влияние промежуточного слоя и нормального значения:

$$\Delta g_{\text{Б}} = g + \frac{2\gamma}{R}H - 2\pi f\sigma H - \gamma_0, \tag{11.22}$$

или, с числовыми коэффициентами,

$$\Delta g_{\text{Б}} = g + 0{,}3086H - 0{,}0419\sigma H - \gamma_0. \tag{11.23}$$

Поправку за промежуточный слой можно представить в виде функции отношения плотностей промежуточного слоя и средней плотности Земли. Для этого выразим $2\pi f$ через массу Земли и среднюю силу тяжести.

Приняв Землю за шар, получим

$$\gamma = f\frac{m}{R^2}, \quad \text{но} \quad m = \frac{4}{3}\pi R^3\sigma_m,$$

где σ_m — средняя плотность Земли и тогда

$$2\pi f = \frac{3}{2}\frac{\gamma}{R\sigma_m}. \qquad (11.24)$$

Внося это значение в (11.22), получим выражение для аномалии Буге в следующем виде:

$$\Delta g_{\text{Б}} = g + 2\frac{\gamma}{R}H - \frac{3}{2}\frac{\gamma}{R}\frac{\sigma}{\sigma_m}H\left(1 - \frac{H}{2a}\right) - \gamma_0. \qquad (11.25)$$

Введение поправки Буге приводит к построению модели регуляризированной Земли посредством устранения внешних масс. При этом удовлетворяется одно требование теоремы Стокса, чтобы все массы охватывались уровенной поверхностью, однако не выполняется второе условие: неизменность общей массы (масса нашей модели уменьшена снятием промежуточного слоя). Кроме того, при этом происходит значительная деформация уровенной поверхности. В силу этих обстоятельств аномалии Буге неприменимы в теории фигуры Земли.

Тем более поправка Буге представляется ненужной, если редуцирование производится на физическую поверхность Земли. В этом случае из-под точки, в которой образована аномалия, как бы устраняется пласт толщиной H и плотностью σ и под точкой образуется пустота.

Однако для выявления скрытых аномальных масс редукция Буге имеет преимущества перед редукцией в свободном воздухе. При этой редукции устраняется влияние масс, лежащих между точкой наблюдения и геоидом. Поэтому зависимость аномалий Буге от высоты точки значительно слабее, чем для аномалий в свободном воздухе. Аномалии Буге в горных областях изменяются более плавно, чем аномалии в свободном воздухе. Снятие притяжения промежуточного слоя со средней плотностью σ снимает влияние всех масс данной средней плотности, составляющих этот слой. Тем рельефнее проявляются аномальные массы.

Введение поправки Буге является элементарным случаем разделения гравитационных полей. Снимается влияние фона, создаваемого выступающими за геоид массами некоторой средней плотности и выделяется более рельефно составляющая поля, создаваемая невидимыми аномальными, отклоняющимися от средней плотности массами. Введение поправки Буге можно рассматривать как первый этап интерпретации гравитационных аномалий. Редукцию в свободном воздухе с поправкой за промежуточный слой называют *редукцией Буге.*

Редукцию в свободном воздухе с поправкой за промежуточный слой и с поправкой за рельеф близлежащих областей называют *неполной топографической редукцией,* а аномалии,

образованные при помощи этой редукции, *неполными топографическими аномалиями.*

Численные значения редукции Буге и неполной топографической редукции близки между собой, исключая высокогорные области, где они различаются весьма существенно. При использовании редукции Буге большое значение имеет выбор плотности σ промежуточного слоя. В случае заниженных плотностей численные значения аномалий Буге будут приближаться к аномалиям в свободном воздухе, причем будет появляться прямая корреляция с рельефом. В случае завышенных плотностей, наоборот, появляются ложные аномалии, начинающие коррелировать с рельефом, но с противоположным знаком.

В теории фигуры Земли аномалии Буге часто используются для так называемой косвенной интерполяции аномалий в горных областях, где аномалии Буге изменяются значительно плавнее. Косвенная интерпретация состоит в том, что аномалии в свободном воздухе пересчитывают в аномалии Буге, по этим аномалиям осуществляют интерполяцию на нужные точки и в этих точках по известным высотам вновь переходят к аномалиям в свободном воздухе, нужным для решения тех или иных геодезических задач.

§ 7. Поправка Прея и аномалия силы тяжести внутри Земли

Эта редукция состоит в том, что наблюденное в точке A на физической поверхности Земли значение силы тяжести редуцируется на геоид без какого-либо смещения масс, т. е. редукция как бы переносит точку наблюдения внутрь Земли на глубину, равную ортометрической высоте точки наблюдения. Эта редукция состоит из следующих операций:

1. Сглаживание рельефа введением поправки за рельеф по формулам (11.17).
2. Снятие влияния промежуточного слоя введением поправки Буге за промежуточный слой по формуле (11.25).
3. Перенос точки на уровень геоида редукцией в свободном воздухе по формуле (11.1) при отсутствии промежуточных масс.
4. Восстановление масс, снятых при операции 2, введением поправки Буге.

Формула для введения редукции Прея получается вычитанием из редукции в свободном воздухе двойной поправки за влияние промежуточного слоя

$$\delta g_{\text{п}} = 2\frac{\gamma}{R}H - 3\frac{\gamma}{R}\frac{\sigma}{\sigma_m}H, \qquad (11.26)$$

или

$$\delta g_{\text{п}} = 2\frac{\gamma}{R}H - 4\pi f\sigma H\left(1 - \frac{H}{2a}\right). \qquad (11.26')$$

В числовом выражении при $\sigma = 2{,}3$, $\sigma_m = 5{,}17$

$$\delta g_{\text{п}} = 0{,}3086H - 0{,}0838\sigma H \qquad (11.27)$$

или

$$\delta g_{\text{п}} = 0{,}3086H - 0{,}1927H = 0{,}1159H. \qquad (11.28)$$

Редукция Прея показывает изменение силы тяжести при погружении в глубь Земли. Она учитывает притяжение масс, оказавшихся при углублении выше рассматриваемой точки и уменьшающих значения силы тяжести. Пользуясь редукцией Прея, легко установить характер изменения силы тяжести с углублением внутрь Земли. Это изменение зависит от величины плотности σ. При σ, обращающей выражение (11.27) в нуль, сила тяжести при углублении не изменяется. Это имеет место при $\sigma = 3{,}7$. В случае $\sigma < 3{,}7$ сила тяжести с углублением будет увеличиваться, наоборот, при $\sigma > 3{,}7$ сила тяжести при углублении уменьшается. Это правило ориентировочно справедливо для незначительных глубин, поскольку формулы дифференциальны.

Редукцию Прея с обратным знаком необходимо вводить в наблюдения силы тяжести на подводных лодках. В этом случае сила тяжести определяется внутри масс; она увеличена за счет приближения к центру и уменьшена за счет притяжения масс, расположенных над точкой наблюдения и сообщающих элементарной массе силу, направленную от центра. Наблюденное значение необходимо редуцировать на поверхность моря, для чего следует сделать приведение в свободном воздухе, а после этого учесть, что слой воды, расположенный над точкой и уменьшавший значение g, после приведения будет расположен под точкой и будет на ту же величину увеличивать значение g.

Приближенный расчет изменения силы тяжести с глубиной погружения внутрь Земли можно выполнить исходя из следующих соображений. Примем Землю за шар. Рассмотрим притяжение шаром внутренней точки A. Притяжения всех элементов внешнего относительно A сферического слоя взаимно уничтожаются, и слой оказывает на A нулевое действие. Внутренняя сфера радиуса r притягивает A с силой

$$g = f\frac{m}{r^2},$$

где m — масса шара радиуса r. Найдем m, имея в виду, что бесконечно тонкий сферический слой радиуса ρ имеет массу

$$dm = 4\pi\rho^2\sigma d\rho,$$

где σ — плотность. Тогда

$$m = 4\pi \int_0^r \sigma\rho^2 d\rho.$$

Внося это выражение в формулу для ускорения силы тяжести, получим

$$g = \frac{4\pi f}{r^2} \int_0^r \sigma\rho^2 d\rho. \tag{11.29}$$

Помня, что в пределах сделанных допусков (шарообразность Земли)

$$\gamma = f\frac{M}{R^2} = \frac{f}{R^2}\frac{4}{3}\pi\sigma_m R^3, \tag{11.30}$$

откуда

$$4\pi f = 3\frac{\gamma}{R\sigma_m},$$

получим

$$g = \frac{3\gamma}{\sigma_m R}\frac{1}{r^2}\int_0^r \sigma\rho^2 d\rho. \tag{11.31}$$

Эта формула дает закон изменения силы тяжести внутри Земли. Если задать функцию σ, то будет определено g.

Принимая для изменения плотности закон Роша $\sigma = \sigma_0(1+k\rho^2)$, где $k=0{,}764$ — числовой коэффициент, ρ — расстояние от центра Земли, $\sigma_0 = 10{,}1$ — плотность в центре Земли при $\rho = 0$, получим, что на глубине около 1000 *км* сила тяжести имеет максимум, после которого убывает монотонно до нуля в центре Земли.

По аномалиям Прея можно приближенно определить гравитационную постоянную.

В самом деле, пусть сила тяжести известна, например, в точке A на поверхности Земли и на глубине H в шахте. Тогда согласно (11.26′), пренебрегая величиной $4\pi\sigma H^2/2a$, имеем

$$f = \frac{2\frac{\gamma}{R}H - \Delta g}{4\pi\sigma H}. \tag{11.32}$$

Зная Δg и распределение плотностей в районе шахты, определим f.

§ 8. Топографическая поправка

Отнесение наблюденного значения силы тяжести к геоиду с исключением притяжения всех выступающих за геоид масс на всей Земле называется *полной топографической редукцией*. Поправка за притяжение всех выступающих за геоид масс называется *полной топографической поправкой*.

Введение полной топографической поправки весьма трудоемко. Для ее вычисления приходится учитывать по гипсометрическим картам влияние выступающих за геоид масс — так называемых *топографических масс* — для всей Земли. Во многих случаях бывает возможно ограничиться вычислением влияния масс, близко расположенных к исследуемой точке. В этом случае вводимая поправка и соответствующая редукция называются *неполной топографической*. Обычно при вычислении неполной топографической редукции ограничиваются учетом масс, расположенных в радиусе порядка 200 *км*. Имеются таблицы Хейфорда, составленные для учета топографических масс в радиусе 166,7 *км*.

Еще чаще поправка за притяжение топографических масс заменяется поправкой за притяжение бесконечной плоской пластины, которой представляются топографические массы, расположенные вблизи исследуемой точки, что, как уже говорилось, дает редукцию Буге.

При введении полной топографической редукции притяжение топографических масс всей Земли разделяется на влияние ближайших к точке областей, принимаемых за плоские, и влияния дальних областей, для которых необходимо иметь в виду сферичность Земли. При введении каких бы то ни было редукций сфероидальность Земли не учитывается.

Поправки за притяжение топографических масс плоской области вычисляются при помощи той же формулы (11.16) притяжения кругового цилиндра, которая уже выводилась для учета влияния рельефа.

Если обозначить толщину слоя через H, а высоту точки над ним через h, то в формуле (11.16)

$$z_2 = H + h \quad \text{и} \quad z_1 = h$$

и она принимает вид

$$\delta g = \frac{2\pi f\sigma}{n}\left[\left(\sqrt{r_2^2 + (H+h)^2} - \sqrt{r_2^2 + h^2}\right) - \right.$$
$$\left. - \left(\sqrt{r_1^2 + (H+h)^2} - \sqrt{r_1^2 + h^2}\right)\right]. \quad (11.33)$$

Поправка за притяжение топографических масс всей плоской области получится как сумма таких δg, взятых по соответствующим радиусам.

Рассмотрим далее метод учета сферической составляющей притяжения топографических масс на точку A.

Пусть элементарная масса dm расположена в точке M на высоте h над сферической Землей, M' — проекция по радиусу точки M на сферу, ψ — полярное расстояние точки M,

β — угол понижения точки M под горизонт (рис. 79). Вертикальная составляющая притяжения точки A элементарной массой dm будет $dg = \frac{f\,dm}{r^2}\sin\beta$. Выразим угол β через h, ψ и a

$$\sin\beta = \frac{1}{r}\left(\frac{a^2}{2R} - h\cos\psi\right),\quad r^2 = a^2 + h^2 + 2ah\sin\frac{\psi}{2}.$$

Теперь подставив значения $\sin\beta$ и r, получим выражение для

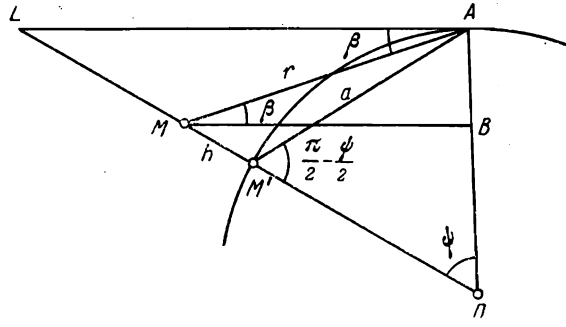


Рис. 79.

вертикальной составляющей притяжения точки A элементарной массой в виде

$$dg = \frac{\frac{a^2}{2R} - h\cos\psi}{\left(a^2 + h^2 + 2ah\sin(\psi/2)\right)^{3/2}} f\,dm = E(h, \psi)\,f\,dm,$$

где через $E(h, \psi)$ обозначена функция

$$\frac{\frac{a^2}{2R} - h\cos\psi}{\left(a^2 + h^2 + 2ah\sin(\psi/2)\right)^{3/2}}.$$

Для вычисления влияния топографических масс Земли представим выступающий за сферу рельеф в виде сферических цилиндрических колец (рис. 80). Влияние каждого кольца получим интегрированием выражения dg по всему кольцу. Для этого элементарную массу представим в виде объема элементарной призмы, выраженного в сферических координатах, умноженного на плотность σ:

$$\left.\begin{aligned} dm &= (R \pm h)^2 \sin\psi\, d\psi\, d\lambda\, dh, \\ \delta g &= f\sigma \int_0^h \int_{\psi_1}^{\psi_2} \int_0^{2\pi} E(\psi, h)\,(R \pm h)^2 \sin\psi\, d\psi\, d\lambda\, dh. \end{aligned}\right\} \qquad (11.34)$$

Функция E в конечном виде не интегрируется. Обычно для каждой призмы берется свое среднее значение E. Вынося его за знак интеграла, получим

$$\delta g = \overline{E} f\sigma \int_0^h \int_{\psi_1}^{\psi_2} \int_0^{2\pi} (R \pm h)^2 \sin\psi \, d\psi \, d\lambda \, dh. \qquad (11.35)$$

Выполняя интегрирование, придем к формуле

$$\delta g = 2\pi f\sigma R^2 h \left(1 + \frac{h}{R} + \frac{h^2}{3R^2}\right)(\cos\psi_2 - \cos\psi_1)\,\overline{E}.$$

Обычно членами порядка h/R пренебрегают. Тогда

$$\delta g = 2\pi f\sigma R^2 h\,(\cos\psi_2 - \cos\psi_1)\,\overline{E}. \qquad (11.36)$$

Вследствие большой трудоемкости вычисления E чаще применяется несколько видоизмененный метод расчета влияния

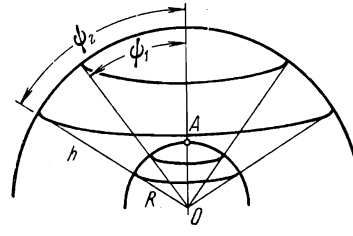


Рис. 80.

дальних зон. В функции E знаменатель разложим в ряд и удержим члены порядка h/a:

$$E = \frac{1}{a^3}\left(\frac{a^2}{2R} - h\cos\psi\right)\left(1 + \frac{2h}{a}\sin\frac{\psi}{2}\right)^{-3/2} =$$

$$= \frac{1}{2aR} - \frac{h}{a^3}\cos\psi - \frac{3}{2}\frac{h}{a^2R}\sin\frac{\psi}{2}.$$

Заменим a через $2R\sin(\psi/2)$ и образуем произведение

$$E\sin\psi = \frac{1}{2R^2}\cos\frac{\psi}{2} - \frac{h}{4R^3}\left(2 + \operatorname{ctg}^2\frac{\psi}{2}\right)\cos\frac{\psi}{2}.$$

Подставляя это выражение в (11.34) и интегрируя по ψ и h, получаем

$$\delta g = 2\pi f\sigma h\left[\left(\sin\frac{\psi_2}{2} - \sin\frac{\psi_1}{2}\right) - \frac{h}{4R}\left(3\sin\frac{\psi_1}{2} + \operatorname{cosec}\frac{\psi_1}{2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 3\sin\frac{\psi_2}{2} - \operatorname{cosec}\frac{\psi_2}{2}\right)\right] = 2\pi f\sigma h\mathscr{E}(h, \psi). \qquad (11.37)$$

Здесь через $\mathscr{E}$ обозначена функция в квадратных скобках. При

учете влияния дальних зон неудобно брать эти зоны кольцевыми, так как высоты h по кольцу могут изменяться слишком сильно. Поэтому обычно кольцо разбивается на n сферических призм, и тогда формула притяжения каждой точкой призмы будет

$$\delta g = \frac{2\pi f \sigma h}{n} \mathscr{E}(h, \psi).$$

В качестве h берется средняя высота призмы.

§ 9. Теория изостазии

Земная кора находится в состоянии равновесия. Точнее, она всегда стремится к равновесию, постоянно нарушаемому различными процессами развития Земли. Тектонические преобразования, процессы накопления осадков, изменение ледового режима в областях оледенения — все это нарушает состояние равновесия. Отдельные области земной коры, в которых произошло такое нарушение, начинают погружаться или, наоборот, подниматься, с тем чтобы восстановить нарушенное равновесие. Иными словами, избыток масс над поверхностью компенсируется недостатком их внизу. Это явление получило название *изостазии*.

Явление компенсации особенно четко наблюдается по распределению гравитационных аномалий. Эти аномалии изменяются в зависимости от рельефа значительно меньше, чем это должно было бы быть вызвано наличием избыточных внешних масс. Казалось бы, над горами должны быть большие положительные аномалии, а над океаническими впадинами — отрицательные. Однако гравитационная картина значительно более гладкая. Над океанами вообще, как правило, нет значительных аномалий. Они колеблются в пределах ± 40—50 *мгл*. Над горами — тоже положительные аномалии значительно меньше тех, которые могли бы вызвать горы. Только в областях молодой, еще не успевшей скомпенсироваться, складчатости гравитационные аномалии могут оказаться резко положительными.

Современное представление о строении земной коры с увеличением ее мощности под континентами и в особенности под горами и с уменьшением во впадинах и особенно океанических областях хорошо согласуется с теорией изостазии.

Еще в середине прошлого столетия была сформулирована теория равновесного состояния земной коры. По этой теории предполагалось, что в областях дополнительных нагрузок на кору, например, в горах, имеет место разуплотнение вещества внутри Земли такое, что на определенной глубине наблюдается постоянное для всей Земли давление. Наоборот, в зонах внеш-

него дефекта масс в коре должно существовать уплотнение. Эта гипотеза опиралась на экспериментальные данные, состоящие в том, что наблюденное значение величины притяжения горного массива Гималаев оказалось меньше расчетного. Так, определяя уклонения отвесной линии в районе Гималаев, английский геодезист Пратт получил значение этого уклонения значительно меньше ожидаемого. В частности, для пункта Димаргида расчетное значение было 27″,9, а наблюденное 5″,2. Отсюда следовал единственно правильный вывод, что если горы притягивают слабее, чем должна притягивать их масса, то, значит, под горами есть дефект масс. На этой основе была сформулирована гипотеза изостазии.

Схема изостазии по Пратту хорошо иллюстрируется рис. 81. Земная кора рассматривается состоящей из отдельных блоков различной плотности. Эта плотность изменяется от блока к блоку таким образом, чтобы массы всех блоков были одинаковы. Тогда давление на некоторую поверхность S, расположенную на глубине T, считая от уровня моря, будет одинаковым для всей Земли. В этом и состоит равновесное состояние земной коры. Поверхность S называется поверхностью компенсации, а глубина T — глубиной компенсации. Плотность отдельных блоков Земли будет тем меньше, чем больше высота блока над уровнем моря. Иными словами, если над уровнем моря выступают какие-либо массы, то этот избыток масс на Земле компенсируется недостатком масс под Землей, т. е. тем, что плотность такого блока меньше, чем того, у которого нет выступающих масс. Основное условие наличия изостазии по Пратту можно написать:

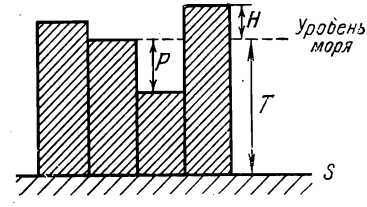


Рис. 81.

для суши

$$\sigma(T + H) = \text{const},$$

для моря

$$\sigma(T - P) + 1{,}03P = \text{const}.$$

Здесь σ — плотность коры, T — глубина компенсации, H — высота блока, P — глубина моря, 1,03 — плотность морской воды. С физической точки зрения подобная схема вызывает массу возражений. Однако мы будем принимать ее не как действительную схему строения коры, а как некоторую абстракцию, позволяющую построить удобный вычислительный аппарат. Более обоснованной с физической точки зрения представляется схема

изостазии по Эри (рис. 82). В ней земная кора представляется состоящей из отдельных блоков равной плотности, плавающих в вязкой магме. Чем больше высота такого блока над уровнем моря, тем он тяжелее и тем глубже погружен в магму. Поэтому горным областям соответствует большая мощность коры, низинам или, тем более, дну океана — малая. Можно образно сказать, что согласно этой схеме изостазии горы как бы имеют корни, уходящие в глубь Земли. Глубина погружения данного блока определяется законом Архимеда, и соответственно ему основным уравнением теории изостазии Эри является условие

$$\sigma_0 B = \sigma b, \tag{11.38}$$

где σ_0 — плотность коры, σ — плотность магмы, B — мощность коры в данном блоке, b — глубина погружения блока в магму.

Принципиально схема Эри не отличается от схемы Пратта, а является некоторым ее усложнением. В самом деле, если на рис. 82 провести поверхность S на глубине T, равной глубине погружения самого высокого блока, то на этой поверхности будет иметь место гидростатическое равновесие, точно так же как на поверхности S в схеме Пратта. Массы блоков, расположенных над этой поверхностью в схеме Эри, будут равны, так же как для схемы Пратта. В самом деле, рассмотрим два блока в схеме Эри (см. рис. 82). Масса первого из них $\sigma_0 B$. Масса второго сложится из массы блока $\sigma_0 B_0$ и массы σR части магмы в объеме, продолжающем этот блок до глубины T, т. е. масса второго столба будет

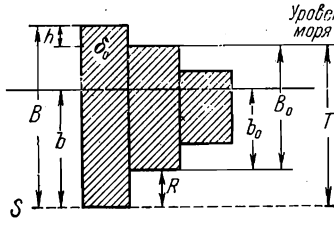


Рис. 82.

$$\sigma_0 B_0 + \sigma R,$$

но $R = b - b_0$, поэтому, согласно (11.38),

$$b = B\frac{\sigma_0}{\sigma} \text{ и } b_0 = B_0\frac{\sigma_0}{\sigma}.$$

Значит, масса второго столба будет

$$\sigma_0 B_0 + \sigma(b - b_0) = B_0\sigma_0 + \sigma\left(B\frac{\sigma_0}{\sigma} - B_0\frac{\sigma_0}{\sigma}\right) = \sigma_0 B,$$

т. е. массы блоков равны и, значит, удовлетворяется основное уравнение схемы Пратта.

Некоторые авторы предлагают рассматривать смешанную схему изостазии, т. е. такую, в которой и плотности блоков и

глубина погружения переменны. Очевидно, что как рабочая схема такая схема сложнее и поэтому неприемлема; как схема, представляющая реальное состояние Земли, она несколько ближе к истине. Хейфорд и Боуи принимают схему Пратта, усложняя ее тем, что вносят разные значения плотностей в подземную и надземную части блоков.

Во всех модификациях основным недостатком гипотезы изостазии являются предположения равновесного состояния коры и пренебрежение силами сцепления между блоками, которые рассматриваются изолированными и могущими вертикально перемещаться сами по себе без взаимодействия с соседними массами. Однако эти недостатки несущественны, если схему изостазии рассматривать как метод введения определенных редукций. Если ее рассматривать как действительное состояние коры, то следует внести существенные коррективы. Изостазию следует рассматривать не как состояние равновесия коры, а как процесс ее развития. Нельзя представлять земную кору как застывшую равновесную структуру. Наоборот, она все время находится в движении, в развитии. Геологические процессы, протекающие на поверхности коры, осадконакопление, процессы эрозии, а также тектонические процессы постоянно нарушают распределение масс на Земле, значит, все время изменяются нагрузки, и земная кора все время будет испытывать вертикальные перемещения, выравнивающие происшедшие нарушения. Таким образом, земная кора имеет стремление к принятию все время нарушаемого уравновешенного состояния. Конечно, реакция на нарушение равновесия будет не мгновенная. Здесь возможны постепенные прогибы, а также накопления напряжений, приводящие к быстрым тектоническим преобразованиям. Очевидно, что реагировать на изменения нагрузки будут не только нагруженные области, но и смежные с ними вследствие сил сцепления в веществе коры. Значит, изостазию надо рассматривать не как локальную, охватывающую область происшедших изменений нагрузок, а как региональную, затрагивающую большие области, отдельные части которых могут не только не быть компенсированными, но даже не иметь тенденции к этому. В качестве такой улучшенной региональной изостазии, учитывающей силы упругости коры, была предложена теория изостазии Венинг-Мейнеса, рассматривающего вертикальные перемещения отдельных участков коры под действием измененных нагрузок как прогибы упругой пластины, вдавливающейся в магму. Эта схема изостазии более приемлема потому, что она представляет физический процесс изостазии, однако в вычислительном отношении она крайне сложна и сам ее автор ведет вычисление изостатических редукций в основном по схеме Хейфорда — Боуи.

С течением времени взгляды на гипотезу изостазии изменялись от признания ее в самом грубо схематическом виде до полного отрицания и нового признания. Современные данные заставляют нас считать изостазию безусловно существующей, однако именно в том понятии, которое было изложено, т. е. изостазии региональной, широкообластной с возможными длительными запаздываниями выравнивания, и изостазии как процесса стремления постоянно нарушаемого равновесия к его выравниванию. Подтверждением наличия изостатической компенсации является изученная и изучаемая в настоящее время картина строения земной коры. Является общепризнанным, доказанным тот факт, что мощности земной коры под континентами составляют 30—70 *км*, причем они больше в областях горных стран. Под океанами, наоборот, эти мощности составляют всего 5—15 *км*.

§ 10. Изостатическая редукция

Изостатическая редукция состоит в таком приведении силы тяжести, которое учитывает влияние компенсирующих масс. Если масса горы компенсирует дефект масс под ней, то изостатическая редукция должна убрать из наблюденного значения силы тяжести влияния масс этой горы и добавить влияние этих же масс, когда они будут размещены под горой до глубины компенсации.

В случае выполнения идеальной изостатической компенсации изостатические аномалии силы тяжести будут равны нулю. Это следует из того, что при идеальной компенсации изостатическая редукция устраняет все аномалии масс.

Соответственно сказанному изостатическая редукция состоит из снятия влияния внешних масс введением поправки за топографию и введения влияния этих масс после того как они будут размещены с однородной плотностью на весь слой коры до глубины компенсации. Этот так называемая поправка за компенсацию или собственно изостатическая поправка. Кроме этого, сила тяжести приводится за высоту по формуле редукции в свободном воздухе. Основой вычислений как топографических, так и компенсационных поправок ближних зон является формула (11.33) притяжения цилиндрическими призмами точки, лежащей на оси кругового цилиндра. Вся местность вокруг исследуемой точки разбивается (на карте с помощью палетки) на такие цилиндрические призмы, и вычисляется влияние каждой из них. Суммированием получаем поправку за топографию $\Delta_T g$. Эта формула служит и для расчета поправки за компенсацию, только в ней надо положить H равной глубине компенсации T, h заменить через $H + h$ — высоту над уровнем

моря и плотность положить равной $\sigma H/T$. Приведенная формула служит для учета влияния ближних зон, которые можно считать плоскими. Однако при введении изостатических редукций обязателен учет и дальних зон; для этого служат формулы (11.34), (11.35) для сферической части. По схеме Хейфорда вся Земля разделяется на 15 плоских (внутри окружности радиусом 167 *км*) и 18 сферических зон. Зоны разбиваются на 199 плоских и 118 сферических секторов. Для каждого такого сектора снимается высота и вычисляется топографическая поправка, после чего вычисляется для тех же секторов поправка за компенсацию. Существуют таблицы Хейфорда, в которых даются величины изостатических поправок по секторам при заданной глубине компенсации. Хейфорд для глубины компенсации принимает величину 113,7 *км*.

Критерием правильного выбора глубины компенсации при наличии компенсации является близость нулю изостатических аномалий. Заметим, что аномалию в свободном воздухе и аномалию Буге можно рассматривать как предельные случаи изостатических аномалий при глубинах компенсации, равных нулю и бесконечности соответственно. В самом деле, при введении редукции в свободном воздухе массы, расположенные под точкой наблюдения, опускаются на уровень моря и конденсируются в бесконечно тонкий слой. Это соответствует изостатической редукции с глубиной компенсации, равной нулю. В случае редукции Буге влияние масс, расположенных между точкой наблюдения и уровнем моря, целиком исключается. Это можно рассматривать как опускание масс под уровень моря и распределение их на бесконечно большую глубину. Таким образом, редукцию Буге можно рассматривать как изостатическую редукцию с глубиной компенсации, равной бесконечности. Отсюда следует, что изостатические аномалии должны лежать между аномалиями в свободном воздухе и аномалиями Буге. Так как в случае изостатически компенсированной области изостатические аномалии должны быть близки к нулю, а они лежат между аномалиями в свободном воздухе и Буге, то обязательным показателем наличия изостатической компенсации является условие, что аномалии в свободном воздухе в данной области положительны, а аномалии Буге отрицательны. Если аномалия в свободном воздухе и аномалия Буге обе отрицательны или положительны, то область некомпенсирована. Примером являются Крым и Крымская Яйла, где обе аномалии имеют значительные положительные величины. Нарушение изостазии наблюдается также на западном Кавказе, Большом Балхане, на острове Кипр, в Сибири, в Индии, а кроме того, в переходных зонах от континентов к океану, например, в районе Курило-Камчатской островной дуги.

§ 11. Редукция конденсации

Редукцию конденсации, основанную на конденсировании всех выступающих масс на уровенной поверхности, пользуясь теоремой о независимости притяжения бесконечной пластины от высоты расположения точки над ней, рассматривал еще Гельмерт. Однако она не имела принципиальных преимуществ перед чистой редукцией в свободном воздухе.

Одной из наиболее совершенных, однако несправедливо редко применяющейся является редукция конденсации, предложенная А. А. Михайловым. Она состоит в том, что наблюденное значение силы тяжести в точке с высотой H приводится к геоиду, причем массы, располагающиеся между точкой наблюдения и геоидом, конденсируются на поверхности последнего с учетом изостатического состояния Земли.

Для равнинных областей редукция конденсации практически совпадает с редукцией в свободном воздухе. В горах между этими редукциями имеет место заметное различие. Чистая редукция в свободном воздухе или даже с поправкой за рельеф опускает точки на уровень моря, вдавливая массы в Землю. Так как различные точки имеют разные высоты, то и вдавливаться в Землю они будут на разную глубину — получится неравномерное перераспределение масс, кроме того, далекие массы при этом будут выходить за границу геоида. Редукция конденсации в том виде, в каком ее предложил А. А. Михайлов, не только устраняет этот недостаток, но и позволяет осуществить сам перенос силы тяжести на геоид в наиболее выгодных условиях, а именно при условии наибольшего выравнивания аномалий плотностей в земной коре.

Для редукции по методу конденсации А. А. Михайлова составлены таблицы, при помощи которых осуществляется конденсация внешних масс для всей Земли. Для этого вся Земля разбита на зоны, соответствующие зонам Хейфорда в таблицах для вычисления изостатических редукций, что позволяет использовать эти таблицы. При применении метода конденсации имеет место следующая последовательность операций:

1. Удаляются внешние массы с помощью поправки за промежуточный слой. Эта поправка вносится для каждой зоны по соответствующей средней высоте зоны H и стандартной плотности 2,67.

2. Удаленные внешние массы вкладываются в Землю равномерно от уровня моря до глубины компенсации, равной $T = 96$ *км*. Добавочная плотность этих масс определяется соотношением $\sigma' = (H/T)\sigma_0$ $(\sigma_0 = 2{,}67)$.

3. При помощи редукции в свободном воздухе точка переносится на поверхность геоида. Этот перенос теперь после транс-

позиции внешних масс внутрь Земли осуществляется наиболее точно. Это происходит вследствие того, что земная кора после выполненных операций становится наиболее однородной, а значит, предельно уменьшатся аномалии вертикального градиента силы тяжести.

4. После того как произведен перенос силы тяжести на уровень моря, внутреннее строение коры восстанавливается в прежнем виде, для чего все распространенные на глубину компенсации массы вынимаются из Земли, т. е. вводится поправка, обратная поправке, введенной в п. 2.

5. Вынутые массы сплющиваются в бесконечно тонкий слой, лежащий на уровне моря, т. е. прибавляется вертикальная составляющая притяжения такого слоя на точку, расположенную на уровне моря.

6. Добавляется малая поправка, возникающая вследствие происшедшего при выполнении предыдущих операций изменения уровня геоида.

§ 12. Редукции силы тяжести и образование аномалий на море

На морях и океанах геоид совпадает с физической поверхностью Земли. Гравиметрические определения на океанах производятся, таким образом, как правило, на уровне геоида. В этом случае не возникает проблемы регуляризации, так как наблюдения производятся на уровенной поверхности, охватывающей все массы Земли. Поэтому разность наблюденного и нормального значений силы тяжести Земли $\Delta g = g - \gamma_0$ дает смешанную аномалию, эквивалентную аномалии в свободном воздухе для суши. Такие аномалии часто называют полными аномалиями. При их образовании не вводится никаких поправок и не делается никаких приведений.

Практически наблюдения силы тяжести производятся или на надводном корабле, тогда прибор располагается на уровне моря или на незначительной высоте над ним, или на подводной лодке, тогда место измерения располагается на несколько десятков или сотню метров ниже уровня моря. В случае использования донных гравиметров глубина точек наблюдения совпадает с глубиной морского дна.

В первом случае, если прибор установлен несколько выше уровня моря, вводится поправка за высоту в свободном воздухе.

Во всех случаях, когда наблюдения производятся ниже уровня моря, делается приведение наблюденных значений на уровень моря, для чего вводятся редукции в свободном воздухе и поправка Прея, учитывающая притяжение слоя воды,

заключенной между уровнем моря и уровнем точки наблюдения на глубине. Тогда аномалии силы тяжести вычисляются по формуле

$$\Delta g_{\text{св.в}} = g - \gamma_0 - 0{,}3086p + 0{,}0838\sigma_в p, \qquad (11.39)$$

где p — глубина погружения, g и γ_0 — наблюденное и нормальное значения ускорения силы тяжести соответственно, $\sigma_в$ — плотность воды, равная 1,03 *г/см*.

Поправка 0,3086 берется со знаком «минус» при условии, что глубина p положительна как в этой поправке, так и в поправке $+0{,}0838\sigma_в p$, учитывающей притяжение слоя масс воды. С указанным значением плотности воды формула (11.39) упрощается:

$$\Delta g_п = g - \gamma_0 - 0{,}222p. \qquad (11.40)$$

Для изучения строения земной коры на океанах часто используются аномалии, образованные из аномалий в свободном воздухе добавлением поправки за различие плотностей морской воды и земной коры, лежащей под дном океана. Эта поправка равна притяжению слоя толщиной, равной глубине океана, и плотности, равной разности плотностей коры и морской воды.

Иными словами, строится модель Земли, в которой все океаны засыпаны массами, доводящими плотность воды до плотности земной коры. Такие аномалии обычно называют аномалиями Буге. Однако в этом легко усмотреть противоречие: поправка Буге есть поправка за притяжение выступающих за геоид масс и поэтому пропорциональна высоте:

$$\delta g_Б = 0{,}0419\sigma H.$$

В случае наблюдения на океанах $H = 0$ массы за геоид не выступают, поправка превращается в нуль и аномалии Буге совпадают с полными аномалиями.

Формула для вычисления так называемых аномалий Буге при измерении силы тяжести на надводном корабле имеет вид

$$\Delta g_Б = g - \gamma_0 + 0{,}3086h + 0{,}0419(\sigma - 1{,}03)P, \qquad (11.41)$$

где P — глубина морского дна в метрах, h — высота прибора над уровнем моря. Коэффициенты в формуле таковы, что аномалии получаются в миллигалах.

При вычислении аномалий Буге по результатам измерений в подводной лодке или буксируемой гондоле применяется формула

$$\Delta g_Б = g - \gamma_0 - 0{,}222p + 0{,}0419(\sigma - 1{,}03)P, \qquad (11.42)$$

где глубины p и P считаются положительными.

В случае измерения на дне моря с донными гравиметрами $p = P$ и формула (11.42) примет вид

$$\Delta g_{\text{в}} = g - \gamma_0 - (0{,}265 - 0{,}0419\sigma)P, \qquad (11.43)$$

где σ — плотность верхних слоев земной коры.

При вычислении более точных аномалий Буге следует вводить поправку за рельеф дна. Она должна учитывать влияние притяжения избыточных масс, возвышающихся над уровнем, проходящим через точку, расположенную на морском дне и являющуюся проекцией точки наблюдения, и недостачу масс ниже этого уровня. В неблагоприятных условиях поправка за рельеф может достичь нескольких десятков миллигал.

§ 13. Физический смысл редукций. Искажение геоида при введении поправок

Легко представить себе физический смысл редукций и всевозможных поправок и дать их графическое изображение. Оно приводится на рис. 83. Пусть в точке A на физической поверхности Земли произведено наблюдение силы тяжести g; в точке A', находящейся на пересечении эллипсоида относимости силовой

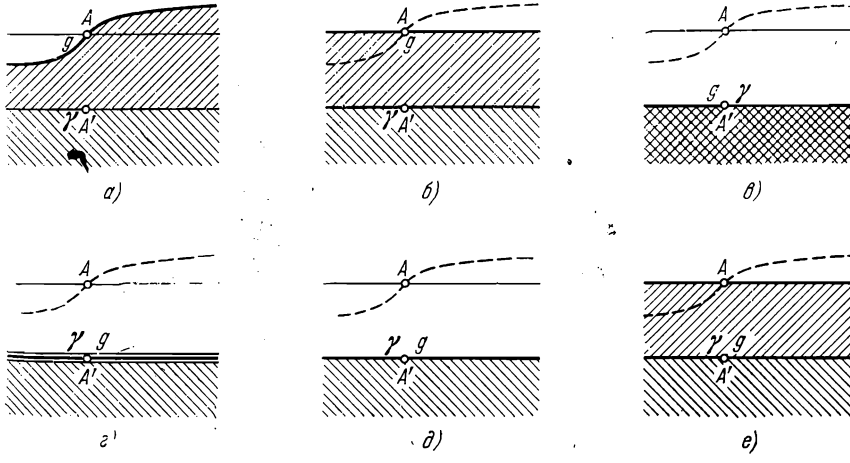


Рис. 83.

линией, проходящей через точку A, известно соответствующее точке A нормальное значение силы тяжести γ (рис. 83, *а*).

Будем вводить все ранее рассмотренные поправки. **1.** Поправка за рельеф приводит его к форме плоского слоя: срезаются выступающие над уровнем точки A массы и засыпаются

пустоты ниже уровня A (рис. 83, *б*). 2. Поправка в свободном воздухе соответствует опусканию точки A на высоту H, т. е. на геоид без нарушения влияния масс промежуточного слоя, расположенного между точками A и A'. Влияние этих масс на опущенную на геоид точку A остается без изменений, т. е. массы промежуточного слоя сохраняют то же расположение относительно точки A. При этом выступающие массы, расположенные вблизи точки наблюдения, опустятся под уровенную поверхность, на которую редуцирована сила тяжести, т. е. под поверхность геоида (рис. 83, *в*). Выступающие массы, расположенные на противоположном полушарии, наоборот, выступят еще дальше за уровенную поверхность. Однако в силу удаленности этих масс и того, что их влияние убывает пропорционально квадрату расстояния, этим эффектом обычно пренебрегают. После введения редукции в свободном воздухе за поверхностью уровня вблизи точки наблюдения остаются массы, расположенные выше этой точки. Если ввести еще поправку, которая учитывает притяжение этих масс, то вблизи точки наблюдения за поверхностью геоида масс не останется. Таким образом, редукция в свободном воздухе и поправка за рельеф местности решают задачу регуляризации Земли. Для равнинных районов регуляризацию можно производить, пренебрегая поправкой за рельеф. Редукцию в свободном воздухе можно интерпретировать так же, как конденсацию масс на поверхности геоида (рис. 83, *г*), т. е. как превращение пластины конечной толщины H с плотностью σ в бесконечно тонкую пластину с поверхностной плотностью $\sigma' = \sigma' dz$. Это можно сделать потому, что сила, развиваемая пластиной на точку A, расположенную над пластиной, не зависит от расстояния z точки A от пластины. Предложение справедливо с точностью до z/a, т. е. когда $a \gg z$, линейные размеры пластины велики по сравнению с высотой расположения точки. В этом случае промежуточный слой можно рассматривать состоящим из множества тонких пластин, которые в силу сформулированного предложения можно эквивалентно перенести на поверхность геоида, где получим бесконечно тонкую пластину с поверхностной плотностью σ'.

Если образуется аномалия Буге, то из величины g вычитается поправка, равная притяжению промежуточного слоя, что соответствует полному исключению влияния этого слоя, его как бы срывают и выбрасывают (рис. 83, *д*). Значения g и γ отнесены к точке A' на геоиде.

Для образования аномалий Прея восстанавливается промежуточный слой над точкой A', т. е. введена двойная поправка Буге, значения g и γ отнесены к точке A' (рис. 83, *е*). В эту схему укладываются все поправки, регуляризующие Землю.

В приведенной схеме мы пренебрегли различием геоида, на который редуцируется наблюденное значение g, и эллипсоида, на котором задано нормальное значение силы тяжести.

Если рассматривать случай образования аномалий на физической поверхности Земли в точках непосредственного наблюдения, то схема редукций и образования аномалий может быть проиллюстрирована следующим рисунком (рис. 84).

1. Сила тяжести получена на физической поверхности Земли в точке A. Нормальное значение известно на эллипсоиде относимости в точке A' (рис. 84, $а$).

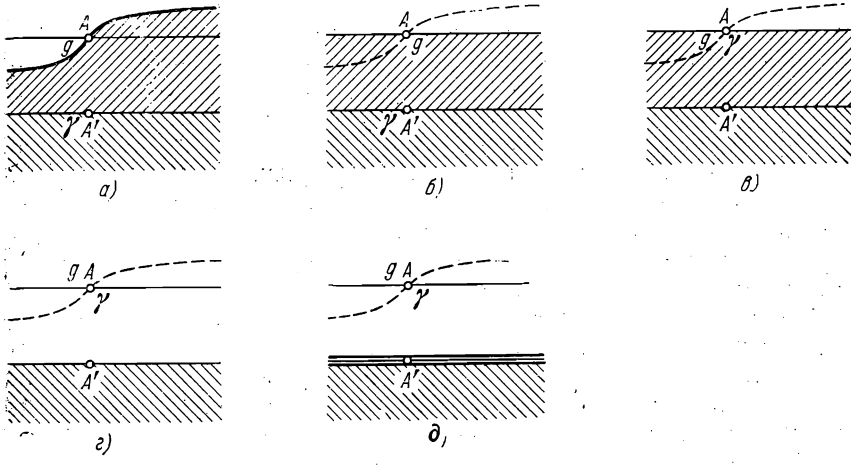


Рис. 84.

2. Поправка за рельеф местности сглаживает влияние всех выступающих форм и дефекта масс (рис. 84, $б$).

3. Вводится поправка в свободном воздухе, значение γ переносится в нормальном поле из точки A' в точку A. В этом переносе массы промежуточного слоя не участвуют, так как нормальное поле построено для эллипсоида, охватывающего все массы (рис. 84, $в$).

4. Поправка Буге за промежуточный слой исключает влияние этого слоя (рис. 84, $г$), образно говоря, удаляются все массы, расположенные между уровнем геоида и точки A на физической поверхности Земли. Точка как бы повисает в воздухе. Поскольку аномалия образована уже на внешней по отношению ко всем массам поверхности, с точки зрения теории фигуры Земли такая операция бессмысленна и даже вредна, так как при этом нарушается общая масса Земли.

5. По той же причине теряет смысл конденсация масс (рис. 84, $д$). Другое дело, если эти операции рассматривать с позиций

гравитационной разведки. Тогда удаление слоя некоторой стандартной плотности соответствует снятию с аномалий некоторого общего гравитационного фона, после чего более рельефно представятся аномальные массы, так как только они останутся в пространстве между уровнями точек A и A'.

6. Поправка Прея в случае отнесения аномалий к физической поверхности Земли смысла не имеет.

Выбор редукций силы тяжести обусловлен поставленными задачами. В соответствии с этим же дается и истолкование выбранной редукции.

Аномалия в свободном воздухе является отклонением реально наблюдающейся в данной точке истинной силы тяжести от ее нормального значения. В этом смысле она представляет истинное гравитационное поле. То же можно сказать про аномалии Прея, с поправкой на неточность знания плотностей и распределения масс в коре. Эти аномалии представляют истинное значение силы тяжести на регуляризированном (в случае редукций в свободном воздухе) или на нерегуляризированном (в случае редукции Прея) геоиде.

Совсем иной смысл имеют аномалии Буге. При их образовании мы исключаем влияние некоторой части земных масс, тем самым как бы изменяя Землю, создаем новую ее модель. Поэтому и происходит заметное искажение формы геоида при определении его по аномалиям Буге. Образованное таким образом аномальное гравитационное поле не соответствует истинному полю Земли, а представляет собой поле некоторой модели.

Рассмотрим далее, какие деформации геоида вызывают различные поправки.

Редукция инверсии не искажает геоид по своему построению.

Редукция в свободном воздухе искажает геоид очень незначительно. Покажем это для случая редукции в свободном воздухе с конденсацией масс промежуточного слоя на поверхности геоида. Смещение уровенной поверхности при переносе масс будет по теореме Брунса соответствовать изменению потенциала

$$ds = \frac{dV}{\gamma}.$$

Значит, если мы найдем величину изменения потенциала, происшедшего вследствие перемещения масс, то тем самым будет известна и деформация уровенной поверхности. Получим потенциал слоя, взятого в виде плоской круглой пластины толщины H, радиуса a и плотности σ, на точку, расположенную на высоте z над его центром. Потенциал элемента такой пластины будет (см. рис. 75)

$$dV = f\frac{dm}{\rho} = f\frac{dm}{\sqrt{z^2 + r^2}},$$

а элемент массы можно записать через объем и плотность:

$$dm = r\,d\varphi\,dr\,d\sigma.$$

Тогда

$$dV = f\frac{r\,d\varphi\,dr\,dz}{\sqrt{z^2+r^2}},$$

а потенциал всего диска получим, интегрируя по углу, радиусу и толщине диска:

$$V = f\sigma\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{H}\frac{r\,dr\,d\varphi\,dz}{(z^2+r^2)^{1/2}} =$$

$$= 2\pi f\sigma\int_0^{H}dz\int_0^{a}\frac{r\,dr}{(z^2+r^2)^{1/2}} = 2\pi f\sigma\int_0^{H}\left(\sqrt{a^2+z^2}-z\right)dz =$$

$$= 2\pi f\sigma\left\{\frac{1}{2}\left[z\sqrt{z^2+a^2}+a^2\operatorname{arcsh}\frac{z}{a}-z^2\right]_0^{H}\right\}. \qquad (11.44)$$

Подставляя пределы, получаем окончательно потенциал диска:

$$V = \pi f\sigma\left\{Ha\sqrt{1+\frac{H^2}{a^2}}+a^2\operatorname{arcsh}\frac{H}{a}-H^2\right\}. \qquad (11.45)$$

Раскладывая в ряд радикал и $\operatorname{arcsh}\frac{H}{a}$ и удерживая члены второй степени относительно $\frac{H}{a}$ $(H\ll a)$, получим

$$V = 2\pi f\sigma Ha\left[1-\frac{H}{2a}-\frac{2}{3}\left(\frac{H}{a}\right)^2+\ldots\right]. \qquad (11.46)$$

Это выражение соответствует потенциалу слоя толщины H. Для того чтобы произвести конденсацию, следует в (11.46) положить $H=0$ и $\sigma H=\sigma'$, где σ' — поверхностная плотность. Тогда потенциал сконденсированного слоя будет

$$V_k = 2\pi f\sigma' a = 2\pi f\sigma Ha. \qquad (11.47)$$

Изменение потенциала при конденсации будет равно разности потенциала исходного слоя (11.46) и потенциала сконденсированного слоя (11.47). Производя это вычитание, получим

$$dv = V - V_k = -2\pi f\sigma Ha\left[\frac{H}{2a}+\frac{2}{3}\left(\frac{H}{a}\right)^2\right], \qquad (11.48$$

или, пренебрегая квадратом отношения H/a,

$$dv = -\pi f\sigma H^2.$$

Смещение уровенной поверхности будет

$$ds = \frac{dv}{\gamma} = -\frac{\pi f \sigma H^2}{\gamma}. \tag{11.49}$$

Заметим, что смещение геоида в результате редукции в свободном воздухе и конденсации масс не зависит в первом приближении от радиуса слоя, т. е. не зависит от протяженности области, которую мы конденсируем.

Легко рассчитать численную величину смещения уровенной поверхности в результате редукции конденсации. Пусть конденсируется континент высотой $H=1$ *км* плотности $\sigma=2{,}5$; тогда

$$ds = -\frac{3{,}14 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{10}}{980} = 5 \text{ см},$$

таким образом конденсация целого континента мощностью в 1 *км* произведет смещение уровня всего на 5 *см*.

Следовательно, введение редукции в свободном воздухе позволяет привести наблюденное значение силы тяжести к уровню моря, не нарушая при этом общей массы Земли и вызывая весьма незначительное искажение уровенной поверхности. Условия теоремы Стокса нарушаются в этом случае очень мало. В силу этого редукция силы тяжести в свободном воздухе пригодна для регуляризации Земли при решении задач теодезической гравиметрии.

Поправка Буге за влияние промежуточного слоя соответствует снятию слоя толщиной H, потенциал которого определяется формулой (11.46). При снятии слоя потенциал в точке A изменится на величину, равную потенциалу этого слоя, т. е. на величину

$$dv = 2\pi f \sigma H a\left(1 - \frac{H}{2a}\right).$$

Отсюда перемещение уровенной поверхности будет

$$ds = \frac{dv}{\gamma} = \frac{2\pi f \sigma H a}{\gamma}. \tag{11.50}$$

При редуцировании за влияние острова высотой $H=1$ *км* радиусом $a=100$ *км* и плотностью $\sigma=2{,}5$ *г/см*^{3} получим

$$ds = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 2{,}5 \cdot 10^5 \cdot 10^7}{980} \approx 10 \text{ м}.$$

Таково будет искажение геоида в случае регуляризации методом введения поправки Буге.

ГЛАВА 12

АНОМАЛЬНОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ. ГЕОИД РЕГУЛЯРИЗИРОВАННОЙ ЗЕМЛИ

§ 1. Второе приближение в определении фигуры Земли. Постановка задачи

В главе 10 мы определили закон распределения силы тяжести на Земле, представленной в форме эллипсоида вращения,— так называемое нормальное распределение силы тяжести. Там же показан путь определения сжатия Земли по значениям силы тяжести, измеренным на ее поверхности. Для того чтобы знать фигуру реальной Земли, достаточно теперь знать расстояния от эллипсоида относимости точек физической поверхности Земли — так называемые *геодезические высоты*. Тогда можно говорить о точном знании фигуры Земли. Точность будет зависеть от густоты точек, в которых известны значения высот земной поверхности над эллипсоидом. Этим же определится степень сглаживания рельефа при решении тех или иных конкретных задач. Значения высот мы получаем из нивелировок, однако получаемые в этом случае высоты отнесены не к эллипсоиду, а к некоторой иной поверхности, за которую обычно принимают уровень моря. Эта поверхность, совпадающая на океанах со средним уровнем невозмущенной волнами и приливами воды и продолжающаяся под континенты по закону постоянства потенциала, получила название *геоида*. Понятие геоида введено в 1873 г. немецким геодезистом Листингом, который определил его как следующее после эллипсоида вращения приближение к фигуре Земли. Однако вряд ли целесообразно считать геоид вторым приближением в представлениях о фигуре Земли. Обычно принято считать, что когда в решении какой-либо задачи естествознания делают шаг ко второму приближению, то происходит приближение к истине на порядок. Так, когда от шара перешли к эллипсоиду вращения, произошло приближение на величину сжатия. В линейной мере изменения, внесенные в радиус Земли, были порядка 21 *км*. Введение следующего приближения должно в основном учесть остаточные величины — отклонения эллипсоида от физической поверхности

Земли. На океанах эта цель достигнута. Геоид совпадает с поверхностью воды. На материках геоид, по существу, не приближает нас к истине, поскольку расхождение геоида с эллипсоидом существенно меньше остаточных величин — высот физической поверхности Земли над геоидом,— диапазон изменения высот составляет 8000 *м*, тогда как превышение геоида над эллипсоидом составляет 100 *м*. Можно спорить о том, является ли геоид следующим приближением в решении вопроса о фигуре Земли. Однако бесспорно то, что введение геоида или какой-либо иной поверхности, разделяющей остаточные отклонения физической поверхности Земли от эллипсоида относимости, на некоторую гладкую, плавно изменяющуюся геоидальную часть и на неправильную часть физической поверхности Земли, определяемую нивелированием, оказалось весьма плодотворным. Если предположить, что нивелирные высоты отсчитываются от поверхности, определяемой уравнением $W = \text{const}$ и совпадающей на океанах с невозмущенной поверхностью воды, т. е. от геоида, то задача будет состоять в определении нивелирных высот точек физической поверхности Земли, а также в определении высот геоида от эллипсоида относимости. Таким образом, задача определения фигуры Земли будет решена полностью, и точность представления фигуры Земли, как мы уже сказали, будет зависеть от густоты выбранных точек и степени астрономо-геодезической и гравиметрической изученности. Сделанное предположение не вполне строго, так как нивелировки не могут дать точные значения высот над геоидом. Однако такая точка зрения была всеми принята и в равнинных районах практически оправдывается. Рассмотрим далее задачу определения высот геоида над эллипсоидом относимости.

§ 2. Теорема Брунса. Вывод граничного условия

Обозначим значение силы тяжести на геоиде после приведения его в свободном воздухе через g_0, а нормальное значение силы тяжести на эллипсоиде относимости — через γ_0. Разность $g_0 - \gamma_0 = \Delta g$ есть аномалия силы тяжести. При таком определении аномалии производится сравнение величин, отнесенных к разным поверхностям, и сами аномалии называются смешанными. Величины аномалий характеризуют степень расхождения уровенных поверхностей. Отсюда, обратно, аномалии дают материал для нахождения расстояний уровенной поверхности геоида от эллипсоида относимости.

Значение потенциала Земли на поверхности геоида $W = C$. Нормальный эллипсоид мы получаем из условия, что нормальный потенциал на его поверхности равен потенциалу геоида $U = C$. При выборе эллипсоида относимости мы предполагали,

что геоид и эллипсоид относимости охватывают одинаковые массы, имеющие одну и ту же скорость вращения. Кроме того, у обоих поверхностей совпадают центры масс и оси вращения, а поверхности охватывают равновеликие объемы. Изменение потенциала при таких условиях может вызываться, согласно теореме Стокса, только деформацией поверхности.

Пусть при переходе от поверхности геоида к поверхности эллипсоида относимости, отстоящего от геоида на расстоянии ζ, потенциал изменится на величину T, т. е.

$$W - U = T$$

(величина T называется *возмущающим потенциалом*). При переходе с геоида на эллипсоид изменение потенциала будет

$$W - U = T = \zeta\gamma. \tag{12.1}$$

Это так называемое *уравнение Брунса,* связывающее высоты геоида с возмущающим потенциалом:

$$\zeta = \frac{T}{\gamma}. \tag{12.2}$$

Изменение силы тяжести при переходе от эллипсоида относимости к геоиду вызвано возмущающим потенциалом T и определяется производной его по нормали к эллипсоиду $\frac{\partial T}{\partial n}$. Сила тяжести на геоиде равна g_0, нормальное значение силы тяжести на геоиде равно γ_0 плюс приведение в свободном воздухе от поверхности эллипсоида к геоиду, равное $\zeta\frac{\partial\gamma}{\partial n}$. Тогда

$$-\frac{\partial T}{\partial n} = g_0 - \left(\gamma_0 - \zeta\frac{\partial\gamma}{\partial n}\right) = \Delta g + \zeta\frac{\partial\gamma}{\partial n}$$

или

$$-\frac{\partial T}{\partial n} - \frac{T}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial n} = \Delta g. \tag{12.3}$$

Полученное таким образом равенство является граничным условием для T, заданным на поверхности эллипсоида относимости. Решение этой граничной задачи возможно, однако сложно и требует применения специальных функций. Задача решается просто, если за поверхность относимости принять сферу и уравнение (12.3) перестроить к сфере; делая это перестроение, мы допускаем неточность, выражаемую величинами, не бо́льшими квадрата сжатия. В самом деле, возмущающий потенциал T и аномалию, равную производной возмущающего потенциала $\frac{\partial T}{\partial n}$, отнесем к сфере S с помощью разложения

в ряд

$$T_\Sigma = T_S + \left(\frac{\partial T}{\partial \zeta}\right)_S d\zeta + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2}\right)_S d\zeta^2 + \ldots,$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \zeta}\right)_\Sigma = \left(\frac{\partial T}{\partial \zeta}\right)_S + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2}\right)_S d\zeta + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^3 T}{\partial \zeta^3}\right)_S d\zeta^2 + \ldots$$

Здесь изменение расстояния $d\zeta$ имеет порядок α^2, аномалия $\frac{\partial T}{\partial \zeta}$ не больше α, величина $\frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2}$ также не больше α. Имея в виду, что направление радиуса R сферы совпадает с направлением нормали, уравнение (12.3) для сферы можем представить в виде

$$-\frac{\partial T}{\partial R} = g_0 - \gamma_0 + \frac{2\gamma\zeta}{R} = \Delta g + \frac{2\gamma\zeta}{R},$$

где $\frac{\partial \gamma}{\partial n} = \frac{\partial \gamma}{\partial R} = \frac{2\gamma}{R}$, или

$$\frac{\partial T}{\partial R} + \frac{2T}{R} = -\Delta g. \tag{12.4}$$

Уравнения (12.3), (12.4) являются граничным условием смешанной предельной задачи эллиптического типа: требуется найти в области Ω, внешней по отношению к сфере S, гармоническую функцию T, удовлетворяющую на поверхности сферы условию (12.4). Поскольку задача внешняя, следует установить характер изменения искомой гармонической функции T на бесконечности. Это легко сделать, если вспомнить разложение потенциала притяжения по многочленам Лежандра. Там было показано, что разложение возмущающего потенциала начинается со сферических функций второго порядка, так что T регулярно на бесконечности (10.58).

§ 3. Формула Стокса. Ряд Стокса

Задачу определения высот геоида над эллипсоидом относимости по аномалиям силы тяжести впервые решил Стокс в 1849 г. Он получил интегральную формулу (которую впоследствии назвали *формулой Стокса*), дающую связь высот геоида над эллипсоидом относимости с аномалиями силы тяжести. Эта формула позволяет по аномалиям силы тяжести, известным на поверхности геоида, определить в любой точке высоту геоида над эллипсоидом. Формула Стокса играет центральную роль в теории фигуры Земли, поскольку определяет геоид, который длительное время считался последним приближением в представлении фигуры Земли. С современной точки зрения, как уже говорилось, геоид не следует рассматривать как последнее и да-

же как следующее после эллипсоида относимости приближение в представлениях о фигуре Земли, но роль геоида остается попрежнему центральной — это поверхность, разделяющая Землю на гладкую, геоидальную часть и на неравномерно изменяющийся слой, ограниченный физической поверхностью Земли. Такое разделение целесообразно для окончательного построения фигуры физической поверхности Земли. Поэтому формула Стокса сохраняет свое центральное значение и в современных условиях. Для вывода формулы Стокса введем в соотношение (8.53) в качестве потенциальной функции V значение возмущающего потенциала T, при этом учтем связь T с высотами геоида ζ, даваемую уравнением Брунса (12.2), и граничное условие (12.4)

$$T(M) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left[\frac{1}{r}\left(\Delta g + \frac{2\gamma\zeta}{R}\right) + \gamma(\zeta - \zeta_0)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right] d\sigma. \quad (12.5)$$

По условию выбора второго члена под знаком интеграла построенная функция $T(M)$ не терпит разрыва непрерывности при переходе на сферу. Осуществим предельный

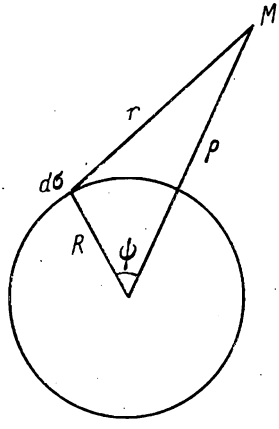


Рис. 85.

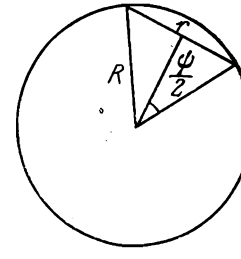


Рис. 86.

переход к поверхности сферы, на которой (12.5) будет иметь вид (см. гл. 8, § 10)

$$T_0(M) = \frac{1}{2\pi}\iint_S \left[\frac{1}{r}\left(\Delta g + \frac{2\gamma\zeta}{R}\right) + \gamma\zeta\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right] d\sigma. \quad (12.6)$$

Функция $1/r$, входящая в формулу (12.6), может быть выражена через ρ, R, ψ (рис. 85):

$$\frac{1}{r} = (\rho^2 + R^2 - 2\rho R\cos\psi)^{-\frac{1}{2}}, \quad (12.7)$$

после чего ее можно продифференцировать по нормали, которая совпадает в нашем случае с радиусом сферы R и направлена в противоположную сторону:

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{1}{r^2}\cos(\widehat{n, r}).$$

Но $\cos(\widehat{n, r}) = \sin\frac{\psi}{2} = \frac{r}{2R}$ (рис. 86), поэтому

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} = -\frac{1}{2rR}. \tag{12.8}$$

Введем (12.8) в (12.6):

$$T_0(M) = \gamma\zeta_0 = \frac{1}{2\pi}\left[\iint_S \frac{\Delta g}{r}\,d\sigma + \iint_S \left(\frac{1}{r}\frac{2\gamma\zeta}{R} - \frac{\gamma\zeta}{2Rr}\right)d\sigma\right] \tag{12.9}$$

или

$$\gamma\zeta_0 = \frac{1}{2\pi}\iint_S \frac{\Delta g}{r}\,d\sigma + \frac{3\gamma}{4\pi R}\iint_S \frac{\zeta}{r}\,d\sigma,$$

или

$$\zeta_0 = \frac{1}{2\pi\gamma}\iint_S \frac{\Delta g}{r}\,d\sigma + \frac{3}{4\pi R}\iint_S \frac{\zeta}{r}\,d\sigma. \tag{12.10}$$

Решение этого интегрального уравнения должно привести нас к формуле Стокса. Для решения (12.10) воспользуемся известным свойством сферических функций. Когда исследуемая точка лежит на поверхности сферы, т. е. $\rho = R$, то имеет место соотношение (9.56), выведенное для сферы радиуса R:

$$F_n^m(\theta, \lambda) = \frac{2n+1}{4\pi R}\iint_S \frac{F_n^m(\theta', \lambda')}{r}\,d\sigma, \tag{9.56}$$

где функция F_n^m — нормированная сферическая функция, θ, λ — полярное расстояние и долгота точки, в которой исследуется функция, θ', λ' — координаты текущей точки, r — расстояние от точки (θ, λ) до точки (θ', λ').

Представим теперь аномалии силы тяжести Δg и высоты геоида ζ разложенными по сферическим функциям

$$\Delta g = \sum_{n=2}^{n} \Delta g_n, \quad \zeta = \sum_{n=2}^{n} \zeta_n, \tag{12.11}$$

где

$$\left.\begin{aligned}\Delta g_n &= A_{n0}P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n}(A_{nm}\cos m\lambda + B_{nm}\sin m\lambda)\,P_n^m(\cos\theta),\\ \zeta_n &= \overline{A}_{n0}P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n}(\overline{A}_{nm}\cos m\lambda + \overline{B}_{nm}\sin m\lambda)\,P_n^m(\cos\theta).\end{aligned}\right\} \tag{12.12}$$

Имея в виду выражение (9.56), можем написать для Δg_n и ζ_n следующие два равенства:

$$\iint_S \frac{\Delta g_n(\theta', \lambda')}{r} d\sigma = \frac{4\pi R}{2n+1} \Delta g_n(\theta, \lambda), \tag{12.13}$$

$$\iint_S \frac{\zeta_n(\theta', \lambda')}{r} d\sigma = \frac{4\pi R}{2n+1} \zeta_n(\theta, \lambda). \tag{12.14}$$

Внесем теперь (12.13) и (12.14) в уравнение (12.10), после чего получим

$$\zeta_n = \frac{2R}{(2n+1)\gamma} \Delta g_n + \frac{3}{2n+1} \zeta_n.$$

Приводя члены с ζ_n, будем иметь

$$\zeta_n = \frac{R}{(n-1)\gamma} \Delta g_n. \tag{12.15}$$

Это общий член так называемого ряда Стокса. Значение ζ можно получить теперь в виде *ряда Стокса*

$$\zeta = \frac{R}{\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Delta g_n}{n-1}. \tag{12.16}$$

Последнее выражение дает значение высоты геоида через разложение аномалий по сферическим функциям. Суммирование ведется со второго члена, так как в возмущающем потенциале отсутствуют гармоники первого и второго порядков (см. § 6 гл. 10). Если сюда ввести значение $\Delta g_n = \sum_{m=0}^{n} (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) P_n^m(\cos\theta)$, то получим

$$\zeta = \frac{R}{\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{A_{nm}}{n-1} \cos m\lambda + \frac{B_{nm}}{n-1} \sin m\lambda \right) P_n^m(\cos\theta). \tag{12.17}$$

Эта формула позволяет построить высоты геоида, когда сделано разложение аномалий по сферическим функциям. Пользуясь выражением (12.16), можно получить интегральную формулу, представляющую высоты геоида через аномалии силы тяжести,— *формулу Стокса*. Для этого рассмотрим ряд Стокса, написанный для возмущающего потенциала

$$T = R \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Delta g_n}{n-1}. \tag{12.16'}$$

Стоящие под знаком суммы величины Δg_n являются так называемыми «игреками» Лапласа. В главе 9 было получено

интегральное выражение для этих величин (формула (9.47′)). Напишем его для Δg

$$\Delta g_n = \frac{2n+1}{4\pi}\int\int_S \Delta g P_n(\cos\psi)\,d\sigma, \tag{12.18}$$

где ψ — полярное расстояние от произвольной исследуемой точки до текущей точки, $d\sigma$ — элемент поверхности единичной сферы. Введем значение Δg_n в ряд Стокса (12.16):

$$T = \frac{R}{4\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}\int\int_S \Delta g P_n(\cos\psi)\,d\sigma. \tag{12.19}$$

Выражение (12.19) можно записать в виде

$$T = \frac{R}{4\pi}\int\int_S \Delta g \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}P_n(\cos\psi)\,d\sigma. \tag{12.20}$$

Каждый член этого ряда представляет собой сферическую функцию. Сумма этих функций дает значение ζ на сфере радиуса R. Для того чтобы разложение (12.20) распространить на все внешнее пространство ($\rho > R$), в котором, как мы знаем, возмущающий потенциал T есть функция гармоническая, надо в разложение ввести множитель $(R/\rho)^{n+1}$; тогда (12.20) можно написать в виде

$$T = \frac{R^2}{4\pi}\int\int_S \Delta g\left[\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}\frac{R^n}{\rho^{n+1}}P_n(\cos\psi)\right]d\sigma. \tag{12.21}$$

Выражение в квадратных скобках обозначим через $S(\rho, \psi)$:

$$S(\rho,\psi) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}\frac{R^n}{\rho^{n+1}}P_n(\cos\psi). \tag{12.22}$$

Тогда для возмущающего потенциала получаем формулу

$$T = \frac{R^2}{4\pi}\int\int_S \Delta g S(\rho,\psi)\,d\sigma \tag{12.23}$$

или, деля на γ,

$$\zeta = \frac{R^2}{4\pi\gamma}\int\int_S \Delta g S(\rho,\psi)\,d\sigma. \tag{12.24}$$

Это *формула Стокса,* дающая значения превышений ζ геоида над эллипсоидом по аномалиям силы тяжести. Аномалии Δg надо знать на всей Земле, так как по всей Земле ведется интегрирование. Функция $S(\rho, \psi)$ получила название *функции Стокса.*

§ 4. Вывод формулы Пицетти

При выводе формулы Стокса были сделаны предположения: 1) что и поверхность относимости, в качестве которой была взята сфера, и геоид лежат вне масс и 2) что обе эти поверхности соответствуют одному и тому же значению $C = W_0$. Второе ограничение несущественно, и можно положить, что

$$U = C, \quad U + T = C + \delta C.$$

Тогда расстояние между этими поверхностями определится по теореме Брунса (12.2), однако при этом надо будет взять вместо T значение $T - \delta C$:

$$\zeta = \frac{T}{\gamma} - \frac{\delta C}{\gamma}.$$

Это обобщение исходных условий изменяет вид граничного условия (12.4):

$$\frac{\partial T}{\partial R} + \frac{2T}{R} - \frac{2\delta C}{R} = -\Delta g. \tag{12.25}$$

Из условия (12.25) следует, что в разложение Δg по сферическим функциям войдет постоянный член $2\delta C/R$, который обусловит некоторый сдвиг поверхности уровня. Теперь уже не будет выполняться условие

$$\iint_S \Delta g \, d\sigma = 0,$$

а вместо этого будет

$$\iint_S \Delta g \, d\sigma = \iint_S \frac{2\delta C}{R} \, d\sigma = \frac{2\delta C}{R} \iint_S d\sigma = \frac{8\pi\delta C}{R},$$

откуда получим

$$\delta C = \frac{R}{8\pi} \iint \Delta g \, d\sigma.$$

Значит, превышение геоида над сфероидом относимости теперь будет

$$\zeta = \zeta_{\text{Ст}} - \frac{R}{8\pi\gamma} \iint_S \Delta g \, d\sigma,$$

где $\zeta_{\text{Ст}}$ — превышение геоида над сфероидом по Стоксу. Вводя $\zeta_{\text{Ст}}$ по (12.24), получаем

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_S \Delta g \left[RS(\rho, \psi) - \frac{1}{2} \right] d\sigma. \tag{12.26}$$

Это *формула Пицетти*. Она не имеет принципиального отличия от формулы Стокса. Второй член этой формулы — величина

постоянная, не зависящая от положения точки, следовательно, он не влияет на определение расстояния между геоидом и сфероидом. Его можно отнести, например, за счет влияния изменения среднего радиуса R, который не определяется из гравиметрических данных.

§ 5. Преобразование функции Стокса

Раскроем значение функции Стокса $S(\rho, \psi)$ (12.22). Вводя $2n+1 = 2n-2+3$, представим равенство (12.22) в виде

$$S(\rho, \psi) = 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{R^n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos\psi) + 3\sum_{n=2}^{\infty} \frac{R^n}{\rho^{n+1}} \frac{P_n(\cos\psi)}{(n-1)}. \quad (12.27)$$

Выразим первый член правой части через полную сумму

$$2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{R^n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos\psi) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos\psi) - \frac{2}{\rho} - \frac{2R}{\rho^2}\cos\psi.$$

Так как $P_0(\cos\psi) = 1$, $P_1(\cos\psi) = \cos\psi$ и $\sum_{0}^{\infty} \frac{R^n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos\psi) = \frac{1}{r}$

то

$$S(\rho, \psi) = \frac{2}{r} + 3\sum_{2}^{\infty} \frac{R^n}{\rho^{n+1}} \frac{P_n(\cos\psi)}{(n-1)} - \frac{2}{\rho} - \frac{2R\cos\psi}{\rho^2}. \quad (12.28)$$

Просуммируем входящий в (12.28) ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{R^n}{\rho^{n+1}} \frac{P_n(\cos\psi)}{n-1}.$$

Вспомним, что

$$\frac{1}{r} = \sum_{0}^{\infty} \frac{R^n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos\psi) = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho R\cos\psi + R^2}} = \frac{1}{\rho\sqrt{1 - 2\frac{R}{\rho}\cos\psi + \frac{R^2}{\rho^2}}}$$

Введем обозначение $R^n/\rho^n = x^n$; тогда

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{R^n}{\rho^n} P_n(\cos\psi) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2x\cos\psi + x^2}} = \sum_{0}^{\infty} x^n P_n(\cos\psi).$$

Представим сумму написанной со второго члена соответственно ряду, входящему в (12.28),

$$\sum_{0}^{\infty} x^n P_n(\cos\psi) = 1 + x\cos\psi + \sum_{2}^{\infty} x^n P_n(\cos\psi)$$

и

$$\sum_2^\infty x^n P_n(\cos\psi) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2-2x\cos\psi}} - 1 - x\cos\psi.$$

Разделив это уравнение почленно на x^2, получим

$$\sum_2^\infty x^{n-2} P_n(\cos\psi) = \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2-2x\cos\psi}} - \frac{1}{x^2} - \frac{\cos\psi}{x}.$$

Проведем почленное интегрирование в пределах от 0 до x;

$$\int_0^x \sum_2^\infty x^{n-2} P_n(\cos\psi)\,dx =$$

$$= \int_0^x \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2-2x\cos\psi}} - \int_0^x \frac{dx}{x^2} - \int_0^x \frac{\cos\psi\,dx}{x}.$$

В результате интегрирования получим в левой части

$$\sum_2^\infty \frac{x^{n-1}}{n-1} P_n(\cos\psi),$$

первый интеграл правой части

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-2x\cos\psi+1}} = -\frac{\sqrt{x^2-2x\cos\psi+1}}{x} +$$

$$+\frac{2\cos\psi}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x\cos\psi+1}} = -\frac{\sqrt{x^2-2x\cos\psi+1}}{x} -$$

$$-\cos\psi\ln 2\left(1-x\cos\psi+\sqrt{x^2-2x\cos\psi+1}\right)+\cos\psi\ln x.$$

Поэтому

$$\sum_2^\infty \frac{x^{n-1}}{n-1} P_n(\cos\psi) = -\int_0^x \frac{\sqrt{x^2-2x\cos\psi+1}}{x} -$$

$$-\cos\psi\ln 2\left(1-x\cos\psi+\sqrt{x^2-2x\cos\psi+1}\right)+\frac{1}{x}.$$

Заметим, что

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x^2-2x\cos\psi+1}}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{1-1+\frac{1}{2}(2x\cos\psi+x^2)-\ldots}{x} =$$

$$= \cos\psi.$$

Подставляя пределы, получим

$$\sum_2^\infty \frac{x^{n-1}}{n-1} P_n(\cos\psi) = -\frac{\sqrt{x^2-2x\cos\psi+1}}{x} +$$

$$+\frac{1}{x} - \cos\psi \ln 2\left(1 - x\cos\psi + \sqrt{x^2-2x\cos\psi+1}\right) -$$

$$-\cos\psi + \cos\psi \ln 4.$$

Возвращаясь к прежним переменным, получим

$$\sum_2^\infty \frac{R^{n-1}}{\rho^{n-1}} \frac{P_n}{n-1}(\cos\psi) = \frac{\rho}{R}\left[1 - \frac{R}{\rho}\cos\psi + \sqrt{1+\frac{R^2}{\rho^2}-2\frac{R}{\rho}\cos\psi}\right] -$$

$$-\cos\psi \ln \frac{1-\frac{R}{\rho}\cos\psi+\sqrt{1+\frac{R^2}{\rho^2}-2\frac{R}{\rho}\cos\psi}}{2}. \qquad (12.29)$$

Теперь, чтобы получить в окончательном виде искомое нами выражение второго члена (12.28), достаточно (12.29) умножить на $3R/\rho^2$:

$$3\sum_2^\infty \frac{R^n}{\rho^{n+1}} \frac{P_n(\cos\psi)}{n-1} = \frac{3}{\rho} - \frac{3R}{\rho^2}\cos\psi - \frac{3}{\rho^2}\sqrt{\rho^2+R^2-2\rho R\cos\psi} -$$

$$-\frac{3R}{\rho^2}\cos\psi \ln \frac{\rho - R\cos\psi + \sqrt{\rho^2+R^2-2\rho R\cos\psi}}{2\rho} =$$

$$= \frac{3}{\rho} - \frac{3R}{\rho^2}\cos\psi - \frac{3r}{\rho^2} - \frac{3R}{\rho^2}\cos\psi \ln\frac{\rho - R\cos\psi + r}{2\rho}. \qquad (12.30)$$

Найденное значение суммы введем в (12.28). Тогда искомая функция может быть представлена в виде

$$S(\rho,\psi) = \frac{2}{r} + \frac{1}{\rho} - \frac{5R\cos\psi}{\rho^2} - \frac{3r}{\rho^2} - \frac{3R\cos\psi}{\rho^2}\ln\frac{\rho + r - R\cos\psi}{2\rho}. \qquad (12.31)$$

Для поверхности сферы функцию $S(\rho, \psi)$ легко представить в виде функции только одного переменного ψ. Для этого достаточно вспомнить, что на сфере $r = 2R\sin\frac{\psi}{2}$, а $\rho = R$. Тогда

$$S(\rho,\psi) = \frac{1}{R}\left[\operatorname{cosec}\frac{\psi}{2} + 1 - 5\cos\psi - 6\sin\frac{\psi}{2} -\right.$$

$$\left. -3\cos\psi\ln\left(\sin\frac{\psi}{2}+\sin^2\frac{\psi}{2}\right)\right] = \frac{1}{R}S(\psi). \qquad (12.32)$$

§ 6. Практика вычисления высот геоида

Если значение функции $S(\psi)$ ввести в (12.24), то мы получим формулу Стокса в развернутом виде:

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma}\iint_S \Delta g\left[\operatorname{cosec}\frac{\psi}{2} - 6\sin\frac{\psi}{2} + 1 - \right.$$
$$\left. - 5\cos\psi - 3\cos\psi\ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right)\right] d\sigma.$$

Перейдем к интегрированию по сферическим координатам ψ и A. Элемент поверхности единичной сферы $d\sigma$ в новых координатах будет

$$d\sigma = \sin\psi\, d\psi\, dA.$$

Пределы интегрирования будут по ψ от 0 до π и по A от 0 до 2π:

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \Delta g\left[\operatorname{cosec}\frac{\psi}{2} - 6\sin\frac{\varphi}{2} + 1 - 5\cos\psi - \right.$$
$$\left. - 3\cos\psi\ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right)\right]\sin\psi\; d\psi\, dA.$$

Обозначая произведение квадратной скобки на $^1/_2\sin\psi$ через $F(\psi)$, получим

$$\zeta = \frac{R}{2\pi\gamma}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \Delta g F(\psi)\, d\psi\, dA. \qquad (12.33)$$

Заметим, что при правильном определении аномалий член $\iint_S \Delta g(1 - 5\cos\psi)\, d\sigma$ обращается в нуль, так как разложение возмущающего потенциала не имеет членов со сферическими функциями нулевого и первого порядков.

Функция $F(\psi)$ задается таблично. В табл. 11 приводятся ее значения в соответствии с таблицами Ламберта. На рис. 87 ход функции представлен графически.

Вводя (12.32) в (12.26), получим формулу Пицетти в другом написании:

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma}\iint_S \Delta g\left[S(\psi) - \frac{1}{2}\right] d\sigma. \qquad (12.26')$$

В уравнении (12.33) интегрирование ведется по всей Земле. Это значит, что для каждого элемента интегрирования должно быть известно значение Δg. При этом заметим, что влияние аномалий далеких от исследуемой точки областей не уменьша-

ется. Это видно из табл. 8. Поэтому при пользовании формулой Стокса одинаково существенно знание аномалий как в близких, так и в далеких зонах.

Таблица 11

ψ	$F(\psi)$	ψ	$F(\psi)$	ψ	$F(\psi)$	ψ	$F(\psi)$
0	+0,000	13	+1,163	70	—1,082	135	+0,458
1	+1,088	14	+1,139	75	—1,105	140	+0,526
2	+1,139	15	+1,112	80	—1,082	145	+0,560
3	+1,175	20	+0,941	85	—1,017	150	+0,559
4	+1,200	25	+0,722	90	—0,914	155	+0,525
5	+1,216	30	+0,474	95	—0,780	160	+0,461
6	+1,227	35	+0,210	100	—0,623	165	+0,370
7	+1,231	40	—0,054	105	—0,450	170	+0,259
8	+1,230	45	—0,307	110	—0,270	175	+0,133
9	+1,224	50	—0,537	115	—0,092	180	0,000
10	+1,215	55	—0,736	120	+0,077		
11	+1,201	60	—0,896	125	+0,229		
12	+1,183	65	—1,012	130	+0,358		

Сейчас, когда прием разложения аномалий по сферическим функциям вошел в практику, наиболее удобным путем получе-

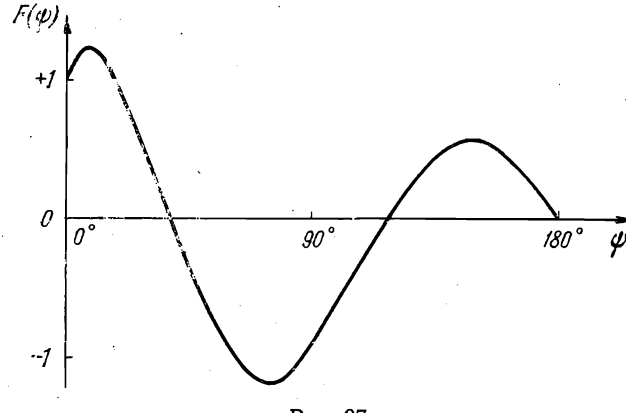


Рис. 87.

ния высот геоида является использование ряда Стокса (12.16). Если известны коэффициенты разложения аномалий по сферическим функциям A_{nm} и B_{nm}, то для любой точки с координатами φ и λ легко вычислить ζ. С помощью электронных вычисли-

тельных машин, применительно к которым сейчас составлены стандартные программы разложения аномалий по сферическим функциям и вычисления функций $P_n^m(\cos\theta)$, получение высот геоида требует немного времени. Основные трудности в решении задачи сводятся к подготовке исходного гравиметрического материала, по которому должны быть получены A_{nm} и B_{nm}. Для разложения аномалий в ряд по сферическим функциям они (аномалии) должны быть заданы на всей сфере.

Однако далеко еще не вся Земля изучена в гравиметрическом отношении. Значительные области ее не покрыты даже редкими гравиметрическими съемками. Области океанов, особенно в южном полушарии, на огромных площадях не имеют ни одного гравиметрического пункта. Приходится для этих пустых мест назначать гипотетические значения аномалий, полученные в тех или иных предположениях. Часто для всех неизученных областей полагают аномалии в свободном воздухе или изостатические аномалии равными нулю. Иной раз применяется второе приближение, т. е. вычисляются коэффициенты разложения A_{nm} и B_{nm} в предположении, что в неизученных местах аномалии равны нулю. С этими коэффициентами вычисляются аномалии по формуле разложения для всех мест, где они фактически неизвестны, и далее, с вновь вычисленными гипотетическими аномалиями, вычисляется второе приближение разложения аномалий.

Теперь по полученным коэффициентам производят вычисление высот геоида ζ, пользуясь формулой (12.17). Это один путь решения задачи.

Задача может быть решена также без разложения аномалий в ряд — численным интегрированием с помощью формулы Стокса.

В этом случае также необходимо знать распределение аномалий по всей Земле. Для практического вычисления ζ интеграл (12.33) разбивается на сумму интегралов, распространенных на малые участки земной поверхности. Разбиение производится по ψ и A.

В общем виде сумму интегралов, определяющих ζ, можно записать следующим образом:

$$\zeta = \frac{R}{2\pi\gamma}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\int_{\psi_i}^{\psi_{i+1}}\int_{A_j}^{A_{j+1}}\Delta g_{ij}F(\psi)\,d\psi\,dA, \qquad (12.34)$$

где $\psi_0 = 0$, $\psi_n = \pi$, $A_0 = 0$, $A_m = 2\pi$. Обычно для каждой площадки, ограниченной координатами ψ_i—ψ_{i+1} и A_j—A_{j+1}, принимается некоторое среднее на ней значение Δg_{ij}. Тогда

формула (12.34) может быть переписана в следующем виде:

$$\zeta = \frac{R}{2\pi\gamma} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \Delta g_{ij} \int_{\psi_i}^{\psi_{i+1}} \int_{A_j}^{A_{j+1}} F(\psi)\, d\psi\, dA =$$

$$= -\frac{R}{2\pi\gamma} \sum\sum \Delta g_{ij} (A_{j+1} - A_j) \int_{\psi_i}^{\psi_{i+1}} F(\psi)\, d\psi.$$

Входящий в выражение интеграл можно представить как

$$\int_{\psi_i}^{\psi_{i+1}} F(\psi)\, d\psi = \int_{0}^{\psi_{i+1}} F(\psi)\, d\psi - \int_{0}^{\psi_i} F(\psi)\, d\psi = \Phi(\psi_{i+1}) - \Phi(\psi_i).$$

Внося эти значения в предыдущее выражение, получим

$$\zeta = \frac{R}{2\pi\gamma} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \Delta g_{ij} (A_{j+1} - A_j) \{\Phi(\psi_{i+1}) - \Phi(\psi_i)\}. \qquad (12.35)$$

Значения функции $\Phi(\psi)$ задаются таблицами Ламберта, выписка из которых приведена в табл. 12.

Таблица 12

ψ	$\Phi(\psi)$	ψ	$\Phi(\psi)$	ψ	$\Phi(\psi)$	ψ	$\Phi(\psi)$
0	+0,0000	13	+0,2692	65	+0,2970	125	—0,3792
1	+0,0183	14	+0,2895	70	+0,2053	130	—0,3534
2	+0,0378	15	+0,3089	75	+0,1096	135	—0,3177
3	+0,0580	20	+0,3989	80	+0,0138	140	—0,2745
4	+0,0787	25	+0,4715	85	—0,0781	145	—0,2269
5	+0,0998	30	+0,5241	90	—0,1626	150	—0,1778
6	+0,1212	35	+0,5540	95	—0,2368	155	—0,1302
7	+0,1426	40	+0,5603	100	—0,2981	160	—0,0870
8	+0,1641	45	+0,5449	105	—0,3451	165	—0,0506
9	+0,1855	50	+0,5078	110	—0,3764	170	—0,0230
10	+0,2068	55	+0,4520	115	—0,3922	175	—0,0059
11	+0,2280	60	+0,3806	120	—0,3928	180	—0,0000
12	+0,2487						

§ 7. Карта геоида. Современные представления

Формула Стокса или ряд Стокса позволяют произвести вычисления высот геоида над эллипсоидом относимости, если известны аномалии силы тяжести на всей земной поверхности и всюду примерно с одинаковой точностью. Это следует из рассмотре-

ния функций $\Phi(\psi)$, на которые умножается Δg при интегрировании. Функция $\Phi(\psi)$ возрастает при увеличении полярного расстояния от 0 до 40°, далее она убывает до 120°, где имеет отрицательное значение, после чего начинает возрастать и достигает нуля при 180°. В области 80° она переходит через нуль (рис. 88). При суммировании в (12.35) аномалия умножается на разность функций $\Phi(\psi)$ для соседних точек. Очевидно, что

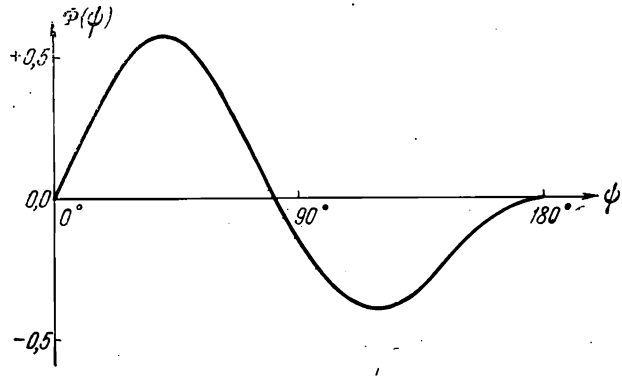


Рис. 88.

эти разности могут обращаться в нуль лишь вблизи экстремумов функции $\Phi(\psi)$, т. е. вблизи 40° и 120°. Во всех остальных случаях эта разность не нуль. Поэтому влияние аномалий дальних зон остается существенным. А это значит, что при интегрировании все области Земли должны учитываться одинаково. Мы уже указывали, что при вычислении высот геоида интегрирование заменяется суммированием по зонам, на которые разбивается вся Земля. Ясно, что существенно иметь гравиметрические характеристики для всех зон. Именно поэтому формула Стокса не могла быть примененной длительное время, так как гравиметрическая изученность Земли была очень слабой. За последние два десятилетия наблюдается значительная активизация гравиметрических исследований. Европа, Северная Америка, значительная часть Азии, Австралия имеют подробные гравиметрические карты. В Африке и Южной Америке определено большое количество гравиметрических пунктов, так что мы имеем представление об их гравитационном поле, хотя не с той степенью детальности, что для других континентов. За последние годы выполнен ряд морских гравиметрических определений и значительные области океанов, в первую очередь Атлантического, оказались также изученными гравитационно.

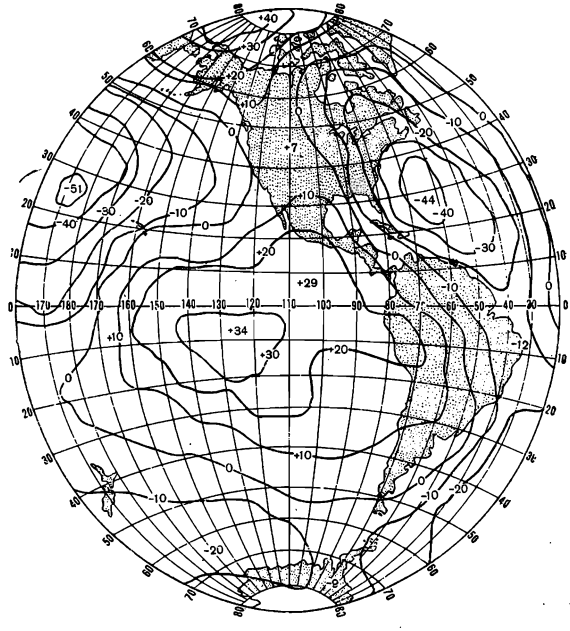


Рис. 89а.

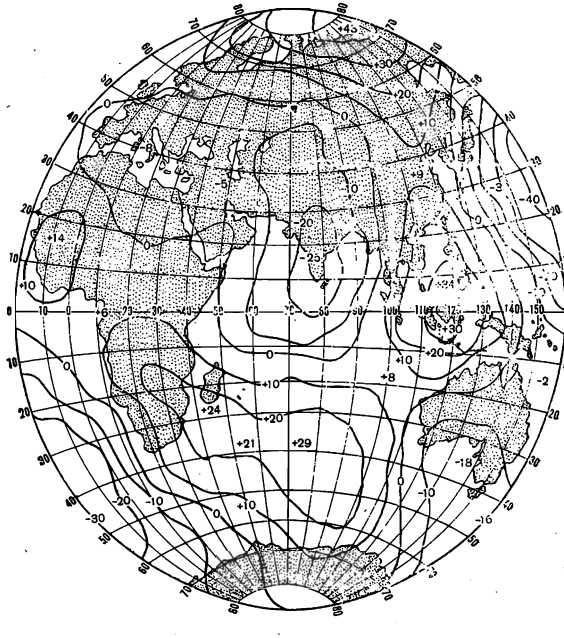


Рис. 89б.

Таким образом, появилась возможность построения карты геоида с помощью ряда или формулы Стокса. В 1952 г. была опубликована карта геоида И. Д. Жонголовича. Жонголович проводил вычисление высот геоида методом разложения аномального поля Земли по сферическим функциям. Для того чтобы ослабить влияние систематических погрешностей, возникающих при учете неизученных областей, Жонголович применил метод вычисления с помощью ряда Стокса с двумя приближениями. Первоначально гравитационное поле было разложено по сферическим функциям до 4-го порядка. С найденными коэффициентами разложения были найдены значения аномалий для неисследованных областей. Далее, уже с учетом этих гипотетических аномалий, было произведено разложение до 8-го порядка, и коэффициенты этого разложения A_{nm} и B_{nm} были использованы для построения ζ по формуле (12.17).

В 1958 г. была опубликована карта геоида Гейсканена. При ее построении использован значительно более богатый материал, чем в работе Жонголовича, так как за прошедшее десятилетие произведено большое количество гравиметрических определений, в том числе и на океанах. При построении высот геоида Гейсканен пользовался непосредственно формулой Стокса. При вычислении влияния неисследованных областей Гейсканен применил иной метод, чем Жонголович. Он везде, где это было возможно, производил интерполирование аномалий в свободном воздухе с учетом геологических условий, где же и это было невозможно, принимал их равными нулю.

Гейсканен составил карту геоида лишь для северного полушария, считая для южного материал недостаточным.

Сопоставление схем высот геоида по Жонголовичу и Гейсканену свидетельствует о значительном расхождении результатов. Максимальные высоты геоида по Гейсканену примерно в два раза меньше и соответственно имеют более плавное изменение. На рис. 89 приводится схема высот геоида Каулы (по авторскому оригиналу 1961 г.) ($\alpha = 1:298{,}26$). Каула для заполнения пустых мест вычислял статистически наиболее вероятные в данном месте аномалии в зависимости от окружающих аномалий. В последующем осредненные карты аномалий для всего мира строятся обычно с использованием как наземных, так и спутниковых данных. Пример такой схемы приводится в главе 21.

ГЛАВА 13

УКЛОНЕНИЕ ОТВЕСНЫХ ЛИНИЙ

§ 1. Основные понятия

В любой данной точке отвес установится по некоторому направлению ON (рис. 90), совпадающему с направлением действия силы тяжести. Это направление будет всегда перпендикулярно к уровенной поверхности $W = C$, проходящей через данную точку. Рассмотрим теперь общий земной эллипсоид, наилучшим образом представляющий фигуру Земли. Этот

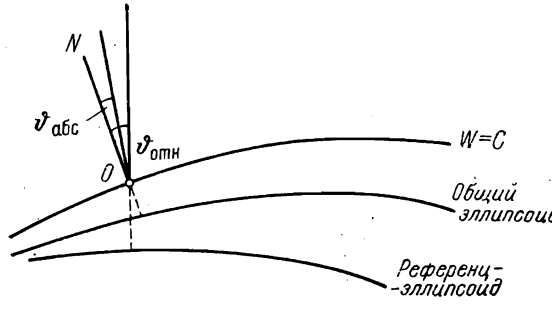


Рис. 90.

эллипсоид не может быть всюду параллельным уровенной поверхности $W = C$, хотя в силу того, что он наилучшим образом представляет Землю, углы между нормалями к эллипсоиду и отвесными линиями в среднем будут минимальными.

Угол $\vartheta_{абс}$ между отвесной линией ON и нормалью к общему земному эллипсоиду называется *абсолютным уклонением отвесной линии*. Обработка всех геодезических измерений, как известно, производится на референц-эллипсоиде. Референц-эллипсоид не совпадает, как правило, с общим земным эллипсоидом. В различных странах и в различное время могут использоваться при обработке геодезических материалов различные референц-эллипсоиды. Угол $\vartheta_{отн}$ между направлением отвеса ON в точке O на геоиде и направлением нормали, проходящей

через точку O к референц-эллипсоиду, называется *относительным* или *астрономо-геодезическим уклонением отвесных линий.*

Направление отвеса легко установить инструментально — отвесом или уровнем. Это направление определяется астрономическими широтой и долготой точки стояния. Геодезические широты и долготы определяются направлением нормали к референц-эллипсоиду. Следовательно, уклонения отвесных линий получатся как разность астрономических и геодезических координат. Сказанное можно проиллюстрировать следующим построением.

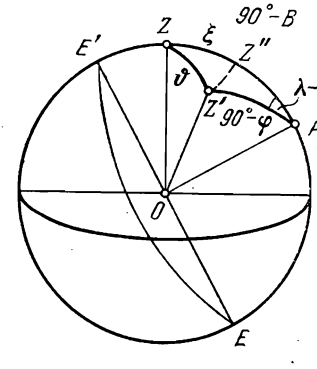


Рис. 91.

Построим сферу единичного радиуса с центром в точке O земной поверхности (рис. 91). Направление отвесной линии OZ' пересечет сферу в точке Z', являющейся астрономическим зенитом. Направление нормали к референц-эллипсоиду пересечет сферу в точке Z (геодезический зенит). OP — линия, параллельная оси вращения Земли. Точки Z и P лежат в плоскости геодезического меридиана. Плоскость экватора перпендикулярна к направлению OP и линия $Z'Z_1''$, соединяющая Z' со стороной ZP, перпендикулярна к последней. Линии $Z'Z''$, $Z''P$ и $Z_1'P$ образуют сферический треугольник, у которого сторона $ZZ_1' = \vartheta$ — полная величина уклонения отвесной линии, $ZZ'' = \xi$, $Z'Z_1'' = \eta$ — составляющие уклонения отвесной линии в меридиане и в первом вертикале соответственно. Отклонения отвеса к югу (для ξ) и к западу (для η) считаются положительными, так как они увеличивают широту и долготу. Отклонения отвеса к северу (ξ) и востоку (η) считаются отрицательными. Угол $ZPZ' = \lambda - L$ — разность геодезической и астрономической долгот, $ZP = 90° - B$ — дополнение до геодезической широты, $Z'P = 90° - \varphi$ — дополнение до астрономической широты. Для прямоугольного сферического треугольника $Z_1'Z''P$ можно написать в соответствии с формулами сферической тригонометрии

$$\operatorname{ctg}(B + \xi) = \operatorname{ctg}\varphi \cos(\lambda - L),$$
$$\sin\eta = \cos\varphi \sin(\lambda - L),$$

откуда с точностью до квадрата ξ и η

$$B = \varphi - \xi \qquad L = \lambda - \eta \sec\varphi \tag{13.1}$$

Если бы координаты B и L были заданы на общем земном

эллипсоиде, то формулы (13.1) давали бы абсолютные уклонения отвесных линий. Так как геодезические координаты относятся к референц-эллипсоиду, то и полученные по (13.1) уклонения отвесных линий относятся к этому же референц-эллипсоиду. Чтобы получить абсолютные уклонения отвесных линий, к ξ и η, вычисленным для данного референц-эллипсоида, надо добавить поправки $\Delta\xi$ и $\Delta\eta$, равные проекциям углов между нормалями к референц-эллипсоиду и общему земному эллипсоиду на соответствующие координатные плоскости.

§ 2. Гравиметрический вывод уклонения отвесных линий

Уклонения отвесных линий можно определить гравиметрическим путем. В самом деле, уклонение отвесной линии есть угол между нормалями к уровенным поверхностям реального и нормального гравитационного поля. На геоиде это соответствует углу между нормалями к общему земному эллипсоиду

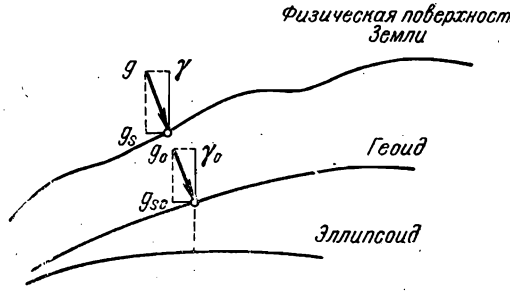


Рис. 92.

и геоиду. Силу тяжести g, направленную по нормали к уровенной поверхности реального силового поля, разложим на составляющие по нормали и касательной к эллипсоиду. Первая составляющая будет близка к γ — нормальному значению силы тяжести, вторая составляющая обусловлена действием возмущающего потенциала. Обозначим ее $g_s = \frac{\partial W}{\partial s}$. Отношение g_s к γ определит уклонение отвесной линии (рис. 92)

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{g_s}{\gamma}.$$

ϑ — всегда малый угол, в исключительных условиях достигающий нескольких десятков секунд. Поэтому с точностью до второй степени ϑ равна

$$\vartheta = \frac{g_s}{\gamma}. \qquad (13.2)$$

Имея в виду, что

$$W = U + T,$$

можно записать

$$\vartheta = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial W}{\partial s} = -\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial T}{\partial s}\right).$$

Однако $\frac{\partial U}{\partial s} = 0$, так как силовые линии нормального поля на геоиде перпендикулярны к нормальному эллипсоиду. Тогда

$$\vartheta = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial T}{\partial s}. \tag{13.3}$$

Так как $T = \gamma\zeta$, то можно записать

$$\vartheta = -\frac{\partial \zeta}{\partial s}. \tag{13.4}$$

Эта формула показывает, что уклонение отвесной линии есть производная превышения геоида над эллипсоидом по направлению наибольшего изменения потенциала на эллипсоиде или, что то же самое, наибольшего изменения высот. Если мы хотим получить уклонения отвесных линий в меридиане, т. е. по широте, и в первом вертикале, то соответственно надо проводить дифференцирование по направлению меридиана и первого вертикала. В первом случае $ds = R\,d\varphi_0$, во втором $ds = R\cos\varphi_0 d\lambda_0$, где φ_0, λ_0 — координаты точки, в которой определяется уклонение отвесной линии. Тогда соотношение (13.4) приводится к формулам

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial T}{R\,\partial\varphi_0} = -\frac{1}{R}\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi_0}, \\ \eta &= -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial T}{R\cos\varphi_0\,\partial\lambda_0} = -\frac{1}{R\cos\varphi_0}\frac{\partial\zeta}{\partial\lambda_0}. \end{aligned}\right\} \tag{13.5}$$

Значение ζ задается формулой Стокса. Знак минус поставлен потому, что уклонения отвесной линии со знаком плюс увеличивают широту и долготу и поправку надо вводить со знаком минус.

Эти формулы дают значение уклонения отвесной линии на геоиде. Для того чтобы получить их в точке физической поверхности Земли с высотой H, надо к ним добавить поправку за искривление силовой линии на пути H. Эта же поправка служит также и для приведения измеренных широт к уровню моря.

§ 3. Изменение уклонения отвеса вследствие кривизны силовой линии

При переходе от одной уровенной поверхности к другой по силовой линии, т. е. при изменении высоты точки, имеет место изменение широты и долготы. Это происходит вследствие того, что уровенные поверхности не параллельны, силовая линия имеет кривизну, и значит, направление отвеса в пространстве, являющееся касательной к силовой линии, различно в разных точках силовой линии. Значит, и координаты точки, определяемые углом между направлением отвеса и плоскостями экватора и начального меридиана, различны. В нормальном силовом поле силовая линия является плоской кривой и при движении по ней

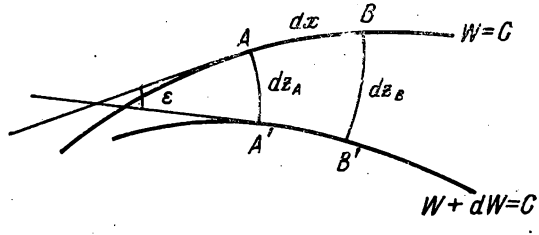


Рис. 93.

изменяется только широта. Рассмотрим подробнее влияние искривления силовой линии на координаты. Перейдем от уровенной поверхности $AB(W=C)$ к бесконечно близкой уровенной поверхности $A'B'(W+dW=C)$ (рис. 93). При этом для перемещений dz_A и dz_B имеют место в соответствии с теоремой Брунса равенства

$$dz_A = \frac{dW}{g_A}, \quad dz_B = \frac{dW}{g_B}.$$

Индексы A и B относят соответствующие величины к точкам A и B. Отсюда

$$\frac{dz_B}{dz_A} = \frac{g_A}{g_B}.$$

Образуем производную пропорцию

$$\frac{dz_B - dz_A}{dz_A} = \frac{g_A - g_B}{g_B}$$

и заменим g_B через g_A, раскладывая g_B в ряд

$$g_B = g_A + \frac{\partial g}{\partial x} dx + \ldots.$$

Тогда

$$\frac{dz_B - dz_A}{dz_A} = \frac{g_A - g_A - \frac{\partial g}{\partial x} dx}{g_B}$$

или

$$\frac{dz_B - dz_A}{dx} = -\frac{1}{g_A}\frac{\partial g}{\partial x} dz_A. \tag{13.6}$$

Из рис. 93 ясно, что $\frac{dz_B - dz_A}{dx} = \varepsilon$ и $dz_A = \rho_x \varepsilon$, где ρ_x — радиус кривизны силовой линии. Имея это в виду, представим (13.6) в виде

$$\varepsilon = -\frac{1}{g_A}\frac{\partial g}{\partial x}\rho_x \varepsilon,$$

откуда

$$\rho_x = -\frac{g}{\frac{\partial g}{\partial x}} = -\frac{g}{W_{zx}}.$$

Аналогично получаем

$$\rho_y = -\frac{g}{\frac{\partial g}{\partial y}} = -\frac{g}{W_{zy}}.$$

Зная кривизну ρ силовой линии на пути H от геоида до физической поверхности Земли, получим изменение широты и долготы на пути H за счет искривления силовой линии. Эти изменения будут

$$\left.\begin{aligned} \delta\varphi &= \frac{H}{\rho_x} = -\frac{H}{g} W_{xz}, \\ \delta\lambda \cos\varphi &= \frac{H}{\rho_y} = -\frac{H}{g} W_{yz}. \end{aligned}\right\} \tag{13.7}$$

Однако величины W_{xz} и W_{yz} внутри масс на пути H нам неизвестны. Поэтому значения W_{xz} и W_{yz} берутся в нормальном гравитационном поле, что ведет к упрощению задачи. Напишем уравнения (13.7) для нормального потенциала силы тяжести. При этом значения вторых производных потенциала развернем, помня, что $\gamma = \gamma_e(1 + \beta \sin^2\varphi)$,

$$\left.\begin{aligned} \delta\varphi &= -\frac{H}{\gamma} W_{xz} = -\frac{H}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial x} = -\frac{H}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{M\,\partial\varphi} = -\frac{H}{\gamma}\frac{\gamma_e\beta}{M}\sin 2\varphi, \\ \delta\lambda\cos\varphi &= -\frac{H}{\gamma} W_{yz} = -\frac{H}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial y} = -\frac{H}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{N\cos\varphi\,\partial\lambda} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{13.8}$$

Уравнения (13.8) показывают, что силовые линии нормального гравитационного поля суть плоские кривые (отсутствует искривление по долготе), причем выпуклость этих кривых всегда направлена к экватору. Если ввести числовые значения γ, M, β, то изменение широты при редуцировании ее к геоиду будет

$$\delta\varphi'' = -0'',171\, H \sin 2\varphi, \tag{13.9}$$

где H выражено в километрах. Теперь из формул (13.1), учитывая (13.9), получим формулы приведения измеренных астрономических координат к геодезическим на референц-эллипсоиде:

$$B = \varphi - \xi - 0'',171\, H \sin 2\varphi, \quad L = \lambda - \eta \sec B.$$

§ 4. Вывод формулы Венинг-Мейнеса для уклонения отвесных линий

Подставляя в (13.5) ζ, заданное формулой Стокса (12.24), и помня, что при конечных ρ и интеграл, и подынтегральное выражение в формуле Стокса конечны, а

$$S(\psi, \rho) = \frac{1}{R} S(\psi),$$

можно написать

$$\xi = -\frac{1}{4\pi\gamma} \iint_\sigma \Delta g \frac{\partial S(\psi)}{\partial \varphi_0}\, d\sigma,$$

$$\eta = -\frac{1}{4\pi\gamma \cos\varphi_0} \iint_\sigma \Delta g \frac{\partial S(\psi)}{\partial \lambda_0}\, d\sigma.$$

Вводя сюда значение $d\sigma = \sin\psi\, d\psi dA$ и интегрируя по сфере единичного радиуса, так как подынтегральная функция $S(\psi)$ не зависит от R, получим

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -\frac{1}{4\pi\gamma} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Delta g \frac{\partial S(\psi)}{\partial \varphi_0} \sin\psi\, d\psi\, dA, \\ \eta &= -\frac{1}{4\pi\gamma \cos\varphi_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Delta g \frac{\partial S(\psi)}{\partial \lambda_0} \sin\psi\, d\psi\, dA. \end{aligned}\right\} \tag{13.10}$$

Стоящие под интегралом производные запишем в виде производной от неявной функции:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial S(\psi)}{\partial \varphi_0} &= \frac{\partial S(\psi)}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_0}, \\ \frac{\partial S(\psi)}{\partial \lambda_0} &= \frac{\partial S(\psi)}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_0}. \end{aligned}\right\} \tag{13.11}$$

Производные ψ по φ_0 и λ_0 найдем, рассматривая полярный сферический треугольник (рис. 94), в котором P — полюс Земли, N — точка, в которой ищутся уклонения отвесной линии, M — текущая точка интегрирования.

Напишем для нашего сферического треугольника формулы сферической тригонометрии:

$$\left.\begin{aligned}
&\sin\psi\sin A = \cos\varphi\sin(\lambda-\lambda_0),\\
&\sin\psi\cos A = \sin\varphi\cos\varphi_0 -\\
&\qquad -\cos\varphi\sin\varphi_0\cos(\lambda-\lambda_0),\\
&\cos\psi = \sin\varphi\sin\varphi_0 +\\
&\qquad +\cos\varphi\cos\varphi_0\cos(\lambda-\lambda_0).
\end{aligned}\right\} \qquad (13.12)$$

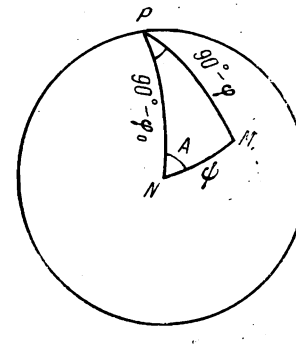


Рис. 94.

Дифференцируем последнее выражение по φ_0:

$$-\sin\psi d\psi = \sin\varphi\cos\varphi_0 d\varphi_0 - \cos\varphi\sin\varphi_0\cos(\lambda-\lambda_0)\,d\varphi_0.$$

Здесь правая часть равна правой части второй из формул (13.12). Имея это в виду, запишем $-\sin\psi\,d\psi = \sin\psi\cos A d\varphi_0$, откуда

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi_0} = -\cos A. \qquad (13.13)$$

Аналогично для нахождения производной по λ_0 дифференцируем третье уравнение (13.12) по λ_0:

$$-\sin\psi\,d\psi = \cos\varphi\cos\varphi_0\sin(\lambda-\lambda_0)\,d\lambda_0.$$

Здесь коэффициент правой части при $\cos\varphi_0 d\lambda_0$ совпадает с правой частью первой формулы (13.12), так что

$$-\sin\psi\,d\psi = \cos\varphi_0\sin\psi\sin A\,d\lambda_0,$$

откуда

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_0} = -\cos\varphi_0\sin A. \qquad (13.14)$$

Теперь, внося (13.13) и (13.14) в выражения для уклонений отвесной линии (13.10), получим

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{4\pi\gamma}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Delta g\frac{\partial S}{\partial\psi}\sin\psi\cos A\,d\psi\,dA,\\
\eta &= \frac{1}{4\pi\gamma}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Delta g\frac{\partial S}{\partial\psi}\sin\psi\sin A\,d\psi\,dA.
\end{aligned}\right\} \qquad (13.15)$$

Чтобы выразить значение уклонений отвесных линий в секундах дуги, умножим (13.15) на $\rho''=206\,265''$.

Введем, кроме того, обозначение

$$-\frac{\rho''}{2\gamma}\frac{\partial S}{\partial\psi}\sin\psi = Q. \tag{13.16}$$

Q называется *функцией Венинг-Мейнеса*. Тогда

$$\left.\begin{aligned}\xi'' &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Delta g Q\cos A\,d\psi\,dA,\\ \eta'' &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Delta g Q\sin A\,d\psi\,dA.\end{aligned}\right\} \tag{13.17}$$

Формулы (13.17) дают значение уклонений отвесных линий по широте и в направлении первого вертикала по известным аномалиям силы тяжести.

§ 5. Характер изменения функции Венинг-Мейнеса Q. Влияние аномалий ближних зон

Стоящая под интегралом функция Q непрерывна во всей области задания, кроме точки $\psi=0$, являющейся особой точкой. Рассмотрим функцию Q, которая получается из $S(\psi)$ дифференцированием по ψ и умножением на $\frac{\rho''}{2\gamma}\sin\psi=\frac{\rho''}{\gamma}\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2}$:

$$Q=\frac{\rho''}{2\gamma}\cos^2\frac{\psi}{2}\left[\operatorname{cosec}\frac{\psi}{2}+12\sin\frac{\psi}{2}-32\sin^2\frac{\psi}{2}+\right.$$
$$\left.+\frac{3}{1+\sin\frac{\psi}{2}}-12\sin^2\frac{\psi}{2}\ln\left(\sin\frac{\psi}{2}+\sin^2\frac{\psi}{2}\right)\right]. \tag{13.18}$$

Значения Q задаются таблицей 13, а ход ее — графиком рис. 95.

При $\psi=0$ первый член скобки в выражении для Q обращается в бесконечность, а последний имеет выражение вида $0\cdot\infty$.

Однако из математического анализа известно, что стремление $\sin^2\frac{\psi}{2}$ к нулю значительно быстрее стремления $\ln\left(\sin\frac{\psi}{2}+\sin^2\frac{\psi}{2}\right)$ к бесконечности. Неопределенность легко раскрыть, если представить $\sin x$ и $\ln\sin x$ в виде рядов

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\ldots,$$
$$\ln|\sin x| = \ln|x|-\frac{x^2}{2}+\ldots$$

или раскрыть неопределенность по правилу Лопиталя. Что касается первого члена, то при интегрировании он также дает для точки $\psi = 0$ неопределенность вида $0 \cdot \infty$.

Таблица 13

ψ	Q	ψ	Q	ψ	Q	ψ	Q
0°	∞	40°	+0,61	90°	—0,29	140°	—0,25
1	+12,35	50	+0,43	100	—0,38	150	—0,16
10	+1,59	60	+0,22	110	—0,41	160	—0,08
20	+1,02	70	+0,03	120	—0,40	170	—0,02
30	+0,79	80	—0,15	180	—0,34	180	0,00

Покажем, что эта неопределенность приводится к конечному значению.

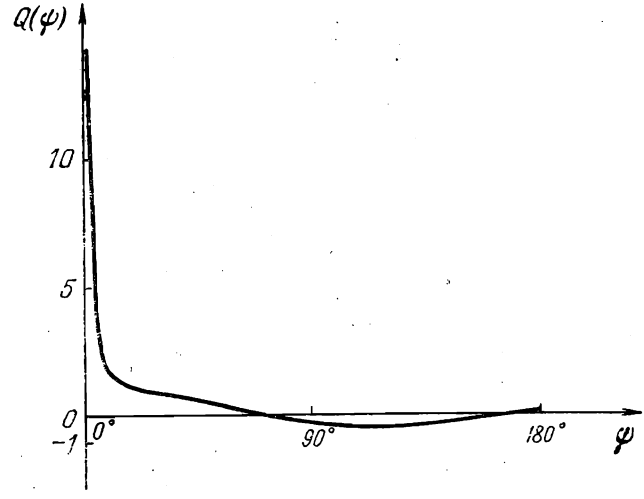


Рис. 95.

Рассмотрим выражения (13.17) в непосредственной близости от точки $\psi = 0$, например, в круговой области, определяемой полярным расстоянием ψ. Поскольку ψ мало́ (по выбору), можем считать область плоской, а ψ выразить через r; геометрически ясно, что

$$\frac{r}{2} = R \sin \frac{\psi}{2},$$

значит, $dr = R\cos\frac{\psi}{2}\,d\psi$ и при $\psi = 0$, $dr = Rd\psi$

$$\operatorname{cosec}\frac{\psi}{2} = \frac{2R}{r}. \tag{13.19}$$

В силу малости r для выбранной области все члены разложения Q малы по сравнению с первым; тогда получим

$$Q_0 = \frac{\rho''}{2\gamma}\frac{2R}{r} = \frac{1340}{r}. \tag{13.20}$$

Из интегрального выражения (13.17) выделим область, интегрируемую в пределах от 0 до r, соответствующего $\psi_0 \approx 5$ км. В области ψ от r до 10° функцию Q можно упростить без ущерба для точности вычислений. Раскладывая (13.18) в ряд и отбрасывая члены, содержащие вторые и более высокие степени ψ, получим

$$Q_1 = \frac{\rho''}{2\gamma}\left(\frac{2}{\psi} + \frac{49}{12}\psi + 3\right).$$

Интегрирование оставшейся части выражения (13.17) проведем также раздельно в пределах ψ_0—ψ и ψ—π:

$$\left.\begin{aligned}
\xi'' &= -\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\frac{\Delta g}{r}\cos A\,dr\,dA - \frac{1}{2\pi}\int_{\psi_0}^{\psi}\int_0^{2\pi}\Delta g Q_1\cos A\,d\psi\,dA - \\
&\qquad - \frac{1}{2\pi}\int_{\psi}^{\pi}\int_0^{2\pi}\Delta g Q\cos A\,d\psi\,dA, \\
\eta'' &= -\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\frac{\Delta g}{r}\sin A\,dr\,dA - \frac{1}{2\pi}\int_{\psi_0}^{\psi}\int_0^{2\pi}\Delta g Q_1\sin A\,d\psi\,dA - \\
&\qquad - \frac{1}{2\pi}\int_{\psi}^{\pi}\int_0^{2\pi}\Delta g Q\sin A\,d\psi\,dA.
\end{aligned}\right\} \tag{13.21}$$

Рассмотрим отдельно первые части этих выражений, содержащие $1/r$; обозначив их через ξ''_0, η''_0:

$$\left.\begin{aligned}
\xi''_0 &= -\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\frac{\Delta g}{r}\cos A\,dr\,dA, \\
\eta''_0 &= -\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\frac{\Delta g}{r}\sin A\,dr\,dA.
\end{aligned}\right\} \tag{13.22}$$

Интегралы ξ'' и η'' не изменятся от добавления к подынтегральному выражению постоянной величины

$$\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\frac{\Delta g}{r}\cos A\,dr\,dA=\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\frac{\Delta g-\Delta g_0}{r}\cos A\,dr\,dA.$$

В самом деле,

$$\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\frac{\Delta g_0}{r}\cos A\,dr\,dA=\Delta g_0\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\frac{dr}{r}\cos A\,dA=0.$$

Добавляя к подынтегральному выражению (13.22) Δg_0, получим выражение градиента силы тяжести, который в точке $r=0$ не обращается в бесконечность,

$$\left.\begin{aligned}\xi_0&=-\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\int_0^{r}\int_0^{2\pi}\frac{\Delta g-\Delta g_0}{r}\cos A\,dr\,dA,\\ \eta_0&=-\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\int_0^{r}\int_0^{2\pi}\frac{\Delta g-\Delta g_0}{r}\sin A\,dr\,dA.\end{aligned}\right\}\qquad(13.23)$$

При уменьшении r $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{\Delta g-\Delta g_0}{r}=\dfrac{\partial\Delta g}{\partial r}$, т. е. под интегралом появляется горизонтальный градиент силы тяжести, который может быть представлен в виде

$$\frac{\partial\Delta g}{\partial r}=\frac{\partial\Delta g}{\partial x}\cos A+\frac{\partial\Delta g}{\partial y}\sin A.\qquad(13.24)$$

Внося (13.24) в (13.23), убеждаемся, что для рассматриваемого нами уклонения отвеса по широте в подынтегральном выражении сохраняется градиент силы тяжести в направлении оси x, т. е. по меридиану:

$$\xi_0''=-\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\Delta g}{\partial x}\cos^2 A\,dr\,dA-\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\Delta g}{\partial y}\sin A\cos A\,dr\,dA,$$

$$\eta_0''=-\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\Delta g}{\partial x}\cos A\sin A\,dr\,dA-\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\Delta g}{\partial y}\sin^2 A\,dA\,dr.$$

Градиент при достаточно малой области r_0 можно считать

постоянным. Тогда, вынося его за знак интеграла, будем иметь

$$\xi_0'' = -\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\frac{\partial \Delta g}{\partial x}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\cos^2 A\, dr\, dA -$$

$$-\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\frac{\partial \Delta g}{\partial y}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\sin A\cos A\, dr\, dA = -\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\frac{\partial \Delta g}{\partial x}\int_0^{r_0} dr\int_0^{2\pi}\cos^2 A\, dA,$$

$$\eta_0'' = -\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\frac{\partial \Delta g}{\partial x}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\sin A\cos A\, dr\, dA -$$

$$-\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\frac{\partial \Delta g}{\partial y}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\sin^2 A\, dr\, dA = -\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\frac{\partial \Delta g}{\partial y}\int_0^{r_0} dr\int_0^{2\pi}\sin^2 A\, dA,$$

так как

$$\int_0^{2\pi}\sin A\cos A\, dA = 0.$$

Подставляя численные значения, получим влияние аномалии силы тяжести в непосредственной близости исследуемой точки на уклонение отвесной линии в виде

$$\left.\begin{aligned}\xi_0'' &= -0'',105 r_0\frac{\partial \Delta g}{\partial x},\\ \eta_0'' &= -0'',105 r_0\frac{\partial \Delta g}{\partial y}.\end{aligned}\right\} \qquad (13.25)$$

Таким образом, показано, что выражения (13.17) всюду сохраняют конечную величину.

§ 6. Практика вычисления уклонений отвесных линий. Учет влияния аномалий центральной зоны

Метод вычисления уклонений отвесных линий в современном виде разработан В. Ф. Еремеевым на основе метода, предложенного в тридцатых годах профессором И. А. Казанским.

При практическом вычислении уклонения отвесной линии правую часть формул (13.17) разбивают на три части, соответствующие трем областям интегрирования: центральной области радиуса r_0, в которой градиент силы тяжести по выбранным направлениям x и y можно считать постоянным, ближней кольцевой зоне радиуса Σ, в которой можно пренебречь кривиз-

ной Земли, и дальним зонам, где кривизна Земли учитывается:

$$\left.\begin{aligned}
\xi'' = \xi_0'' + \xi_1'' + \xi_2'' = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} \Delta g Q_0 \cos A\, dr dA - \\
-\frac{1}{2\pi}\int_{r_0}^{\bar{r}}\int_0^{2\pi} \Delta g Q_1 \cos A\, dr dA - \frac{1}{2\pi}\int_{\bar{\psi}}^{\pi}\int_0^{2\pi} \Delta g Q \cos A\, d\psi dA, \\
\eta'' = \eta_0'' + \eta_1'' + \eta_2'' = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} \Delta g Q_0 \sin A\, dr dA - \\
-\frac{1}{2\pi}\int_{r_0}^{\bar{r}}\int_0^{2\pi} \Delta g Q_1 \sin A\, dr dA - \frac{1}{2\pi}\int_{\bar{\psi}}^{\pi}\int_0^{2\pi} \Delta g Q \sin A\, d\psi dA.
\end{aligned}\right\} \quad (13.26)$$

Первые из интегралов каждой формулы (ξ_0'', η_0'') уже рассчитаны и представлены в виде выражений (13.25), где градиенты силы тяжести снимаются с карты, причем им приписывается знак плюс, если положительная аномалия увеличивается к югу (для x) и к западу (для y), а r_0 полагается равным 5 *км*. Однако практически обычно для вычисления применяется другой прием.

Воспользуемся выражением уклонения отвесных линий за счет аномалий центральных зон (13.22):

$$\xi_0'' = -\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} \frac{\Delta g}{r} \cos A\, dr\, dA,$$

$$\eta_0'' = -\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} \frac{\Delta g}{r} \sin A\, dr\, dA.$$

Разобьем интервал от 0 до r на две части так, чтобы в центральной области радиуса ρ можно было считать градиент силы тяжести величиной постоянной. Для любой точки этой области

$$\Delta g = \Delta g_0 + \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)_0 r, \quad (13.27)$$

где Δg_0 — аномалия в центральной точке, r — расстояние от центра до любой точки области радиуса ρ. Теперь интегрирование

в формулах (13.22) будем вести по областям $[0, \rho]$ и $[\rho, r_0]$:

$$\xi_0'' = -\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\int_0^{\rho}\int_0^{2\pi}\frac{\Delta g}{r}\cos A\,dr\,dA - \\ -\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\int_{\rho}^{r_0}\int_0^{2\pi}\frac{\Delta g}{r}\cos A\,dr\,dA = I_1 + I_2 \quad (13.28)$$

(аналогично и для η_0''). В первый интеграл (13.28) введем значение Δg из (13.27). Тогда

$$I_1 = -\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\int_0^{\rho}\int_0^{2\pi}\frac{\Delta g_0}{r}\cos A\,dAdr - \frac{\rho''}{2\pi\gamma}\int_0^{\rho}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)_0\cos A dAdr.$$

Первый интеграл в I_1, как было показано выше, равен нулю. Поэтому

$$I_1 = -\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\int_0^{\rho}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)_0\cos A dr dA = -\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\int_0^{2\pi}\rho\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)_0\cos A dA = \\ = -\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\int_0^{2\pi}\Delta g_\rho\cos A dA. \quad (13.29)$$

Здесь Δg_ρ — значение аномалии на расстоянии ρ от центра. Так как, по предположению, аномалии в круге радиуса ρ изменяются вдоль радиуса линейно, формулу (13.29) можно записать в виде

$$I_1 = -\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\frac{\rho}{r}\int_0^{2\pi}\Delta g(r)\cos A dA. \quad (13.30)$$

В этом случае значения аномалий берутся по окружности радиуса r, выбранного произвольно внутри ρ, и интерполируются в отношении ρ/r, т. е. на окружность радиуса ρ. Если в области, в которой определяется уклонение отвеса, аномалии изменяются незначительно, без больших градиентов, то можно центральную зону рассматривать целиком, т. е. ограничиваться вычислением только одного интеграла I_1, положив $\rho = r$, $r = r_0$. Тогда

$$\left.\begin{aligned}\xi_0'' &= -\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\int_0^{2\pi}\Delta g_{r_0}\cos A dA,\\ \eta_0'' &= -\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\int_0^{2\pi}\Delta g_{r_0}\sin A dA.\end{aligned}\right\} \quad (13.31)$$

Заменяя интегралы суммой, причем центральная зона радиуса $r_0 = 5$ *км* разбивается на 8 секторов, получаем формулы для учета влияния центральной зоны при спокойном гравитационном поле:

$$\left.\begin{aligned}\xi_0'' &= -\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\sum_{k=1}^{8}\Delta g_{r_{0k}}\cos A_k = -0'',02628\sum_{k=1}^{8}\Delta g_{r_{0k}}\cos A_k,\\ \eta_0'' &= -\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\sum_{k=1}^{8}\Delta g_{r_{0k}}\sin A_k = -0'',02628\sum_{k=1}^{8}\Delta g_{r_{0k}}\sin A_k,\end{aligned}\right\} \tag{13.32}$$

где $\Delta g_{r_{0k}}$ — аномалия на окружности радиуса r_0 в k-й точке и $A_k = k\pi/4$. Если поле аномалий в исследуемой области неспокойно, приходится учитывать оба интеграла (13.28).

Рассмотрим метод вычисления второго интеграла I_2. Воспользуемся формулой численного интегрирования Лагранжа с двумя ординатами; тогда I_2 можно представить в виде

$$I_2 = -\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\int_{\rho}^{r_0}\int_{0}^{2\pi}\frac{\Delta g}{r}\cos A\,dA\,dr = -\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\int_{\rho}^{r_0}F(r)\,dr \approx$$

$$\approx -\frac{\rho''}{2\pi\gamma}(r_0-\rho)\,[A_2F(r_2)+A_3F(r_3)], \tag{13.33}$$

где

$$F(r) = \frac{1}{r}\int_0^{2\pi}\Delta g\cos A\,dA,$$

$$\left.\begin{aligned}A_2 + A_3 &= 1,\\ A_2x_2 + A_3x_3 &= 0,\\ x &= \frac{2r-(r_0+\rho)}{r_0-\rho}.\end{aligned}\right\} \tag{13.34}$$

Исключая x из второго уравнения (13.34), получим

$$A_2\frac{2r_2-(r_0+\rho)}{r_0-\rho} + A_3\frac{2r_3-(r_0+\rho)}{r_0-\rho} = 0.$$

Отсюда находим

$$A_2r_2 + A_3r_3 = \frac{r_0+\rho}{2}.$$

Учитывая первое равенство (13.34), найдем

$$A_2 = \frac{2r_3-(r_0+\rho)}{2(r_3-r_2)};\quad A_3 = -\frac{2r_2-(r_0+\rho)}{2(r_3-r_2)}.$$

Подставляя полученные значения в (13.33), будем иметь

$$I_2 = -\frac{\rho''}{2\pi\gamma}(r_0-\rho)\left\{\frac{2r_3-(r_0+\rho)}{2(r_3-r_2)}F(r_2)-\frac{2r_2-(r_0+\rho)}{2(r_3-r_2)}F(r_3)\right\}$$

или, раскрывая значения F_2 и F_3,

$$I_2 = -\frac{\rho''}{2\pi\gamma}(r_0-\rho)\left[\frac{2r_3-(r_0+\rho)}{2(r_3-r_2)r_2}\int_0^{2\pi}\Delta g\cos A\,dA - \right.$$

$$\left. -\frac{2r_2-(r_0+\rho)}{2(r_3-r_2)r_3}\int_0^{2\pi}\Delta g\cos A\,dA\right]. \quad (13.35)$$

Теперь величина уклонения отвесной линии, вызванная влиянием близких зон, представится в виде

$$\xi_0'' = -\frac{\rho''\rho}{2\pi\gamma r_1}\int_0^{2\pi}\Delta g(r_1)\cos A\,dA -$$

$$-\frac{\rho''}{4\pi\gamma}\left[\frac{(r_0-\rho)}{r_3-r_2}\cdot\frac{2r_3-r_0-\rho}{r_2}\int_0^{2\pi}\Delta g\cos A\,dA - \right.$$

$$\left. -\frac{r_0-\rho}{r_3-r_2}\frac{2r_2-r_0-\rho}{r_3}\int_0^{2\pi}\Delta g\cos A\,dA\right]. \quad (13.36)$$

Заменой $\cos A$ на $\sin A$ получим аналогичную формулу для η''.

Обычно при учете влияния центральных зон окружность разбивают на 8 частей. Тогда, заменяя интегралы суммой по восьми радиусам, получим

$$\left.\begin{aligned}
\xi_0'' &= -\frac{\rho''\rho}{8\gamma r_1}\sum_{k=1}^{8}\Delta g_k(r_1)\cos A_k - \\
&-\frac{\rho''}{16\gamma}\frac{r_0-\rho}{r_3-r_2}\cdot\frac{2r_3-(r_0+\rho)}{r_2}\sum_{k=1}^{8}\Delta g_k(r_2)\cos A_k + \\
&+\frac{\rho''}{16\gamma}\frac{r_0-\rho}{r_3-r_2}\frac{2r_2-r_0-\rho}{r_3}\sum_{k=1}^{8}\Delta g_k(r_3)\cos A_k, \\
\eta_0'' &= -\frac{\rho''}{8\gamma}\frac{\rho}{r_1}\sum_{k=1}^{8}\Delta g_k(r_1)\sin A_k - \\
&-\frac{\rho''}{16\gamma}\frac{r_0-\rho}{r_3-r_2}\frac{2r_3-r_0-\rho}{r_2}\sum_{k=1}^{8}\Delta g_k(r_2)\sin A_k + \\
&+\frac{\rho''}{16\gamma}\frac{r_0-\rho}{r_3-r_2}\frac{2r_2-r_0-\rho}{r_3}\sum_{k=1}^{8}\Delta g_k(r_3)\sin A_k.
\end{aligned}\right\} \quad (13.37)$$

При вычислении коэффициенты при суммах в (13.37) приравнивают постоянным, т. е. устанавливаются площадки равных влияний. Принято принимать следующие значения этих констант:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\rho''\rho}{8\gamma r_1} = 0'',03;\ \frac{\rho''}{16\gamma}\frac{r_0-\rho}{r_3-r_2}\frac{2r_3-(r_0+\rho)}{r_2} = 0'',03,\\ \frac{\rho''}{16\gamma}\frac{r_0-\rho}{r_3-r_2}\frac{2r_2-r_0-\rho}{r_3} = 0'',003, \end{aligned}\right\} \quad (13.38)$$

при этом ρ выбирается произвольно, после чего из уравнений (13.38) находят r_1, r_2, r_3 — радиусы разбиения центральной зоны на 4 области. Обычно принимается $\rho = 1{,}2$ *км*.

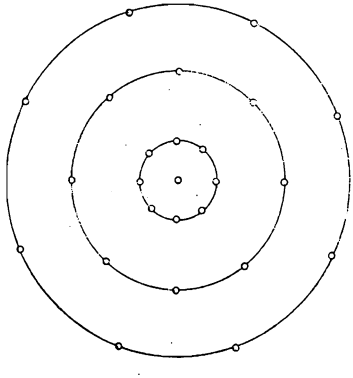


Рис. 96.

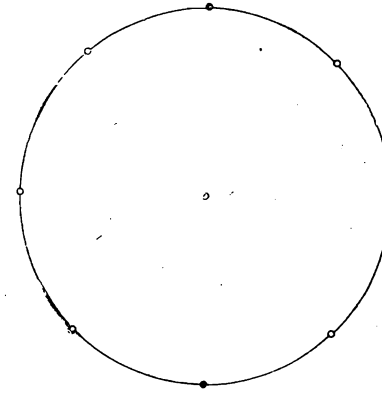


Рис. 97.

Тогда $r_1 = 1{,}051$ *км*, $r_2 = 2{,}838$ *км*, $r_3 = 4{,}516$ *км* и окончательные формулы для вычисления уклонения отвеса за влияние центральной пятикилометровой зоны будут

$$\left.\begin{aligned} \xi_0'' = &-0'',03\sum_{k=1}^{8}\Delta g(r_1)\cos A_k - \\ &-0'',03\sum_{k=1}^{8}\Delta g(r_2)\cos A_k - 0'',003\sum_{k=1}^{8}\Delta g(r_3)\cos A_k,\\ \eta_0'' = &-0'',03\sum_{k=1}^{8}\Delta g(r_1)\sin A_k - \\ &-0'',03\sum_{k=1}^{8}\Delta g(r_2)\sin A_k - 0'',003\sum_{k=1}^{8}\Delta g(r_3)\sin A_k. \end{aligned}\right\} \quad (13.39)$$

При вычислении влияния гравитационных аномалий центральной зоны на уклонения отвесной линии определяют силу

тяжести в 24 точках равномерно расположенных по 8 на трех окружностях соответственно радиусов r_1, r_2, r_3, как показано на рис. 96, и вычисляют ξ_0'' и η_0'' по формулам (13.39). В случае спокойного поля аномалии определяются в 8 точках, равномерно расположенных по кругу радиуса r_0 (рис. 97); ξ_0 и η_0 вычисляются по формулам (13.32).

§ 7. Учет влияния аномалий ближних и средних зон

Второй интеграл (13.21) ξ_1, η_1 разбивают на четыре, интегрируемые по соответствующим кольцевым зонам с радиусами от $r_0=5$ *км* до $r_1=100$ *км*, от r_1 до $r_2=300$ *км*, от r_2 до $r_3=10000$ *км* и от r_3 до $r_4=2000$ *км*. В этих зонах под интегралами $d\chi$ заменяется через dr/R в соответствии с (13.19) и интеграл заменяется суммой, причем суммирование идет по площадкам, органиченным окружностями с определенными радиусами и радиальными лучами. Радиусы окружностей и радиальные лучи выбираются так, чтобы влияние ограничиваемых ими площадок на величину уклонения отвесных линий в направлении радиуса было постоянным. Соответственно такому разбиению строятся палетки, которыми и пользуются при вычислении уклонений отвеса.

Преобразуем теперь второй интеграл для ξ, η уравнений (13.26)

$$\left.\begin{aligned}\xi_1'' &= -\frac{1}{2\pi R}\int_{r_0}^{\bar r}\int_0^{2\pi}\Delta g Q_1 \cos A\, dr dA,\\ \eta_1'' &= -\frac{1}{2\pi R}\int_{r_0}^{\bar r}\int_0^{2\pi}\Delta g Q_1 \sin A\, dr dA,\end{aligned}\right\} \qquad (13.40)$$

в котором упростим выражение Q для малых r (до 1000 *км*). Раскладывая в выражении (13.18) тригонометрические функции в ряд и отбрасывая члены, содержащие квадраты аргументов, а также полагая в силу малости $\psi=r/R$, получим

$$\left.\begin{aligned}Q_1 &= \frac{\rho''}{2\gamma}\left(1-\frac{\psi^2}{4}\right)\left(\frac{2}{\psi}+\frac{\psi}{12}+6\psi+3-\frac{3}{2}\psi\right),\\ Q_1 &= \frac{\rho''}{2\gamma}\left(\frac{2R}{r}+\frac{49}{12}\frac{r}{R}+3\right)\end{aligned}\right\} \qquad (13.41)$$

или, вводя значения $\rho''=206\,265''$; $\gamma=981$ *гал*, $R=6371$ *км*,

$$Q_1 = \left(\frac{1340''}{r}+0'',315+0'',000066r\right). \qquad (13.42)$$

Введем (13.42) в интеграл и напишем интеграл ξ_1, η_1 для каждой площадки равного действия:

$$\left.\begin{aligned}
\xi_1^{ik} &= -\frac{1}{2\pi R}\int_{r_{i-1}}^{r_i}\Delta g\left(\frac{1340''}{r}+0'',315+\right.\\
&\qquad\left.+0'',000066r\right)dr\int_{A_{k-1}}^{A_k}\cos A\,dA,\\
\eta_1^{ik} &= -\frac{1}{2\pi R}\int_{r_{i-1}}^{r_i}\Delta g\left(\frac{1340''}{r}+0'',315+\right.\\
&\qquad\left.+0'',000066r\right)dr\int_{A_{k-1}}^{A_k}\sin A\,dA.
\end{aligned}\right\}\qquad(13.43)$$

Далее, выбирая эту площадку малой, считаем для нее Δg и $\cos A$ постоянными. Тогда

$$\xi_1^{ik} = -\frac{\Delta g}{2\pi R}\int_{r_{i-1}}^{r_i}\left(\frac{1340''}{r}+0'',315+0'',000066r\right)dr\cos A\int_{A_{k-1}}^{A_k}dA,$$

$$\eta_1^{ik} = -\frac{\Delta g}{2\pi R}\int_{r_{i-1}}^{r_i}\left(\frac{1340''}{r}+0'',315+0'',000066r\right)dr\sin A\int_{A_{k-1}}^{A_k}dA.$$

Интегрируя, получаем

$$\left.\begin{aligned}
\xi_1^{ik} &= -\frac{\Delta g_{ik}\cos A_{ik}}{2\pi R}[1340''\ln r+0'',315r+\\
&\qquad+0'',000033r^2]_{r_{i-1}}^{r_i}(A_k-A_{k-1}),\\
\eta_1^{ik} &= -\frac{\Delta g_{ik}\sin A_{ik}}{2\pi R}[1340''\ln r+0'',315r+\\
&\qquad+0'',000033r^2]_{r_{i-1}}^{r_i}(A_k-A_{k-1}).
\end{aligned}\right\}\qquad(13.44)$$

Для того чтобы обеспечить равные влияния площадок, надо приравнять константе коэффициент при $\Delta g_{ik}\cos A_{ik}$, $\Delta g_{ik}\sin A_{ik}$ в (13.44). В этих предположениях можно найти радиусы кольцевых зон по формулам (13.44), в которых коэффициент

при $\Delta g \cos A$ приравниваем константе

$$\frac{1}{2\pi R}[1340''(\ln r_i - \ln r_{i-1}) + 0'',315(r_i - r_{i-1}) + 0'',000033(r_i^2 - r_{i-1}^2)](A_k - A_{k-1}) = \text{const}. \quad (13.45)$$

Задав значение константы равным 0″,005, а число секторов 16, получим для ближних плоских зон от 5 до 100 *км*

$$0'',005 = \frac{1}{16R}[1340''(\ln r_i - \ln r_{i-1}) + 0'',315(r_i - r_{i-1}) + 0'',000033(r_i^2 - r_{i-1}^2)].$$

Обозначим

$$P(r) = [1340''(\ln r_i - \ln r_{i-1}) + 0'',315(r_i - r_{i-1}) + 0'',000033(r_i^2 - r_{i-1}^2)]$$

и

$$\Phi(r) = \frac{P_1(r)}{16R} = 0'',005.$$

Для средних плоских зон от 100 до 300 *км* и от 300 до 1000 *км* аналогично будем иметь

$$\Phi(r) = \frac{P_2(r)}{24R} = 0'',002, \quad \frac{P_3(r)}{24R} = 0'',0015 \quad (13.46)$$

и для средних сферических зон от 1000 до 2000 *км*

$$\frac{P_4(r)}{48R} = 0'',000871.$$

При определении P обычно третьим членом в скобке можно пренебречь.

Полное влияние аномалий силы тяжести ближних и средних зон можно представить теперь суммой, состоящей из членов вида (13.44) с учетом (13.46). Вследствие выбранного разбиения на четыре области это влияние запишем в виде суммы четырех членов:

$$\left.\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{P_1}{16R}\sum_{i=1}^{16}\sum_{k=1}^{8}\Delta g_{ik}\cos A_k + \frac{P_2}{24R}\sum_{i=1}^{24}\sum_{k=9}^{13}\Delta g_{ik}\cos A_k + \\
&+ \frac{P_3}{24R}\sum_{i=1}^{24}\sum_{k=14}^{21}\Delta g_{ik}\cos A_k + \frac{P_4}{48R}\sum_{i=1}^{48}\sum_{22}^{26}\Delta g_{ik}\cos A_k, \\
\eta_1 &= \frac{P_1}{16R}\sum_{i=1}^{16}\sum_{k=1}^{8}\Delta g_{ik}\sin A_k + \frac{P_2}{24R}\sum_{i=1}^{24}\sum_{k=9}^{13}\Delta g_{ik}\sin A_k + \\
&+ \frac{P_3}{24R}\sum_{i=1}^{24}\sum_{k=14}^{21}\Delta g_{ik}\sin A_k + \frac{P_4}{48R}\sum_{i=1}^{48}\sum_{k=22}^{26}\Delta g_{ik}\sin A_k,
\end{aligned}\right\} \quad (13.47)$$

Для определения радиусов кольцевых зон палетки служит уравнение (13.45). Проще всего эти радиусы определить графически. Для этого надо построить график функции

$$\Phi(r) = \frac{A_k - A_{k-1}}{2\pi R}(1340 \ln r + 0{,}315r + 0{,}000033r^2),$$

представленный на рис. 98. Для того чтобы с помощью этого графика определить радиусы палетки, надо задаться исходным радиусом r_0, который следует отложить на оси абсцисс. Из его

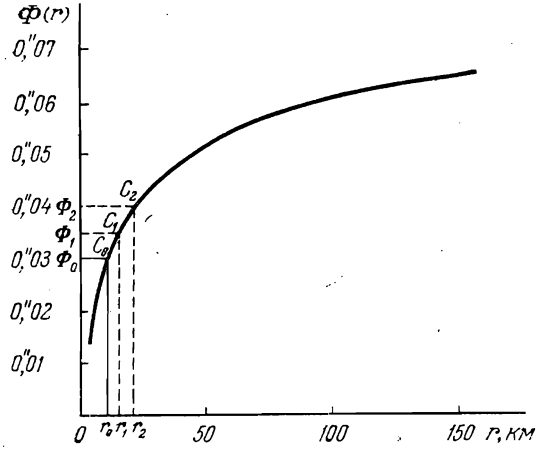


Рис. 98.

конца нужно восстановить ординату до пересечения с графиком в точке c_0 и найти соответствующую ординату Φ_0. Отложив на оси ординат точки Φ_1, Φ_2, Φ_3, отстоящие от Φ_0 на расстоянии принятых констант 0″,005, 0″,002, 0″,0015 (13.46), найдем соответствующие радиусы r_1, r_2, r_3, которые и являются искомыми радиусами палетки. Если произвести соответствующий расчет, получим значения радиусов и числа секторов для палеток, приведенных в табл. 14.

Палетки представлены на рис. 99. Они строятся в масштабе применяемой карты. Обычно для ближних зон (палетка № 1 — рис. 99) масштаб 10^{-6}, для средних и дальних зон масштаб 10^{-7} (палетка № 2 — рис. 100).

Теперь можно написать полные формулы для уклонения отвесных линий под влиянием гравитационных аномалий в области до 2000 *км*. Влияние центральной зоны здесь представлено

Таблица 14

Зона	Число секторов	Радиусы зон в километрах	
		плоский случай	сферический случай
1	16	5,0	5,0
2	16	7,3	7,3
3	16	10,7	10,7
4	16	15,7	15,7
5	16	22,9	22,8
6	16	33,5	33,3
7	16	49,0	48,5
8	16	71,7	70,6
9	24	104,9	102,6
10	24	131,8	128,0
11	24	165,7	159,6
12	24	208,1	198,6
13	24	261,5	246,7
14	24	328,6	305,4
15	24	389,9	357,8
16	24	462,7	418,1
17	24	549,2	487,4
18	24	657,7	566,6
19	24	773,5	656,6
20	24	917,9	758,0
21	24	1084,4	872,0
22	48	1292,9	1000,0
23	48		1163,7
24	48		1345,5
25	48		1545,6
26	48		1763,9
			2000,0

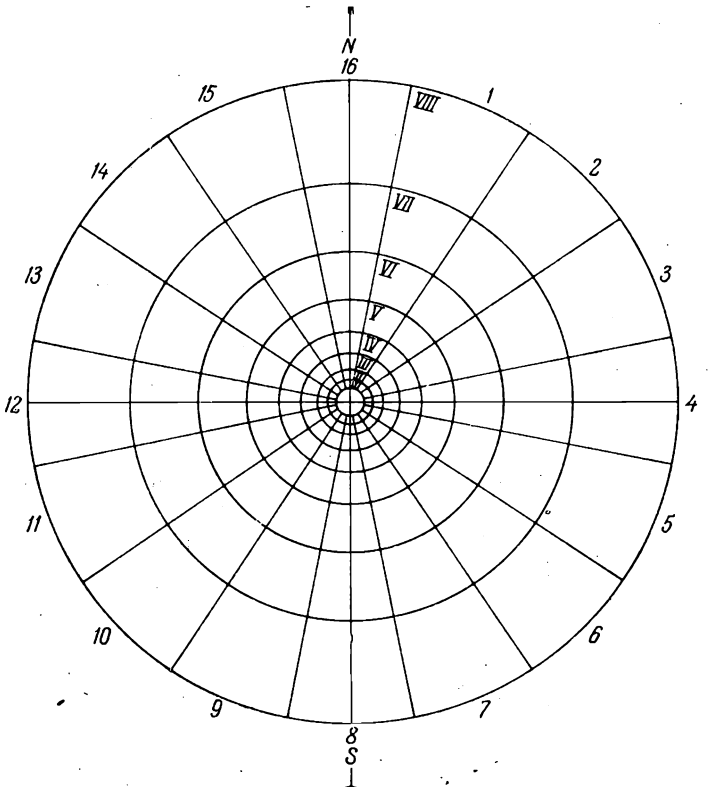


Рис. 99.

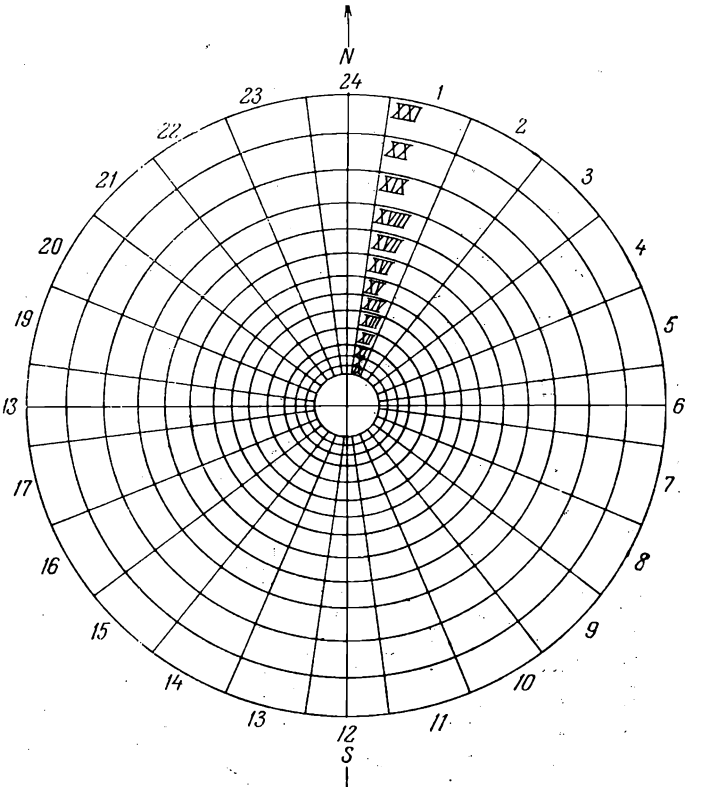


Рис. 100.

в соответствии с (13.32):

$$\left.\begin{aligned}
\xi'' &= -\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\sum_{k=1}^{8}\Delta g_{r_0}\cos A_k - \frac{P\rho''}{16R}\sum_{i=1}^{16}\sum_{k=1}^{8}\Delta g_{ik}\cos A_k - \\
&- \frac{P\rho''}{24R}\sum_{i=1}^{24}\sum_{k=9}^{21}\Delta g_{ik}\cos A_k - \frac{P\rho''}{48R}\sum_{i=1}^{48}\sum_{k=22}^{26}\Delta g_{ik}\cos A_k, \\
\eta'' &= -\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\sum_{k=1}^{8}\Delta g_{r_0}\sin A_k - \frac{P\rho''}{16R}\sum_{i=1}^{16}\sum_{k=1}^{8}\Delta g_{ik}\sin A_k - \\
&- \frac{P\rho''}{24R}\sum_{i=1}^{24}\sum_{k=9}^{21}\Delta g_{ik}\sin A_k - \frac{P\rho''}{48R}\sum_{i=1}^{48}\sum_{k=22}^{26}\Delta g_{ik}\sin A_k.
\end{aligned}\right\} \quad (13.48)$$

Так как мы положили коэффициенты при $\Delta g\cos A$ равными постоянным величинам (13.46), перепишем (13.48) в виде

$$\left.\begin{aligned}
\xi'' &= -0{,}02628\sum_{k=1}^{8}\Delta g_{r_0 k}\cos A_k - 0'',005\sum_{i=1}^{16}\sum_{k=1}^{8}\Delta g_{ik}\cos A_k - \\
&- 0'',002\sum_{i=1}^{24}\sum_{k=9}^{13}\Delta g_{ik}\cos A_k - 0'',0015\sum_{i=1}^{24}\sum_{k=14}^{21}\Delta g_{ik}\cos A_k - \\
&- 0'',000871\sum_{i=1}^{48}\sum_{k=22}^{26}\Delta g_{ik}\cos A_k, \\
\eta'' &= -0{,}02628\sum_{k=1}^{8}\Delta g_{r_0 k}\sin A_k - 0'',005\sum_{i=1}^{16}\sum_{k=1}^{8}\Delta g_{ik}\sin A_k - \\
&- 0'',002\sum_{i=1}^{24}\sum_{k=9}^{13}\Delta g_{ik}\sin A_k - 0'',0015\sum_{i=1}^{24}\sum_{k=14}^{21}\Delta g_{ik}\sin A_k - \\
&- 0'',000871\sum_{i=1}^{48}\sum_{k=22}^{26}\Delta g_{ik}\sin A_k.
\end{aligned}\right\} \quad (13.49)$$

Формулы (13.49) окончательно решают задачу для нахождения уклонения отвеса, вызываемого аномалиями в области до 1000 *км* от исследуемого пункта.

Для расчета уклонений отвесных линий требуются гравиметрические карты на исследуемый район масштаба 1:1 000 000 или крупнее и масштаба 1:10 000 000, палетки, обычно изготовленные на целлулоиде, и бланки — формы записи снятых с карты значений Δg. Палетка накладывается на карту, ее центр совмещается с пунктом, для которого вычисляется уклонение

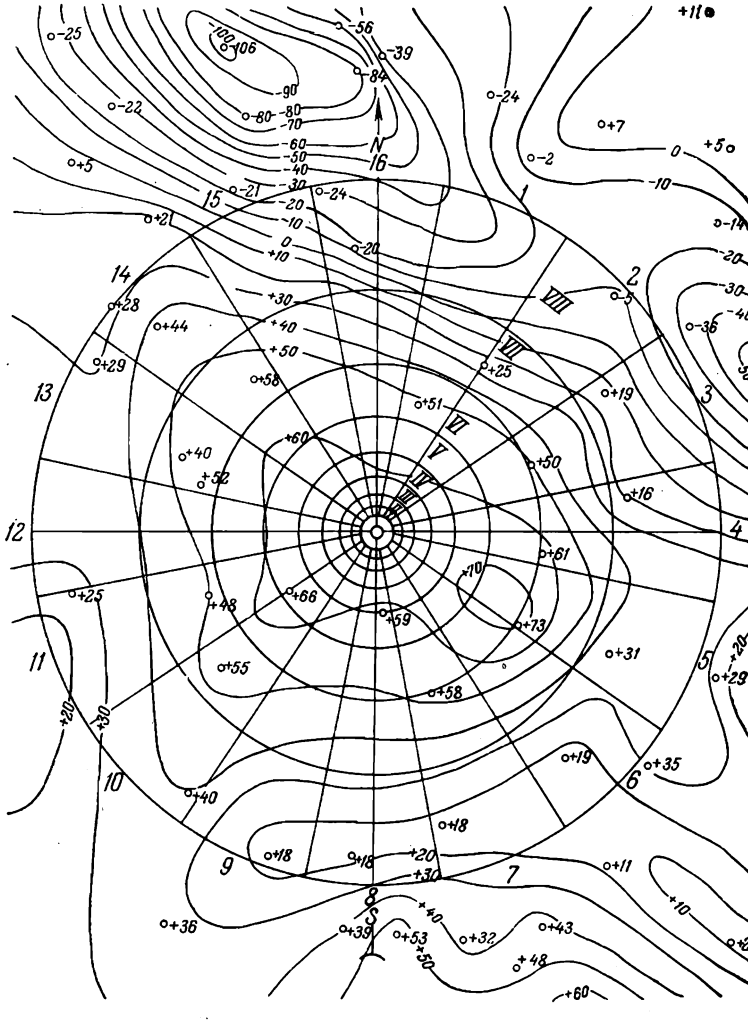


Рис. 101.

отвесной линии, а ось NS совмещается с меридианом. Пример наложения палетки на карту представлен на рис. 101.

Теперь в каждой криволинейной трапеции определяется по карте гравитационных аномалий значение Δg. Умножая их на соответствующие коэффициенты и складывая, получаем уклонения отвесных линий. Здесь представлена форма № 1 записи для 1-й палетки. В верхнем горизонтальном входе выписаны номера секторов, а в вертикальном входе — номера кольцевых зон. В каждом столбце, т. е. для каждого сектора, указан знак, который берется в случае вычисления ξ и η. Он учитывает как знак косинуса или синуса, так и знак, стоящий перед слагаемыми формулы (13.48). В столбцах выписываются аномалии, снятые с карты со своим знаком. В нижней строке приводится сумма аномалий со своим знаком. В двух пустых столбцах $\sum\sum\xi$ и $\sum\sum\eta$ выписывается коэффициент 0″,005, умноженный на косинус угла, соответствующего секторам данной группы. В первой группе это cos 22°,5, так что этот коэффициент равен $0''{,}005\times 0{,}9239 = 0''{,}0046$ для ξ и $0''{,}005\times 0{,}3827 = 0{,}0019$ для η.

Аналогичным способом рассчитана форма № 2 для соответствующих палеток, а также форма № 3, которую мы не приводим. Составляющая уклонения отвеса, вызванная аномалиями первой группы площадей, получается от перемножения суммы аномалий на соответствующий коэффициент. Например, в нашем случае (форма № 1).

$$\xi = 199\times 0''{,}0046 = +0''{,}9.$$

В конце формы выписывается суммарное отклонение отвеса по всем группам аномалий.

При вычислении влияния центральной зоны входящие в формулы (13.32) значения Δg записывают во вторую и четвертую группы формы № 1 — в верхние строки под соответствующими номерами секторов 2, 6, 10, 14, 16, 8, 4, 12 с соответствующими знаками синусов или косинусов.

§ 8. Вопросы учета влияния дальних зон

Влияние гравитационных аномалий дальних зон на уклонения отвесных линий учитывается третьим интегралом формулы (13.26). Это влияние может быть довольно значительным, однако оно изменяется очень медленно от точки к точке. Обычно этим влиянием пренебрегают.

В тех случаях, когда требуется исследовать влияние аномалий дальних зон, в третьем члене формул (13.26) интеграл заменяется суммой влияний площадок, на которые разбивается вся область интегрирования, т. е. вся Земля. Вычисление влияний каждого члена суммы, т. е. влияний аномалий всех площа-

док разбиения, может быть произведено суммированием снятых с карты аномалий и умножением на соответствующие коэффициенты:

$$\xi_2 = -\frac{1}{2\pi}\int_{\bar{\psi}}^{\pi}\int_{0}^{2\pi} \Delta g Q \cos A \, d\psi \, dA = -\frac{1}{n}\frac{\pi-\bar{\psi}}{m}\sum\sum \Delta g_{ik} Q_{ik} \cos A_k,$$

$$\eta_2 = -\frac{1}{2\pi}\int_{\bar{\psi}}^{\pi}\int_{0}^{2\pi} \Delta g Q \sin A \, d\psi \, dA = -\frac{1}{n}\frac{\pi-\bar{\psi}}{m}\sum\sum \Delta g_{ik} Q_{ik} \sin A_k.$$

Уклонение отвеса, вычисленное по полной формуле (13.21), представляет собой «абсолютное» уклонение отвеса, которое образуют нормали к уровенной поверхности геоида и гравиметрического эллипсоида, т. е. эллипсоида, наилучшим образом представляющего Землю. Относительные уклонения отвеса, образованные нормалями к геоиду и принятому при триангуляции референц-эллипсоиду, тем меньше отличаются от абсолютных, чем ближе референц-эллипсоид по своим параметрам и ориентировке к общему земному эллипсоиду. Во всяком случае изменение разностей абсолютных и относительных уклонений отвесных линий происходит плавно и в не слишком больших областях линейно. Поэтому при учете влияния дальних зон возможно использование метода интерполирования этих разностей, известных, например, в ограниченном числе точек.

Существует способ учета дальних зон астрономо-геодезическим методом. Известно, что составляющие уклонения отвесных линий являются разностью астрономических и геодезических координат. Эта величина отклонений отвеса является полным уклонением, т. е. зависит от гравитационных аномалий на всей Земле. Если теперь в какой-либо точке изучаемой области известно такое полное астрономо-геодезическое уклонение отвеса $\xi''_{а.г}$, а также отклонение, вычисленное гравиметрически с учетом влияния аномалий области радиуса 2000 *км* от исследуемой точки, то разность этих величин

$$\Delta\xi'' = \xi''_{а.г} - \xi''_{гр},$$

очевидно, и есть величина, обусловленная неучетом влияния дальних зон при расчете $\xi''_{гр}$. Так как эта величина изменяется плавно, то для близко расположенных точек допустимо ее линейное интерполирование. Если в изучаемой области имеется несколько астрономических пунктов, то по ним всегда можно вычислить коэффициент интерполирования. В самом деле, пусть имеем в исследуемой области три или больше пунктов с координатами B_i, L_i. Тогда для каждого из этих пунктов можно по

условию записать

$$\Delta\xi_i = \bar{A}B_i + \bar{B}L_i + \bar{C},$$

где $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, — некоторые коэффициенты.

Находя величины $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ из этих уравнений, число которых равно числу астропунктов, легко получить $\Delta\xi$ для любой точки с координатами B и L по формуле

$$\Delta\xi = \bar{A}B + \bar{B}L + \bar{C}.$$

Добавив величину $\Delta\xi''$ к $\xi'' = \xi_0'' + \xi_1''$ — уклонению отвеса за счет центральной и ближних кольцевых зон,— получим полное уклонение отвеса в данной точке.

Проведенное рассуждение относится к случаю, когда геодезический референц-эллипсоид, для которого получено $\xi_{а.г}''$, совпадает с общим земным эллипсоидом. Практически этого не бывает. Поэтому вычисленная описанным способом поправка $\Delta\xi''$ содержит в себе величину изменения угла между нормалями референц-эллипсоида и общего земного эллипсоида, также линейно и медленно меняющуюся от точки к точке.

ГЛАВА 14

ИЗУЧЕНИЕ ФИГУРЫ ФИЗИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ

§ 1. Принципиальные трудности редуцирования на геоид

В понятие фигуры Земли согласно теории Молоденского вкладывается представление о форме и размерах истинной Земли, т. е. Земли с учетом ее внешнего рельефа. Поэтому не может быть единой простой формулы, представляющей фигуру Земли через несколько параметров, подобно формуле нормального распределения силы тяжести, которая представляет эллипсоид относимости.

Этот эллипсоид относимости, выбранный наилучшим образом и заданный большой полуосью a, сжатием α и элементами ориентирования в теле Земли, т. е. значениями уклонения отвесных линий ξ_0 и η_0, расстояния его поверхности от уровня моря в некоторой начальной точке и азимута A_0 на близкий предмет, представляет первое приближение (с современной точки зрения) фигуры Земли. Для того чтобы от первого приближения перейти к истинной Земле, строго говоря, в каждой точке этого эллипсоида следует задать расстояние (по нормали) от поверхности эллипсоида до физической поверхности Земли. Однако обычно задачу разделяют на две: 1) нахождение расстояний между эллипсоидом относимости и геоидом и 2) нахождение расстояний между геоидом и физической поверхностью Земли. В такой постановке вопроса геоид представляется некоторой вспомогательной поверхностью, облегчающей переход от первого приближения фигуры Земли как эллипсоида вращения ко второму — фигуре истинной Земли.

Первая задача — нахождение высот геоида — решается по аномалиям силы тяжести, например, с помощью формулы Стокса.

Остается решить вторую задачу — нахождение высот физической поверхности над геоидом. Эта задача выполняется геодезическими методами с помощью нивелировок. После того как решена и эта задача, можно считать, что истинная

фигура Земли определяется следующими элементами: 1) заданием параметров земного эллипсоида a, α и его ориентировки ξ_0, η_0 и A_0, 2) заданием системы высот геоида ζ над эллипсоидом относимости, 3) заданием системы высот h физической поверхности Земли над геоидом. Степень приближения к истинной Земле при такой постановке задачи зависит от обеспеченности геодезическими и гравиметрическими материалами и от выбора густоты точек, в которых определены ζ и h. Та или иная степень разреженности этих точек будет соответствовать той или иной степени сглаживания рельефа. Однако уже в главе 12 указывалось на принципиальную неопределимость геоида и ортометрических высот h.

В намеченном решении задачи построения фигуры Земли, складывающейся из нахождения элементов земного эллипсоида, совокупности высот геоида над эллипсоидом и совокупности ортометрических высот физической поверхности Земли над геоидом, являются нестрогими второй и третий шаги. Для равнинных областей эта нестрогость носит формально принципиальный характер и не имеет практического значения. При переброске триангуляций через горные районы и вообще при обработке больших триангуляций этим методом вносятся практически ощутимые искажения. Эти осложнения возникают вследствие того, что приходится экстраполировать значения потенциала и его градиентов внутрь масс, к тому же нам неизвестных. Чтобы этого избежать, надо полагать потенциал и его производные заданными только в тех областях, в которых они непосредственно измеряются, т. е. на физической поверхности Земли. В этом основное отличие теории Молоденского от теории Стокса. Краевое условие должно быть задано также на физической поверхности Земли. В этом случае можно построить гравитационное поле во всем внешнем пространстве и изучать гравиметрическим способом фигуру физической поверхности Земли. Изучение геоида Листинга является принципиально задачей более сложной, так как в ней приходится изучать поведение потенциала и силы тяжести внутри масс. Кажущаяся бо́льшая простота решения задачи при прежнем подходе к ней вызвана только упрощенным подходом к ее решению.

Знание внешнего гравитационного поля и фигуры физической поверхности Земли дают необходимые данные для решения всех геодезических задач. В этом случае редуцирование на эллипсоид относимости всех измеренных геодезических элементов осуществляется вполне строго. Снимаются все неопределенности, связанные с определением уровенной поверхности, проходящей внутри масс.

Введение геоида имеет свою положительную сторону. Из Земли, ограниченной весьма сложной и неправильной поверхностью, геоид выделяет главную часть, ограниченную плавно изменяющейся геоидальной поверхностью, и неправильную часть, заключенную между геоидом и физической поверхностью Земли. Такое разделение удобно потому, что оно упрощает аппарат решения задачи. При новом подходе, когда мы условились иметь дело только с фактически измеряемыми величинами (на физической поверхности Земли), также можно ввести такую же поверхность. В отличие от геоида она называется *квазигеоидом.* Квазигеоид не есть единая уровенная поверхность, однако в каждой точке она определяется как поверхность уровня. Ее можно характеризовать как кусочно-уровенную поверхность. Квазигеоид разделяет геодезические высоты, отсчитанные от эллипсоида относимости, на две части, одна из которых, плавно меняющаяся, определяется методом решения краевой задачи теории потенциала, а другая — геометрическим нивелированием через геопотенциальные высоты. На поверхности океана квазигеоид совпадает с геоидом. На материках он будет тем больше отступать от геоида, чем больше аномалии силы тяжести и чем сложнее и выше рельеф местности. На материках квазигеоид может быть принят за приближенное выражение для геоида.

Работами В. Ф. Еремеева было показано, что выполнявшиеся ранее в геодезии и гравиметрии приведения к геоиду практически соответствовали приведениям к квазигеоиду, т. е. даже при решении редукционных задач по формулам, приспособленным к редуцированию на геоид, фактически мы имеем дело с квазигеоидом. Чтобы решить задачу вполне строго, необходимо перейти к новой системе высот, отсчитываемой от квазигеоида, а значения потенциала и силы тяжести задавать, как это фактически и имеет место, на физической поверхности Земли.

Задача поставленная и разрешенная М. С. Молоденским, является обобщением задачи Стокса; решение последней может быть выведено из решения задачи Молоденского как частный случай.

Задачу Молоденского можно сформулировать следующим образом.

Если Земля вращается с постоянной угловой скоростью ω *около неизменной оси, то поверхность* S *Земли и внешний потенциал силы тяжести определяются в одной системе координат измеренными в каждой точке поверхности Земли следующими величинами:* 1) *приращением потенциала силы тяжести относительно некоторой начальной точки* O $W_s - W_0$; 2) *приращением*

силы тяжести относительно исходного пункта $g_B - g_0$; 3) *астрономическими координатами* φ, λ.

Решение будет однозначным, если известны дополнительно две постоянные: масса Земли M и потенциал W_0 в точке O. Эти постоянные могут быть заменены непосредственно измеренным абсолютным значением силы тяжести g и расстоянием между двумя удаленными точками.

§ 2. Системы высот

Высотой точки физической поверхности Земли обычно называется расстояние по вертикали от данной точки до поверхности геоида. Высота, определенная таким образом, получила название *ортометрической высоты точки.* Геоид является началом счета высот. Разность высот двух точек называется *превышением.* Превышение определяется с помощью нивелирования. Превышение точки над близкой точкой, измеренное с одной стоянки нивелира, называется *элементарным превышением* Δh.

Идя по физической поверхности Земли от точки O (рис. 102), лежащей на геоиде, к точке B, мы получим высоту точки B как сумму элементарных превышений $H_B = \sum_i \Delta h_i$. Однако таким

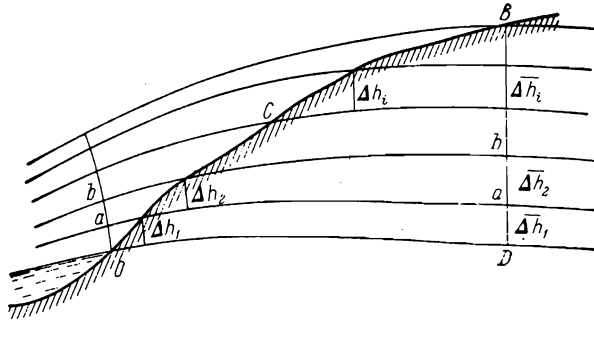


Рис. 102.

путем высота определяется неоднозначно. Значение $\sum \Delta h_i$ зависит от пути нивелирования. Дело в том, что уровенные поверхности гравитационного поля Земли, определяемые выбором C в уравнении $W = C$, не параллельны между собой. На рис. 102 эти поверхности показаны линиями aa, bb и т. д. Непараллельность уровенных поверхностей обусловлена в первую очередь эллиптичностью Земли, что вызывает правильное расхождение поверхностей, расстояние между которыми монотонно увеличивается от полюсов к экватору в соответствии с уменьшением

напряженности силового поля. Такое изменение расстояния между уровенными поверхностями достигает 3 *м* при изменении высоты на 1 *км*. Кроме этого правильного расхождения уровенных поверхностей, существуют аномальные изменения расстояния между ними, вызываемые аномалиями силы тяжести. Очевидно, что уровенные поверхности были бы параллельны между собой в случае невращающейся однородной сферической Земли, развивающей ньютонианское силовое поле. Тогда уровенные поверхности являлись бы концентрическими сферами.

Легко показать, что в силу непараллельности уровенных поверхностей $\sum \Delta h$ будет различной в зависимости от того, каким путем прийти из точки O в точку B. Для доказательства рассмотрим два пути: OCB — по физической поверхности Земли и ODB — сначала по уровенной поверхности OD, а затем по вертикали DB. Расстояния между уровенными поверхностями aa, bb и т. д. по пути OCB мы обозначили через Δh_1, Δh_2, ..., Δh_i. При движении по уровенной поверхности OD высота не изменяется. Расстояния между теми же уровенными поверхностями aa, bb, ... при движении по вертикали DB обозначим через $\overline{\Delta h}_1$, $\overline{\Delta h}_2$, ..., $\overline{\Delta h}_i$. Поскольку $\Delta h_i \neq \overline{\Delta h}_i$,

$$\sum \Delta h_i \neq \sum \overline{\Delta h}_i.$$

Совершенно очевидно, что так высоты считать нельзя, поскольку высота одной и той же точки будет иметь различные значения в зависимости от того, по какому пути производилось нивелирование, а сумма превышений по замкнутому полигону не равна нулю.

Если вместо элементарных превышений ввести приращения потенциалов, все эти неудобства исчезают. Элементарное приращение потенциала при переходе от уровенной поверхности aa к поверхности bb равно $g_1 dh_1$ в точке O и $\bar{g}_1 \overline{dh}_1$ в точке D. Приращение потенциала при переходе от одной уровенной поверхности к другой — величина постоянная; поэтому

$$g_i dh_i = \bar{g}_i \overline{dh}_i.$$

Суммируя, получим

$$\sum_{OB} g_i dh_i = \sum_{DB} \bar{g}_i \overline{dh}_i$$

или в пределе

$$\int_{OB} g\, dh = \int_{DB} \bar{g}\, \overline{dh}.$$

В правой части можно вынести за знак интеграла согласно теореме о среднем среднее значение $\bar{g}$ на пути $BD - g_m$. Тогда

$$\int_{DB} \bar{g}\, \overline{dh} = g_m \int_{DB} \overline{dh} = g_m H_{DB}.$$

Отсюда

$$H_{DB} = \frac{1}{g_m} \int_{DB} g\, dh. \tag{14.1}$$

Приращение потенциала $\int g\, dh$ по отношению к исходной точке счета высот получило название *геопотенциала*. Определенная таким образом система так называемых *ортометрических высот* однозначно определяет высоту в каждой точке земной поверхности, однако для нахождения таких высот необходимо знать силу тяжести вдоль нивелирной трассы и вдоль вертикальной линии BD. Первое условие легко выполнимо. Второе обычно невыполнимо вследствие отсутствия точных сведений о распределении масс в земной коре. Поэтому, строго говоря, определить ортометрические высоты невозможно. Определим систему высот, в которой среднее значение истинной силы тяжести g_m заменено средним нормальным значением силы тяжести γ_m, которое может быть рассчитано для любой высоты. Тогда получается высота

$$H^{(n)}_{DB} = \frac{1}{\gamma_m} \int_{DB} g\, dh. \tag{14.2}$$

Установленная таким образом система высот определима на всей Земле. Она получила название *системы нормальных высот*.

Нормальные высоты на равнине могут отличаться от ортометрических лишь на несколько сантиметров. Однако в горах это различие может быть больше метра.

Началом счета высот для нивелирной сети СССР принято считать нуль кронштадтского футштока, совпадающий со средним уровнем Балтийского моря приблизительно за 100 лет.

Если отложить нормальные высоты вниз по вертикали от физической поверхности Земли, то образуется некоторая поверхность, очень близкая к поверхности геоида. Она будет отличаться от геоида настолько, насколько высоты нормальные отличаются от ортометрических, т. е. на океанах эти поверхности будут совпадать, в равнинных областях будут отстоять друг от друга на величину не более сантиметра и в горах — несколько больше метра. Такая поверхность получила название *квази-*

геоида. Следует подчеркнуть, что по построению квазигеоид не есть уровенная поверхность. В силу принципиальной трудности получения ортометрических высот в геодезических работах никогда и не получают поверхности геоида. Если при обработке нивелировок пользуются системой нормальных высот, то получают квазигеоид.

В случае использования приближенных значений g_m в формуле (14.1), рассчитанных, например, при помощи редукции Прея, получают некоторую промежуточную между геоидом и квазигеоидом поверхность, как правило, все же более близкую к квазигеоиду. Таким образом, когда мы говорим об определении геоида, следует иметь в виду, что практически нами определяется квазигеоид.

Ортометрические высоты точек, лежащих на одной и той же уровенной поверхности, различны в той мере, в какой различно на них значение g_m, т. е. эти высоты изменяются по широте вследствие изменения нормального и аномального полей и по долготе вследствие изменения аномального поля (формула (14.1)).

Нормальные высоты точек одной и той же уровенной поверхности изменяются соответственно изменению нормального поля γ_m (14.2) при изменении широты и не изменяются по долготе.

Можно определить систему высот из условия, что высота всех точек одной и той же уровенной поверхности будет постоянной. Для этого надо, чтобы коэффициент перед интегралом в формуле (14.2) был постоянным. Обычно полагают $\bar{\gamma} = \gamma_{45°}$.

Тогда

$$H_d = \frac{1}{\gamma_{45°}} \int g \, dh. \qquad (14.3)$$

Так определенная система высот получила название *динамической.* Динамические высоты могут отличаться от нормальных до нескольких метров. Они могут применяться при решении гидротехнических задач, так как в этой системе высот поверхности, имеющие одинаковые высоты, будут поверхностями равновесного состояния воды. В системе же ортометрических или нормальных высот возможно перетекание воды от точки к точке при равных высотных отметках или даже от точки с меньшей отметкой к точке с большей отметкой.

Рассмотрим возможные расхождения между высотами, взятыми в разных системах.

Различие высот ортометрических и нормальных. Возьмем отношение высот, выраженных формулами

(14.1) и (14.2):

$$\frac{H_n}{H_r} = \frac{g_m}{\gamma_m}.$$

Вычитая из обеих частей равенства по единице, получим

$$\frac{H_n - H_r}{H_r} = \frac{g_m - \gamma_m}{\gamma_m} = \frac{\Delta g_m}{\gamma_m}$$

или

$$H_n - H_r = H_r \frac{\Delta g}{\gamma_m}. \tag{14.4}$$

В числителе формулы (14.4) стоит аномалия силы тяжести, а коэффициентом является высота. Таким образом, различие высот δH зависит от абсолютной высоты точки и аномальности района. Для равнины с высотами порядка 300 *м* и средней аномальностью $+ 50$ *мгл*

$$H_n - H_r = 30\,000 \frac{0{,}05}{980} \approx 1{,}5 \text{ см}.$$

Для горной страны при высоте 5000 *м* с резко аномальным полем $\Delta g = + 200$ *мгл*

$$H_n - H_r = 500\,000 \frac{0{,}2}{980} = 100 \text{ см}.$$

Различие высот динамических и нормальных. Аналогично предыдущему из формул (14.2) и (14.3) получается

$$\frac{H_n}{H_d} = \frac{\gamma_{45°}}{\gamma_m} \quad \text{или} \quad \frac{H_d - H_n}{H_n} = \frac{\gamma_m - \gamma_{45°}}{\gamma_{45°}},$$

откуда

$$H_d - H_n = H_n \frac{\gamma_m - \gamma_{45°}}{\gamma_{45°}}. \tag{14.5}$$

Для широт порядка 70° $\gamma_m - \gamma_{45°} \approx 2$ *гала*. Тогда для местности с высотами в 1000 *м*

$$H_d - H_n = \frac{2}{980} H_n = \frac{2 \cdot 1000}{980} \approx 2 \text{ м}.$$

Различие в высотах уровней водных бассейнов. Ранее было показано, что уровень водных бассейнов в системе нормальных высот имеет различные отметки. Рассмотрим различие между нормальными высотами и динамическими, которые для данного водного бассейна постоянны. Возьмем

отношение формул (14.1) и (14.3)

$$\frac{H_d}{H_n} = \frac{\gamma_m}{\gamma_{45^\circ}}$$

или

$$\frac{H_d - H_n}{H_n} = \frac{\gamma_m - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}},$$

откуда

$$H_d = H_n + H_n \frac{\gamma_m - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}}.$$

Рассмотрим теперь динамические отметки северной и южной точек водного бассейна, обозначив их соответственно индексами N и S (при перемещении с востока на запад нормальные высоты уровенной поверхности, как и динамические, остаются постоянными):

$$H_d^N = H_n^N + H_n^N \frac{\gamma_m^N - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}},$$

$$H_d^S = H_n^S + H_n^S \frac{\gamma_m^S - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}}.$$

Так как динамические высоты одной и той же уровенной поверхности постоянны:

$$H_d^N = H_d^S,$$

то, вычитая второе равенство из первого, получаем

$$H_n^N - H_n^S = H_n^S \frac{\gamma_m^S - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} - H_n^N \frac{\gamma_m^N - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}}.$$

В правой части дробь имеет порядок сжатия. Поэтому если приравнять в правой части $H_n^S = H_n^N$, то мы сделаем ошибку не более второго порядка малости, считая за первый порядок сжатие:

$$H_n^N - H_n^S =$$

$$= \frac{\gamma_m^S - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} H_n - \frac{\gamma_m^N - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} H_n + \frac{\gamma_m^S - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} \Delta H - \frac{\gamma_m^N - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} \Delta H,$$

$$\Delta H = -H_n^S + H_n^N.$$

Делая простые преобразования, получим

$$H_n^N - H_n^S = \frac{\gamma_m^S - \gamma_m^N}{\gamma_{45^\circ}} H_n + \frac{\gamma_m^S - \gamma_m^N}{\gamma_{45^\circ}} \Delta H.$$

Пренебрегая вторым членом, получим рабочую формулу для расчета различия высот разных точек одной и той же уровенной поверхности

$$H_n^N - H_n^S = \frac{\gamma_m^S - \gamma_m^N}{\gamma_{45^\circ}} H_n. \qquad (14.6)$$

Значения γ можно взять из таблиц нормального значения силы тяжести. Приводим сравнительные величины расхождения нормальных высот уровня северного и южного концов различных водохранилищ:

Таблица 15

Водохранилище	Протяженность по меридиану, *км*	H_n, *м*	$H_n^N - H_n^S$, *мм*
Рыбинское	110	100	8,4
Севан	55	1900	88
Кара-Куль	30	3900	96
Байкал	450	450	165

§ 3. Нормальные высоты, аномалии высот и геодезические высоты

Пусть B^*, L^*, H — истинные точные координаты точки, расположенной на физической поверхности Земли в геодезической ортогональной координатной системе. Эти точные координаты нам неизвестны. Пусть известны некоторые приближенные координаты B, L, h такие, что квадратами и произведениями их отклонений от истинных можно пренебречь. Эти разности обозначим

$$\left.\begin{aligned} B^* - B &= \Delta B, \\ L^* - L &= \Delta L, \\ H - h &= \zeta. \end{aligned}\right\} \qquad (14.7)$$

Возмущающий потенциал, определяющий отклонение истинной уровенной поверхности от нормальной, в рассматриваемой точке будет

$$T(B^*, L^*, H) = W(B^*, L^*, H) - U(B^*, H),$$

где W — значение истинного потенциала, U — нормальное значение потенциала. U является функцией лишь B и H, так как нормальный потенциал двухосного эллипсоида не зависит от долготы.

Разложим нормальный потенциал в ряд Тэйлора по малым приращениям координат

$$U(B^*, H) = U(B, h) + \frac{\partial U}{\partial h}\zeta + \frac{\partial U}{\partial B}\Delta B + \ldots,$$

а потенциал W представим через потенциал некоторой нулевой уровенной поверхности и приращения потенциала при изменении высоты от нулевой поверхности к рассматриваемой точке

$$W(B^*, L^*, H) = W_0 - \int_{OA} g\, dh_W,$$

где dh_W — элементарное нивелирное превышение. Минус перед приращением потенциала поставлен потому, что мы считаем нулевую уровенную поверхность расположенной ниже нашей точки. Теперь приближенно

$$T(B^*, L^*, H) = W_0 - \int g\, dh_W - U(B, h) - \frac{\partial U}{\partial h}\zeta - \frac{\partial U}{\partial B}\Delta B. \quad (14.8)$$

Заметим, что последний член выражения (14.8) можно считать равным нулю. В самом деле, его можно представить в виде

$$\frac{\partial U(B, h)}{\partial B}\Delta B = \frac{\partial}{\partial B}\left[U(B, 0) + \frac{\partial U}{\partial h}\zeta\right]\Delta B =$$

$$= \frac{\partial U(B, 0)}{\partial B}\Delta B + \frac{\partial^2 U(B, 0)}{\partial B\, \partial h}\Delta B\zeta,$$

где вторым слагаемым можно пренебречь, так как $\Delta B\zeta \approx 0$, а первое равно нулю, так как на уровенной поверхности $h = 0$, потенциал $U = \text{const}$. Кроме того, приращение потенциала $\int g\, dh$ определим как приращение потенциала в нормальном поле

$$-\int_{AB} g\, dh_W = U(B, h) - U(B, 0) = -\int_{A_1B_1} \gamma\, dh, \quad (14.9)$$

где $U(B, h)$ и $U(B, 0)$ — значения нормального потенциала в точках A_1 и B_1 (рис. 103).

Уравнение позволяет определить нормальную высоту h и означает, что при вычислении ее мы полагаем гравитационное поле нормальным. В этом случае высота квазигеоида $\zeta = H - h$ имеет смысл аномалии высоты. Откладывая высоты h от физической поверхности Земли, получим квазигеоид (рис. 103). Теперь выражение (14.8) напишем в виде

$$T(B^*, L^*, H) = W_0 - U_0 - \frac{\partial U}{\partial h}\zeta.$$

Но $-\frac{\partial U}{\partial h}=\gamma$ — нормальное значение ускорения силы тяжести. Поэтому

$$T(B^*,\ L^*,\ H)=W_0-U_0+\gamma(B,\ h)\zeta. \qquad (14.10)$$

Здесь разность W_0-U_0 можно положить равной нулю.

В уравнении (14.10) ζ — высота квазигеоида, она определяет превышение поверхности потенциала, проходящей

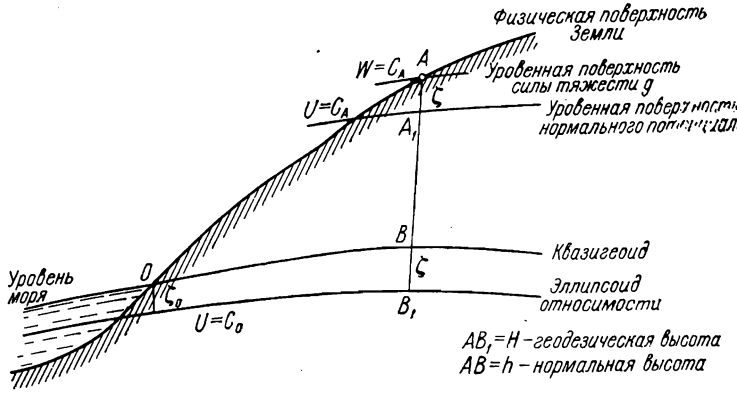


Рис. 103.

через точку A физической поверхности Земли над соответствующей уровенной поверхностью нормального потенциала, проходящей через A_1, и равна B_1B.

Формула (14.10) является аналогом формулы Брунса, только написана для физической поверхности Земли. В общем виде она записывается так:

$$\zeta=\frac{T}{\gamma}+\frac{U_0-W_0}{\gamma}. \qquad (14.11)$$

Она устанавливает зависимость между аномалией высоты ζ и возмущающим потенциалом в одной и той же точке земной поверхности.

Нормальную высоту можно определить с учетом равенства (14.9)

$$\int_{OA} g\,dh_W=\int_{B_1A_1}\gamma\,dh=\gamma_m h$$

или

$$h=\frac{1}{\gamma_m}\int_{OA} g\,dh_W. \qquad (14.12)$$

Пользуясь формулой (14.11) и формулой нормальной высоты, можно получить значение высоты физической поверхности Земли над эллипсоидом относимости

$$H = \frac{1}{\gamma_m} \int_{AB} g\, dh + \frac{T}{\gamma} + \frac{U_0 - W_0}{\gamma}.$$

Эту величину называют *геодезической высотой.*

Система геодезических высот позволяет определить физическую поверхность Земли, минуя какие-либо вспомогательные поверхности.

§ 4. Краевая задача Молоденского и интегральное уравнение

Нормальный потенциал U определим так, чтобы соблюдалось равенство $U_0 = W_0$. Тогда уравнение (14.11) приводится к виду

$$\zeta = \frac{T}{\gamma}. \qquad (14.11')$$

Таким образом, как это имело место и при решении проблемы Стокса, нахождение высот квазигеоида ζ сводится к определению возмущающего потенциала T, подчиненного на искомой (теперь уже физической) поверхности Земли, а не геоиде, некоторым граничным условиям.

Этот потенциал, очевидно, удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2 T = 0$ (как разность потенциалов) и является регулярным на бесконечности

$$\lim_{\rho \to \infty} \rho T = \text{const},$$

Найдем граничное условие, которому удовлетворяет T на физической поверхности Земли S.

Из определения возмущающего потенциала следует

$$\frac{\partial T}{\partial \nu} = \frac{\partial W}{\partial \nu} - \frac{\partial U}{\partial \nu}. \qquad (14.13)$$

Здесь ν — направление координатной линии, нормальной к уровенному эллипсоиду. Поэтому $\frac{\partial U}{\partial \nu} = -\gamma$ и с точностью до квадрата уклонения отвесной линии

$$\frac{\partial W}{\partial \nu} = -g.$$

Имея это в виду, запишем (14.13) в такой форме:

$$-\frac{\partial T}{\partial \nu} = g - \gamma,$$

где все отнесено к физической поверхности Земли. Значит,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \nu} - \gamma\right)_{h+\zeta} = -g. \tag{14.14}$$

Переходя от физической поверхности Земли к поверхности S, отстоящей от физической поверхности на расстояние аномалии высот ζ, с точностью до квадрата ζ получим

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \nu}\right)_{h+\zeta} = \left(\frac{\partial T}{\partial \nu}\right)_h, \quad \gamma_{h+\zeta} = \gamma_h + \zeta \frac{\partial \gamma}{\partial \nu}.$$

Введем это выражение в (14.14), т. е. напишем граничное условие — уравнение (14.14) — для поверхности реальной Земли

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \nu} - \gamma - \zeta \frac{\partial \gamma}{\partial \nu}\right)_h = -g$$

или

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \nu} - \zeta \frac{\partial \gamma}{\partial \nu}\right)_h = \gamma - g \tag{14.15}$$

или

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \nu} - \frac{T}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial \nu}\right)_h = -(g - \gamma). \tag{14.15'}$$

Это и есть краевое условие задачи.

Теперь задача сведена к измененной третьей краевой задаче теории потенциала, ее называют *краевой задачей Молоденского.* Требуется отыскать функцию, непрерывную со своими вторыми производными и регулярную на бесконечности, удовлетворяющую уравнению Лапласа и граничному условию (14.15′) на границе — поверхности S. Земля в этом случае представляется поверхностью, образованной нормальными высотами, отложенными от отсчетного эллипсоида.

Наметим путь решения поставленной задачи.

Представим возмущающий потенциал T через потенциал простого слоя плотности σ:

$$T = \iint_S \frac{\sigma}{r}\, dS. \tag{14.16}$$

Внешняя производная T по направлению координатной линии ν будет

$$\frac{\partial T}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial \nu}\iint_S \frac{\sigma}{r}\, dS.$$

Заметим, что производная простого слоя на поверхности S терпит разрыв и скачком изменяется на $2\pi\sigma\cos\alpha$, где α — угол

между направлением координатной линии ν и нормалью к поверхности S. Поэтому нормальную производную следует написать в виде

$$\frac{\partial T}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial \nu}\iint_S \frac{\sigma}{r}\, dS - 2\pi\sigma\cos\alpha. \tag{14.17}$$

Функция T является гармонической во внешнем пространстве и регулярной на бесконечности. Остается удовлетворить граничному условию (14.15). Преобразуем (14.15), введя в него значения T и $\frac{\partial T}{\partial \nu}$ из (14.16) и (14.17):

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\iint_S \frac{\sigma}{r}\, dS - 2\pi\sigma\cos\alpha - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial \nu}\iint_S \frac{\sigma}{r}\, dS = -(g-\gamma). \tag{14.18}$$

В случае сферической отсчетной поверхности

$$\gamma = \frac{fM}{R^2}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} = \frac{\partial \gamma}{\partial R} = -\frac{2fM}{R^3}, \quad \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial \nu} = -\frac{2}{R}.$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{R_0 - \rho\cos\psi}{r^3} = \frac{1}{r^3}\left(R_0 - \rho\frac{\rho^2 + R_0^2 - r^2}{2\rho R}\right) =$$

$$= \frac{\rho^2 - R^2}{2Rr^3} - \frac{1}{2Rr}. \tag{14.19}$$

где значение $\cos\psi$ подставлено из очевидного равенства

$$r^2 = \rho^2 + R^2 - 2\rho R\cos\psi.$$

Вводя (14.19) в (14.18), получим линейное интегральное уравнение относительно функции σ

$$\iint_S \frac{\rho^2 - R^2}{2Rr^3}\sigma\, dS - \iint_S \frac{\sigma}{2Rr}\, dS - 2\pi\sigma\cos\alpha + \frac{2}{R}\iint_S \frac{\sigma}{r}\, dS = -(g-\gamma)$$

или, приведя подобные члены и обозначая $g-\gamma = \Delta g$,

$$2\pi\sigma\cos\alpha = \Delta g + \frac{3}{2R}\iint_S \frac{\sigma}{r}\, dS + \iint_S \frac{\rho^2 - R^2}{2Rr^3}\sigma\, dS. \tag{14.20}$$

Это уравнение Молоденского, оно позволяет определить σ. Тогда с помощью уравнения (14.16) может быть определен возмущающий потенциал T и, следовательно, ζ.

Если из (14.20) исключить вспомогательную функцию σ, то возмущающий потенциал выразится непосредственно через аномалию.

§ 5. Решение основного уравнения для нахождения возмущающего потенциала

Рассмотрим решение уравнения (14.20) путем разложения решения по степеням малого параметра. Перейдем при решении от поверхности S, являющейся физической поверхностью Земли, к некоторой вспомогательной поверхности $\bar{S}$. Преобразование поверхности S в $\bar{S}$ осуществим таким образом, чтобы сохранить в полярной системе координат углы радиусов-векторов всех точек, но изменим сами радиусы-векторы:

$$\bar{\rho}=R+k(\rho-R)=R+kH. \tag{14.21}$$

Здесь $\bar{\rho}$ — радиус-вектор преобразованной поверхности $\bar{S}$, k — постоянный коэффициент. При $k=1$ $\bar{S}=S$, т. е. поверхности исходная и преобразованная совпадают. При $k=0$ $\bar{S}=\sum$ — преобразованная поверхность совпадает с поверхностью сферы.

Введем новую функцию $\chi=\frac{\rho^2}{R^2}\sigma\sec\alpha$, представляющую собой преобразованную к сфере поверхностную плотность. Теперь в уравнении (14.20) заменим поверхностную плотность σ через χ с помощью соотношения

$$\sigma=\frac{R^2}{\rho^2}\chi\cos\alpha \tag{14.22}$$

и перейдем к интегрированию по телесному углу

$$dS=\rho^2\sec\alpha\,d\omega;$$

после этих преобразований уравнение (14.20) примет вид

$$2\pi\frac{R^2}{\rho^2}\chi\cos^2\alpha=\Delta g+\frac{3}{2R}\int_\omega\frac{R^2}{r}\chi\,d\omega+\int_\omega\frac{\rho^2-R^2}{2Rr^3}R^2\chi\,d\omega.$$

Упростим задачу, пренебрегая величинами порядка H/R, что поведет к ошибкам менее $1{,}5\cdot10^{-3}$. Тогда можем считать

$$\frac{\rho}{R}=1 \quad\text{и}\quad \frac{\rho^2-R^2}{2R}=(H-H_0),$$

где H и H_0 — нормальные высоты в исходной и текущей точках. Имея это в виду, получим

$$2\pi\chi\cos^2\alpha=\Delta g+\frac{3R}{2}\int_\omega\frac{\chi}{r}\,d\omega+R^2\int_\omega\frac{H-H_0}{r^3}\chi\,d\omega. \tag{14.23}$$

Это уравнение позволяет определить функцию χ, с помощью которой можно получить искомый возмущающий потенциал T,

пользуясь интегральной зависимостью

$$T = R^2 \int_{\omega} \frac{\chi}{r}\, d\omega, \tag{14.24}$$

полученной из (14.16) введением функции χ и переходом к интегрированию по телесному углу.

Однако переход к новой поверхности $\bar{S}$ еще не осуществлен. Чтобы получить уравнение (14.23) для новой известной поверхности $\bar{S}$, надо все входящие в него функции написать для этой поверхности. Обозначим функции, отнесенные к поверхности $\bar{S}$, надстрочной чертой. Высоты же преобразуются с помощью параметра k. По аналогии с (14.23) и (14.24) получим

$$2\pi\bar{\chi}\cos^2\bar{\alpha} = \overline{\Delta g} + \frac{3R}{2}\int_{\omega}\frac{\bar{\chi}}{\bar{r}}\,d\omega + R^2\int_{\omega}\bar{\chi}\frac{k(H-H_0)}{\bar{r}^3}\,d\omega, \tag{14.23'}$$

$$\bar{T} = R^2\int_{\omega}\frac{\bar{\chi}}{\bar{r}}\,d\omega. \tag{14.24'}$$

Здесь $\bar{r}$ — расстояние между проекцией исходной точки с радиусом-вектором ρ_0 и высотой H_0 на поверхность $\bar{S}$ и проекцией текущей точки с радиусом-вектором ρ и высотой $\bar{H}$ на ту же поверхность (рис. 104), $\bar{\alpha}$ — угол между радиусом-вектором ρ и нормалью к поверхности $\bar{S}$.

Величины $\bar{T}, \bar{\chi}$, $\bar{r}, \bar{\alpha}$ зависят от малого параметра k и могут быть представлены в виде разложения по этому малому параметру.

Величина $\bar{r}_0$ не зависит от k; r_0 — расстояние между проекциями по радиусу-вектору исходной и текущей точек на сферу.

Для $\bar{S}$, очевидно, будем иметь

$$\bar{r}^2 = r_0^2\left[1 + \frac{(H-H_0)^2}{r_0^2}\,k^2\right].$$

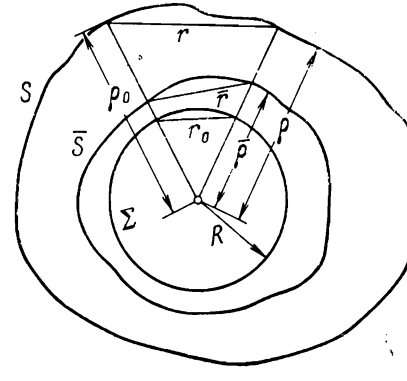


Рис. 104.

Наклон поверхности S при преобразовании изменится в том же отношении k, т. е.

$$\operatorname{tg}\bar{\alpha} = k\operatorname{tg}\alpha.$$

Поэтому при $\alpha < 45°$ получим сходящийся ряд любых значений k от 0 до 1

$$\cos^2\bar{\alpha} = (1 + k^2 \operatorname{tg}^2\alpha)^{-1} = 1 - k^2 \operatorname{tg}^2\alpha + k^4 \operatorname{tg}^4\alpha - \ldots$$

Величины $\bar{T}$ и $\bar{\chi}$ представим в виде рядов

$$\bar{T} = \sum_{n=0}^{\infty} k^n T_n, \quad \bar{\chi} = \sum_{n=0}^{\infty} k^n \chi_n.$$

Эти ряды абсолютно сходятся при $k = 1$, так как существует решение уравнения (14.20). Теорема существования доказана М. С. Молоденским. Тем более эти ряды сходятся при любом $k < 1$. Теперь полученные выражения $\bar{T}$, $\bar{\chi}$, $\cos^2\bar{\alpha}$, $\bar{r}$ подставим в уравнение (14.23′). Тогда уравнение будет записано через ряды по степеням k,

$$2\pi(\chi_0 + k\chi_1 + k^2\chi_2 + \ldots)(1 - k^2 \operatorname{tg}^2\alpha + k^4 \operatorname{tg}^4\alpha - \ldots) =$$
$$= \Delta g + \frac{3}{2} R \int_{\omega} \frac{1}{r_0}(\chi_0 + k\chi_1 + k^2\chi_2 + \ldots)\left(1 - \frac{1}{2}k^2\varkappa^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{8}k^4\varkappa^4 + \ldots\right) d\omega + R^2 \int_{\omega} \frac{1}{r_0^2}(\chi_0 + k\chi_1 +$$
$$+ k^2\chi_2 + \ldots)\varkappa k\left(1 - \frac{3}{2}k^2\varkappa^2 + \frac{15}{8}k^4\varkappa^4 \ldots\right) d\omega, \quad (14.25)$$

где $\varkappa = \frac{H - H_0}{r_0}$. Это уравнение должно удовлетворяться при всех значениях k

$$0 \leqslant k \leqslant 1.$$

Поэтому множители при k^n в левой и правой частях уравнения (14.25) должны быть равны между собой. Получим систему бесконечного числа интегральных уравнений, из которых можно последовательно определить χ_0, χ_1, χ_2, ... и т. д. Сумма $\sum_0^n \chi_n$ будет n-м приближением к искомой функции.

Приравнивая коэффициенты при k^n, получаем систему интегральных уравнений

$$2\pi\chi_n - \frac{3}{2} R \int_{\omega} \frac{\chi_n}{r_0} d\omega = G_n, \quad (14.26)$$

где

$$\left.\begin{aligned} G_0 &= g - \gamma = \Delta g, \\ G_1 &= R^2 \int_\omega \frac{H - H_0}{r_0^3} \chi_0 \, d\omega, \\ G_2 &= R^2 \int_\omega \frac{H - H_0}{r_0^3} \chi_1 \, d\omega - \frac{3R}{4} \int_\omega \frac{(H - H_0)^2}{r_0^3} \chi_0 \, d\omega + 2\pi \chi_0 \operatorname{tg}^2 \alpha, \\ G_3 &= R^2 \int_\omega \frac{H - H_0}{r_0^3} \chi_2 \, d\omega - \frac{3R}{4} \int_\omega \frac{(H - H_0)^2}{r_0^3} \chi_1 \, d\omega - \\ &\quad - \frac{3}{2} R^2 \int_\omega \frac{(H - H_0)^3}{r_0^5} \chi_0 \, d\omega + 2\pi \chi_1 \operatorname{tg}^2 \alpha. \end{aligned}\right\} \quad (14.27)$$

Решение уравнения (14.26) можно написать в виде

$$\int_\omega \frac{\chi_n}{r_0} d\omega = \frac{1}{4\pi R} \int_\omega G_n \left[S(\cos\psi) - \frac{1}{2} \right] d\omega \quad (14.28)$$

и

$$\chi_n = \frac{G_n}{2\pi} + \frac{3}{(4\pi)^2} \int_\omega G_n \left[S(\cos\psi) - \frac{1}{2} \right] d\omega. \quad (14.29)$$

Справедливость этого легко проверить. В самом деле, если подставить в (14.26) значение χ_n из (14.29) и $\int_\omega \frac{\chi_n}{r_0} d\omega$ из (14.28), то получим тождество.

Теперь на основании (14.24) можно определить возмущающий потенциал

$$\overline{T} = R^2 \int_\omega \frac{1}{r_0} (\chi_0 + k\chi_1 + k^2\chi_2 + \ldots) \times$$

$$\times \left(1 - \frac{1}{2} k^2 \varkappa^2 + \frac{3}{8} k^4 \varkappa^4 + \ldots \right) d\omega =$$

$$= R^2 \int_\omega \frac{\chi_0 \, d\omega}{r_0} + kR^2 \int_\omega \frac{\chi_1}{r_0} d\omega +$$

$$+ k^2 R^2 \left[\int_\omega \frac{\chi_2}{r_0} d\omega - \frac{1}{2} \int_\omega \frac{(H - H_0)^2}{r_0^3} \chi_0 \, d\omega \right] + \ldots = \sum_0^\infty k^n T_n.$$

Имея в виду решения (14.28), получим значение для последовательных приближений возмущающего потенциала

$$\left.\begin{aligned}
T_0 &= \frac{R}{4\pi}\int_\omega G_0\left[S(\cos\psi)-\frac{1}{2}\right]d\omega,\\
T_1 &= \frac{R}{4\pi}\int_\omega G_1\left[S(\cos\psi)-\frac{1}{2}\right]d\omega,\\
T_2 &= \frac{R}{4\pi}\int_\omega G_2\left[S(\cos\psi)-\frac{1}{2}\right]d\omega-\frac{R^2}{2}\int_\omega\frac{(H-H_0)^2}{r_0^3}\chi_0 d\omega,\\
T_3 &= \frac{R}{4\pi}\int_\omega G_3\left[S(\cos\psi)-\frac{1}{2}\right]d\omega-\frac{R^2}{2}\int_\omega\frac{(H-H_0)^2}{r_0^3}\chi_1 d\omega,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}\qquad(14.30)$$

Первое уравнение соответствует $k=0$, $\operatorname{tg}\bar{\alpha}=0$ и $\bar{\rho}=R$, т. е. дает решение для сферы. В этом случае аномалии просто перенесены на сферу по радиусу без каких-либо поправок. Это решение соответствует стоксову решению. Все последующие уравнения являются все более уточняющимися решениями и приближают нас к нахождению возмущающего потенциала T, а значит, и высот квазигеоида ζ для физической поверхности Земли. Рельеф учитывается со второго приближения. С третьего приближения (T_2) в решение уже явно входят наклоны принятой поверхности соответствующего приближения. Входящие в правые части уравнений подынтегральные выражения убывают, как $1/r^3$, или быстрее. Поэтому значения этих интегралов определяются ближайшими окрестностями исследуемого пункта, и интегрирование по всей Земле излишне. Формулы (14.30) определяют возмущающий потенциал на физической поверхности Земли. В них H является заданной функцией координат B и L. Поэтому из них можно получить только производные по направлениям, касательным к поверхности S. Эти производные позволяют найти уклонение отвесной линии в меридиане

$$\frac{\partial T(B,L)}{\rho\,\partial B}=\frac{\partial T(B,L,H)}{\rho\,\partial B}+\frac{\partial T(B,L,H)}{\partial H}\frac{\partial H}{\rho\,\partial B},$$

но $\frac{\partial T(B,L,H)}{\partial H}=g-\gamma+\frac{2T}{\rho}$ в соответствии с граничным условием (12.3). Поэтому

$$\gamma\xi=-\frac{\partial T(B,L,H)}{\rho\,\partial B}=-\frac{\partial T(B,L)}{\rho\,\partial B}+\left(g-\gamma+\frac{2T}{\rho}\right)\frac{\partial H}{\rho\,\partial B}.\qquad(14.31)$$

Вводя в (14.31) последовательно различные приближения возмущающего потенциала T из (14.30) и полагая $\rho=R$, получим

последовательные приближения для уклонения отвесной линии. Так, для нулевого приближения будем иметь

$$\gamma\xi_0 = \left(\frac{\partial T}{\rho\,\partial B}\right)_0 = \frac{1}{4\pi}\int_\omega G_0 \frac{\partial S}{\partial \psi}\frac{d\psi}{dB}\,d\omega,$$

но согласно (13.13)

$$\frac{d\psi}{dB} = -\cos A,$$

т. е.

$$\gamma\xi_0 = \left(\frac{\partial T}{\rho\,\partial B}\right)_0 = -\frac{1}{4\pi}\int_\omega G_0 \frac{\partial S}{\partial \psi}\cos A\,d\omega. \qquad (14.32)$$

Первые приближения уже учитывают изменения высот:

$$\gamma\xi_1 = \left(\frac{\partial T}{\rho\,\partial B}\right)_1 = -\frac{1}{4\pi}\int_\omega G_1 \frac{\partial S}{\partial \psi}\cos A\,d\omega + \left(g - \gamma + \frac{2T_0}{\rho}\right)\frac{\partial H_0}{\rho\,\partial B}, \qquad (14.33)$$

второе приближение получится в результате дифференцирования T_2:

$$\left.\begin{aligned}
\gamma\xi_2 = \left(\frac{\partial T}{\rho\,\partial B}\right)_2 &= -\frac{1}{4\pi}\int_\omega G_2 \frac{\partial S}{\partial \psi}\cos A\,d\omega - \\
&- \frac{3R^2}{2}\int_\omega \frac{(H-H_0)^2}{r_0^4}\cos\frac{\psi}{2}\,\chi_0\cos A\,d\omega + \frac{\partial H_0}{\rho\,\partial B}\left(G_1 + \frac{2T_1}{R}\right), \\
\gamma\xi_3 = \left(\frac{\partial T}{\rho\,\partial B}\right)_3 &= -\frac{1}{4\pi}\int_\omega G_3 \frac{\partial S}{\partial \psi}\cos A\,d\omega + \\
&+ \frac{3R^2}{2}\int_\omega \frac{(H-H_0)^2}{r_0^4}\,\chi_1\cos\frac{\psi}{2}\cos A\,d\omega - \\
&- \left[R^2\int_\omega \frac{H-H_0}{r_0^3}\,\chi_1 d\omega + \frac{2T_2}{R}\right]\frac{\partial H_0}{\rho\,\partial B}.
\end{aligned}\right\} \qquad (14.33')$$

Аналогичные формулы получаются и для уклонений отвеса по долготе.

Проверка на моделях формул (14.33), (14.33′) и сравнение результатов, полученных по ним, с результатами, полученными по формулам Венинг-Мейнеса для уклонения отвеса, показали, что последние характеризуют уклонения отвеса в большей степени для физической поверхности Земли, чем для геоида. Уклонения отвесных линий, полученные по формулам Венинг-

Мейнеса, соответствующие нулевому приближению (14.32), могут сильно отличаться от действительного значения уклонения отвесных линий.

Поправочные члены, учитываемые в первом и втором приближениях, существенно улучшают результаты. Особенно это важно при исследованиях в горных районах.

§ 6. Другие методы решения краевой задачи Молоденского

При определении внешнего гравитационного поля и фигуры Земли большую трудность представляет вычисление возмущающего потенциала T по смешанным аномалиям силы тяжести, определенным на гипсометрической поверхности Земли S. Эта так называемая *краевая задача Молоденского* сводится к решению внешней краевой задачи теории потенциала с краевым условием на поверхности S в виде

$$\frac{2T}{\rho} + \frac{\partial T}{\partial \rho}\Big|_S = -(g - \gamma) + \frac{2(W_0 - U_0)}{\rho_0}, \qquad (14.34)$$

где ρ — радиус-вектор внешней точки, ρ_0 — значение при переходе на S.

Для решения этой задачи М. С. Молоденский составил два интегральных уравнения: уравнение для возмущающего потенциала T и уравнение для вспомогательной плотности σ простого слоя, потенциал которого определяет T. Решение первого интегрального уравнения оказалось весьма сложным. Оно не разработано до сих пор. Второе уравнение и его решение рассмотрены в §§ 4 и 5 настоящей главы.

При составлении интегрального уравнения для плотности простого слоя возмущающий потенциал был взят в виде

$$T = \iint_S \frac{\sigma}{r'} dS,$$

где r' — расстояние от элемента dS поверхности S с плотностью σ до внешней точки. Если точка, для которой вычисляется возмущающий потенциал, находится на поверхности S, то r' переходит в r. Такое представление возмущающего потенциала удобно, однако не единственно. В зависимости от представления возмущающего потенциала будет получаться и вид интегрального уравнения. Далее мы приведем один из методов составления интегрального уравнения, позволяющего определить возмущающий потенциал, предложенный В. В. Броваром.

Введем функцию

$$V(\rho, B, L) = \frac{1}{4\pi}\int\int_S \frac{\mu'}{r'}\,dS + \frac{\rho}{2\pi}\int\int_S \mu'\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{r'}\right)dS. \quad (14.35)$$

Здесь первое слагаемое правой части — потенциал простого слоя с плотностью $\mu'/4\pi$. Второе слагаемое — производная потенциала простого слоя с плотностью $\mu'/2\pi$, умноженная на ρ. Оба слоя распределены на краевой поверхности S, обе функции гармоничны вне S и регулярны на бесконечности. На S второе слагаемое терпит разрыв, равный $\mu'\rho_0\cos(n, \rho_0)$. Преобразуем функцию V, для чего выразим $1/r'$ и $\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{r'}\right)$ через ρ

$$r'^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\psi; \quad (14.36)$$

тогда получим

$$\frac{1}{r'} - 2\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{r'}\right) = \frac{\rho'^2 - \rho^2}{r'^3}. \quad (14.37)$$

Теперь можно записать

$$V(\rho, B, L) = \frac{1}{4\pi}\int\int_S \mu'\frac{\rho'^2 - \rho^2}{r'^3}\,dS. \quad (14.38)$$

При $\rho \to \rho_0$ получим интегральное уравнение

$$V(\rho_0, B, L) = -\rho_0\cos(n, \rho_0)\,\mu'(B, L) + \frac{1}{4\pi}\int\int_S \mu'\frac{\rho'^2 - \rho^2}{r'^2}\,dS. \quad (14.39)$$

Уравнение (14.39) и формула (14.38) решают задачу Дирихле. Решим теперь задачу Молоденского, т. е. найдем функцию T, гармоническую во всем внешнем пространстве и принимающую на поверхности S значения, определяемые условием (14.34). Положим

$$V(\rho, B, L) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2 T) = 2T + \rho\frac{\partial T}{\partial\rho}. \quad (14.40)$$

Эта функция гармонична одновременно с T и на поверхности S согласно (14.34) принимает значение

$$V(\rho_0, B, L) = -\rho_0 G_0(B, L), \quad (14.41)$$

где

$$G_0(B, L) = (g - \gamma) - \frac{2(W_0 - U_0)}{\rho_0}.$$

Равенство (14.41) подставим в (14.39) и получим

$$-\rho_0 G_0(B, L) = -\rho_0 \cos(n, \rho_0)\,\mu'(B, L) + \frac{1}{4\pi}\iint_S \mu' \frac{\rho'^2 - \rho_0^2}{r^3}\,dS$$

или

$$\cos(n, \rho_0)\,\mu'(B, L) = G_0(B, L) + \frac{1}{4\pi\rho_0}\iint_S \mu' \frac{\rho'^2 - \rho_0}{r^3}\,dS. \quad (14.42)$$

Подставляя (14.40) в (14.38), получим

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2 T) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \mu' \frac{\rho'^2 - \rho^2}{r'^3}\,dS$$

или, умножая на $\rho\,d\rho$ и интегрируя,

$$T(\rho, B, L) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \mu' \left[\frac{1}{\rho^2}\int \frac{\rho'^2 - \rho^2}{r'^3}\,\rho\,d\rho\right] dS. \quad (14.43)$$

При интегрировании (14.43) по ρ появляется негармонический член

$$\frac{\ln 2\rho}{\rho^2}\iint_S \mu'\rho' \cos\psi\,dS.$$

Так как T должна быть гармонической, необходимо соблюдение условия

$$\iint_S \mu'\rho' \cos\psi\,dS = 0. \quad (14.44)$$

Тогда уравнение (14.43) может быть преобразовано к виду

$$T(\rho, B, L) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \mu' \left[S(\rho, \psi, \rho') - \frac{1}{\rho}\right] dS + \frac{c}{\rho^2}, \quad (14.45)$$

где $S(\rho, \psi, \rho')$ определяется (12.31) после замены R на ρ', c — сферическая функция первого порядка. Интегральное уравнение (14.42), условие (14.44) и формула (14.45) решают поставленную задачу в общем виде. Применив метод Молоденского (§ 5), легко получить формулы для вычисления возмущающего потенциала T на поверхности S. Введем новую плотность μ, определяемую в любой точке поверхности S из равенства

$$\mu' = \mu \cos(n', \rho')\frac{R^2}{\rho'^2}.$$

Тогда $\mu' dS = \mu\,d\sigma$, где $d\sigma$ — элемент сферы радиуса R, являющийся проекцией элемента dS. Теперь (14.42), (14.44), (14.45)

примут вид

$$\frac{R^2}{\rho_0^2}\cos^2(n, \rho_0)\,\mu(B, L) = G_0(B, L) + \frac{1}{4\pi\rho_0}\int\int \mu \frac{\rho'^2 - \rho_0^2}{r^3}\,d\sigma, \quad (14.46)$$

$$\int\int \mu\rho' \cos\psi\, d\sigma = 0, \quad (14.47)$$

$$T_0(\rho_0, B, L) = \frac{1}{4\pi}\int\int \mu\left[S(\rho_0, \psi, \rho') - \frac{1}{\rho_0}\right]d\sigma + \frac{c}{\rho^2}. \quad (14.48)$$

Упростим ядра интегралов, входящих в (14.46) и (14.48), представив $1/r$ в виде ряда и пренебрегая величинами порядка H'/R:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{H' - H}{r_0}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{H' - H}{r_0}\right)^4 - \ldots\right]. \quad (14.49)$$

Тогда

$$\frac{\rho'^2 - \rho_0^2}{4\pi\rho_0 r^3} = \frac{H' - H}{2\pi r_0^3}\left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{H' - H}{r_0}\right)^2 + \frac{15}{8}\left(\frac{H' - H}{r_0}\right)^4 - \ldots\right]. \quad (14.50)$$

Для упрощения функции $S(\rho_0, \psi, \rho')$ ее можно разложить в ряд по степеням $H' - H$

$$S(\rho_0, \psi, \rho') = \frac{S(\psi) - 1}{R} - \frac{(H' - H)^2}{r_0^3} + \frac{3}{4}\frac{(H' - H)^4}{r_0^5} - \ldots \quad (14.51)$$

Используя (14.49), ряд (14.51) можно представить в виде

$$S(\rho_0, \psi, \rho') = \frac{1}{R}[S(\psi) - 1] + \frac{2}{r} - \frac{2}{r_0}. \quad (14.52)$$

При малых ψ, т. е. в случае плоской отсчетной поверхности, $\frac{S(\psi) - 1}{R} = \frac{2}{r}$ и главное значение имеет член $2/r$; для дальних зон разность $\frac{2}{r} - \frac{2}{r_0}$ становится пренебрежимо малой, а главную роль начинает играть функция Стокса.

Введем новую краевую поверхность $\bar{S}$, радиус-вектор которой в текущей точке будет $\bar{\rho}' = R + kH'$, где $0 \leqslant k \leqslant 1$. Для поверхности $\bar{S}$ равенства (14.46), (14.48) сохраняются, однако в них изменяется μ на $\bar{\mu}$; T на $\bar{T}$; H' на kH'; H на kH; $\cos^2(n, \rho_0)$ на $\cos^2(\bar{n}, \rho_0) = 1 - k^2\operatorname{tg}^2(n, \rho_0) + k^4\operatorname{tg}^4(n, \rho_0) - \ldots$ Величины $\bar{\mu}$ и $\bar{T}$ можно представить в виде рядов, сходящихся при $k = 1$:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\mu} &= \sum_{n=0}^{\infty} k^n \mu_n, \\ \bar{T} &= \sum_{n=0}^{\infty} k^n T_n. \end{aligned}\right\} \quad (14.53)$$

Используя ряды (14.50) и (14.51) при переходе на поверхность $\bar{S}$, получим (14.46) и (14.48) в виде

$$[1 - k^2 \operatorname{tg}^2(n, \rho_0) + k^4 \operatorname{tg}^4(n, \rho_0) - \ldots] \sum_{n=0}^{\infty} k^n \mu_n = \\ = G_0 + \frac{1}{2\pi} \iint \left(\sum_{n=0}^{\infty} k^{n+1} \mu_n \right) \frac{H' - H}{r_0^3} \left[1 - \frac{3}{2} k^2 \left(\frac{H' - H}{r_0} \right)^2 + \ldots \right] ds, \tag{14.54}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n T_n = \frac{1}{4\pi} \iint \left(\sum_{n=0}^{\infty} k^n \mu_n \right) \left[\frac{S(\psi) - 1}{R} - k^2 \frac{(H' - H)^2}{r_0^3} + \right. \\ \left. + \frac{3}{4} k^4 \frac{(H' - H)^4}{r_0^5} - \ldots \right] ds + \frac{c}{R^2}. \tag{14.55}$$

Эти равенства должны соблюдаться при любом k, и поэтому множители при k^n слева и справа должны быть равны. Таким образом, получим приближения для μ и T в виде

$$\left.\begin{aligned} &\mu_0 = G_0, \\ &\mu_1 = \frac{1}{2\pi} \iint \mu_0 \frac{H' - H}{r_0^3} ds, \\ &\mu_2 = \frac{1}{2\pi} \iint \mu_1 \frac{H' - H}{r_0^3} ds + \mu_0 \operatorname{tg}^2(n, \rho_0), \\ &\mu_3 = \frac{1}{2\pi} \iint \mu_2 \frac{H' - H}{r_0^3} ds - \\ &\qquad - \frac{3}{4\pi} \iint \mu_0 \frac{(H' - H)^3}{r_0^5} ds + \mu_1 \operatorname{tg}^2(n, \rho_0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{14.56}$$

и

$$\left.\begin{aligned} &T_0 = \frac{1}{4\pi R} \iint \mu_0 [S(\psi) - 1] ds + \frac{c}{R^2}, \\ &T_1 = \frac{1}{4\pi R} \iint \mu_1 [S(\psi) - 1] ds, \\ &T_2 = \frac{1}{4\pi R} \iint \mu_2 [S(\psi) - 1] d\sigma - \frac{1}{4\pi} \iint \mu_0 \frac{(H' - H)^2}{r_0^3} ds, \\ &T_3 = \frac{1}{4\pi R} \iint \mu_3 [S(\psi) - 1] d\sigma - \frac{1}{4\pi} \iint \mu_1 \frac{(H' - H)^2}{r_0^3} ds, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{14.57}$$

Формулы (14.56) и (14.57) сходны с аналогичными формулами (14.26), (14.27) и (14.30) М. С. Молоденского. Для плоской отсчетной поверхности уравнения (14.26) примут вид $2\pi\chi_n = G_n$, и оба решения совпадут.

§ 7. Понятие об астрономо-геодезическом нивелировании

Для изучения фигуры реальной Земли, а также для редуцирования измеренных на физической поверхности Земли углов и линий на референц-эллипсоид необходимо знать геодезические высоты H, складывающиеся из нормальных высот h и аномалий высот или высот квазигеоида над эллипсоидом ζ. Нормальные высоты определяются методом геометрического нивелирования. Для определения высот квазигеоида и уклонений отвесных линий имеются два способа: *астрономическое* или *астрономо-геодезическое нивелирование* и *астрономо-гравиметрическое нивелирование*. Названия этих видов нивелирования указывают на комплекс измерений, необходимый для их выполнения. Формула астрономического нивелирования уже выводилась в части первой (6.49). Она имеет вид

$$dH = dh_W - (\xi \cos A + \eta \sin A)\, dl_H.$$

В этом виде она позволяет определить превышения (или высоты, если задана высота хотя бы в одной точке) физической поверхности Земли над геодезическим эллипсоидом относимости. Второй член формулы и есть в первом приближении изменение превышений квазигеоида над референц-эллипсоидом. Формула астрономического нивелирования может быть получена из основных формул теории фигуры Земли.

Воспользуемся формулой Брунса (12.1)

$$T = W - U = \gamma\zeta,$$

краевым условием (14.15)

$$\frac{\partial T}{\partial h} - \frac{T}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial h} = -(g - \gamma)$$

и формулой для получения нормальной высоты (14.9)

$$-\int g\, dh_W = U(B, h) - U_0.$$

Требуется получить превышения точек физической поверхности Земли относительно эллипсоида относимости dH и превышение высот квазигеоида над тем же эллипсоидом относимости $d\zeta$. Для этого продифференцируем формулу Брунса, записанную в виде $\zeta = T/\gamma$, имея в виду изменяемость по ходовой линии l и

высоте h:

$$d\zeta = \left(\frac{1}{\gamma}\frac{\partial T}{\partial l} - \frac{T}{\gamma^2}\frac{\partial \gamma}{\partial l}\right) dl + \left(\frac{1}{\gamma}\frac{\partial T}{\partial h} - \frac{T}{\gamma^2}\frac{\partial \gamma}{\partial h}\right) dh.$$

В первой скобке T/γ заменим через ζ:

$$d\zeta = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\partial T}{\partial l} - \zeta\frac{\partial \gamma}{\partial l}\right) dl + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\partial T}{\partial h} - \frac{T}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial h}\right) dh.$$

Вторую скобку правой части заменим, пользуясь краевым условием (14.15′),

$$d\zeta = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\partial T}{\partial l} - \zeta\frac{\partial \gamma}{\partial l}\right) dl - \frac{g-\gamma}{\gamma} dh. \qquad (14.58)$$

Теперь продифференцируем (14.9) по ходовой линии:

$$-g\, dh_W = \frac{\partial U(B, h)}{\partial l} dl + \frac{\partial U(B, h)}{\partial h} dh.$$

Но $\frac{\partial U}{\partial l} = -\frac{h\,\partial \gamma}{\partial l}$ и $\frac{\partial U}{\partial h} = -\gamma$. Вводя это значение в производную от (14.9), получим

$$g\, dh_W = \frac{h\,\partial \gamma}{\partial l} dl + \gamma\, dh$$

или, деля на γ,

$$dh = \frac{g}{\gamma} dh_W - \frac{h}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial l} dl.$$

Вычитая и добавляя dh_w, получим

$$dh = dh_W + \frac{g-\gamma}{\gamma} dh_W - \frac{h}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial l} dl. \qquad (14.59)$$

Теперь сложим (14.58) и (14.59):

$$dh + d\zeta = dH = dh_W + \frac{g-\gamma}{\gamma} dh_W - \frac{h}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial l} dl + \\ + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial T}{\partial l} dl - \frac{\zeta}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial l} dl - \frac{g-\gamma}{\gamma} dh.$$

Упростив, получим

$$dH = dh_W - \frac{h+\zeta}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial l} dl + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial T}{\partial l} dl. \qquad (14.60)$$

Последний член правой части уравнения (14.60) представляет собой уклонение отвесной линии нормального поля в направлении l:

$$-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial T}{\partial l} = \vartheta_l.$$

Во втором члене $h + \zeta = H$ и

$$\frac{H}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial l} = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial U(BH)}{\partial l}.$$

Это изменение нормального потенциала в точке с высотой H в направлении l, отнесенное к γ, характеризует искривление силового поля на высоте H над уровенным эллипсоидом. Поэтому оба члена в сумме определяют уклонение отвесной линии в точке с высотой H относительно нормали к уровенному эллипсоиду

$$-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial T}{\partial l}dl + \frac{H}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial l}dl = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial T}{\partial l}dl - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial U}{\partial l}dl = \vartheta = \xi\cos A + \eta\sin A. \tag{14.61}$$

Теперь в выражении (14.58) заменим скобку с помощью (14.61), имея в виду, что $\zeta = H - h$:

$$d\zeta = -(\xi\cos A + \eta\sin A)\,dl + \frac{h}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial l}dl - \frac{g-\gamma}{\gamma}dh. \tag{14.62}$$

Так как второй член правой части в уравнении (14.62) характеризует уклонение силовой линии нормального поля от нормали к исходному эллипсоиду в направлении l, его можно добавить к ξ, после чего введем $\overline{\xi} = \xi + 0'',171\ H\sin 2B$. Тогда

$$d\zeta = -(\overline{\xi}\cos A + \eta\sin A)\,dl - \frac{g-\gamma}{\gamma}dh. \tag{14.63}$$

Это уравнение является формулой астрономического нивелирования, полученной из гравиметрических соображений. Первый член этой формулы представляет собой изменение превышения квазигеоида над общим гравиметрическим эллипсоидом на расстоянии dl. Второй член является поправкой в изменение ζ за счет изменения высоты физической поверхности Земли, так как квазигеоид отсчитывается от физической поверхности Земли. В самом деле,

$$\frac{g-\gamma}{\gamma}dh = \frac{\Delta g\,dh}{\gamma} = \frac{\Delta T}{\gamma} = \Delta\zeta.$$

Сравним формулы (14.63) и (6.49):

$$dH = dh_w - (\xi\cos A + \eta\sin A)\,dl_H.$$

Второй член (6.49) есть превышение квазигеоида $d\zeta$. Таким образом, оба пути — чисто геометрический и гравиметрический — приводят к идентичным выражениям. Отличие их состоит лишь в том, что они отнесены к различным поверхностям относимости. В уравнении (14.63) мы имеем превышения квазигеоида, отне-

сенные к общему гравиметрическому эллипсоиду, в (6.49) — к избранному в качестве отсчетной поверхности геодезическому эллипсоиду.

Имея все сказанное в виду, вернемся к основным формулам нивелировок, т. е. определению высот H физической поверхности Земли над эллипсоидом относимости. Эти формулы получим из (6.49) и (14.63). Из (6.49), интегрируя, получаем

$$H_B - H_A = \int_{AB} dh_W - \int_{AB} \vartheta\, dl_H, \tag{14.64}$$

где

$$\vartheta = \xi \cos A + \eta \sin A.$$

Из формулы (14.63) получим

$$\zeta_B - \zeta_A = -\int_{AB} \overline{\vartheta}\, dl_H - \int_{AB} \frac{\Delta g}{\gamma}\, dh_W \tag{14.65}$$

или, если вспомнить, что $H = h + \zeta$,

$$H_B - H_A = h_B - h_A - \int_{AB} \overline{\vartheta}\, dl_H - \int_{AB} \frac{\Delta g}{\gamma}\, dh_W. \tag{14.66}$$

Формулы (14.64) и (14.66) являются основными формулами нивелирования астрономического и гравиметрического соответственно. Формула (14.64) является формулой астрономического нивелирования физической поверхности Земли. Эта формула не содержит аномалий силы тяжести. Этот факт является следствием того обстоятельства, что физическая поверхность Земли определяется одними геометрическими элементами. Формула (14.64) выражает астрономическое нивелирование высот квазигеоида. Фигура квазигеоида связана с гравитационным полем Земли, и поэтому в формулу входят аномалии силы тяжести.

§ 8. Основы астрономо-гравиметрического нивелирования

Формулы астрономического нивелирования могут быть практически реализованы при условии, что в каждой точке нивелировки известны астрономические уклонения отвеса ξ и η. Это означает, что в каждой точке нивелировок необходимо измерить астрономические координаты, а также передать на эти точки геодезические координаты. Иными словами, астрономо-геодезическое нивелирование возможно выполнить лишь для пунктов триангуляции, причем для каждого из них должно быть произведено измерение астрономических координат. Для больших территорий, например, таких, как наша страна, это очень трудоемкая, практически невыполнимая работа. Уклонения отвесных

линий могут быть получены чисто гравиметрическим путем с помощью формул Венинг-Мейнеса (13.17), где интегрирование ведется по всей Земле. Однако в силу недостаточной гравиметрической изученности Земли этот способ также практически неприменим. Поэтому М. С. Молоденским был предложен смешанный способ нивелирования, использующий возможности обоих упомянутых методов, но одновременно позволяющий обойти трудности, встречающиеся в каждом методе раздельно. Этот способ был назван *астрономо-гравиметрическим нивелированием*.

Способ основан на том, что влияние гравитационного поля дальних зон изменяется от точки к точке очень медленно и плавно. Поэтому его можно интерполировать. С другой стороны, уклонения отвеса, полученные астрономо-геодезическим способом независимо от гравитационного поля, могут быть определены в любой точке. Сравнив астрономо-геодезическое уклонение отвеса с гравиметрическим, определенным по съемкам в ближних зонах, можно выделить часть уклонения отвеса, вызываемую влиянием дальних областей. Далее это влияние можно интерполировать на ряд пунктов, в которых уже не требуется производить астрономо-геодезические измерения и для которых часть уклонения отвеса, вызываемую близлежащими аномалиями, можно определить с помощью гравиметрической съемки в ближайших областях.

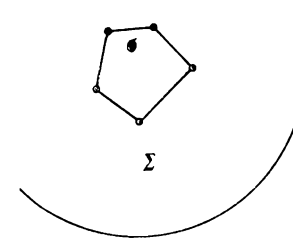


Рис. 105.

Пусть требуется произвести астрономо-гравиметрическое нивелирование в ряде точек, заключенных в области σ, представляющей собой выпуклый многоугольник, вершины которого определены геодезическими и астрономическими координатами (рис. 105). В случае интерполяции по площади таких пунктов должно быть не менее трех. При линейной интерполяции многоугольник вырождается в отрезок прямой, служащей в данном случае областью σ, на концах которой определены астрономические и геодезические координаты. Интерполирование в этом случае ведется по отрезку.

Всю Землю разделим на две части — область Σ, включающую в себя σ и простирающуюся практически на несколько сотен километров за границу σ, в которой гравитационное поле изучено, и область Σ′, где гравиметрических определений не имеется.

Астрономо-геодезическое уклонение отвеса в любой точке k области σ равно сумме гравиметрического уклонения отвеса (за счет влияния областей Σ и Σ′) и расхождения отвесов к

геодезическому эллипсоиду относимости и гравиметрическому:

$$\vartheta_a(k) = \vartheta_g(k) + \Delta\vartheta(k); \qquad (14.67)$$

здесь ϑ_a — астрономо-геодезическое уклонение отвеса, ϑ_g — гравиметрическое уклонение отвеса, вызываемое гравитационным полем всей Земли, $\Delta\vartheta$ — угол между нормалями к геодезическому и гравиметрическому эллипсоиду. Стоящее в скобках k указывает на точку, к которой отнесены соответствующие величины.

Гравиметрическое уклонение отвеса в той же точке можно представить в виде суммы

$$\vartheta_g(k) = \vartheta_g(\Sigma, k) + \vartheta_g(\Sigma', k), \qquad (14.68)$$

где введенная в скобки Σ или Σ' указывает область, влиянию аномалий которой обязано своим существованием данное ϑ. По условию $\vartheta_g(\Sigma, k)$ может быть вычислена, так как аномалии силы тяжести в области Σ известны. Введем (14.68) в (14.67):

$$\vartheta_a(k) = \vartheta_g(\Sigma, k) + \vartheta_g(\Sigma', k) + \Delta\vartheta(k). \qquad (14.69)$$

Перепишем (14.69) так:

$$\vartheta_g(\Sigma', k) + \Delta\vartheta(k) = \vartheta_a(k) - \vartheta_g(\Sigma, k). \qquad (14.69')$$

Правая часть равенства (14.69′) известна, если в k известно астрономо-геодезическое уклонение отвеса или оно может быть проинтерполировано в k от соседних точек, иными словами, если k принадлежит области σ.

Рассмотрим случай интерполирования между двумя точками A и B. За начальную точку выберем середину отрезка AB и направим ось x по прямой AB. Возьмем величину $\gamma\delta\vartheta = \gamma[\bar{\vartheta}_a - \bar{\vartheta}_g(\Sigma)]$, являющуюся разностью полного уклонения отвеса и уклонения, вызванного влиянием ближних зон, умноженной на γ. Величина $\gamma\delta\vartheta$ является функцией координаты x и высоты h. Интерполированное значение величины $\gamma\delta\vartheta$ на точку с координатой x и высотой h будет

$$\gamma\delta\vartheta(x, h) = (\gamma\delta\vartheta)_0 + \left[\frac{\partial(\gamma\delta\vartheta)}{\partial x}\right]_0 x + \left[\frac{\partial(\gamma\delta\vartheta)}{\partial h}\right]_0 (h - h_0). \qquad (14.70)$$

Последний член интерполяционной формулы всегда мал и может быть отброшен. В самом деле, полное уклонение отвесной линии ϑ вызывается возмущающим потенциалом T:

$$-\frac{\partial(\gamma\zeta)}{\partial l} = \gamma\vartheta = -\frac{\partial T}{\partial l}.$$

Поэтому можно написать

$$\frac{\partial(\gamma\vartheta)}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h}\left(-\frac{\partial T}{\partial l}\right) = -\frac{\partial^2 T}{\partial h\,\partial l} = -\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial T}{\partial h}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial l}\left(g - \gamma - \frac{T}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial h}\right) \quad (14.71)$$

в силу краевого условия (14.9).

Для уклонения отвесной линии, вызываемого аномалиями области Σ, можем получить теми же рассуждениями выражение

$$\frac{\partial[\gamma\vartheta(\Sigma)]}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial l}\left[g - \gamma - \frac{T(\Sigma)}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial h}\right]. \quad (14.71')$$

Разность (14.71) и (14.71′) как раз даст нам значение последнего члена формулы (14.70)

$$\frac{\partial(\gamma\delta\vartheta)}{\partial h} = -\frac{\partial}{\partial l}\left[\frac{T - T(\Sigma)}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial h}\right] =$$

$$= -\frac{\partial\gamma}{\partial h}\frac{1}{\gamma}\frac{\partial[T - T(\Sigma)]}{\partial l} - \frac{[T - T(\Sigma)]}{\gamma}\frac{\partial^2\gamma}{\partial h\,\partial l} + \frac{T - T(\Sigma)}{\gamma^2}\frac{\partial\gamma}{\partial l}\frac{\partial\gamma}{\partial h} \approx \frac{\partial\gamma}{\partial h}\delta\vartheta.$$

Даже при высоте точки в 10 *км* этот член составляет $\sim\frac{1}{300}\delta\vartheta$. Действительно,

$$\frac{\partial\gamma}{\partial h}\delta\vartheta \approx 0{,}308H\cdot 10^{-6}\,\delta\vartheta = 0{,}308\cdot 10^4\cdot 10^{-6}\,\delta\vartheta \approx \frac{1}{300}\delta\vartheta.$$

Таким образом, интерполировать можно только по x между точками A и B.

Пусть расстояние между точками A и B равно $2l$. Расстояние до точки C, на которую ведется интерполирование, есть x. Тогда, в соответствии с (14.70), $\gamma\delta\vartheta$ в точке x получим как значение этой величины в нулевой точке плюс интерполяционный член на расстоянии $OC = x$, т. е.

$$\gamma(\delta\vartheta)_x = (\gamma\delta\vartheta)_0 + \frac{x}{2l}[(\gamma\delta\vartheta)_B - (\gamma\delta\vartheta)_A] =$$

$$= \frac{1}{2}[(\gamma\delta\vartheta)_A + (\gamma\delta\vartheta)_B] + \frac{x}{2l}[(\gamma\delta\vartheta)_B - (\gamma\delta\vartheta)_A]. \quad (14.72)$$

Чтобы получить интерполяционную формулу для высот квазигеоида, воспользуемся выражением (14.58), в котором заменим $\frac{1}{\gamma}\frac{\partial T}{\partial l}$ через ϑ. Составим выражения полных превышений квазигеоида и превышений, вызванных влиянием внутренней

области Σ:

$$d\zeta = -\left(\vartheta + \frac{\zeta}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial l}\right)dl - \frac{g-\gamma}{\gamma}dh,$$

$$d\zeta(\Sigma) = -\left[\vartheta(\Sigma) + \frac{\zeta(\Sigma)}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial l}\right]dl - \frac{g-\gamma}{\gamma}dh.$$

Их разность даст величину превышения квазигеоида, вызванную влиянием дальних зон (Σ'). Одновременно обе части полученного равенства умножим на γ.

Тогда получим

$$\gamma d[\zeta - \zeta(\Sigma)] = -\left\{[\vartheta - \vartheta(\Sigma)]\gamma + [\zeta - \zeta(\Sigma)]\frac{\partial\gamma}{\partial l}\right\}dl$$

или

$$\gamma d[\zeta - \zeta(\Sigma)] + [\zeta - \zeta(\Sigma)]d\gamma = -\delta\vartheta\gamma dl$$

или

$$d\{\gamma[\zeta - \zeta(\Sigma)]\} = -\delta\vartheta\gamma\, dl. \qquad (14.73)$$

Теперь преобразуем (14.73) следующим образом. Правую часть представим по интерполяционной формуле (14.72), написанной для точки $x = 0$:

$$\delta\vartheta\gamma = \frac{1}{2}(\gamma_A\delta\vartheta_A + \gamma_B\delta\vartheta_B)$$

или, учитывая, что $\delta\vartheta = \vartheta - \vartheta_\Sigma$,

$$\gamma\delta\vartheta = \frac{1}{2}[\gamma_A(\vartheta - \vartheta_\Sigma)_A + \gamma_B(\vartheta - \theta_\Sigma)_B] =$$

$$= \frac{1}{2}\{\gamma_A\vartheta_A + \gamma_B\vartheta_B) - [\gamma_A\vartheta_A(\Sigma) + \gamma_B\vartheta_B(\Sigma)]\}.$$

Введя это выражение в (14.73), проинтегрируем последнее по l в пределах от $-l$ до $+l$

$$\int_{-l}^{+l} d\{\gamma[\zeta - \zeta(\Sigma)]\} = -\frac{1}{2}\int_{-l}^{+l}\{[\gamma_A\vartheta_A + \gamma_B\vartheta_B] - [\gamma_A\vartheta_A(\Sigma) + \gamma_B\vartheta_B(\Sigma)]\}\,dl.$$

Имея в виду, что в правой части под интегралом стоит постоянная величина, получим

$$\{\gamma[\zeta - \zeta(\Sigma)]\}_A^B = \gamma_B\zeta_B - \gamma_A\zeta_A - \gamma_B\zeta_B(\Sigma) + \gamma_A\zeta_A(\Sigma) =$$

$$= -\frac{1}{2}\{[\gamma_A\vartheta_A + \gamma_B\vartheta_B] - [\gamma_A\vartheta_A(\Sigma) + \gamma_B\vartheta_B(\Sigma)]\}\,2l. \qquad (14.74)$$

Выражение (14.74) запишем в иной последовательности:

$$\gamma_B\zeta_B - \gamma_A\zeta_A = -(\gamma_A\vartheta_A + \gamma_B\vartheta_B)\,l + \\ + \{\gamma_B\zeta(\Sigma) - \gamma_A\zeta_A(\Sigma) + [\gamma_A\vartheta_A(\Sigma) + [\gamma_B\vartheta_B(\Sigma)]\,l\}. \quad (14.75)$$

Это — *формула астрономо-гравиметрического нивелирования.* Она дает разность высот квазигеоида между двумя точками по известным в этих точках уклонениям отвеса и составляющим превышений квазигеоида, возникающим за счет влияния изученной гравиметрически области Σ. Эта формула упростится, если положить $\gamma_A = \gamma_B$:

$$\zeta_B - \zeta_A = -(\vartheta_A + \vartheta_B)\,l + \\ + \{[\zeta_B(\Sigma) - \zeta_A(\Sigma)] + [\vartheta_A(\Sigma) + \vartheta_B(\Sigma)]\,l\}, \quad (14.76)$$

В формуле (14.76) первый член правой части — результат астрономического нивелирования между точками A и B. Член в фигурных скобках — гравиметрическая поправка, учитывающая нелинейность изменения уклонений отвесной линии между точками A и B.

Оценка размеров области, внутри которой следует иметь гравиметрическую съемку для введения соответствующих поправок, может быть произведена по формуле верхнего предела накопления систематических ошибок, которую мы даем без вывода:

$$\delta\vartheta < \frac{0'',16}{\rho^2 - 1}\,\Delta g_m.$$

Здесь $\delta\vartheta$ — ошибка выведенного уклонения отвеса в секундах дуги, Δg_m — максимальные аномалии на границе Σ и Σ′ в миллигалах, ρ — отношение радиусов областей σ и Σ, $\rho = (R_\Sigma/R_\sigma)$.

Если задаться ошибкой нивелирования $\delta\vartheta = \pm 0'',2$ при аномалиях на границе областей в 25 *мгл*, то получим

$$\rho^2 < \frac{0'',16\,\Delta g_m + \delta\vartheta}{\delta\vartheta} = \frac{0'',16 \cdot 25 + 0,2}{0,2} \approx 20$$

и $\rho < 4,5$, т. е. $\dfrac{R_\Sigma}{R_\sigma} < 4,5$.

Если радиус области σ задать равным 30 *км*, то радиус гравиметрически изученной области должен быть $R_\Sigma \approx 140$ *км*. Таким образом, вдоль линии астрономо-гравиметрического нивелирования должна быть гравитационно изученная полоса шириной в 280 *км*. В случае невозможности создания такой гравиметрически изученной полосы, для сохранения точности можно уменьшить расстояние между астропунктами.

Случайная ошибка высоты квазигеоида при передаче по линии астрономо-гравиметрического нивелирования может быть подсчитана по формуле

$$\delta\zeta = \pm 2l\delta\vartheta,$$

где $2l$ — расстояние между астропунктами, а $\delta\vartheta$ — случайная ошибка определения уклонений отвесной линии.

Считая $\delta\vartheta = \pm 0''{,}5$ и $2l = 60$ *км*, получим $\delta\zeta = \pm 0{,}2$ *м*. Верхний предел систематической ошибки в превышениях квазигеоида ζ может быть получен по формуле

$$|\delta\zeta| < 2\cdot 10^{-7}\frac{\Delta g}{\rho}l,$$

где Δg — средние аномалии в области Σ, l — половина расстояния между пунктами, $\rho = \frac{R_\Sigma}{R_\sigma}$. При $l = 30$ *км*, $\Delta g = 50$ *мгл* и $\rho = 2$

$$|\delta\zeta| < 2\cdot 10^{-7}\cdot\frac{50}{2}\cdot 3\cdot 10^4 = \frac{3}{20} \approx 0{,}2\ м.$$

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

АСТРОНОМИЧЕСКИЕ СПОСОБЫ ИЗУЧЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ И ФИГУРЫ ЗЕМЛИ

Ранее были подробно рассмотрены геодезический (геометрический) и гравиметрический (физический) способы изучения фигуры Земли. Однако этим не исчерпываются возможности. За последнее время широкое развитие получили способы изучения гравитационного поля и фигуры Земли по наблюдениям возмущений в движении небесных тел,— так называемые *астрономические способы.* До недавнего времени эти способы не имели большого значения, так как, во-первых, они давали возможность определить только общее сжатие и не имели перспективы более детального изучения фигуры Земли, и, во-вторых, они не обеспечивали достаточно высокой точности. Только после запусков искусственных спутников астрономические методы изучения фигуры Земли приобрели практическое значение. Наблюдения движения искусственных спутников позволяют определить не только сжатие с высокой точностью, но и отклонения фигуры Земли от правильного сфероида.

Земля в своем движении в пространстве гравитационно взаимодействует со всеми небесными телами. Двигаясь по законам небесной механики в поле сил тяготения Солнца, она испытывает также влияние всех других небесных тел, которые отклоняют траекторию ее движения от правильной. В свою очередь она оказывает гравитационное влияние на другие небесные тела Солнечной системы и в первую очередь на свой спутник — Луну. Эти влияния, называемые в небесной механике *возмущениями*, бывают двух родов: возмущения от положения возмущающего тела и возмущения от фигуры или гравитационного поля возмущающего тела. Второе имеет значение для близких тел, отличных по своей фигуре от шара. Для далеких тел притяжение различных частей тела мало разнится, и можно считать, что они притягивают как точечные массы и вызывают возмущения, связанные только с изменением положения тела. Близкие тела влияют не только как одно целое, но и вызывают возмущения своим отклонением от шара, а также своими плотностными неоднородностями.

Так, отклонение Земли от сферической фигуры и, соответственно, отклонение гравитационного поля от центрального вызывают заметные возмущения в движении Луны.

Для близких искусственных спутников оказывается ощутимым возмущающее влияние не только сжатия Земли, но и других более мелких неправильностей фигуры и соответствующих неоднородностей гравитационного поля.

Но если так, то и обратно, по возмущениям в движении спутника мы можем вычислить определенные неоднородности в фигуре и гравитационном поле Земли: большие волны геоида, крупные осредненные аномалии силы тяжести. Наблюдая за движением спутников, можно получить различные характеристики фигуры и гравитационного поля Земли. Чем ближе спутник, тем чувствительнее он к влиянию гравитационного поля и тем более детальные сведения о строении Земли он может сообщить, однако ограничение этому кладет атмосфера. Спутники, используемые в геодезических целях, должны двигаться на высотах порядка 1000 *км*, чтобы атмосферным сопротивлением можно было пренебречь.

Этот метод изучения фигуры Земли основан на использовании спутника как чувствительного элемента, реагирующего на физические характеристики — неоднородности гравитационного поля. Искусственные спутники Земли можно также использовать для геометрического изучения фигуры Земли, не касаясь физических явлений. В этом случае спутник (в том числе Луна) используется как пассивный элемент в измерениях, когда он служит визирной целью, позволяющей делать геометрические измерения на огромных расстояниях, и осуществлять построение так называемой *космической пространственной триангуляции.*

Астрономические методы изучения фигуры Земли давно известны, но только после запуска первых искусственных спутников Земли, а потом и спутников Луны, они приобрели большое научное и практическое значение и сейчас являются неотъемлемой частью геодезии.

Большое значение астрономические методы играют и для геофизики. Отличие динамических характеристик Земли, получаемых по наблюдениям спутников, от геометрических позволяет судить о внутреннем строении планеты.

Неправильно было бы думать, что появление нового метода изучения фигуры и внутреннего строения Земли делает несущественными классические, ранее описанные методы. Такие иллюзии появлялись порой в самом начале развития спутниковой геодезии. Однако сейчас с полной очевидностью ясно, что спутниковые методы уточняют и дополняют методы геодезический и гравиметрический, давая в совокупности результаты, недостижимые каждым методом отдельно.

Для изложения и полного понимания астрономических методов изучения фигуры Земли читателю необходимо познакомиться с некоторыми основными понятиями небесной механики.

ГЛАВА 15
ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ

§ 1. Элементы кеплеровской орбиты

Движение планет вокруг Солнца определяется с большой точностью законами Кеплера. Первый закон определяет траекторию движения планеты, он гласит: орбиты планет представляют собой эллипсы, в одном из фокусов которых находится

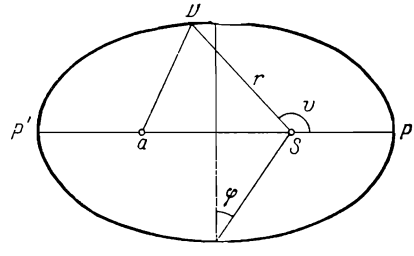


Рис. 106.

Солнце S (рис. 106). Поэтому уравнение орбиты может быть записано в виде

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v} = \frac{p}{1+e\cos v}, \qquad (15.1)$$

где r — радиус-вектор эллипса, a — большая полуось, $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \sin\varphi$ — эксцентриситет, φ — угол эксцентриситета, $v = \angle PSD$ — *истинная аномалия*, p — фокальный параметр. Ближайшая к Солнцу точка орбиты P называется *перигелием*, наиболее удаленная точка P' — *афелием*. Обе точки, P и P', называются *апсидами*, а линия PP' — *линией апсид*.

Второй закон Кеплера определяет характер изменения скорости движения планеты на орбите. Планета движется тем быстрее, чем она ближе к Солнцу. При этом сохраняется ее секториальная скорость. Этот закон утверждает, что каждая планеты движется так, что радиус-вектор заметает в равные промежутки времени равные площади.

Второй закон Кеплера выражается формулой

$$r^2\frac{dv}{dt} = c, \qquad (15.2)$$

где $c = \sqrt{fMa(1-e^2)}$, причем через M обозначена масса Солнца. Вывод величины этой константы дан в § 3, 4 настоящей главы.

Третий закон Кеплера связывает между собой периоды обращения планет и размеры их орбит. Он утверждает, что квадраты сидерических периодов обращения планет относятся как кубы их средних расстояний от Солнца, или что

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{fM}{4\pi}, \tag{15.3}$$

где P — период обращения планеты (см. § 5 настоящей главы).

Если законы Кеплера справедливы, то, пользуясь ими, можно вычислить положение планеты на небе для любого момента с помощью шести постоянных величин, называемых *элементами орбиты.* Пять из них определяют величину, форму и положение орбиты в пространстве, шестой — положение планеты на орбите. Основной отсчетной плоскостью принято считать в небесной механике плоскость земной орбиты (плоскость эклиптики). Линию, по которой плоскость орбиты данной планеты пересекает плоскость эклиптики, называют *линией узлов.* Эта линия проходит через Солнце. Точки небесной сферы, в которых линия узлов пересекает ее, называются *узлами.* Узел, в котором планета переходит из южного полушария небесной сферы в северное, называется *восходящим узлом,* и соответственно узел, в котором она переходит из северного полушария в южное,— *нисходящим.* Положение восходящего узла отсчитывается против часовой стрелки по эклиптике от точки весеннего равноденствия. Угол между направлениями на точку весеннего равноденствия Υ и на восходящий узел Ω (рис. 107) называется *долготой восходящего узла* и обозначается, как и узел, знаком Ω. Угол между плоскостями орбиты и эклиптики называют *наклонением* орбиты и обозначают через i. Долгота восходящего узла и наклонение орбиты однозначно определяют положение плоскости орбиты в пространстве.

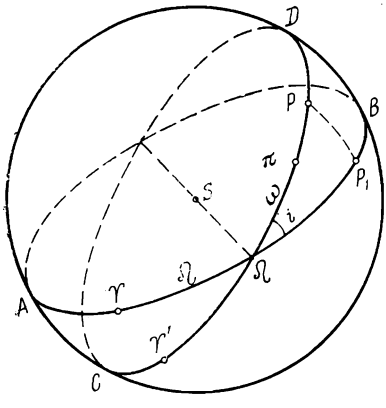


Рис. 107.

Долгота перигелия π определяет положение эллипса в плоскости орбиты. Долгота перигелия складывается из долготы, восходящего узла Ω и углового расстояния перигеля от узла ω, отсчитываемого от восходящего узла в направлении движения планеты до перигеля орбиты: $\pi = \Omega + \omega$. Величина и форма эллипса определяется элементами большой полуоси орбиты a и

эксцентриситетом e. Шестой элемент определяет положение планеты на орбите в данный момент. Это так называемая долгота планеты в эпоху L. Часто за шестой элемент принимают время прохождения планеты через перигелий. Этот элемент обозначают через T.

Итак, движение планеты определяется элементами:

Ω — долгота восходящего узла,

i — наклонение орбиты планеты к плоскости эклиптики,

π — долгота перигелия или $\omega = \pi - \Omega$,

a — большая полуось эллипса,

e — эксцентриситет орбиты,

T — время прохождения планеты через перигелий.

§ 2. Дифференциальные уравнения движения задачи двух тел

Рассмотрим случай движения двух взаимно притягивающихся тел, находящихся на большом расстоянии одно от другого сравнительно с их размерами. В этом случае притяжение тел можно рассматривать как притяжение материальных точек.

Пусть массы этих тел m и m_1. Обозначим точки, в которых сосредоточены эти массы, также через m и m_1, сумму масс через $M = m + m_1$ и расстояние между центрами масс через ρ (рис. 108). Выбрав неподвижную (относительно звезд) декартову систему координат, напишем второй закон Ньютона в виде

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = f\frac{mm_1}{\rho^2}\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho}.$$

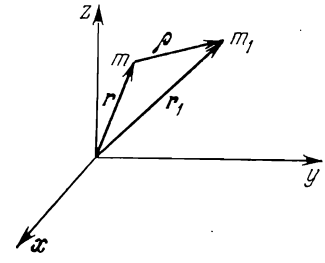


Рис. 108.

Здесь r — вектор, направленный из начала координат O в точку m. В проекциях на оси имеем уравнения движения точки m

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= f\frac{mm_1}{\rho^2}\cos\alpha, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= f\frac{mm_1}{\rho^2}\cos\beta, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= f\frac{mm_1}{\rho^2}\cos\gamma, \end{aligned}\right\} \qquad (15.4)$$

где α, β, γ — углы, образуемые прямой, соединяющей m и m_1, с осями декартовых координат. Заменим косинусы отношениями проекций отрезка к самому отрезку:

$$\cos\alpha = \frac{x_1 - x}{\rho}, \quad \cos\beta = \frac{y_1 - y}{\rho}, \quad \cos\gamma = \frac{z_1 - z}{\rho},$$

$$\rho = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}.$$

Тогда уравнения движения точки m будут

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= fm_1\frac{x_1-x}{\rho^3},\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= fm_1\frac{y_1-y}{\rho^3},\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= fm_1\frac{z_1-z}{\rho^3}. \end{aligned}\right\} \tag{15.5}$$

Аналогичную систему напишем для второго тела:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} &= fm\frac{x-x_1}{\rho^3},\\ \frac{d^2y_1}{dt^2} &= fm\frac{y-y_1}{\rho^3},\\ \frac{d^2z_1}{dt^2} &= fm\frac{z-z_1}{\rho^3}. \end{aligned}\right\} \tag{15.6}$$

Вычтя почленно уравнения (15.6) из соответствующих уравнений (15.5), получим дифференциальные уравнения движения точки m_1 относительно m:

$$\begin{aligned} \frac{d^2(x-x_1)}{dt^2} &= -f(m+m_1)\frac{x-x_1}{\rho^3},\\ \frac{d^2(y-y_1)}{dt^2} &= -f(m+m_1)\frac{y-y_1}{\rho^3},\\ \frac{d^2(z-z_1)}{dt^2} &= -f(m+m_1)\frac{z-z_1}{\rho^3}. \end{aligned}$$

Если ввести подвижную систему координат с началом в m_1, координаты точки m обозначить снова через x, y, z, то дифференциальные уравнения движения точки с массой m относительно точки с массой m_1 будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -f(m+m_1)\frac{x}{r^3},\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -f(m+m_1)\frac{y}{r^3},\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -f(m+m_1)\frac{z}{r^3},\\ r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \end{aligned}\right\} \tag{15.7}$$

Обычно при рассмотрении движения тел Солнечной системы масса Солнца, относительно которого рассматривается движение, полагается равной единице, т. е. $m_1=1$ и m выражается

в долях массы Солнца. Тогда

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -f(1+m)\frac{x}{r^3}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -f(1+m)\frac{y}{r^3}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -f(1+m)\frac{z}{r^3}. \end{aligned}\right\} \tag{15.8}$$

§ 3. Интегрирование уравнений движения

1. Интегралы площадей. Уравнения движения (15.8) задачи двух тел представляют собой систему трех дифференциальных уравнений второго порядка. Решение этой системы состоит в нахождении шести независимых первых интегралов. При этом появляется шесть произвольных постоянных. Три интеграла являются интегралами площадей и определяют плоскость, в которой расположена орбита. Чтобы получить их, умножим второе уравнение (15.8) на z, а третье — на y и вычтем второе из третьего; подобным же образом вычтем третье уравнение, умноженное на x, из первого, умноженного на z, и первое, умноженное на y,— из второго, умноженного на x. Получим уравнения

$$\left.\begin{aligned} y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} &= 0, \\ z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2} &= 0, \\ x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{15.9}$$

Интегрируя эти три уравнения, находим три первых интеграла:

$$\left.\begin{aligned} y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} &= c_1, \\ z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} &= c_2, \\ x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} &= c_3. \end{aligned}\right\} \tag{15.10}$$

Если уравнения (15.10) умножить соответственно на x, y, z и сложить, то получим уравнение плоскости

$$c_1x + c_2y + c_3z = 0, \tag{15.11}$$

что свидетельствует о том, что движение двух тел, подчиненных ньютоновским силам, происходит в неподвижной плоскости (15.11), положение которой определяется долготой восходящего узла Ω и наклонением i. Расположим оси координат x, y, z так, чтобы плоскость, в которой происходит движение материальных

точек m и m_1, совпадала с плоскостью xy. Тогда $z = 0$ и уравнения движения (15.8) представятся в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -f(1+m)\frac{x}{r^3}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -f(1+m)\frac{y}{r^3}. \end{aligned}\right\} \tag{15.12}$$

Интеграл площадей этой системы получим аналогично интегралам (15.10). Он будет

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c. \tag{15.13}$$

Левая часть интеграла (15.13) представляет собой удвоенную секториальную скорость. Уравнение (15.13) представляет собой второй закон Кеплера, а именно он утверждает, что секториальная скорость движения планеты постоянна, или, в другой формулировке, радиус-вектор материальной точки заметает площади, пропорциональные времени. Это уравнение идентично уравнению (15.2), которое получается из него введением сферических координат.

2. Интеграл живой силы. Умножим первое из уравнений (15.12) на $2\frac{dx}{dt}$, второе — на $2\frac{dy}{dt}$ и сложим:

$$2\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} + 2\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt} = -2f(1+m)\frac{1}{r^3}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right). \tag{15.14}$$

Преобразуем это уравнение, используя соотношения

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad r\frac{dr}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}.$$

Это дает

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = -\frac{2f(1+m)}{r^2}\frac{dr}{dt}. \tag{15.15}$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{2f(1+m)}{r} + h. \tag{15.16}$$

Левая часть полученного решения есть квадрат скорости точки m. Обозначим скорость через V. Тогда

$$V^2 = \frac{2f(1+m)}{r} + h. \tag{15.17}$$

Это и есть так называемый *интеграл живой силы.*

3. Связь между радиусом-вектором и истинной аномалией. Введем полярные координаты (рис. 109)

$$x = r\cos u, \quad y = r\sin u.$$

Полярный угол u отсчитываем от линии узлов в плоскости xy. С помощью этих координат преобразуем интегралы площадей (15.13) и живой силы (15.17)

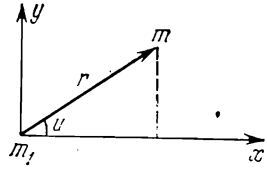


Рис. 109.

$$r^2\frac{du}{dt} = c, \qquad (15.13')$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = h + \frac{2f(1+m)}{r}. \qquad (15.17')$$

Исключим теперь из (15.17′) dt, имея в виду, что $\frac{du}{dt} = \frac{c}{r^2}$, а

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du}\frac{du}{dt} = \frac{c}{r^2}\frac{dr}{du}.$$

Уравнение (15.17′) можно записать в виде

$$\frac{c^2}{r^4}\left(\frac{dr}{du}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2} = h + \frac{2f(1+m)}{r} \qquad (15.18)$$

или

$$\left(\frac{dr}{du}\right)^2 = -r^2 + \frac{h}{c^2}r^4 + \frac{2f(1+m)}{c^2}r^3,$$

откуда выразим du,

$$du = \pm\frac{dr}{\sqrt{\frac{h}{c^2}r^4 + \frac{2f(1+m)}{c^2}r^3 - r^2}}$$

и u найдем интегрированием

$$u = \pm\int\frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{h}{c^2} + \frac{2f(1+m)}{c^2}\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}}}.$$

Для интегрирования этого выражения делаем замену переменных

$$\frac{1}{r} = \bar{r}, \quad \frac{dr}{r^2} = -d\bar{r};$$

тогда интеграл принимает вид

$$u = \pm\int\frac{d\bar{r}}{\sqrt{\frac{h}{c^2} + \frac{2f(1+m)}{c^2}\bar{r} - \bar{r}^2}}. \qquad (15.19)$$

Этот интеграл можно взять, если сделать подстановку

$$\bar{r} = A + B\cos v, \quad d\bar{r} = -R\sin v\, dv; \tag{15.20}$$

тогда многочлен под корнем примет вид

$$\frac{h}{c^2} + \frac{2f(1+m)}{c^2}\bar{r} - \bar{r}^2 = \frac{h}{c^2} + \frac{2f(1+m)}{c^2}(A + B\cos v) -$$

$$-(A + B\cos v)^2 = \frac{h}{c^2} + \frac{2f(1+m)}{c^2}A - A^2 +$$

$$+ 2\left[\frac{f(1+m)}{c^2} - A\right]B\cos v + B^2\cos^2 v.$$

Приведем теперь это выражение к виду $B^2\sin^2 v$. Для этого необходимо, чтобы коэффициент при $\cos v$ обратился в нуль, а свободный член был равен B^2. Это можно сделать выбором произвольных постоянных.

Итак, полагаем

$$\frac{h}{c^2} + \frac{2f(1+m)}{c^2}A - A^2 = B^2, \frac{f(1+m)}{c^2} - A = 0,$$

или $A = \frac{f(1+m)}{c^2}$, $B = \sqrt{\frac{h}{c^2} + \frac{f^2(1+m)^2}{c^4}}$.

В этом случае интеграл (15.19) принимает вид

$$u = \pm\int \frac{B\sin v\, dv}{\sqrt{B^2\sin^2 v}} = \pm\int dv = \pm v + \omega.$$

Ограничиваясь положительным направлением движения, получим

$$u - \omega = v, \tag{15.21}$$

где ω — произвольная постоянная, которую выберем как угловое расстояние перигелия π от узла.

Найдем теперь соотношение между истинной аномалией и радиусом-вектором. Согласно (15.20)

$$r = \frac{1}{A + B\cos v};$$

вводя сюда A и B, будем иметь

$$r = \frac{\frac{c^2}{f(1+m)}}{1 + \sqrt{\frac{hc^2}{f^2(1+m)^2} + 1}\cos v}. \tag{15.22}$$

Уравнение (15.22) представляет собой уравнение конического

сечения с параметрами

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{c^2}{f(1+m)} && \text{— фокальный параметр конического сечения,} \\ e &= \sqrt{\frac{hc^2}{f^2(1+m)}+1} && \text{— эксцентриситет,} \end{aligned}\right\} \qquad (15.23)$$

а само уравнение (15.22) приобретает вид (15.1)

$$r = \frac{p}{1+e\cos v}.$$

Таким образом, исходя из закона Ньютона о характере сил, в поле которых происходит движение двух тел, мы пришли к первому закону Кеплера, а именно, что планеты движутся вокруг Солнца по эллипсу, в фокусе которого находится Солнце.

§ 4. Механический смысл постоянных интегрирования

Постоянную интегрирования c определяем из первого уравнения (15.23):

$$c = \sqrt{f(1+m)\,p}. \qquad (15.24)$$

Из второго уравнения (15.23), имея в виду (15.24), получим постоянную интегрирования

$$h = -\frac{f^2(1+m)^2(1-e^2)}{c^2} = -\frac{f(1+m)(1-e^2)}{p}$$

или

$$h = -\frac{f(1+m)}{a}, \qquad (15.25)$$

где h может быть положительным или отрицательным в зависимости от величины эксцентриситета, т. е. от характера орбиты:

при $e<1$ — эллипс, $h<0,\ a>0,$

« $e>1$ — гипербола, $h>0,\ a<0,$

« $e=1$ — парабола, $h=0,\ a=\infty.$

Этот вывод позволяет опрделить скорость, при которой движение будет эллиптическим, параболическим или гиперболическим.

Вспомним для этого интеграл живых сил

$$V^2 = h + 2\frac{f(1+m)}{r}.$$

Если $V^2 < 2\frac{f(1+m)}{r}$, движение эллиптическое,

если $V^2 > 2\frac{f(1+m)}{r}$, движение гиперболическое,

если $V^2 = 2\frac{f(1+m)}{r}$, движение параболическое.

Пример. Из полученных соотношений легко получить вторую космическую скорость, т. е. такую скорость тела на поверхности Земли, при которой оно уйдет из пределов тяготения Земли и станет спутником Солнца. Такой критической скоростью будет параболическая скорость. При движении со скоростью, большей, чем первая космическая (8 *км/сек*), однако меньшей, чем параболическая, тело становится спутником Земли. Достигнув параболической скорости, тело начинает двигаться по параболе.

Для нахождения второй космической скорости воспользуемся формулой

$$V = \sqrt{2\frac{f(1+m)}{r}}.$$

Положив $f = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ *см*^{3}/*г*·*сек*^{2} (гравитационная постоянная), $r = 6{,}370 \cdot 10^8$ *см* (средний радиус Земли) и приняв массу Земли ($5{,}98 \cdot 10^{27}$ *г*) равной единице (массой тела m пренебрегаем), находим

$$V = 11{,}2 \text{ км/сек}.$$

В таблице 16 приводятся космические скорости для планет.

Таблица 16

Скорость	Меркурий	Венера	Земля	Марс	Юпитер
Круговая	3,028	7,319	7,912	3,562	42,205
Параболическая	4,282	10,351	11,200	5,038	60,732
Скорость	**Сатурн**	**Уран**	**Нептун**	**Плутон**	**Луна**
Круговая	25,100	15,308	16,129	7,7	1,68
Параболическая	36,498	21,648	22,810	10,8	2,38

В случае движения искусственных спутников Земли масса спутника всегда пренебрежимо мала по сравнению с массой Земли, так что все выведенные формулы упрощаются. Скобка $(1+m)$ заменяется массой Земли M. В этом случае

$$\left.\begin{aligned} &\text{интеграл площадей } r^2\frac{dv}{dt} = \sqrt{fMa(1-e^2)}\,, \\ &\text{интеграл живой силы } V^2 = \frac{2fM}{r} + h = \frac{2fM}{r} - \frac{fM}{a}. \end{aligned}\right\} \quad (15.26)$$

§ 5. Уравнение Кеплера

При выводе этого уравнения будем рассматривать случай эллиптического движения $e < 1$.

Вводя в уравнение (15.17′) значение $r^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2$ из интеграла площадей (15.13′) $r^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \frac{c^2}{r^2}$, получим

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = h + \frac{2f(1+m)}{r} - \frac{c^2}{r^2},$$

откуда

$$dt = \pm \frac{r\,dr}{\sqrt{hr^2 + 2f(1+m)r - c^2}}.$$

Интегрируя, находим

$$t - T = \pm \int \frac{r\,dr}{\sqrt{hr^2 + 2f(1+m)r - c^2}}, \qquad (15.27)$$

где T — произвольная постоянная. Для вычисления интеграла делаем подстановку (рис. 110)

$$r = A_1 + B_1 \cos E,$$

в которой угол E называется *эксцентрической аномалией.*

Отсюда следует:

$$dr = -B_1 \sin E\, dE$$

и

$$hr^2 + 2f(1+m)r - c^2 = hA_1^2 + 2f(1+m)A_1 - c^2 + [2hA_1B_1 + 2f(1+m)B_1]\cos E + hB_1^2\cos^2 E.$$

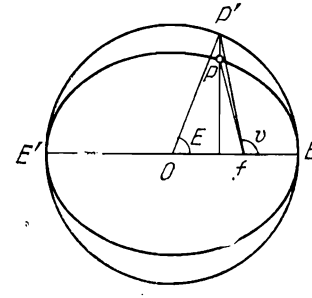


Рис. 110.

Приводим последнее выражение к виду $-hB_1^2\sin^2 E$. В этом случае

$$hA_1 + f(1+m) = 0,$$

$$B_1^2 h = -hA_1^2 - 2f(1+m)A_1 + c^2,$$

что дает

$$A_1 = -\frac{f(1+m)}{h}, \quad B_1 = \sqrt{\frac{f^2(1+m)^2}{h^2} + \frac{c^2}{h}}.$$

Используя выражения (15.25) и (15.24), получим

$$A_1 = a, \quad B_1 = \pm ae.$$

Тогда интеграл (15.27) преобразуется к виду

$$t - T = \pm \frac{a}{\sqrt{-h}} \int (1 \pm e \cos E)\, dE = \pm \frac{a^{3/2}}{\sqrt{f(1+m)}} (E \pm e \sin E). \tag{15.28}$$

Если угол E отсчитывать от перигелия, когда радиус-вектор имеет минимальное значение, и если условиться, что возрастает при возрастании времени t (см. рис. 110), то получим

$$r = a(1 - e \cos E), \tag{15.29}$$

$$E - e \sin E = \frac{\sqrt{f(1+m)}}{a^{3/2}} (t - T) = M, \tag{15.30}$$

где угол $M = \sqrt{\frac{f(1+m)}{a^3}} (t - T)$ называется *средней аномалией.*

При $t = T$ планета находится в перигелии орбиты, так как $E = 0$. Поэтому произвольная постоянная интегрирования T есть момент прохождения через перигелий.

Пусть n — среднее угловое движение планеты по орбите, а P — период обращения. Тогда $n = 2\pi/P$. Коэффициент при $f(1+m)/a^{3/2}$, очевидно, равен средней скорости движения планеты, так как если t изменится на полный период P, то E изменится на 2π. Вычитая (15.30), написанное для $E = 2\pi$ из того же выражения для $E = 0$, получаем

$$\frac{\sqrt{(1+m)f}}{a^{3/2}} = \frac{2\pi}{t_{2\pi} - t_0} = \frac{2\pi}{P} = n, \tag{15.31}$$

так что уравнение Кеплера можно записать в виде

$$E - e \sin E = \frac{2\pi}{P} (t - t_0). \tag{15.30'}$$

Из уравнения Кеплера выводится также третий закон Кеплера. Для этого напишем уравнения (15.31) для двух планет m_1 и m_2, движущихся вокруг одного и того же центрального тела на расстояниях a_1 и a_2 с периодами P_1 и P_2. Возводя их в квадрат и деля одно из них на другое, получим

$$\frac{P_1^2}{P_2^2} = \frac{a_1^3 (1 + m_2)}{a_2^3 (1 + m_1)}, \tag{15.32}$$

т. е. квадраты периодов обращения планет относятся как кубы средних расстояний, умноженные на сумму масс центрального тела и планеты. Для Солнечной системы, когда масса планеты много меньше массы Солнца, третий закон Кеплера можно приближенно записать в виде

$$\frac{P_1^2}{P_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

Таким образом, условившись, что движение двух тел происходит по закону Ньютона, мы убедились, что это движение подчиняется законам Кеплера (§ 1). Из формулы (15.31) можно получить значение постоянной тяготения

$$f = \frac{4\pi^2 a^3}{(1+m)P^2}.$$

Если известны период обращения планеты, среднее расстояние и масса планеты, выраженная в массах Солнца, то может быть вычислена постоянная f.

§ 6. Выражение первых интегралов задачи двух тел через элементы орбиты

Рассмотрим систему интегралов (15.10), содержащую три постоянных интегрирования. Положим, что эклиптика совпадает

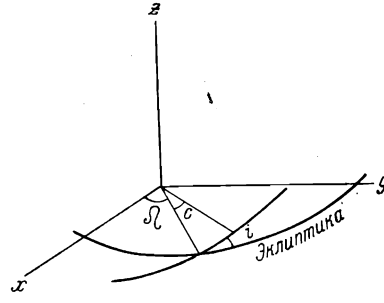


Рис. 111.

с плоскостью xy (рис. 111). Тогда

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = c_1 = c\sin i\sin\Omega,$$
$$z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = c_2 = -c\sin i\cos\Omega,$$
$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c_3 = c\cos i.$$

Вводя значение c из (15.24), получим следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} &= \sqrt{f(1+m)p}\,\sin i\sin\Omega,\\ z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} &= -\sqrt{f(1+m)p}\,\sin i\cos\Omega,\\ x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} &= \sqrt{f(1+m)p}\,\cos i. \end{aligned}\right\} \qquad (15.33)$$

Если известны элементы орбиты планеты, то можно вычислить для любого момента времени ее положение на орбите и гелиоцентрические и геоцентрические координаты.

ГЛАВА 16

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ ЛУНЫ

§ 1. Геометрический способ определения большой полуоси Земли

Экваториальный радиус Земли a может быть определен путем геометрических измерений положения Луны. Для этого служит известная формула параллакса Луны

$$\sin \pi = \frac{a}{a_{\text{Л}}} = 3422'',451, \tag{16.1}$$

где a — большая полуось Земли, а $a_{\text{Л}}$ — радиус лунной орбиты. Для того чтобы установить масштаб, т. е. выразить полуось в линейной мере, надо знать расстояние $a_{\text{Л}}$ в линейной мере. Для этого существует два способа: измеряется само расстояние с помощью радиолокатора либо измеряется дуга на Земле и угол при Луне, образованный направлениями на Луну с концов этой дуги. Так как положение Луны на орбите хорошо известно, то направления с концов дуг на Луну также определяются весьма точно.

Практически измерения производятся по фотографиям, на которых Луна проектируется на фоне неподвижных звезд и которые делаются одновременно с обоих концов дуги (метод Дж. О'Кифа). Другой способ — наблюдение покрытия звезд Луною (метод У. Марковица). Точность способа ограничивается плохим знанием формы и размеров самой Луны.

§ 2. Динамический способ определения большой полуоси и стоксовой постоянной по наблюдениям Луны. Динамический параллакс Луны

Большую полуось и величину fM для Земли можно определить по наблюдениям Луны так называемым динамическим способом.

Используем третий закон Кеплера

$$n^2 a_{\text{Л}}^3 = f(M + m_{\text{Л}})$$

(где $n=2\pi/P$ — угловая скорость вращения Земли, M и $m_л$ — массы Земли и Луны соответственно), который представим в виде

$$\frac{P^2}{a_л^3}=\frac{4\pi^2}{f(M+m_л)}.$$

Обозначая отношение масс через $\mu=m_л/M$, получим

$$fM=\frac{4\pi^2a_л^3}{P^2(1+\mu)}=\frac{n^2}{1+\mu}a_л^3. \tag{16.2}$$

Если теперь измерить с помощью радара расстояние до Луны $a_л$, то при известных скорости вращения Земли n и отношении масс $\mu=1/81{,}3$ можно получить стоксову постоянную fM. Если, далее, выразить стоксову постоянную fM через элементы гравитационного поля Земли

$$fM=a^2\gamma\left(1-\alpha+\frac{3}{2}q\right) \tag{16.3}$$

и ввести ее в уравнение (16.2), мы получим выражение для так называемого динамического параллакса

$$\sin^3\pi=\sqrt[3]{\frac{n^2a}{\gamma(1+\mu)}}\left(1+\frac{1}{3}\alpha-\frac{1}{2}q\right). \tag{16.4}$$

Эта же формула указывает на возможность определения большой полуоси Земли по параллаксу, отношению масс, сжатию, угловой скорости и экваториальной силе тяжести без геометрических измерений на поверхности Земли.

§ 3. Определение сжатия Земли по лунно-солнечной прецессии

Отличие Земли от однородного шара или шара с концентрическим распределением плотностей приводит к тому, что Луна и Солнце, притягивая Землю, несколько изменяют положение оси вращения Земли относительно плоскости эклиптики, т. е. происходит постепенное перемещение направления земной оси. При этом точка весеннего равноденствия перемещается по экватору в направлении, обратном движению Земли. Это происходит потому, что при притяжении Солнцем (или Луной) экваториального вздутия Земли появляется пара сил, момент которой стремится повернуть Землю в направлении сближения плоскости экватора с плоскостью эклиптики. Это явление давно известно в астрономии под названием *предварения равноденствий* или *прецессии*. Кроме того, вследствие периодичности изменения плоскости лунной орбиты Луна и Солнце в разное время находят-

ся на разных угловых расстояниях от экватора и, таким образом, создают *периодически изменяющуюся* пару сил, действующую на экваториальное вздутие Земли. Эта пара сил вызывает периодические отклонения оси вращения Земли относительно ее среднего положения. Это явление называется *нутацией*.

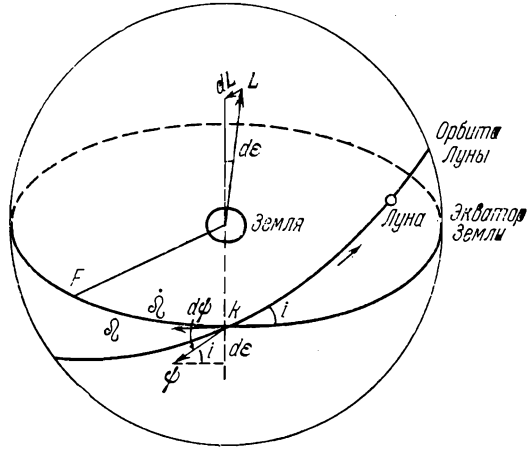


Рис. 112.

Прецессия и нутация возникают, таким образом, вследствие динамического сжатия планеты. Чем больше динамическое сжатие, тем больше прецессия и нутация. Прецессия проявляется в медленном движении земной оси, описывающей конус.

Обозначим через $\boldsymbol{L}$ момент количества прецессионного движения Земли. Очевидно, что

$$\boldsymbol{L} = C\boldsymbol{\omega}, \tag{16.5}$$

где C — момент инерции Земли относительно оси вращения, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость.

Величина момента пары сил пропорциональна разности полярного C и экваториального A моментов инерции Земли и зависит от наклонения орбиты i:

$$N = \frac{3fm_{\text{Л}}}{2a_{\text{Л}}^3}(C - A)\sin i \cos i. \tag{16.6}$$

По теореме о моменте количеств движений

$$\frac{dL}{dt} = N.$$

Элементарное приращение вектора L соответствует изменению направления земной оси вследствие прецессии на угол $d\varepsilon$

(см. рис. 112), так что

$$dL = L\,d\varepsilon,$$

откуда

$$N\,dt = L\,d\varepsilon.$$

Поворот земной оси на угол $d\varepsilon$ эквивалентен наклону экваториальной плоскости на тот же угол, а этот наклон приводит к смещению узла по орбите на угол $d\psi = d\varepsilon/\sin i$ или

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt\sin i} = \frac{N}{L\sin i}.$$

Вводя значение N из (16.6), получаем

$$\dot{\psi} = \frac{3fm_{\text{Л}}}{2a_{\text{Л}}^3}\frac{(C-A)\cos i}{C\omega}$$

или, заменяя $fm = \frac{n^2}{1+\mu}a_{\text{Л}}^3$, из (16.2) получим

$$\dot{\psi} = \frac{3}{2}\frac{n^2}{\omega}\frac{\mu}{1+\mu}\frac{C-A}{C}\cos i. \tag{16.7}$$

Аналогичные эффекты, обусловленные сжатием Земли, возникают в орбитальном движении Луны. Можно получить формулу для регрессии восходящего узла лунной орбиты

$$\dot{\Omega} = -\frac{N}{L_{\text{Л}}\sin i}.$$

Вводя значение N из (16.6) и помня, что

$$fm_{\text{Л}} = fM\frac{m_{\text{Л}}}{M} = 3\frac{n^2}{1+\mu}a_{\text{Л}}^3\frac{m_{\text{Л}}}{M},$$

получим

$$-\dot{\Omega} = \frac{3}{2}\frac{n}{1+\mu}\left(\frac{a}{a_{\text{Л}}}\right)^2\frac{C-A}{Ma^2}\cos i. \tag{16.8}$$

Таким образом, видим, что прецессия земной оси $\dot{\psi}$ пропорциональна отношению моментов инерции

$$H = \frac{C-A}{C}.$$

Эта величина называется *динамическим сжатием.*

В то же время смещение плоскости орбиты по экватору или регрессия лунного узла пропорциональна коэффициенту второй сферической гармоники внешнего гравитационного поля Земли

$$J_2 = \frac{C-A}{Ma^2}.$$

Величина H связана с распределением масс в Земле. Поэтому по расхождению величин сжатия, полученного через H и через J_2, можно сделать заключение о распределении масс в Земле.

Далее приводим значения динамического сжатия Земли, полученные разными авторами по наблюдениям Луны:

$$\text{по Ньюкомбу} \quad H = \frac{1}{305{,}32} = 0{,}0032753,$$

$$\text{по де Ситтеру} \quad H = \frac{1}{304{,}94} = 0{,}0032794,$$

$$\text{по Булларду} \quad H = \frac{1}{305{,}59} = 0{,}00327236.$$

Моменты инерции Земли C и A могут быть выражены через параметр сжатия α, если известен закон изменения плотности Земли. Для однородной Земли эти соотношения имеют вид

$$C = \frac{8\pi}{15}\sigma a^4 b, \quad A = \frac{8\pi}{15}\sigma a^2 b\,(a^2 + b^2).$$

Так как закон изменения плотности для Земли точно не известен, то для решения задачи приходится принимать гипотезы о характере изменения плотностей, более или менее близко соответствующие действительности. В силу этого обстоятельства получить точное значение сжатия геометрической фигуры Земли из динамического сжатия невозможно. Однако получаемые величины весьма близки к действительности. С другой стороны, для точного определения самого динамического сжатия необходимо знание массы Луны, которая известна только с точностью до нескольких долей процента. Дело осложняется, кроме того, и тем, что величина прецессии от Солнца составляет примерно половину лунной, а в то же время совместный учет лунно-солнечной прецессии очень сложен. Таким образом, метод определения сжатия Земли по наблюдениям прецессии и нутации не очень точен. Пересчет динамического сжатия в предположении, что плотность Земли пропорциональна глубине слоя для среднего значения динамического сжатия α, приводит к значению полярного сжатия среднего по Ньюкомбу и де Ситтеру

$$\alpha = \frac{1}{297{,}6}$$

и по Булларду

$$\alpha = \frac{1}{297{,}34}.$$

§ 4. Определение геометрического сжатия по динамическому

Поскольку динамическое сжатие $H = (C - A)/C$ зависит от внутреннего строения Земли, для установления связи геометрического сжатия с динамическим необходимо задать какую-либо гипотезу о внутреннем строении Земли. Обычно делается допущение, что Земля находится в гидростатическом равновесии.

Состояние такой гидростатически равновесной Земли описывается уравнением Клеро:

$$\frac{d^2\alpha}{dr^2} + \frac{2\sigma r^2}{r\int_0 \sigma r^2 dr}\frac{d\alpha}{dr} + \left(\frac{2\sigma r}{r\int_0 \sigma r^2 dr} - \frac{6}{r^2}\right)\alpha = 0.$$

Это уравнение определяет сжатие α уровенной поверхности со средним радиусом r и плотностью σ. Решение уравнения Клеро приводит к установлению соотношения между J_2 и H

$$J_2 = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{2}{5}\sqrt{\frac{5q}{2\alpha} - 1}\right)H. \tag{16.9}$$

Ранее, в главе 10, была выведена связь сжатия со вторым динамическим параметром J_2:

$$J_2 = \frac{2}{3}\left(\alpha - \frac{1}{2}q\right) \tag{16.10}$$

с точностью до сжатия.

Приравнивая правые части уравнений (16.9) и (16.10), получим

$$H = \frac{\alpha - \frac{1}{2}q}{1 - \frac{2}{5}\sqrt{\frac{5q}{2\alpha} - 1}}. \tag{16.11}$$

Для определения α при данных H и q уравнение решают обычно способом приближений или численным методом, вычисляя ряд H по заданным α и подбирая потом α соответственно известному H. Для более точного решения требуется учитывать как квадраты α и q, так и гармоники более высокого порядка. В уравнение (16.11) не входит плотность, т. е. результат не зависит от распределения масс, если сделано предположение о гидростатическом равновесии.

Все определения геометрического сжатия α через динамическое H приводят к заниженным значениям $1/\alpha$, порядка 297,3—

297,6, в то время как сжатие, определенное по спутникам, оказывается равным 298,3. Расхождение между этими величинами вызывается отклонением состояния Земли от гидростатического равновесия.

§ 5. Определение сжатия Земли по неравенствам в движении Луны

Отступление фигуры Земли от однородного или состоящего из концентрических слоев различной плотности шара вызывает в движении Луны некоторые периодические отклонения от кеплерова движения по орбите,— так называемые возмущения, или неравенства. Амплитуда этих отклонений зависит от параметра динамического сжатия Земли $J_2 = \frac{C-A}{Mr^2} \approx \frac{2}{3} H$. В теории движения Луны эти отклонения представляются периодическими членами.

Наибольшие амплитуды таких отклонений имеют неравенство в долготе

$$\delta\lambda = (4360'' J_2 - 0'',061) \sin \Omega \tag{16.12}$$

и неравенство в широте

$$\left.\begin{aligned} \delta\beta &= -(4959'' J_2 + 0'',226) \sin L - \text{по Делоне,} \\ \delta\beta &= -(4946'' J_2 + 0'',208) \sin L - \text{по Брауну,} \end{aligned}\right\} \tag{16.13}$$

где Ω — средняя долгота восходящего узла орбиты Луны, L — средняя долгота Луны. Неравенство в долготе имеет период 18,6 года, неравенство в широте — 1 месяц. Это второе неравенство наблюдается более точно, чем первое, и поэтому оно чаще использовалось для определения J_2.

Значения $\delta\beta$ могут быть получены непосредственно из наблюдений. Из обработки длинных рядов наблюдений были получены для $\delta\beta$ следующие значения:

Ньюкомб $-8'',26 \pm 0'',07$,
Браун $-8'',37 \pm 0'',04$,
среднее $-8'',315 \pm 0'',04$.

Вводя среднее значение из наблюденных величин в формулы (16.13), получаем соответственно два значения динамического параметра

$$J_2 = 0{,}0016310,$$
$$J_2 = 0{,}0017232.$$

Им соответствуют два значения полярного сжатия Земли,

вычисленные по J_2 с помощью соотношения

$$\alpha = J_2 + \frac{1}{2} q + \alpha^2 - \frac{1}{2} \alpha q - \frac{3}{4} q^2,$$

точного до малых величин второго порядка. Эти значения следующие:

$$\alpha = 1 : 297{,}7,$$
$$\alpha = 1 : 297{,}0.$$

Если использовать только данные Ньюкомба и формулу Делоне, то мы получим $\alpha = 1 : 298{,}7$, а если данные Броуна и его же формулу, то получим

$$\alpha = 1 : 296{,}0.$$

Таким образом, этот метод дает очень большой разброс полученных окончательных значений и, конечно, недостаточно точен.

Как уже говорилось, появление искусственных спутников Земли дало возможность весьма точного определения динамических параметров Земли, причем можно определить не только J_2, но и моменты более высокого порядка. Метод изучения характеристик фигуры Земли по наблюдениям искусственных спутников нашел сейчас широкое практическое применение. Поэтому мы остановимся на его рассмотрении более подробно в главе 18.

ГЛАВА 17

ОСНОВЫ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

§ 1. Принцип использования искусственных спутников Земли в геодезии

1. Появление искусственных спутников Земли (ИСЗ) совершило революцию в геодезии. Возникла возможность решить некоторые задачи, которые не могли быть решены в рамках классической науки, равно как и уточнить некоторые старые решения. Применение искусственных спутников Земли в геодезии позволило развить два направления. Первое из них — геометрическое, состоит в том, что спутник используется как весьма удаленная визирная цель, расположенная в пространстве над Землей. В этом случае, определяя направления на него с пунктов с известными координатами, можно определить положение спутника, а определяя одновременно направления с пунктов с известными и неизвестными координатами — положение пункта с неизвестными координатами. Таким образом может быть построена система пространственных треугольников с вершинами в опорных точках на Земле и в пространстве в местах нахождения спутника в моменты наблюдений. Имея известный базис или базисы — расстояния между опорными точками с известными координатами, можно решить все треугольники и определить координаты их вершин и расстояния между ними. При этом наблюдать спутник нужно с нескольких точек, каждый раз одновременно. Поэтому метод зовется *методом синхронных наблюдений.* Большая высота спутника над Землей позволяет наблюдать его одновременно с весьма удаленных пунктов земной поверхности, не имеющих прямой видимости между собой. Так, вполне реальны наблюдения с пунктов, отстоящих друг от друга на несколько тысяч километров. Поэтому треугольники полученной таким образом пространственной триангуляции будут иметь большие стороны и могут связывать весьма удаленные пункты, например, континенты с островами, острова между собой. Метод дает возможность связи континентов, увязки разрозненных геодезических сетей между собой, создания единой мировой геодезической системы и определения наи-

лучшего эллипсоида относимости для всей Земли. В принципе метод позволяет точно определить фигуру реальной Земли, т. е. фигуру ее физической поверхности, поскольку он дает пространственные координаты станций, расположенных на Земле, а не их проекции на эллипсоид. Практически только нужно иметь достаточно большое количество станций, а именно такое, которое обеспечило бы необходимое для решения данной задачи представление фигуры реальной Земли. При использовании этого метода играет роль удобное для построения триангуляции расположение спутника и возможность наблюдать его с разных станций в строго одновременные моменты.

2. Второе направление использования искусственных спутников Земли в геодезии основано на решении динамической задачи. В принципе этот метод также может быть использован для построения пространственной космической триангуляции.

Пользуясь теорией движения искусственных спутников, можно для любого момента определить положение спутника на орбите и его координаты в пространстве (почему способ часто называют орбитальным). Наблюдая спутник с двух станций — с известными координатами и неизвестными, мы можем вычислить треугольник и определить неизвестные координаты определяемой станции. В этом случае, поскольку положение на орбите определяется в небесной механике относительно центра масс Земли, появляется возможность попутно определить и положение центра масс. Однако в силу ряда причин и в первую очередь в силу неоднородности гравитационного поля, орбита спутника не является правильной эллиптической орбитой, а непрерывно эволюционирует. Поэтому, чтобы знать точно положение спутника в пространстве, надо ввести поправки за влияние гравитационного поля, сопротивление атмосферы, световое давление и т. п. Для этого в свою очередь надо знать точно гравитационное поле Земли, его систематические и аномальные отклонения от однородности. Но метод позволяет решить и обратную задачу: по отклонениям наблюденных положений спутника от невозмущенных, каковые имел бы он при центральном гравитационном поле, установить основные характеристики гравитационного поля, его отклонения от центрального, а также определить основные элементы фигуры Земли, ее сжатие и региональные отклонения от правильного эллипсоида вращения.

То же относится к вопросам влияния сопротивления атмосферы, светового давления и других возмущающих орбитальное движение спутника факторов.

Геометрический принцип космической геодезии не нов. Идеи использовать небесные объекты в качестве визирных целей неоднократно высказывались и осуществлялись на практике. Так, Луна может быть использована для решения геодезических

задач, однако ее удаленность не позволяет получить высокой точности. Максимальный суточный параллакс Луны составляет 61′32″, поэтому если ее использовать как визирную цель для построения треугольников, то последние получатся с очень острыми углами и их решение будет иметь низкую точность. Также вследствие удаленности влияние на Луну неоднородности земного гравитационного поля невелико, что также приводит к низким точностям при определении его параметров и параметров фигуры Земли. Большую трудность также представляет точное наведение на Луну, поскольку форма ее неправильна и центр геометрической фигуры определяется довольно грубо. Координаты точки на Земле с помощью наблюдений Луны в лучшем случае могут быть определены с точностью 100 *м* и более.

Метод покрытия звезд Луной позволяет определять координаты наземных пунктов более точно. Наблюдая одновременно момент исчезновения звезды за лунным диском с двух наземных станций и зная координаты одной из наземных станций и центра Луны, а также зная лунный диаметр, можно построить треугольник с двумя известными положениями вершин и с двумя измеренными углами; решая этот треугольник, легко определить координаты третьей вершины, т. е. координаты искомой станции. Одновременность наблюдений достигается здесь самим фактом одновременности покрытия. Однако это не вполне точно. Для различных положений наблюдателя моменты покрытия не совпадают. Для пунктов, расположенных на расстояниях в несколько сотен километров на Земле, ошибка за счет неодновременности покрытия и неточного знания лунной топографии имеет порядок 20 *м*.

Как уже рассмотрено ранее, наблюдения Луны — ее либраций и неравенств движения,— позволяют определить и основные параметры фигуры Земли. Однако большая удаленность Луны требует очень точного времени синхронизации наблюдений и точных угловых измерений. Так, при средней удаленности Луны на 384 400 *км* ошибка направления в 0″,01 вызовет линейное смещение на Земле в 20 *м*. В то же время при удалении визирной цели на 1000 *км* та же ошибка в направлении вызовет линейное смещение лишь на 5 *см*. Иными словами, даже просто достигаемая точность угловых измерений в 1′ обеспечит получение координат станций с точностью 5 *м*. Ошибка во времени наблюдения на 1 микросекунду вызывает ошибку в координатах в 1 *м*. То же относится и к определениям элементов гравитационного поля Земли. Луна, удаленная от Земли примерно в 300—500 раз дальше искусственного спутника, испытывает воздействие притяжения Земли и его возмущений примерно в 10^5 раз слабее. Поэтому искусственные спутники Земли оказываются объектами, весьма полезными для геодезии. С одной сторо-

ны, они достаточно далеки от Земли, чтобы обеспечить возможность построения точной сети пространственной триангуляции со сторонами в несколько сотен и даже тысяч километров, тогда как при наземных визирных целях обычная длина сторон треугольников 25—30 *км*. С другой стороны, они достаточно близки, чтобы эффективно ощущать влияние аномального гравитационного поля.

Наконец, при выборе высот движения геодезических спутников большую роль играет сопротивление атмосферы. И если для целей геометрической спутниковой геодезии это важно лишь в смысле длительности времени существования спутника, то для задач, связанных с наблюдением возмущений орбит, это важно и с точки зрения этого фактора.

§ 2. Геодезические спутники

Оптимальные высоты движения геодезических спутников — 1000—2500 *км*. В диапазоне этих высот обеспечивается высокая точность наблюдений и в то же время одновременная видимость с достаточно удаленных наземных станций, достаточно слабо сопротивление атмосферы и в то же время достаточно велико влияние неоднородностей гравитационного поля на элементы орбиты спутника. Наклонение орбиты геодезического спутника должно быть велико, чтобы спутник мог наблюдаться в высоких широтах.

Наблюдения спутников могут вестись разными способами: оптическим, визуальным, фотографическим, радиолокационным, с использованием доплеровского эффекта, лазерным. Для обеспечения возможности тех или иных или всех сразу методов наблюдений спутник, предназначенный для геодезических целей, должен обладать специальными приспособлениями, такие наблюдения обеспечивающими.

В комплекс бортовой аппаратуры обычно включается световой маяк, излучающий световые вспышки по определенной программе, радиопередатчик для производства доплеровских измерений, ретрансляторы радиосигналов радиодальномерной системы, радиовысотомер, уголковые отражатели для производства лазерных измерений расстояний, высокоточные часы и командное программное устройство.

На первых порах развития спутниковой геодезии были запущены спутники-баллоны «Эхо-1» и «Эхо-2», имевшие большой объем (диаметр порядка 30 *м*), светящиеся ярким отраженным светом и весьма удобные для наблюдения. После успешного использования этих спутников для геодезии в США был запущен уже специально геодезический спутник «Пагеос». Это также пассивный спутник — баллон диаметром около 30 *м* с

алюминированной поверхностью для усиления отражательной способности. Однако такие спутники выполняют только одну функцию — являются визирной целью и никакой информации о гравитационном поле и фигуре Земли дать не могут. Они слишком подвержены возмущениям от сопротивления атмосферы и светового давления. Позже были запущены более совершенные многофункциональные геодезические спутники, такие как «Геос», что означает «геодезический земной орбитальный спутник». Эти спутники имеют световой маяк, дающий серии

Таблица 17

Спутники пассивные и баллоны	Время запуска	Диаметр, *м*	Яркость, зв. величина	Наклон орбиты, град.	Высота, *км*
«Эхо-1»	12.VIII.1960	30	+1÷0	47	900—1300
«Эхо-2»	25.I.1967	41	—1+1	82	1100
«Пагеос»	1966	30	+2+5	85	2200 перигей 6000 апогей

Активные спутники	Время запуска	Оборудование для геодезич. измерений	Яркость	Наклон орбиты, град.	Высота, *км*
«Анна 1-В»	31.X.1962	Световая вспышка, доплеровское устройство, система «Секор»	8	50	1077 перигей, 1184 апогей
«Геос-А»	6.XI.1965	Световая вспышка, уголковый отражатель, доплеровское устройство, система «Секор»	7,5	59,4	1114 перигей, 2277 апогей
«Геос-В»	11.I.1968	»	7,5	105,7	1078 перигей, 1572 апогей
«Эксплорер-22»	10.X.1964	Уголковый отражатель, доплеровское устройство	8	79,7	881 перигей, 1088 апогей
«Эксплорер-27»	29.IV.1965	»	8	41	940 перигей, 1318 апогей
«Диадем-1»	8.II.1967	Доплеровское устройство, уголковые отражатели	8,5	40,1	580 перигей, 1340 апогей
«Диадем-2»	15.II.1967	»	8,5	39,4	592 перигей, 1886 апогей
«Пеоль»	XII.1970	»	8	14	730 перигей, 860 апогей

по семь вспышек с интервалами между вспышками 4 секунды, доплеровский передатчик, уголковые лазерные отражатели, радиодальномерную систему. На спутнике установлены атомные часы, обеспечивающие выполнение программ и выдачу отметок времени с высокой точностью.

В 1967 г. были запущены два французских геодезических спутника «Диадем», имеющие на борту систему доплеровских передатчиков и лазерные отражатели.

Рассматриваются проекты специальных геодезических спутников (США). Так, предлагается создать спутник, на который не действовало бы сопротивление атмосферы. Идея состоит в том, чтобы поместить спутник в полый прозрачный баллон, принимающий на себя сопротивление атмосферы и корректирующийся по положению внутреннего тяжелого ядра. Создание такого спутника даст возможность с высокой степенью точности определять параметры гравитационного поля и фигуры Земли.

В таблице 17 приведены некоторые основные характеристики для нескольких ранее упомянутых спутников.

При использовании спутников для космической геодезии весьма важен выбор наклонов орбит. Спутник должен быть виден с различных станций. Орбиты с близким к нулевому наклонением не годятся также вследствие того, что в уравнения для изменения элементов, по которым определяются параметры фигуры Земли и ее гравитационного поля, входит член, содержащий синус наклонения, принимающий малые значения при малых углах наклона. Вопрос выбора орбит будет обсуждаться с бо́льшим основанием в главе об определениях гармоник гравитационного потенциала.

§ 3. Способы наблюдения искусственных спутников Земли и применяющиеся при этом инструменты

Существуют различные способы наблюдения ИСЗ: оптический визуальный, фотографический, радиотехнический и лазерный. Первые два дают направления на спутник, третий—расстояния, четвертый — то и другое, поэтому выгодным является сочетание способов.

Оптические способы наблюдений. Оптический визуальный способ применялся на заре развития спутниковой геодезии и в силу своей низкой точности больше не применяется. Фотографические наблюдения в зависимости от способа и инструмента обеспечивают угловую точность в $\pm 0''{,}5$—$2''$, что, как мы уже видели, соответствует приблизительно 2—10 *м* в определении координат станции. Радиоинтерференционный способ определяет расстояния, а не направления, так что он не является альтернативным фотографическому способу.

Наиболее распространенным способом наблюдений является фотографирование спутника на фоне звезд. При этом получается фотография следа спутника на пластинке, на которой одновременно фотографируется несколько опорных звезд, координаты которых α, δ приведены в специальных каталогах. Если смещение спутника относительно опорной звезды $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$, то его координаты будут $\alpha + \Delta\alpha$, $\delta + \Delta\delta$.

Точность фотографического определения координат спутника определяется точностью каталога опорных звезд и точностью компаратора, на котором производятся измерения. Средняя квадратическая ошибка фотографического определения направления на спутник $1'' \div 2''$.

Существуют три разновидности фотографического метода:

1) когда фотопластинка или пленка неподвижна и на ней фиксируются следы перемещающихся суточным движением звезд и спутника в виде прямых линий с разрывами, задаваемыми часами;

2) когда пластинка перемещается вместе с камерой, следя за суточным движением звезд; в этом случае на пластинке получаются точечные изображения звезд и прямолинейная траектория спутника с временными разрывами;

3) когда камера перемещается, следя за спутником. В этом случае спутник изображается на пластинке точкой, а звезды штриховыми линиями.

Первому случаю соответствуют азимутальные неподвижные установки, при которых инструмент имеет движение по азимуту и высоте. Труба инструмента наводится на спутник или заранее устанавливается на область неба, где спутник будет проходить, и закрепляется. В момент прохождения спутника открывается затвор камеры. Второму случаю соответствуют параллактические установки с часовым механизмом, обеспечивающим суточное движение камеры по прямому восхождению. С такой камерой получаются непосредственно прямое восхождение и склонение спутника. Наконец в третьем случае обычно употребляют азимутальные установки, имеющие движение, позволяющее следить за спутником и оставляющие его изображение на пластинке неподвижным.

Инструменты третьего типа наиболее совершенны, потому что они позволяют наблюдать слабо светящиеся спутники. Так, отслеживающая спутник камера Бейкера — Нанна фотографирует спутники до 12 зв. величины, тогда как неподвижные установки обеспечивают видимость спутника до 4—7-й звездной величины.

За недолгий период развития космической геодезии было сконструировано и употреблялось около двух десятков различных инструментов для фотографических наблюдений. Нет смыс-

ла да и затруднительно все их описывать. Наиболее известными и употребимыми являются сейчас инструменты, перечисленные в таблице 18.

Таблица 18

Название и страна	Монтировка	Точность регистрации		Поле зрения	Достижимая звездная величина
		направлений	времени		
Следящие камеры					
Бейкер-Нанн США 1957	Азимутальная трехосная с сопровождением спутника. Зеркальный телескоп Шмидта	2″	0ˢ,001	30°×5°	12
АФИ-75 СССР, 1965	Четырехосная паралактическая со следящей системой	1	0,001	15°×10°	10
ВАУ СССР 1958	Трехосная параллактическая с сопровождением спутника, зеркально-линзовый телескоп Максутова	1	0,0001	30°×5°	12
Цейсс ГДР 1966	Четырехосная азимутальная с сопровождением спутника, телескоп Шмидта	1—2	0,001—0,002	5°×8°	10
Антарес, Франция 1963	Четырехосная, экваториальная	2	0,001	11°×11°	10
Неследящие системы					
НАФА-3С/25 СССР	Параллактическая или азимутальная	3″—4″	0ˢ,003	30°×50°	—
ВС-4, Вильд Швейцария 1962	Параллактическая и азимутальная	0,7	0,005	33°×33°	7
РС-1000 США 1961	Азимутальная	0,4	0,001	10°×10°	8
Камера Хьюита Англия 1962	Азимутальная система Шмидта	1,1	0,0005	10°×10°	7,5

Радиотехнические методы измерения расстояний. Для определения расстояния до спутников применяются радиодальномерные системы типа описанных в главе первой. В частности, применяются системы, использующие фазовый принцип измерения. Такова, например, система Секор (Sequential Collation of Ranges — последовательное сопоставление дальностей), которая используется при работе со спутника-

ми «Анна» и «Геос». Система состоит из трех станций с твердыми координатами, спутника и четвертой, определяемой станции. Расстояния между станциями могут быть до четырех тысяч километров. Дальность спутника измеряется подсчетом изменений фаз. Измерения с трех станций обеспечивают определение положения спутника. Измерения с четвертой станции позволяют определить ее собственное положение.

Широко применяется также метод доплеровского смещения частоты при удалении или приближении движущихся излучателей. Для этого на спутнике устанавливается передатчик, подающий частоту f_c, которая сравнивается со стандартной частотой наземной приемно-передающей станции. Сдвиг частоты при перемещении спутника по лучу зрения, вызванный доплеровским эффектом, есть функция самой частоты и скорости изменения расстояния:

$$\Delta f = f_н - f_c = \frac{f_c}{c}\frac{ds}{dt},$$

где $f_н$ — наблюденная частота, f_c — передающая частота спутника, c — скорость света, s — расстояние до спутника.

Практически невозможно определить мгновенную частоту $f_н$. Наблюдают некоторую интегральную частоту за время наблюдения $t_1 - t_0$. За это время частота изменяется от некоторого нулевого значения f_0 до f_1, так что получают интегральную величину

$$\int_{t_0}^{t_1} (f_1 - f_0)\, dt,$$

но f_1 можно определить как $f_1 = f_c + \Delta f$; тогда

$$A = \int_{t_0}^{t_1} (f_1 - f_0)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} (f_c + \Delta f - f_0)\, dt =$$

$$= (f_c - f_0)(t_1 - t_0) + \frac{f_c}{c}(s_1 - s_0).$$

Таким образом, по наблюденной величине A при известных f_0, f_c, c можно получить изменение расстояния до спутника $s_1 - s_0$ за время $\Delta t = t_1 - t_0$, т. е. скорость по лучу зрения.

Лазерный метод. Наиболее перспективным методом измерения положений спутников и координат станций является лазерный метод. Этот метод может давать расстояния и направления одновременно, так что он полнее любых других методов. Принцип этого способа очень прост: световой импульс лазера посылается к спутнику, отражается от него и принимается приемной станцией на Земле; одновременно фиксируется точное время. Тогда путь, пройденный лучом лазера в одном

направлении $s = \frac{1}{2} c\Delta t$, и есть расстояние до спутника. Здесь c — скорость света, Δt — разность времен от момента посылки до приема лазерного луча.

Кроме того, отраженный лазерный импульс может быть сфотографирован на фоне звезд. Тогда, как и в фотографическом способе, мы получаем небесные угловые координаты спутника по известным координатам звезд. Таким образом, лазерный метод обеспечивает определение полного топоцентрического вектора положения спутника. Этот метод позволяет определить сразу положение спутника в пространстве или, оборачивая задачу, — координаты станции. Обычно определяются поправки в координаты. Уже на первых порах применения лазерного метода достигнуты точности в определении координат в ± 2 *м*.

§ 4. Системы координат

При изучении движения ИСЗ и использования их в геодезических целях приходится пользоваться различными системами координат. Поскольку спутник движется относительно центра масс Земли, а наблюдения производятся на станциях, расположенных на поверхности Земли, при представлении движения спутника удобно оперировать с координатами, отнесенными именно к этим точкам, а также к самому спутнику.

Соответственно будем иметь: геоцентрическую систему координат, с началом в центре масс Земли, топоцентрическую систему с началом на станции наблюдения, на поверхности Земли и спутникоцентрическую систему с началом на спутнике. Поскольку центр масс Земли неизвестен, приходится заменять геоцентрические координаты близкими к ним квазигеоцентрическими, отнесенными к центру геодезического референц-эллипсоида. В каждой из указанных систем отсчета могут быть введены прямоугольные координаты x, y, z или сферические ρ, ψ, λ. При рассмотрении положения точки на эллипсоиде или вблизи от него могут быть использованы геодезические координаты H, B, L, где H — высота над эллипсоидом, B — широта и L — долгота точки. Формулы перехода от прямоугольных координат к сферическим и к геодезическим имеют вид (рис. 113, 114)

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho \cos\psi \cos\lambda = (N + H)\cos B \cos L, \\ y &= \rho \cos\psi \sin\lambda = (N + H)\cos B \sin L, \\ z &= \rho \sin\psi = [N(1 - e^2) + H]\sin B. \end{aligned}\right\} \qquad (17.1)$$

Здесь N — радиус меридианного сечения эллипсоида.

Помимо выбора начала, координатные системы характеризуются выбором направления осей. Наиболее часто применяемые

геоцентрические системы координат имеют следующие направления осей:

1. Мгновенная земная геоцентрическая система координат: ось Z направлена к северному полюсу по мгновенной оси вращения Земли, ось X в плоскости мгновенного экватора параллельна плоскости мгновенного меридиана Гринвича, ось Y на 90° к западу от оси X.

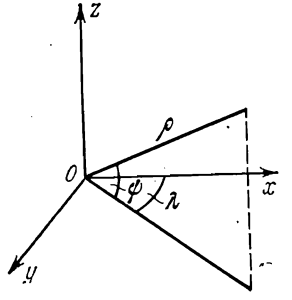


Рис. 113.

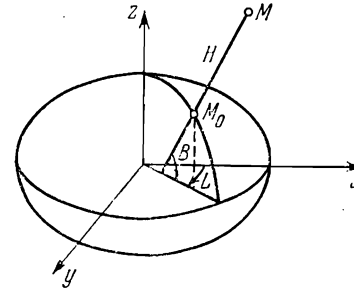


Рис. 114.

2. Средняя земная геоцентрическая система координат: ось Z направлена к северному полюсу по средней оси вращения Земли, ось X в плоскости среднего экватора, параллельно плоскости среднего гринвичского меридиана, ось Y на 90° к западу от оси X.

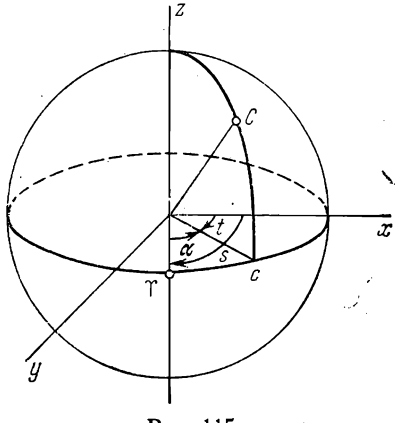


Рис. 115.

3. Мгновенная звездная геоцентрическая система координат: ось Z направлена к северному полюсу по мгновенной оси вращения Земли, ось X — в плоскости мгновенного экватора, в истинную точку весеннего равноденствия Υ, ось Y на 90° к западу от оси X.

В этой системе сферическими координатами будут геоцентрическое расстояние r, склонение δ и прямое восхождение α или угол $(s-\alpha)$, где s — часовой угол точки весеннего равноденствия (звездное время), отсчитываемый от гринвичского меридиана (рис. 115). Тогда

$$X = r\cos\delta\cos(s-\alpha),\quad Y = r\cos\delta\sin(s-\alpha),\quad Z = r\sin\delta. \tag{17.2}$$

4. Звездная геоцентрическая система координат на данную эпоху: ось Z направлена к среднему полюсу, ось X в среднюю точку весеннего равноденствия данной эпохи, ось Y на 90° к западу от оси X.

Первые две из этих систем применяются при определении положения наземных станций, две другие — при определении положения спутника.

5. Часто употребляемой, особенно при решении задач, связанных с движением спутника, является орбитальная система координат с началом в центре масс Земли. В этой системе принято обозначать прямоугольные координаты через S, T, W: ось S направлена по геоцентрическому радиусу-вектору спутника, ось T в плоскости мгновенной орбиты спутника в сторону движения спутника, ось W перпендикулярно к осям S, T.

Наиболее употребляемыми топоцентрическими координатами являются следующие:

а) Мгновенная топоцентрическая земная система. Ее оси ξ, η, ζ параллельны осям X, Y, Z мгновенной геоцентрической системы координат.

б) Мгновенная топоцентрическая звездная система координат. Оси x, y, z этой системы параллельны осям X, Y, Z мгновенной геоцентрической звездной системы, т. е. ось z — параллельна мгновенной оси вращения Земли, ось x расположена в направлении истинной точки весеннего равноденствия.

В этой системе чаще применяются сферические координаты ρ, α, δ — топоцентрическое расстояние, прямое восхождение и склонение, отнесенные к истинным экватору и эклиптике; при этом

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\delta\cos(s-\alpha),\\ y &= \rho\cos\delta\sin(s-\alpha),\\ z &= \rho\sin\delta. \end{aligned}\right\} \qquad (17.3)$$

в) Топоцентрическая горизонтальная система координат. Ось z направлена по отвесной линии вверх, ось x — в плоскости горизонта по направлению мгновенного меридиана к югу, ось y — на 90° к западу.

В этой системе чаще применяются сферические координаты ρ, h, A — топоцентрическое расстояние, высота и азимут:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos h\cos A,\\ y &= \rho\cos h\sin A,\\ z &= \rho\sin h. \end{aligned}\right\} \qquad (17.4)$$

Пользуясь введенными системами координат, легко получить геоцентрические координаты станции слежения по наблюденным координатам спутника. Пусть O — центр масс Земли,

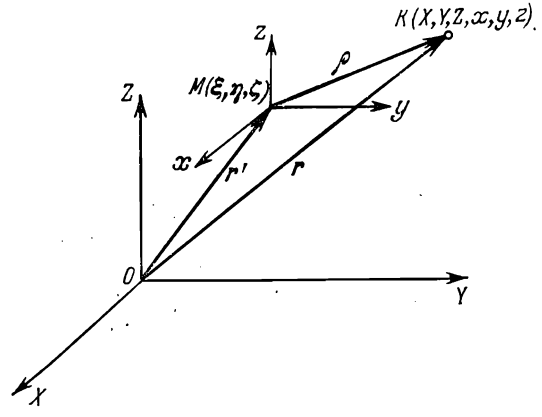


Рис. 116.

X, Y, Z — геоцентрические мгновенные звездные координаты (рис. 116). В этой системе координаты спутника K будут

$$\left.\begin{aligned} X &= r\cos\delta\cos(s-\alpha),\\ Y &= r\cos\delta\sin(s-\alpha),\\ Z &= r\sin\delta, \end{aligned}\right\} \qquad (17.5)$$

M — станция слежения, с которой совмещено начало системы топоцентрических координат. В этой системе координаты спутника K будут:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\delta'\cos(s-\alpha'),\\ y &= \rho\cos\delta'\sin(s-\alpha'),\\ z &= \rho\sin\delta'. \end{aligned}\right\} \qquad (17.6)$$

Координаты самой станции M будут ξ, η, ζ.

Из рисунка видно, что $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{\rho}$, или в проекциях на оси координат:

$$\begin{aligned} \xi &= X - x,\\ \eta &= Y - y,\\ \zeta &= Z - z. \end{aligned}$$

Заменяя X, Y, Z и x, y, z их значениями по формулам преобразования координат, получаем прямоугольные координаты

станции

$$\left.\begin{aligned} \xi &= r\cos\delta\cos(s-\alpha) - \rho\cos\delta'\cos(s-\alpha'),\\ \eta &= r\cos\delta\sin(s-\alpha) - \rho\cos\delta'\sin(s-\alpha'),\\ \zeta &= r\sin\delta - \rho\sin\delta'. \end{aligned}\right\} \qquad (17.7)$$

Эти формулы и решают задачу определения положения станции наблюдения ИСЗ.

При решении задач космической триангуляции большую роль играет четвертая координата — время.

Звездное время определяется положением (часовым углом) точки весеннего равноденствия. Солнечное время — положением (часовым углом) Солнца. Различают истинное солнечное время, определяемое фактическим положением Солнца, и среднее солнечное время, определяемое фиктивным, равномерно движущимся Солнцем.

Среднее солнечное время, отсчитываемое от полуночи на гринвичском меридиане, называется *всемирным временем.*

Различают три системы всемирного времени:

TU_0 — всемирное время, полученное непосредственно из астрономических наблюдений, как угол между мгновенным положением гринвичского меридиана и кругом склонения среднего Солнца;

TU_1 — всемирное время, исправленное за смещение полюса Земли;

TU_2 — всемирное время, исправленное за смещение полюса Земли и за неравномерность вращения Земли.

TU_2 можно рассматривать как равномерно текущее на сравнительно большом промежутке времени (до нескольких лет).

Кроме описанных модификаций всемирного времени для решения задач спутниковой геодезии и небесной механики используется также строго равномерное время, определяемое по наблюдениям орбитального движения Луны вокруг Земли. Такое время получило название эфемеридного и обозначается ТЕ. Его определение основано на том, что для Луны разработана строгая теория ее движения, позволяющая предсказывать с высокой точностью ее положение на много лет вперед. Одна секунда эфемеридного времени равна 1 : 31 556 925,9747 части тропического 1900 года. Эфемеридное время расходится со всемирным. На 1970 год это расхождение составило

$$T = \mathrm{TE} - \mathrm{TU}_1 = 38^{s}.$$

За последнее время, когда техника измерений позволила определять интервалы времени с точностью порядка 10^{-10}, было обнаружено много неравномерностей во вращении Земли. Поэ-

тому в качестве эталона времени было решено принять более постоянную единицу, чем секунда, основанная на вращении Земли. Такой единицей в системе СИ принята секунда, основанная на резонансной частоте квантовых переходов атомов цезия. Эта секунда равна 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующим переходу между двумя уровнями основного состояния атома изотопа цезия с массовым числом 133 при нулевом магнитном поле. Такая атомная секунда очень близка к астрономической секунде, равной 1/86400 части суток *).

§ 5. Основные правила матричных операций

В работах по спутниковой геодезии часто применяется матричное представление векторов. Применяются матрицы и в последующих параграфах настоящего курса. Для облегчения чтения книги, а также для облегчения чтения литературы по спутниковой геодезии приводим в этом параграфе основные законы матричного представления векторов и операций с ними.

Вектор $\boldsymbol{x}=\{x_1, x_2, x_3\}$ можно преобразовать в другой вектор $\boldsymbol{y}$ с помощью линейного преобразования

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \tag{17.8}$$

или в координатной форме

$$y_i=\sum_j a_{ij}x_j, \tag{17.9}$$

или для случая $i, j = 1, 2, 3$ эти соотношения могут быть представлены в форме

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,\\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,\\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned}\right\} \tag{17.10}$$

Матрица $\boldsymbol{A}$ при $i = 3$

$$\boldsymbol{A}=\|a_{ij}\|=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{Vmatrix}. \tag{17.11}$$

В матрице первый индекс обозначает строку, второй — столбец. Числа a_{ij}, входящие в матрицу, называются элементами. Числа элементов в строке n и в столбце m определяют размер матрицы. Рассмотрим некоторые типы матриц и основные операции над ними.

*) См. «Справочное руководство по небесной механике и астродинамике», «Наука», изд. 2-е, 1976.

1. Матрица-столбец определяет вектор

$$\boldsymbol{a} = \|a_i\| = \left\|\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{matrix}\right\|. \tag{17.12}$$

Элементы такой матрицы определяют составляющие вектора по осям m-мерной координатной системы. Для случая декартовых координат

$$\boldsymbol{a} = \left\|\begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix}\right\|.$$

2. Квадратная матрица содержит одинаковое число элементов в строке и в столбце, т. е. для нее $n = m$.

3. Диагональная матрица — матрица, все элементы которой, кроме диагональных, равны нулю, т. е. $a_{ij}=0$ при $i \neq j$.

Пример диагональной матрицы третьего порядка

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{matrix}\right\|. \tag{17.13}$$

4. Нулевой матрицей называют матрицу, все элементы которой нули:

$$\left\|\begin{matrix} 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 \ldots 0 \end{matrix}\right\| = 0. \tag{17.14}$$

5. Симметричной матрицей называется матрица, все элементы которой удовлетворяют условию $a_{ij} = a_{ji}$. Соответственно условием антисимметричности является условие

$$a_{ij} = -a_{ji}. \tag{17.15}$$

6. Матрицей, транспонированной по отношению к данной, называют матрицу, элементы которой удовлетворяют условию

$$b_{ij} = a_{ji} \tag{17.16}$$

Матрицей $\boldsymbol{B}$, транспонированной к $\boldsymbol{A}$, где

$$\boldsymbol{A} = \left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right\|,$$

будет

$$\boldsymbol{B} = \left\|\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{matrix}\right\|$$

Матрицу, транспонированную по отношению к $\boldsymbol{A}$, обозначают обычно $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

7. Ортогональной матрицей называют такую квадратную матрицу, произведение которой на свою транспонированную дает единичную матрицу. Определитель ортогональной матрицы

$$|a_{ij}| = \pm 1.$$

Единичной называется матрица, в которой диагональные элементы равны единице, а все остальные нулю

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = 1.$$

Ортогональная матрица, определитель которой равен $+1$, называется матрицей вращения. Если в выражении уравнения

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{17.8}$$

определитель $\det \boldsymbol{A} = 1$, то $\boldsymbol{A}$ есть матрица вращения и выражение (17.8) определяет поворот осей координат.

Матрица направляющих косинусов является матрицей вращения ранга 3.

$$\boldsymbol{R}_3(\theta) = \begin{Vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{17.17}$$

Основные операции над матрицами.

1. Сумма $\boldsymbol{C}$ двух матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ одинаковых размеров есть матрица, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}. \tag{17.18}$$

Аналогично определяется разность матриц одинаковых размеров

$$d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}. \tag{17.19}$$

2. Произведение матриц $\boldsymbol{A}$ размером $m \times n$ и $\boldsymbol{B}$ размером $n \times q$ равно матрице $\boldsymbol{P}$ размером $m \times q$, элементы которой определяются формулой

$$p_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, q). \tag{17.20}$$

Умножение матриц удовлетворяет ассоциативному свойству $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$, но не удовлетворяет коммутативному:

$$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}. \tag{17.21}$$

Кроме того,

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}. \tag{17.22}$$

Если определитель квадратной матрицы A отличен от нуля, то существует одна и только одна матрица A^{-1}, обратная матрице A, для которой

$$AA^{-1} = A^{-1}A = 1. \tag{17.23}$$

3. Дифференцирование и интегрирование матрицы производится путем дифференцирования или интегрирования отдельно каждого ее элемента.

§ 6. Принцип космической триангуляции

Основной задачей космической триангуляции является определение положения системы опорных точек на земной поверхности и в конечном счете точное определение формы и размеров Земли.

Однако в космической триангуляции, являющейся пространственной, вершины треугольников располагаются не только на Земле, в пунктах расположения станций слежения ИСЗ, но и в пространстве, в точках положения спутника в момент наблюдения. Те и другие пункты неравноправны. Точки на Земле могут иметь координаты, определенные способом наземной или космической геодезии, могут быть закреплены на местности, и тогда они могут служить опорными пунктами для геодезии вообще и в том числе для определения положения спутника. Точка мгновенного положения спутника не может быть закреплена и может наблюдаться только однажды. Задача определения положения спутника по известным координатам станций наблюдения на Земле называется *прямой задачей космической триангуляции.*

Положение спутника на орбите и положение орбиты в пространстве может быть вычислено по наблюдениям движения спутника методами небесной механики. Тогда по положению спутника в момент наблюдения его с наземной станции можно определить координаты станции наблюдения. Эта задача называется *обратной задачей космической геодезии.*

Поскольку наблюдать спутник в данной точке можно только один раз, прямая задача решается не очень точно. Кроме того, для геодезии нет практической надобности точно знать координаты некоторой, никак не зафиксированной в пространстве точки. Поэтому прямая задача имеет иной смысл. Она решается для определения элементов орбиты спутника. Обратная задача, наоборот, имеет практическое значение, так как в ней определяются фиксированные точки на земной поверхности. В то же время точность этих определений может все время повышаться по мере накопления наблюдений. Решение обратной задачи является основным при геометрическом построении системы

опорных точек и именно оно и получило название *космической триангуляции.*

Основное уравнение космической триангуляции связывает положение станции на земной поверхности с положением спутника и может быть написано в векторной форме (рис. 117) так:

$$\boldsymbol{R}_c = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{\rho}, \tag{17.24}$$

где $\boldsymbol{R}_c$ — геоцентрический радиус-вектор спутника, $\boldsymbol{R}$ — геоцентрический радиус-вектор станции слежения, $\boldsymbol{\rho}$ — топоцентрический радиус-вектор спутника, т. е. вектор, направленный от станции слежения к спутнику.

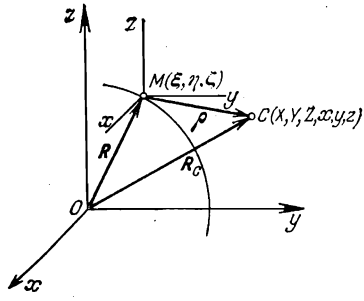


Рис. 117.

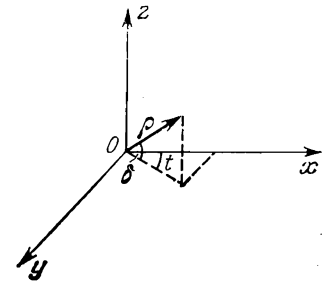


Рис. 118.

Непосредственному измерению подлежит радиус-вектор $\boldsymbol{\rho}$. При этом могут быть измерены или только направление, характеризуемое единичным вектором (ортом) $\boldsymbol{i}$, или только расстояние, характеризуемое модулем $|\boldsymbol{\rho}| = \rho$, или, наконец, и то и другое.

Если в геоцентрической системе координат ось Z направить по оси вращения Земли к северному полюсу, ось X — в плоскости гринвичского меридиана, а ось Y на 90° к западу от направления плоскости гринвичского меридиана, то любое направление в пространстве, определяемое в произвольной точке C ортом $\boldsymbol{i}$, может быть охарактеризовано часовым углом t и склонением δ (рис. 118). Проекции орта $\boldsymbol{i}$ будут

$$\left.\begin{aligned} i_x &= \cos\delta\cos t, \\ i_y &= \cos\delta\sin t, \\ i_z &= \sin\delta \end{aligned}\right\} \tag{17.25}$$

и, соответственно, проекции измеряемого вектора $\boldsymbol{\rho}$ будут

$$\left.\begin{aligned} \rho_x &= \rho\cos\delta\cos t, \\ \rho_y &= \rho\cos\delta\sin t, \\ \rho_z &= \rho\sin\delta. \end{aligned}\right\} \tag{17.26}$$

Основное уравнение космической триангуляции в скалярной форме может быть записано в виде

$$\left.\begin{aligned} R_{cx} &= R_x + \rho\cos\delta\cos t,\\ R_{cy} &= R_y + \rho\cos\delta\sin t,\\ R_{cz} &= R_z + \rho\sin\delta. \end{aligned}\right\} \qquad (17.27)$$

Начало координат в этом случае располагается в центре масс Земли. Однако обычно геоцентрические координаты точек земной поверхности не известны, а известны геодезические координаты B, L, H — широта, долгота и высота, отнесенные к центру принятого при обработке геодезических данных референц-эллипсоида. Прямоугольные координаты станции слежения определяются при этом формулами

$$\left.\begin{aligned} x &= (N+H)\cos B\cos L,\\ y &= (N+H)\cos B\sin L,\\ z &= [N(1-e^2)+H]\sin B, \end{aligned}\right\} \qquad (17.28)$$

$$N = a(1-e^2\sin^2 B)^{-1/2},$$

где N — радиус-вектор меридианного сечения эллипсоида, проходящего через станцию слежения, H — высота станции слежения над эллипсоидом, B, L — геодезические широта и долгота станции.

Если известно положение станции, т. е. вектор $\boldsymbol{R}$, и измерен вектор $\boldsymbol{\rho}$ т. е. определено в некоторый момент времени направление со станции слежения на спутник и расстояние ρ до него, то уравнение (17.24) или (17.27) позволяет вычислить вектор $\boldsymbol{R}_c$, т. е. определить геоцентрическое положение спутника в момент s.

В случае только угловых измерений, т. е. при условии что измеряются только направления на спутник в момент s, для получения вектора $\boldsymbol{R}_c$ необходимо иметь два уравнения вида (17.24),

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{R}_c &= \boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{\rho}_1,\\ \boldsymbol{R}_c &= \boldsymbol{R}_2 + \boldsymbol{\rho}_2, \end{aligned}\right\} \qquad (17.24')$$

т. е. наблюдение необходимо производить с двух станций с известными координатами. В скалярной форме это нам дает шесть уравнений с 5-ю неизвестными (R_{cx}, R_{cy}, R_{cz}, ρ_1, ρ_2).

В случае измерения только расстояний необходимо вести наблюдения с трех известных станций и получить три уравнения вида (17.24).

Все это относится в равной степени и к обратной задаче, т. е. если положение спутника известно (известен вектор $\boldsymbol{R}_c$)

и измерены расстояние до спутника ρ и направление на него (измерен вектор $\boldsymbol{\rho}$), то одного уравнения (17.24) достаточно для определения координат станции (т. е. вектора $\boldsymbol{R}$).

При измерении только направлений для определения координат станции надо иметь наблюдение двух положений спутника (то же самое двух спутников) и, наконец, при измерении только расстояний требуется наблюдение трех положений спутника для составления трех уравнений вида (17.24).

Уравнение (17.24) составлено для геоцентрических координат X, Y, Z с началом в центре масс Земли. Однако практически известны прямоугольные геодезические координаты x, y, z, отнесенные к центру O' референц-эллипсоида. Начало этой системы не совпадает с центром масс Земли и определяется относительно него вектором $\overrightarrow{OO'}$ и поворотом относительно системы XYZ на малый угол, характеризуемый вектором вращения $\boldsymbol{\omega}(\alpha, \beta, \gamma)$. Поэтому, чтобы преобразовать координаты точки C, отнесенные к референц-эллипсоиду, в геоцентрические, достаточно сообщить точке C перемещение $\overrightarrow{OO'}$ в новое положение и вектору $\overrightarrow{OM}$ сообщить поворот $[\boldsymbol{\omega R}]$. Тогда радиус-вектор $\boldsymbol{R}$ в системе геоцентрических координат X, Y, Z будет

$$\boldsymbol{R}(X, Y, Z) = \boldsymbol{R}(x, y, z) + \overrightarrow{OO'} + [\boldsymbol{\omega R}(x, y, z)]. \quad (17.29)$$

Подставляя (17.29) в основное уравнение (17.24),

$$\boldsymbol{R}_c(X, Y, Z) = \boldsymbol{R}_1(X, Y, Z) + \boldsymbol{\rho}_1,$$

представим его в системе геодезических координат xyz:

$$\boldsymbol{R}_c(x, y, z) + \overrightarrow{OO'} + [\boldsymbol{\omega R}_c(x, y, z)] = \\ = \boldsymbol{R}_1(x, y, z) + \overrightarrow{OO'} + [\boldsymbol{\omega R}_1(x, y, z)] + \boldsymbol{\rho}_1$$

или, выполняя приведение подобных членов, с точностью до квадрата малых величин получаем

$$\boldsymbol{R}_c(x, y, z) = \boldsymbol{R}_1(x, y, z) + [\boldsymbol{\omega}(R_1 - R_c)] + \boldsymbol{\rho}_1. \quad (17.30)$$

Уравнение (17.30) является одним из основных в теории космической триангуляции. В это уравнение не входит вектор $\overrightarrow{OO'}$, т. е. не входит величина отклонения центра масс от геометрического центра референц-эллипсоида, откуда следует, что метод космической триангуляции при синхронном наблюдении спутников не дает возможности определить смещение центра геодезического референц-эллипсоида относительно центра масс Земли.

§ 7. Запись основного уравнения космической геодезии в матричной форме

В спутниковой геодезии часто употребляется матричная форма записи. В ней основное уравнение космической триангуляции (17.24) запишется следующим образом;

$$\begin{Vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix}. \tag{17.31}$$

Орт (17.25) можно записать так:

$$\boldsymbol{i} = \begin{Vmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Vmatrix}. \tag{17.32}$$

Теперь основное уравнение (17.24) запишем в виде

$$\begin{Vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Vmatrix} + \rho \begin{Vmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Vmatrix}. \tag{17.33}$$

где ρ — модуль вектора $\boldsymbol{\rho}$.

Уравнения (17.31) или (17.33) позволяют определить геоцентрические координаты X, Y, Z спутника, когда известны геоцентрические координаты ξ, η, ζ станции и положение x, y, z спутника относительно станции.

Эти же уравнения позволяют решить обратную задачу, т. е. определить геоцентрические координаты станции ξ, η, ζ по известным геоцентрическим координатам спутника X, Y, Z и наблюденным топоцентрическим координатам x, y, z.

Часто приходится встречаться с задачей, когда известны приближенные координаты и спутника и станции наблюдения и требуется их уточнение. Для такого случая легко получить дифференциальные формулы, связывающие поправки к приближенным координатам.

Продифференцируем (17.33):

$$\begin{Vmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{Vmatrix} + \rho \begin{Vmatrix} di_x \\ di_y \\ di_z \end{Vmatrix} + d\rho \begin{Vmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Vmatrix}. \tag{17.34}$$

Дифференциалы di_x, di_y, di_z получим, дифференцируя (17.25):

$$\left.\begin{aligned} di_x &= -\sin\delta\cos t\, d\delta - \cos\delta\sin t\, dt, \\ di_y &= -\sin\delta\sin t\, d\delta + \cos\delta\cos t\, dt, \\ di_z &= \cos\delta\, d\delta. \end{aligned}\right\} \tag{17.35}$$

Теперь уравнение (17.34) можно записать в матричной форме:

$$\begin{Vmatrix} dX-d\xi \\ dY-d\eta \\ dZ-d\zeta \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\rho\sin\delta\cos t & -\rho\cos\delta\sin t & \cos\delta\cos t \\ -\rho\sin\delta\sin t & \rho\cos\delta\cos t & \cos\delta\sin t \\ \rho\cos\delta & 0 & \sin\delta \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} d\delta \\ dt \\ d\rho \end{Vmatrix} \quad (17.36)$$

или, вынося за знак матрицы ρ,

$$\begin{Vmatrix} dX-d\xi \\ dY-d\eta \\ dZ-d\zeta \end{Vmatrix} = \rho \begin{Vmatrix} -\sin\delta\cos t & -\sin t & \cos\delta\cos t \\ -\sin\delta\sin t & \cos t & \cos\delta\sin t \\ \cos\delta & 0 & \sin\delta \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} d\delta \\ \cos\delta\, dt \\ \dfrac{d\rho}{\rho} \end{Vmatrix}. \quad (17.37)$$

Обозначая матрицы

$$\begin{Vmatrix} -\sin\delta\cos t & -\sin t & \cos\delta\cos t \\ -\sin\delta\sin t & \cos t & \cos\delta\sin t \\ \cos\delta & 0 & \sin\delta \end{Vmatrix} = \boldsymbol{Q}, \quad (17.38)$$

$$\begin{Vmatrix} d\delta \\ \cos\delta\, dt \\ \dfrac{d\rho}{\rho} \end{Vmatrix} = d\boldsymbol{l}, \quad (17.39)$$

запишем уравнение (17.36) в компактной форме:

$$d\boldsymbol{R}_c - d\boldsymbol{R} = \rho\boldsymbol{Q}\, d\boldsymbol{l}. \quad (17.40)$$

Уравнение (17.40) дает связь измеряемых топоцентрических координат α, δ, ρ или t, δ, ρ (поскольку $t = \alpha - s$, где s — гринвичское звездное время) с определяемыми поправками к координатам спутника

$$d\boldsymbol{R}_c = \begin{Vmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{Vmatrix}$$

или станции наблюдения

$$d\boldsymbol{R} = \begin{Vmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{Vmatrix}.$$

Уравнение (17.40) содержит поправки к положению как спутника $d\boldsymbol{R}_c$, так и станции наблюдения $d\boldsymbol{R}$. В случае определения поправок в координаты станции положение спутника считаем известным и поправка к ним равна нулю: $d\boldsymbol{R}_c = 0$; тогда уравнение дает поправки в координаты станции

$$d\boldsymbol{R} = -\rho\boldsymbol{Q}\, d\boldsymbol{l} \quad (17.41)$$

или

$$\begin{Vmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{Vmatrix} = \rho\boldsymbol{Q}d\boldsymbol{l}. \quad (17.42)$$

В случае определения поправок к положению спутника координаты станции известны и $d\boldsymbol{R} = 0$; тогда уравнение (17.40)

примет вид

$$d\boldsymbol{R}_c = -\rho \boldsymbol{Q}\, dl \tag{17.43}$$

или

$$\begin{Vmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{Vmatrix} = \rho \boldsymbol{Q} dl.$$

Уравнения (17.41) и (17.43) эквивалентны системам трех уравнений с тремя неизвестными величинами — проекциями поправок по осям координат. Поэтому если производится полное наблюдение углов направления и расстояния до спутника α, δ, ρ, формально одного наблюдения одного спутника достаточно для получения всех трех поправок. Если наблюдаются только направления, то необходимо для поправок координат станции наблюдать два положения спутника, а для уточнения положения спутника наблюдать с двух известных станций. При наличии избыточных наблюдений и избыточных уравнений применяется способ наименьших квадратов.

§ 8. Основы построения космической триангуляции. Определение положения спутника

Космическая триангуляция строится из совокупности треугольников, в вершинах которых расположены станции слежения и наблюдаемые спутники. Основной задачей ее является определение взаимного положения пунктов на земной поверхности, по наблюдениям с них мгновенных положений ИСЗ. Таким образом, спутник здесь используется только как визирная цель.

Если положение спутника и определяется, то лишь как промежуточная операция. При этом положение спутника определяется менее надежно, чем положение наземных пунктов в силу того, что в данном положении спутника возможно только одно визирование на него и его конкретное положение может определяться только однократно, тогда как наземные станции определяются из многократных наблюдений спутника в его различных положениях. Наблюдения ведутся только с наземных пунктов. При этом с каждого наземного пункта визирование производится только на спутник. Другие наземные пункты не наблюдаются в силу своей удаленности. Отсутствие наблюдений со спутника и между наземными пунктами приводит к тому, что в космической триангуляции, в отличие от наземной, все измерения являются односторонними.

Как и в обычной триангуляции в космических геодезических сетях измерений производится больше, чем необходимо для

определения координат станций, так что возникают избыточные условия, обеспечивающие контроль и требующие уравнительных вычислений.

В зависимости от задач, стоящих перед космической триангуляцией, можно выделить три вида ее построений:

1. Построение отдельных фигур, выполняемое для определения положения изолированных пунктов, например, для привязок местных геодезических систем к единой геодезической сети.

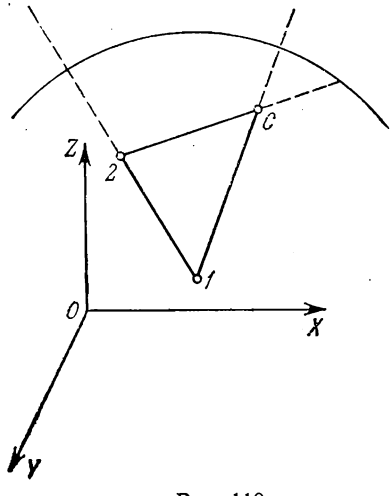


Рис. 119.

2. Построение рядов триангуляции для передачи системы координат на большие расстояния.

3. Построение сплошных сетей космической триангуляции для создания системы опорных пунктов на больших территориях.

Рассмотрим метод определения координат спутника по наблюдениям с двух наземных станций с известными геоцентрическими координатами x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2. Наблюденные направления из этих точек на спутник характеризуются соответственно углами (δ_1, t_1) и (δ_2, t_2). Координаты спутника при определении из точки (x_1, y_1, z_1) будут (рис. 119).

$$\left.\begin{aligned} x_c &= x_1 + \rho_1 \cos\delta_1 \cos t_1, \\ y_c &= y_1 + \rho_1 \cos\delta_1 \sin t_1, \\ z_c &= z_1 + \rho_1 \sin\delta_1 \end{aligned}\right\} \qquad (17.44)$$

и при определении из точки (x_2, y_2, z_2)

$$\left.\begin{aligned} x_c &= x_2 + \rho_2 \cos\delta_2 \cos t_2, \\ y_c &= y_2 + \rho_2 \cos\delta_2 \sin t_2, \\ z_c &= z_2 + \rho_2 \sin\delta_2. \end{aligned}\right\} \qquad (17.44')$$

Отсюда легко получить направления и расстояния до спутника:

$$\left.\begin{aligned} t_i &= \operatorname{arcctg}\frac{x_c - x_i}{y_c - y_i}, \\ \delta_i &= \operatorname{arctg}\frac{z_c - z_i}{\sqrt{(x_c - x_i)^2 + (y_c - y_i)^2}}, \\ \rho_i &= \sqrt{(x_c - x_i)^2 + (y_c - y_i)^2 + (z_c - z_i)^2} \quad (i = 1, 2). \end{aligned}\right\} \qquad (17.45)$$

Исключим из уравнений (17.44) и (17.44′) x_c, y_c, z_c, ρ_1, ρ_2 и получим соотношение между координатами двух станций, с которых велись синхронные наблюдения спутника:

$$(x_2 - x_1)(\operatorname{tg}\delta_1 \sin t_2 - \operatorname{tg}\delta_2 \sin t_1) + \\ + (y_2 - y_1)(\operatorname{tg}\delta_2 \cos t_1 - \operatorname{tg}\delta_1 \cos t_2) + \\ + (z_2 - z_1)\sin(t_1 - t_2) = 0. \quad (17.46)$$

Уравнения (17.44) и (17.45) решают задачу определения координат спутника. Уравнение (17.46) является контрольным. Оно представляет собой условие совместности уравнений (17.44) и (17.44′).

Пусть направления со станции *1* на станцию *2* задается углами ψ_{12} и λ_{12}, а расстояние между этими станциями обозначим через D_{12}. Тогда координаты станции *2* определяются через координаты станции *1* уравнениями вида (17.44):

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x_1 + D_{12}\cos\psi_{12}\cos\lambda_{12}, \\ y_2 &= y_1 + D_{12}\cos\psi_{12}\sin\lambda_{12}, \\ z_2 &= z_1 + D_{12}\sin\psi_{12}. \end{aligned}\right\} \quad (17.47)$$

Вводя отсюда разности $(x_2 - x_1)$, $(y_2 - y_1)$, $(z_2 - z_1)$, в (17.46) получим уравнение, являющееся условием синхронности:

$$\operatorname{tg}\psi_{12}\sin(\alpha_2 - \alpha_1) + \operatorname{tg}\delta_1 \sin(s - \alpha_2 - \lambda_{12}) - \\ - \operatorname{tg}\delta_2 \sin(s - \alpha_1 - \lambda_{12}) = 0. \quad (17.48)$$

При выполнении преобразований здесь учтено, что $t = s - \alpha$. Уравнение (17.48) является условием того, что вспомогательную сферу направления (1, С) (2, С), (1; 2) пересекут по одному большому кругу. Этот круг называется *кругом одновременности*. В случае разновременных наблюдений направления не будут компланарны и при пересечении сферы не лягут на один большой круг.

Можно задачи космической триангуляции решать и не при строгой синхронности наблюдений, но это значительно их усложняет, причем в этом случае для приведения наблюдений к одному моменту надо знать точно время наблюдений строго в одной системе отсчета.

§ 9. Определение положения станции. Метод одновременных наблюдений

Так же, как и в случае определения координат спутника, для определения положения наземной станции необходимым являются одновременные наблюдения направлений на спутник из определяемого пункта и из пункта с известными координатами.

Основным уравнением для решения задачи является уравнение (17.46).

Пусть координаты определяемого пункта N будут ξ, η, ζ, а наблюдаемые с этого пункта экваториальные координаты спутника в некоторый момент времени s будут α и δ. Координаты известного пункта M_0 суть x_0, y_0, z_0, α_0, δ_0.

Для этих координат напишем формулу (17.46); в ней координаты известной точки будут x_0, y_0, z_0, t_0, δ_0, координаты искомой точки, соответственно, ξ, η, ζ, α, δ (вместо x_2, y_2, z_2, δ_2, α_2 и x_1, y_1, z_1, δ_1, α_1).

Внося эти значения в (17.46), получим

$$A\xi + B\eta + C\zeta = K, \tag{17.49}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A &= \operatorname{tg}\delta \sin(s-\alpha_0) - \operatorname{tg}\delta_0 \sin(s-\alpha),\\ B &= -\operatorname{tg}\delta \cos(s-\alpha_0) + \operatorname{tg}\delta_0 \cos(s-\alpha),\\ C &= \sin(\alpha_0-\alpha),\\ K &= Ax_0 + By_0 + Cz_0. \end{aligned}\right\} \tag{17.50}$$

Уравнение (17.49) является уравнением плоскости. В этом уравнении коэффициенты A, B, C и свободный член K — величины, известные из наблюдений ξ, η, ζ — координаты станции, которые требуется определить. Очевидно, чтобы их определить, надо получить три уравнения (17.49), т. е. отнаблюдать с двух станций три положения спутника С (или три спутника).

При количестве наблюдений больше трех появляется возможность контроля, а также уточнения. Задача в этом случае решается методом наименьших квадратов.

§ 10. Орбитальный метод нахождения координат станций

В § 5, 6 был рассмотрен синхронный метод определения координат станций, основанный на одновременном наблюдении спутника с нескольких станций с известными и неизвестными координатами. В этом случае положения спутника определяются величинами r_{1c}, α_{1c}, δ_{1c} по наблюдениям с известной станции. В этот же момент времени для того же спутника с другой станции получены r_{2c}, α_{2c}, δ_{2c}, но поскольку положение спутника известно, зная эти r_{2c}, α_{2c}, δ_{2c}, можно определить положение станции *2* относительно спутника (см. рис. 119).

В случае несинхронных наблюдений спутник, как простая цель визирования, не позволяет связать таким образом координаты станций *1* и *2*. Однако если известно движение спутника, то можно рассчитать его перемещение, а тогда можно, так

же как и в первом случае, установить положение второй станции относительно первой через спутник (рис. 120). Для этого надо точно знать элементы орбиты спутника, характер их изменения и интервал времени между первым и вторым наблюдением спутника. Очевидно, что определение координат станций синхронным методом есть частный случай орбитального метода, когда разность времени наблюдений с первой и второй станции равна нулю. Соответственно равны нулю и изменения элементов. В этом смысле метод одновременных отсчетов точнее: там не входят ошибки определения элементов орбиты и их возмущений. Однако в нем есть свои трудности и источники ошибок. В первую очередь необходимость одновременной видимости спутника с ряда пунктов ограничивает расстояния между станциями наблюдения, большое ограничение накладывают метеорологические условия, ошибки возникают из-за учета скорости распространения света и обеспечения одновременности.

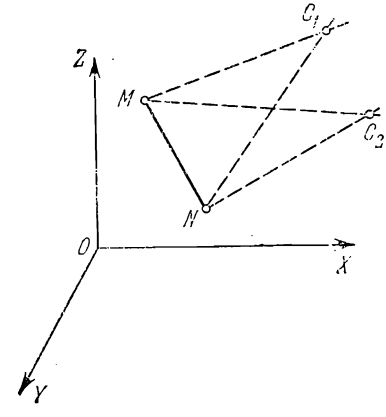


Рис. 120.

Ранее была показана зависимость между положением спутника α, δ, ρ и положением станции наблюдения ξ, η, ζ.

В свою очередь координаты спутника могут быть выражены через элементы орбиты. Таким образом устанавливается связь между координатами станции наблюдения и элементами орбиты.

Пусть произведены наблюдения спутника C_j на станции O_k в момент t_i. Результат измерения можно выразить уравнением, связывающим элементы орбиты и координаты станции,

$$W_k^j(t_i) = W\left(a_0^j, e_0^j, i_0^j, \Omega_0^j, \omega_0^j, M_0^j, \xi_k, \eta_k, \zeta_k, t_i\right). \quad (17.51)$$

Эта же функция может быть получена расчетным путем по известным элементам орбиты и приближенным координатам станции. Разность между наблюденным и вычисленным значениями в общем виде записывается следующим образом:

$$(W_0 - W_c)_{ki}^j = \frac{\partial W_{ki}^j}{\partial a_0^i}\delta a^j + \frac{\partial W_{ki}^j}{\partial e_0^j}\delta e^j + \ldots + \frac{\partial W_{ki}^j}{\partial \xi_k}\delta\xi_k + \frac{\partial W_{ki}^j}{\partial \eta_k}\delta\eta_k + \frac{\partial W_{ki}^j}{\partial \zeta_k}\delta\zeta_k. \quad (17.52)$$

Эта система содержит $6j$ поправок в элементы орбит, $3k$ поправок в координаты станций. При наличии достаточного количества наблюдений, хорошо распределенных по времени и по положению спутника на орбите, систему можно решать относительно поправок к элементам орбит спутников и поправок к координатам станций. При известных элементах поправки к ним равны нулю, и тогда система решается только относительно поправок к координатам станций.

При наблюдении нескольких спутников с большого числа станций координаты некоторых станций могут быть хорошо известны, а других, например, новых, известны приближенно. В этом случае задача служит уточнению координат новых станций, и чем точнее известны координаты остальных станций и элементы орбиты, тем точнее определяются поправки в координаты новых станций.

При решении задач спутниковой геодезии для больших геодезических сетей осуществляется уточнение и элементов орбиты, и координат станций. В этом случае уравнения системы (17.52) разделяются на две группы: группу уравнений, содержащую наблюдения только со станций с известными координатами и группу уравнений относительно станций с неточными координатами. В первом случае $\delta\xi = \delta\eta = \delta\zeta = 0$, и группа уравнений будет

$$(W_0 - W_c)^j_{ki} = \frac{\partial W^j_{ki}}{\partial a^j_0}\delta a^j + \frac{\partial W^j_{ki}}{\partial e^j_0}\delta e^j + \ldots + \frac{\partial W^j_{ki}}{\partial M^j_0}\delta M^j, \quad (17.53)$$

во втором случае

$$(W_0 - W_c)^j_{ki} = \frac{\partial W^j_{ki}}{\partial a^j_0}\delta a^j + \ldots + \frac{\partial W^j_{ki}}{\partial M_0}\delta M^j + \\ + \frac{\partial W^j_i}{\partial \xi}\delta\xi + \frac{\partial W^j_i}{\partial \eta}\delta\eta + \frac{\partial W^j_i}{\partial \zeta}\delta\zeta. \quad (17.54)$$

Группа первая уравнений позволяет уточнить элементы орбиты. Если это уточнение достаточно надежно, то $\delta a^j = 0$, $\delta e^j = 0$, ..., $\delta M^j = 0$, и группа (17.54) может содержать только члены с неизвестными поправками координат станций. Решение системы по методу наименьших квадратов приводит к определению или к уточнению исходных координат. Если в систему включаются спутники, наиболее надежно наблюденные со станций с неизвестными координатами, то система (17.54) решается в полном объеме и дает уточнение одновременно и элементов орбит и координат станций.

§ 11. Определение центра масс Земли

Одной из важных задач геодезии является определение положения центра масс Земли. Обычно все геодезические измерения и координаты относятся к некоторому эллипсоиду, удобному для данной страны или для всей Земли в целом, но, будучи определенным геометрическим способом, центр этого эллипсоида не совпадает с центром масс Земли. Все геодезические координаты, полученные на этом эллипсоиде относимости, имеют началом центр эллипсоида, который при хорошо подобранном и ориентированном эллипсоиде располагается близко от центра масс, но не совпадает с ним. Такую систему координат принято называть квазигеоцентрической.

Спутник, двигаясь в пространстве под влиянием гравитационного поля, описывает свою траекторию относительно центра масс, и его естественно относить к геоцентрической системе координат. Все формулы, определяющие орбиту спутника, строятся поэтому именно в геоцентрической системе координат. Понятно, что определение центра масс Земли, т. е. начала геоцентрической системы координат, является важной задачей астрономии и геодезии. Рассмотрим метод определения их чисто геометрическим путем с помощью наблюдения спутника, предложенный И. Д. Жонголовичем.

Обозначим координаты начала квазигеоцентрической системы координат ξ, η, ζ.

Пусть имеется ряд наблюдений спутника в квазигеоцентрической системе координат, т. е. определен ряд мгновенных квазигеоцентрических координат спутника

$$x_k,\ y_k,\ z_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

для моментов звездного гринвического времени s_k. Очевидно, что координаты x_k, y_k, z_k получены в геодезической системе для принятого эллипсоида относимости.

Как уже известно, такие координаты можно получить синхронным наблюдением с двух станций с известными геодезическими координатами при фотографических наблюдениях (когда измеряются только направления) или наблюдением с одной станции, когда измеряется также и расстояние до спутника.

Геоцентрические координаты спутника в каждый момент будут

$$\left.\begin{aligned} X_k &= x_k + \xi, \\ Y_k &= y_k + \eta, \\ Z_k &= z_k + \zeta. \end{aligned}\right\} \tag{17.55}$$

В обеих системах, геоцентрической и квазигеоцентрической, считаем оси аппликат параллельными оси вращения Земли. Составим уравнение плоскости оскулирующей орбиты спутника для момента наблюдений s_k в геоцентрической системе координат (рис. 121).

$$X_k \sin(\Omega - s_k)\sin i + Y_k \cos(\Omega_k - s_k)\sin i_k + Z_k \cos i_k = 0. \quad (17.56)$$

Входящие в уравнение (17.56) долгота восходящего узла Ω и наклонение плоскости орбиты i для момента времени s_k могут быть записаны так:

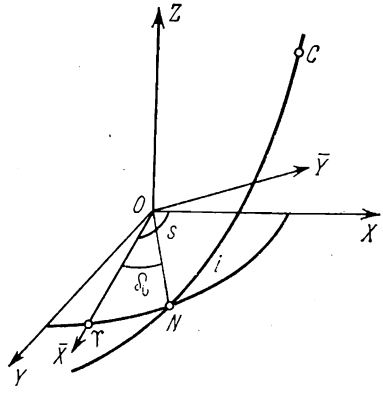


Рис. 121.

$$\left.\begin{aligned} \Omega_k &= \Omega' + \delta\Omega_k, \\ i_k &= i' + \delta i_k, \end{aligned}\right\} \quad (17.57)$$

где Ω' и i' — долгота восходящего узла и наклонение оскулирующей орбиты спутника для некоторого произвольного момента s', лежащего внутри промежутка наблюдения, а $\delta\Omega_k$ и δi_k — возмущения для этих элементов за время $s_k - s'$. Эти возмущения для небольшого отрезка времени $s_k - s'$ достаточно хорошо известны из теории возмущений. Элементы оскулирующей орбиты мы знаем приближенно. Пусть эти приближенные значения Ω_0' и i_0'.

Чтобы получить элементы оскулирующей орбиты, к их приближенным значениям надо добавить поправки $\Delta\Omega$ и Δi, так что

$$\left.\begin{aligned} \Omega_k &= \Omega' + \Delta\Omega + \delta\Omega_k, \\ i_k &= i_0' + \Delta i + \delta i_k. \end{aligned}\right\} \quad (17.58)$$

Поправки $\Delta\Omega$ и Δi к элементам орбиты являются неизвестными, которые надо искать наряду с неизвестными ξ, η, ζ.

Вводя значения Ω_k и i_k из (17.58) и X_k, Y_k, Z_k из (17.55) в уравнение плоскости (17.56), получим систему уравнений относительно пяти неизвестных ξ, η, ζ, $\Delta\Omega$, Δi:

$$\begin{aligned} X_k \sin(\Omega_0' + \Delta\Omega + \delta\Omega_k - s_k)\sin(i_0' + \Delta i + \delta i_k) + \\ + Y_k \cos(\Omega_0' + \Delta\Omega + \delta\Omega_k - s_k)\sin(i_0' + \Delta i + \delta i_k) + \\ + Z_k \cos(i_0' + \Delta i + \delta i_k) = 0 \end{aligned} \quad (17.59)$$

или, обозначая

$$\left.\begin{aligned} \Omega'_0 + \delta\Omega_k - s_k &= \pi_k, \\ i'_0 + \delta i_k &= \rho_k \end{aligned}\right\} \qquad (17.60)$$

и вводя значения координат по формулам (17.55),

$$\begin{aligned}(x_k+\xi)\sin(\pi_k+\Delta\Omega)\sin(\rho_k+\Delta i) + \\ +(y_k+\eta)\cos(\pi_k+\Delta\Omega)\sin(\rho_k+\Delta i) + \\ +(z_k+\zeta)\cos(\rho_k+\Delta i) = 0. \end{aligned} \qquad (17.61)$$

Это уравнение относительно неизвестных ξ, η, ζ, $\Delta\Omega$, Δi. Искомые величины невелики. Координаты центра эллипсоида относительно центра масс, т. е. расхождение центра масс и центра эллипсоида относимости, невелико и имеет порядок 600—700 *м*.

Произведения и степени этих величин суть малые высших порядков. Их величина 6—7 *м*. Раскрываем скобки (17.61), удерживая лишь члены первого порядка. Получим систему уравнений вида

$$A_k\Delta\Omega + B_k\Delta i + \alpha_k\xi + \beta_k\eta + \gamma_k\zeta + L_k = 0, \qquad (17.62)$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_k &= (x_k\cos\pi_k - y_k\sin\pi_k)\sin\rho_k, \\ B_k &= (x_k\sin\pi_k + y_k\cos\pi_k)\cos\rho_k - z_k\sin\rho_k, \\ \alpha_k &= \sin\pi_k\sin\rho_k, \\ \beta_k &= \cos\pi_k\sin\rho_k, \\ \gamma_k &= \cos\rho_k, \\ L_k &= (x_k\sin\pi_k + y_k\cos\pi_k)\sin\rho_k + z_k\cos\rho_k. \end{aligned}\right\} \qquad (17.63)$$

Обратим внимание на то, что промежуток времени $s_n - s_1$, в течение которого производится наблюдение всех положений спутника на дуге, невелик. Он составляет всего 10—15 минут. Поэтому коэффициенты α_k, β_k, γ_k при неизвестных координатах ξ, η, ζ в уравнении (17.62) будут изменяться очень незначительно во всех n уравнениях. Это соответствует незначительному изменению положения плоскости орбиты спутника в теле вращающейся Земли. Поэтому по уравнениям, полученным из наблюдений данной дуги, координаты ξ, η, ζ разделяются очень плохо. Обычно по такой дуге находится сумма

$$\sigma = \bar{\alpha}\xi + \bar{\beta}\eta + \bar{\gamma}\zeta, \qquad (17.64)$$

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k, \quad \beta = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\beta_k, \quad \gamma = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k. \qquad (17.65)$$

Чтобы разделить искомые координаты, надо пронаблюдать положения спутника по крайней мере для трех дуг, таких, чтобы орбита спутника была расположена различно относительно Земли, или для трех различных спутников.

Заметим, что точные результаты в этом способе могут быть получены при условии наблюдения больших дуг, порядка 50—80°, и достаточно большого количества их, а также при достаточно точных фотографических (точность порядка 1″) или лазерных (точность порядка 1—2 *м*) наблюдениях. Синхронность наблюдения должна быть обеспечена с точностью порядка 10^{-4} *сек*. При этих условиях можно получить координаты центра масс с точностью в 5—10 *м*.

ГЛАВА 18

ОСНОВЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ И ФИГУРЫ ЗЕМЛИ ПО ВОЗМУЩЕНИЯМ В ДВИЖЕНИИ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ

§ 1. Понятие о возмущенном движении. Оскулирующие элементы орбиты

Пусть два тела движутся одно относительно другого по законам, выраженным уравнениями движения задачи о двух телах. Движение происходит по коническому сечению, например, по эллипсу. Если появится третье тело, то характер движения изменится. В большинстве случаев имеет место воздействие третьего тела малой массы по сравнению с массами главных тел или далеко удаленного от двух основных тел рассматриваемой задачи. Таково, например, воздействие Луны и планет на движение Земли и Солнца или воздействие Земли на движение других планет и Солнца. Изменение кеплеровского характера движения происходит также в случае отличия движущихся тел от точки или шара. Так, например, экваториальное вздутие Земли, нарушающее центральность гравитационного поля, искажает строго эллиптическое движение искусственных спутников Земли. Изменение кеплеровского движения искусственных спутников Земли может вызываться также сопротивлением атмосферы, действием электромагнитных сил, лучевым давлением.

Изменения, происшедшие в движении двух тел под воздействием третьего тела или формы тела, или каких-либо иных причин, называются *возмущениями.*

По наблюденным положениям планеты можно вычислить элементы ее орбиты. Если движение планеты не возмущается, то при вычислении орбиты по наблюдениям, произведенным в различные моменты времени, мы будем получать всегда одну и ту же систему элементов.

Если имеет место возмущенное движение планеты или спутника, то элементы ее орбиты будут меняться с течением времени под влиянием возмущений. В этом случае для каждого

момента времени по совокупности наблюденных координат и составляющих скоростей можно вычислить вполне определенную систему элементов орбиты, соответствующих данному моменту.

Эта система элементов определяет движение планеты на последующее время, если с данного момента времени прекратила свое действие возмущающая сила. Таким образом, мы можем получить ряд таких систем элементов орбиты, которые точно соответствуют действительному положению планеты и ее движению относительно центрального тела именно в данный момент. Такая система элементов, которая точно соответствует положению и движению планеты в данный момент, называется *системой оскулирующих элементов.*

Если возмущения, как это имеет место для всех планет Солнечной системы и большинства спутников, в том числе искусственных, остаются все время малыми, то система оскулирующих элементов будет медленно изменяться. Эти изменения называются *возмущениями элементов орбиты.*

В случае консервативной возмущающей силы в уравнения движения (15.8) надо добавить составляющие этой силы по координатным осям.

Обозначим эти составляющие

$$F_x = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Функция R называется *возмущающей* или *пертурбационной функцией* и является *потенциалом возмущающей силы.*

Уравнения (15.8) примут вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -f(1+m)\frac{x}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -f(1+m)\frac{y}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -f(1+m)\frac{z}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \qquad (18.1)$$

§ 2. Основные формулы для определения параметров гравитационного поля Земли по наблюдениям искусственных спутников

Система трех дифференциальных уравнений второго порядка возмущенного движения для прямоугольных координат может быть преобразована в систему шести дифференциальных уравнений первого порядка относительно элементов орбиты.

Напишем такую систему в соответствии с выводом, приведенным в «Небесной механике» Г. Н. Дубошина, внеся

незначительные очевидные преобразования:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2a}{1-e^2}\sqrt{\frac{a}{fM}}\left(e\sin vS + \frac{p}{r}T\right),\\
\frac{de}{dt} &= (1-e)^2\sqrt{\frac{a}{fM}}\left[\sin vS + \left(\frac{r+p}{p}\cos v + \frac{er}{p}\right)T\right],\\
\frac{di}{dt} &= \frac{r}{a(1-e^2)}\sqrt{\frac{a}{fM}}\cos(\omega+v)W,\\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r}{a(1-e^2)}\sqrt{\frac{a}{fM}}\frac{\sin(\omega+v)}{\sin i}W,\\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{1-e^2}\sqrt{\frac{a}{fM}}\left[-\frac{\cos v}{e}S + \frac{r+p}{ep}\sin vT - \right.\\
&\qquad \left. - \frac{r}{p}\sin(\omega+v)\operatorname{ctg} i\cdot W\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (18.2)$$

Здесь $p = \frac{b^2}{a} = a(1-e^2)$, $r = \frac{p}{1+e\cos v}$, сумма масс Земли и спутника обозначена через M (массой спутника в силу ее малости по сравнению с массой Земли обычно пренебрегают), S, T, W — проекции возмущающей силы на оси координат.

Уравнения (18.2) содержат производные возмущающей функции R. Они могут быть вычислены простым дифференцированием функции R по осям координат. Эти уравнения могут быть использованы как по прямому назначению — для нахождения изменения элементов орбиты при известной возмущающей функции R, так и для решения обратной задачи — нахождения возмущающей силы по известным элементам и наблюдаемым возмущениям их, т. е. наблюдаемым скоростям их изменений.

В применении к искусственным спутникам Земли потенциал Земли можно представить в виде потенциала правильной шаровой Земли с добавлением возмущающей части, определяемой отклонением Земли от правильной шаровой формы и отклонением распределения масс от правильного сферического:

$$V = (fM)/r + R. \qquad (18.3)$$

Сравним это выражение с потенциалом, представленным в виде разложения в ряд по полиномам Лежандра:

$$V = \frac{fM}{a_e} - \frac{fM}{a_e}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+} J_n P_n(\cos\theta), \qquad (18.4)$$

где a_e — экваториальный радиус Земли. Очевидно, что возмущающая часть потенциала Земли или возмущающая функция есть второй член уравнения (18.4):

$$R = -\frac{fM}{a_e}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+1} J_n P_n(\cos\theta). \qquad (18.5)$$

Таким образом, возмущающая функция состоит из ряда членов, являющихся зональными гармониками и содержащих зональные динамические параметры J_n.

Для решения задачи нахождения коэффициентов J_n градиент возмущающего потенциала R, являющегося функцией r и θ, раскладывается на составляющие по координатным осям S, T, W, направленным вдоль радиуса-вектора (S) по трансверсали (T) и перпендикуляру к плоскости орбиты (W). Разложим

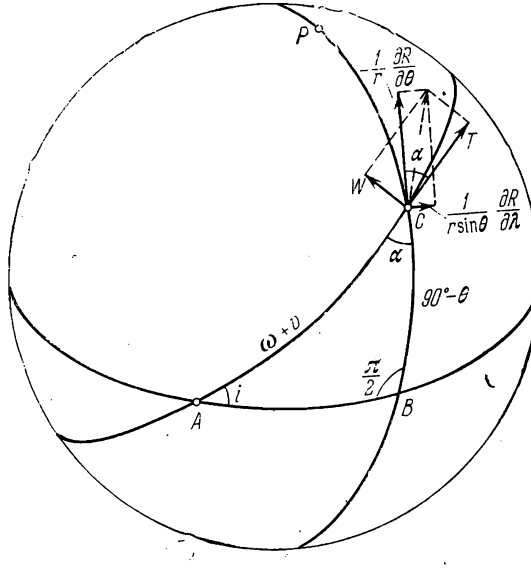


Рис. 122.

предварительно возмущающую силу на составляющие, направленные по радиусу-вектору спутника (S), по касательной к небесному меридиану (M) и первому вертикалу (N):

$$S = \frac{\partial R}{\partial r}, \quad M = -\frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial \theta}, \quad N = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial R}{\partial \lambda}. \tag{18.6}$$

Тогда проекции возмущающей силы T, W можно выразить следующим образом:

$$T = -\frac{\partial R}{r\partial \theta}\cos\alpha + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial R}{\partial \lambda}\sin\alpha,$$

$$W = -\frac{\partial R}{r\partial \theta}\sin\alpha - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial R}{\partial \lambda}\cos\alpha.$$

Тригонометрические функции угла α можно выразить через элементы орбиты по формулам сферической тригонометрии из

треугольника ABC (рис. 122):

$$\cos\alpha = \frac{\cos(\omega+v)}{\sin\theta}\sin i, \quad \sin\alpha = \frac{\cos i}{\sin\theta}. \tag{18.7}$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} S &= \frac{\partial R}{\partial r}, \\ T &= -\frac{\cos(v+\omega)}{r\sin\theta}\sin i\frac{\partial R}{\partial\theta} - \frac{\cos i}{r\sin^2\theta}\frac{\partial R}{\partial\lambda}, \\ W &= -\frac{\cos i}{r\sin\theta}\frac{\partial R}{\partial\theta} - \frac{\cos(\omega+v)\sin i}{r\sin^2\theta}\frac{\partial R}{\partial\lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{18.8}$$

Теперь, дифференцируя R по r, λ и θ, можно найти выражения для S, T, W. Вводя их в систему уравнений (18.2), получим связь скоростей изменения элементов орбиты $\dot a$, $\dot e$, $\frac{di}{dt}$, $\dot\Omega$, $\dot\pi$ с динамическими коэффициентами J_n. Скорости изменения элементов наблюдать непосредственно не удается, поэтому обычно вычисляют величину изменения элементов в течение одного оборота:

$$\Delta a = \int_{t_0}^{t_0+P}\dot a\,dt, \quad \Delta e = \int_{t_0}^{t_0+P}\dot e\,dt, \quad \Delta i = \int_{t_0}^{t_0+P}\frac{di}{dt}\,dt, \ldots \tag{18.9}$$

Интегрирование на полный оборот удобно еще и тем, что при нем исключаются короткопериодические члены с периодом P, $2P$, $3P$ и такие как $\cos v$, $\cos 2v$ и т. д., поскольку обращаются в нуль соответствующие интегралы.

Выполнение всех необходимых операций приводит к формулам, связывающим величины изменения элементов за один оборот с динамическими параметрами. Эти формулы имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \Delta a &= 0, \\ \Delta e &= -\frac{1-e^2}{e}\operatorname{tg} i\Delta i, \\ \Delta i &= 3\pi e\left(\frac{a_e}{p}\right)^3\left(1-\frac{5}{4}\sin^2 i\right)\cos i\cos\omega J_3 + \\ &\quad + \frac{45}{16}\pi e\left(\frac{a_e}{p}\right)^4\left(1-\frac{7}{6}\sin^2 i\right)\sin 2i\sin 2\omega e J_4 + \ldots, \\ \Delta\Omega &= -3\pi\left(\frac{a_e}{p}\right)^2\cos i J_2 + 3\pi\left(\frac{a_e}{p}\right)^3\left(1-\frac{15}{4}\sin^2 i\right)\cos i\sin\omega e J_3 + \\ &\quad + \frac{15}{2}\pi\left(\frac{a_e}{p}\right)^4\left(1-\frac{7}{4}\sin^2 i\right)\cos i J_4 + \ldots, \end{aligned}\right\}$$

$$\Delta\omega = 6\pi\left(\frac{a_e}{p}\right)^2\left(1-\frac{5}{4}\sin^2 i\right)J_2 + \\ + 3\pi\left(\frac{a_e}{p}\right)^3\left(1-\frac{5}{4}\sin^2 i\right)\sin i\sin\omega e J_3 - \\ - 15\pi\left(\frac{a_e}{p}\right)^4\left[\left(1-\frac{31}{8}\sin^2 i+\frac{49}{16}\sin^4 i\right)+\right. \\ \left.+\left(\frac{3}{8}-\frac{7}{16}\sin^2 i\right)\sin^2 i\cos 2\omega\right]J_4+\ldots \tag{18.10}$$

Уравнения (18.10) написаны до членов малости порядка e^2J_3, e^2J_4 и т. д. Эти уравнения позволяют найти динамические характеристики гравитационного поля Земли J_2, J_3, J_4 и т. д. при известных элементах орбиты и наблюденных изменениях элементов за один оборот спутника Δa, Δe, Δi, $\Delta\Omega$, $\Delta\omega$.

§ 3. Некоторые соображения о выборе уравнений для изучения фигуры Земли по наблюдениям искусственных спутников

Уравнения возмущенного движения (18.1) или уравнения (18.2) устанавливают связь изменений элементов орбиты с воздействием на них возмущающих факторов, например, сжатия Земли, входящих в уравнения через пертурбационную функцию R. Наличие возмущений будет изменять характер орбиты спутника, причем будут изменяться элементы орбиты. Такие изменения, или так называемые возмущения элементов, могут быть *периодическими*, *вековыми* и *смешанными*. Периодические возмущения элементов, например, узла, от сжатия Земли будут носить характер, выражаемый уравнением

$$\Delta\Omega = f(J_2)\sin\nu t,$$

где функция $f(J_2)$ — всегда малая величина. На протяжении промежутка времени, в течение которого $\sin\nu t$ изменится в пределах от -1 до $+1$, долгота узла изменится на величину $2f(J_2)$. Такое изменение будет периодическим. Долгота узла с течением времени будет периодически принимать свои исходные значения.

В случае векового возмущения характер изменения будет

$$\Delta\Omega = f(J_2)t,$$

величина возмущения элемента будет возрастать со временем и, как бы ни было мало $f(J_2)$, при достаточно большом t окажется также достаточно большой. В силу этого обстоятельства определение характеристик возмущающих сил, а значит, и пара-

метров возмущающего тела, надежнее всего производить по вековым возмущениям элементов.

По возмущениям движения искусственных спутников удается определить не только сжатие, но и более высокие гармоники фигуры Земли. Орбиты искусственных спутников имеют некоторые существенные отличия от орбит спутников естественных. Это — большая близость спутников к Земле и большие наклонения орбит. Основные возмущения орбит искусственных спутников вызываются сжатием Земли, отклонениями фигуры Земли от эллипсоида вращения или, иными словами, неправильностями гравитационного поля Земли, влиянием Луны и сопротивлением атмосферы.

Удачным обстоятельством для изучения фигуры Земли по наблюдениям орбит спутников является то, что гравитационные возмущения от фигуры Земли носят иной характер, чем возмущения атмосферным сопротивлением или притяжением Луны и планет.

Рассмотрим, как проявляется влияние гравитационного поля Земли на элементы орбиты искусственных спутников в уравнениях (18.10). Первое из этих уравнений показывает, что большая полуось не изменяется под действием неоднородностей гравитационного поля. Второе уравнение (18.10) указывает на пропорциональную зависимость возмущений эксцентриситета и наклонения от параметров J_n. При ненулевых значениях i возмущения наклонения и эксцентриситета одинаково связаны с динамическими параметрами J_n и поэтому наблюдения той и другой величины должны дать одинаковый результат.

Члены уравнений (18.10), содержащие аргумент перицентра ω, являются долгопериодическими членами. Аргумент перицентра возрастает медленно, но постоянно, вследствие чего перицентр спутника перемещается вокруг Земли, однако значительно медленнее, чем сам спутник.

В уравнениях (18.10) долгопериодическими являются члены, содержащие $\cos\omega$, $\sin\omega$, $\sin 2\omega$ и т. д. Уравнение для Δi содержит только долгопериодические члены, включающие $\cos\omega$ и $\sin 2\omega$. В этом уравнении второй член на порядок меньше первого, так как содержит множителем e^2. Поэтому именно первый член играет основную роль при определении динамических характеристик J_n, а так как первый член содержит нечетную гармонику J_3, то именно она определяется из наблюдений изменения наклонности Δi наиболее уверенно.

Уравнения для возмущений узла $\Delta\Omega$ и аргумента перицентра $\Delta\omega$ наиболее удобны для определения коэффициентов четных гармоник J_2, J_4, J_6, и т. д. Во-первых, члены, содержащие четные гармоники, вековые и, во-вторых, они на порядок больше членов, пропорциональных J_3, которые имеют множителем малую вели-

чину e. Поэтому влияние нечетных гармоник здесь значительно слабее. Сжатие Земли вызывает постоянное вращение плоскости орбиты около земной оси, т. е. перемещения по орбите узла. Это перемещение происходит в направлении, обратном движению спутника, и носит название *регрессии узла*. Одновременно происходит вращение плоскости орбиты около собственной оси со скоростью ω (скорость изменения аргумента перицентра). Эти возмущения движения спутника являются вековыми и вызываются зональными неоднородностями гравитационного поля Земли. Поэтому для определения фигуры Земли должны служить уравнения, характеризующие возмущения долготы узла $\dot{\Omega}$ и аргумента перицентра $\dot{\omega}$, т. е. уравнения (18.2). Кроме того, имеют место некоторые короткопериодические возмущения орбиты, происходящие в течение одного оборота и вызываемые более мелкими неоднородностями гравитационного поля, однако слишком малые для измерений. Наконец, наблюдаются долгопериодические колебания с таким же периодом, как и период вращения линии апсид орбиты спутника. Эти последние указывают величину коэффициентов третьих и пятых гармоник гравитационного поля Земли.

Из уравнений видно, что коэффициенты при J_n зависят от наклонения i, поэтому для наиболее надежного решения следует использовать несколько спутников с различными наклонениями i.

В этом случае мы получим уравнения с наименьшей взаимной зависимостью. При отыскании гармоник J_n целесообразно составлять систему уравнений по ряду наблюдений нескольких спутников с различным наклонением i и решать их по способу наименьших квадратов. Поскольку таких уравнений ограниченное число, то и число членов в них, а значит, и число коэффициентов гармоник J_n должно быть ограничено. Оно не должно превосходить числа уравнений.

§ 4. Уравнения Лагранжа. Вывод уравнения Лагранжа для долготы восходящего узла

Система уравнений вида (18.2), в которой вместо проекций возмущающей силы по осям координат введена сама возмущающая функция R, называется системой уравнений Лагранжа. Эта система имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial \pi} - \frac{1}{na^2}\frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{di}{dt} &= -\frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \Omega} - \frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right),\\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i},\\
\frac{d\pi}{dt} &= \frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e},\\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i} + \frac{1}{na^2}\frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial e}
\end{aligned}\right\} \quad (18.11)$$

Здесь ε — средняя долгота в эпоху, а π — долгота перицентра, определяемые формулами:

$$\pi = \Omega + \omega, \quad \varepsilon = \pi + \overline{M}_0,$$

где средняя аномалия $\overline{M}_0$ (см. (15.30)) в эпоху задается уравнением

$$\frac{d\overline{M}_0}{dt} = \frac{dM_0}{dt} + (t - t_0)\frac{dn}{dt}.$$

Уравнения Лагранжа, так же как и уравнения (18.2), лежат в основе изучения возмущений в движении небесных тел. Вывод уравнений (18.2) и (18.11) можно найти в курсах небесной механики, например, в книге Г. Н. Дубошина «Небесная механика. Основные задачи и методы».

В качестве примера приводим здесь вывод уравнения Лагранжа для изменения долготы узла.

Воспользуемся интегралами площадей, записанными в виде (15.33). Разделим первое уравнение на второе. Получим

$$\operatorname{tg}\Omega = \frac{\dot{y}z - z\dot{y}}{\dot{x}z - z\dot{x}}. \quad (18.12)$$

Дифференцируя это выражение по t, получим

$$\sec^2\Omega \cdot \dot{\Omega} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}z - z\dot{y}}{\dot{x}z - z\dot{x}}\right)$$

или

$$\sec^2\Omega \cdot \dot{\Omega} = \frac{(\ddot{y}z - z\ddot{y})(\dot{x}z - z\dot{x}) - (\dot{y}z - z\dot{y})(\ddot{x}z - z\ddot{x})}{(\dot{x}z - z\dot{x})^2}.$$

Имея в виду (15.33), получим

$$\sec^2\Omega \cdot \dot{\Omega} = \frac{(\ddot{y}z - z\ddot{y})\cos\Omega - (\ddot{x}z - z\ddot{x})\sin\Omega}{\sqrt{f(1+m)p}\sin i\cos^2\Omega}$$

Заменим вторые производные координат с помощью уравнений (18.1):

$$\dot{\Omega} = \frac{\left(y\frac{\partial R}{\partial z} - z\frac{\partial R}{\partial y}\right)\cos\Omega - \left(x\frac{\partial R}{\partial z} - z\frac{\partial R}{\partial x}\right)\sin\Omega}{\sqrt{f(1+m)p}\sin i}. \tag{18.13}$$

Перейдем теперь от прямоугольных координат к сферическим:

$$\left.\begin{aligned} x &= r(\cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega\cos i),\\ y &= r(\cos u\sin\Omega + \sin u\cos\Omega\cos i),\\ z &= r\sin u\sin i. \end{aligned}\right\} \tag{18.14}$$

Вводя эти координаты в выражения для $\dot{\Omega}$, получим

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{\sqrt{f(1+m)p}\sin i}\left[\frac{\partial R}{\partial x}r\cdot\sin u\sin\Omega\sin i - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial R}{\partial y}r\sin u\cos\Omega\sin i + \frac{\partial R}{\partial z}r\sin u\cos i\right]. \tag{18.15}$$

Но так как

$$\frac{\partial x}{\partial i} = r\sin u\sin\Omega\sin i,$$
$$\frac{\partial y}{\partial i} = -r\sin u\cos\Omega\sin i,$$
$$\frac{\partial z}{\partial i} = r\sin u\cos i,$$

то

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{\sqrt{f(1+m)p}\sin i}\left\{\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial i} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial i} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial i}\right\} \tag{18.16}$$

или

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{\sqrt{f(1+m)p}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i}. \tag{18.17}$$

Имея в виду (15.31), знаменатель (18.16) можно преобразовать к виду $\sqrt{f(1+m)p} = na^2\sqrt{1-e^2}$, где n—среднее суточное движение. Тогда уравнение для изменения долготы может быть записано в следующем виде:

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i}. \tag{18.18}$$

§ 5. Вывод возмущения долготы восходящего узла под влиянием сжатия Земли

Если определению подлежит только сжатие Земли, то следует рассмотреть возмущение движения искусственного спутника от второй зональной гармоники. Тогда в качестве пертурбационной функции надо взять второй член формулы (18.5). Запишем его в виде

$$R = \frac{fMJ_1a_e^2}{r^3}\left(\frac{3}{2}\sin^2\theta - \frac{1}{2}\right). \tag{18.19}$$

Это значение пертурбационной функции внесем в (18.15). Однако предварительно R надо продифференцировать по i. Выразим для этого $\sin\theta$ через наклонение орбиты i (рис. 123):

$$\sin\theta = \sin u \sin i. \tag{18.20}$$

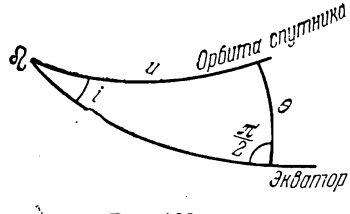


Рис. 123

Тогда

$$R = \frac{fMJ_2a_e^2}{r^3}\left(\frac{3}{2}\sin^2 u \sin^2 i - \frac{1}{2}\right)$$

и

$$\frac{\partial R}{\partial i} = \frac{3fMJ_2a_e^2}{r^3}\sin^2 u \sin i \cos i.$$

Теперь

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\,\frac{3fMJ_2a_e^2}{r^3}\sin^2 u \sin i \cos i.$$

Удобнее дифференцирование выполнять не по времени t, а по истинной аномалии v. Заменим $\frac{d\Omega}{dt}$ через $\frac{d\Omega}{dv}$, имея в виду интеграл площадей из (15.13)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{fMp}}{r^2}.$$

Теперь получим

$$\frac{d\Omega}{dv} = \frac{r^2}{na^2\sqrt{1-e^2}\sqrt{fMp}\sin i}\,\frac{3fMJ_2a_e^2}{r^3}\sin^2 u \sin i \cos i$$

или, имея в виду (15.1) и (15.23),

$$\frac{d\Omega}{dv} = \frac{3J_2a_e^2}{p}\,\frac{\sin^2 u\ \cos i}{r},$$

откуда

$$\frac{d\Omega}{dv} = \frac{3J_2a_e^2}{p^2}(1 + e\cos v)\cos i \sin^2(v + \omega).$$

Нас интересует вековое возмущение долготы узла, а не его периодические колебания. Поэтому в последнем уравнении мы отбросим периодический член, содержащий $\cos v$. Тогда получим

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{3J_2a_e^2}{p^2}\cos i.$$

Это уравнение интегрируем

$$\Omega - \Omega_0 = \frac{3J_2a_e^2}{p^2}\cos i \cdot v. \tag{18.21}$$

Такова основная формула, связывающая долготу узла со сжатием Земли. Она показывает также, что долгота узла изменяется пропорционально углу v, т. е. пропорционально числу оборотов спутника.

§ 6. О влиянии сопротивления атмосферы на долготу восходящего узла

Для близко расположенных к Земле искусственных спутников, подверженных в большой степени возмущениям от фигуры Земли, одновременно имеют место и большие возмущения от сопротивления атмосферы. Ранее было сказано, что сопротивление атмосферы не влияет, однако, на долготу восходящего узла. Покажем теперь, что это в самом деле так. Уравнение для долготы узла можно представить в виде

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r\sin u}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}(F_\xi \sin\Omega \sin i - F_\eta \cos\Omega \sin i + F_\zeta \cos i), \tag{18.22}$$

где F_ξ, F_η, F_ζ — проекции силы сопротивления атмосферы на оси неподвижной системы координат. Сила сопротивления атмосферы $\boldsymbol{F}$, если пренебречь ее вращением, будет направлена по касательной к орбите спутника. Проекции этой силы на оси координат равны

$$F_\xi = F\frac{\dot\xi}{V},$$

$$F_\eta = F\frac{\dot\eta}{V},$$

$$F_\zeta = F\frac{\dot\zeta}{V},$$

где V — абсолютная скорость движения спутника, $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$ — составляющие скорости по неподвижным осям координат.

Введем значения F_ξ, F_η, F_ζ в уравнение (18.22):

$$\frac{d\Omega}{dt} \quad \frac{r \sin u}{na^2 \sqrt{1-e^2 \sin i}} \frac{F_a}{V} (\dot{\xi} \sin \Omega \sin i - \dot{\eta} \cos \Omega \sin i + \dot{\zeta} \cos i), \tag{18.23}$$

при этом ξ, η, ζ определяются уравнениями

$$\xi = r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i),$$
$$\eta = r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i),$$
$$\zeta = r \sin u \sin i.$$

Продифференцировав ξ, η, ζ по t, получим

$$\dot{\xi} = \dot{r}(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i) + \\ + r\dot{u}(-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i),$$

$$\dot{\eta} = \dot{r}(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i) + \\ + r\dot{u}(-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i),$$

$$\dot{\zeta} = \dot{r} \sin u \sin i + r\dot{u} \cos u \sin i.$$

Подставляя эти значения в (18.23), убеждаемся, что последняя обращается в нуль, откуда следует

$$\frac{d\Omega}{dt} = 0, \quad \Omega = \Omega_0 = \text{const}.$$

Таким образом, сопротивление атмосферы не влияет на долготу узла.

§ 7. Определение фундаментальной стоксовой постоянной fM

Величина fM является фундаментальной постоянной и играет большую роль в физической геодезии, задавая шкалу геодезической системы. Она дает возможность определить массу Земли в абсолютной системе единиц, если каким-либо образом определена величина гравитационной постоянной f. Появление искусственных спутников и космических аппаратов дало новый, наиболее точный из современных метод определения этой константы. Он состоит в наблюдении возмущений в движении космических аппаратов, летящих к Луне. В этом случае аппарат, движущийся в поле сил притяжения Земли, испытывает возмущения со

стороны третьего тела — Луны. Возмущением Солнца и планет здесь можно пренебречь.

В случае движения космического аппарата в поле сил земного тяготения и возмущаемого Луной дифференциальные уравнения движения спутника в геоцентрической системе координат будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -f\frac{Mx}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \ddot{y} &= -f\frac{My}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial y}, \\ \ddot{z} &= -f\frac{Mz}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{18.24}$$

Здесь R — возмущающая функция, которую можно представить в виде

$$R = fm_{\text{Л}}\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx_{\text{Л}} + yy_{\text{Л}} + zz_{\text{Л}}}{r_{\text{Л}}^3}\right), \tag{18.25}$$

где x, y, z — координаты аппарата, $x_{\text{Л}}$, $y_{\text{Л}}$, $z_{\text{Л}}$ — координаты центра масс Луны, $r_{\text{Л}}$ — радиус-вектор Луны, r — радиус-вектор аппарата,

$$\Delta = \sqrt{(x - x_{\text{Л}})^2 + (y - y_{\text{Л}})^2 + (z - z_{\text{Л}})^2}. \tag{18.26}$$

Производные от возмущающей функции по осям координат являются проекциями возмущающих сил на эти же оси:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial x} &= fm_{\text{Л}}\left(\frac{x_{\text{Л}} - x}{\Delta^3} - \frac{x_{\text{Л}}}{r_{\text{Л}}^3}\right), \\ \frac{\partial R}{\partial y} &= fm_{\text{Л}}\left(\frac{y_{\text{Л}} - y}{\Delta^3} - \frac{y_{\text{Л}}}{r_{\text{Л}}^3}\right), \\ \frac{\partial R}{\partial z} &= fm_{\text{Л}}\left(\frac{z_{\text{Л}} - z}{\Delta^3} - \frac{z_{\text{Л}}}{r_{\text{Л}}^3}\right). \end{aligned}\right\} \tag{18.27}$$

Таким образом, движение космического аппарата описывается уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{fMx}{r^3} + fM\frac{m_{\text{Л}}}{M}\left(\frac{x_{\text{Л}} - x}{\Delta^3} - \frac{x_{\text{Л}}}{r_{\text{Л}}^3}\right) + \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \ddot{y} &= -\frac{fMy}{r^3} + fM\frac{m_{\text{Л}}}{M}\left(\frac{y_{\text{Л}} - y}{\Delta^3} - \frac{y_{\text{Л}}}{r_{\text{Л}}^3}\right) + \frac{\partial U}{\partial y}, \\ \ddot{z} &= -\frac{fMz}{r^3} + fM\frac{m_{\text{Л}}}{M}\left(\frac{z_{\text{Л}} - z}{\Delta^3} - \frac{z_{\text{Л}}}{r_{\text{Л}}^3}\right) + \frac{\partial U}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{18.28}$$

U — разность между полным потенциалом Земли и его главным членом fM/r. Этот дополнительный потенциал уменьшается очень быстро по мере удаления аппарата от Земли. Уравнения (18.28) позволяют определить величину fM. Входящее в них отношение $m_л/M$ сейчас известно довольно точно, лучшее значение его обратной величины

$$\frac{M}{m_л} = 81{,}3015 \pm 0{,}001.$$

Вводя его в (18.28) и давая производным от U удовлетворительное приближение, например, с учетом второй гармоники J_2, интегрируют систему численным методом и находят величины $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, т. е. положение и скорость аппарата в данный момент и fM — искомую фундаментальную константу.

В этом методе расстояния и скорости определяются доплеровским методом путем радиоэлектрических измерений. В этом случае в качестве эталона сравнения используется скорость света c. Поэтому точность результата определяется точностью знания постоянной c, а она известна с точностью до 10^{-6}.

Лучшее значение fM, определенное этим методом Смитсонианской обсерваторией по наблюдениям лунных зондов «Рейнджер» при принятой скорости света $c=299792{,}5$ *км/сек*, равно

$$fM = 398603 \text{ км}^3/\text{сек}^2.$$

Расстояние до Луны измерялось радиолокационным методом.

Другой способ определения константы fM основан на использовании закона Кеплера (см. (1.31))

$$n^2a^3 = \frac{4\pi^2a^3}{P^2} = fM. \qquad (18.29)$$

Очевидно, что если можно измерить период обращения P и большую полуось орбиты a спутника, то тем самым определится fM. В принципе этот метод прост и очевиден. Достаточно вычислить элементы орбиты, чтобы получить fM. Однако точность получения этих элементов недостаточна для удовлетворительного решения.

Развитие лазерной техники, по-видимому, позволит в недалеком будущем повысить точность этого способа до требуемых величин 10^{-6}—10^{-7}.

ГЛАВА 19

ПРИЛОЖЕНИЕ ЗАДАЧИ ДВУХ НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРОВ К ПОСТРОЕНИЮ НОРМАЛЬНОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

§ 1. Понятие о задаче двух неподвижных центров

Применение искусственных спутников Земли для решения астрономо-геодезических задач и для изучения гравитационного поля и фигуры Земли потребовало дальнейшего и, можно сказать, специфического развития теории движения небесных тел. Как мы уже видели, теория движения искусственных небесных тел изучает возмущенное движение. Весьма часто приходится иметь дело с так называемой ограниченной задачей трех тел.

Эта задача рассматривает движение тела нулевой массы в поле сил тяготения двух конечных притягивающих тел. В этом случае рассматриваемое тело само не влияет на тела с конечными массами, однако, конечно, притягивается ими. Дифференциальные уравнения такого движения не интегрируются до конца, даже в самом простом случае ограниченной круговой задачи трех тел, когда одна из конечных масс движется относительно другой по круговой орбите. Но есть один частный случай ограниченной задачи трех тел, когда общее решение может быть получено в квадратурах: задача двух неподвижных центров. Эта задача состоит в определении движения материальной точки нулевой массы, притягиваемой двумя конечными неподвижными точечными массами, но не оказывающей на них никакого влияния. В этой задаче обе конечные массы остаются неподвижными.

Такая задача была сформулирована и решена Эйлером, однако в астрономии она не находила практического применения, потому что в природе не существовало системы с неподвижными массами. Появление искусственных небесных тел доставило нам приближенно модель такой задачи: при изучении движения космического аппарата в поле сил тяготения, например, Луны и Земли, можно считать в определенных границах, что Луна и Земля неподвижны относительно космического аппарата. За четыре дня пути от Земли к Луне, последняя, двигаясь по почти

круговой орбите вокруг Земли, переместится по орбите незначительно. В первом приближении задача двух неподвижных центров позволяет построить теорию движения космического корабля к Луне.

Особый интерес представляет обобщение задачи двух неподвижных центров, которое оказалось весьма полезным в теории движения искусственных спутников в гравитационном поле Земли.

Пусть материальная точка P пренебрежимо малой массы движется в гравитационном поле Земли. Сама точка P вследствие малости ее массы никакого влияния на Землю не оказывает. Пусть U — силовая функция притяжения точки P Землей. Дифференциальные уравнения движения материальной точки имеют следующий вид:

$$\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{19.1}$$

Силовая функция может быть записана в виде

$$U = \frac{fM}{r}\left\{1 + \sum_{n=2}^{\infty} I_n \left(\frac{a_e}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi) + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} I_{nk}\left(\frac{a_e}{r}\right)^n P_n^k(\sin\varphi)\cos k(\lambda - \lambda_{nk})\right\}. \tag{19.2}$$

Здесь M — масса Земли, a_e — экваториальный радиус Земли, φ, λ — геоцентрические широта и долгота, $P_n(\sin\varphi)$ — полином Лежандра, а $P_n^k(\sin\varphi)$ — присоединенная функция Лежандра.

В случае, если все I_n равны нулю, задача сводится к движению материальной точки около точечной массы, т. е. к задаче о движении точки под действием ньютоновского притяжения неподвижной массой M, находящейся в начале координат.

Если коэффициенты I_n не все равны нулю, то вообще уравнения (19.1) не интегрируются в квадратурах и для решения задачи можно применить метод изменения произвольных постоянных, как это делается в общей теории возмущенного кеплеровского движения.

В этом случае функцию

$$\Delta U = \frac{fM}{r}\sum_{n=2}^{\infty} I_n\left(\frac{a_e}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi) +$$
$$+ \frac{fM}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} I_{nk}\left(\frac{a_e}{r}\right)^n P_n^k \cos k(\lambda - \lambda_{nk}) \tag{19.3}$$

следует рассматривать как возмущающую.

Однако коэффициенты I_n можно подобрать таким образом, чтобы уравнения движений (19.1) интегрировались в квадратурах.

Иными словами, чтобы для изучения гравитационного поля и фигуры Земли воспользоваться задачей о двух неподвижных центрах и проинтегрировать уравнения движения искусственного спутника до конца, надо построить определенным образом модель Земли и ее гравитационного поля.

Такая теория развивалась Е. П. Аксеновым, Е. А. Гребениковым, В. Г. Деминым, М. Д. Кисликом, а также американским ученым Дж. Винти.

В результате построена аналитическая теория движения искусственных спутников в гравитационном поле Земли на основе решения задачи двух неподвижных центров, которая связывает наблюдаемые возмущения элементов орбиты с параметрами гравитационного поля Земли. Однако для использования задачи двух неподвижных центров для изучения гравитационного поля и фигуры Земли должна быть построена удовлетворяющая этой задаче модель гравитационного поля Земли. Такая модель нормального гравитационного поля, должна быть достаточно близкой к реальному гравитационному полю и обладать спецификой, делающей ее подходящей для применения задачи двух неподвижных центров.

Рассмотрим далее модель нормального гравитационного поля Земли в соответствии с предложением Е. П. Аксенова, Е. А. Гребеникова и В. Г. Демина.

§ 2. Потенциал силы тяжести

Потенциал притяжения Земли обычно представляется в виде (19.2). Постоянные I_n, I_{nk}, λ_{nk}, входящие в выражение для потенциала Земли, определяются гравиметрическими методами или по движению ИСЗ.

Коэффициент I_2 имеет порядок 10^{-3}, остальные коэффициенты I_n и I_{nk} имеют порядок 10^{-6} и выше; следовательно, основным членом в разложении потенциала и является член, содержащий полином Лежандра второго порядка. Коэффициенты I_n и I_{nk} медленно убывают с возрастанием номера n. Поэтому, хотя разложение (19.2) абсолютно сходится во всем пространстве $r > a$, где a — радиус-вектор наиболее удаленной от центра Земли точки земной поверхности, но эта сходимость настолько медленна в случае близких спутников, что при точных исследованиях в разложении (19.2) необходимо принимать во внимание большое число членов. Других, более удобных для аналитических исследований разложений для потенциала нет.

Все постоянные I_n, I_{nk}, λ_{nk}, кроме нескольких первых, определяются с очень низкой точностью.

Тессеральные и секториальные гармоники I_{nk}, образующие долготные члены потенциала, характеризуют отличие Земли от тела, динамически симметричного относительно оси вращения. Зональные гармоники нечетного порядка и долготные члены, для которых $n+k$ нечетно, характеризуют асимметрию Земли относительно плоскости экватора.

Чтобы построить нормальное гравитационное поле Земли, рассмотрим функцию координат

$$W = \frac{fM}{2}\left\{\frac{1+i\sigma}{r_1} + \frac{1-i\sigma}{r_2}\right\}, \tag{19.4}$$

где

$$\begin{aligned} r_1^2 &= x^2 + y^2 + [z - c(\sigma + i)]^2, \\ r_2^2 &= x^2 + y^2 + [z - c(\sigma - i)]^2, \end{aligned} \tag{19.5}$$

а c и σ — вещественные постоянные.

Эта функция имеет особые точки, заполняющие окружность радиуса c. В самом деле, приравняем нулю действительные и мнимые части выражений для r_1 и r_2 и получим уравнения

$$x^2+y^2=c^2, \quad z-c\sigma=0,$$

которые определяют окружность, расположенную в плоскости $z=c\sigma$. Отсюда следует, в частности, что если разложить W в ряд, то он будет сходиться в области $r > c\sqrt{1+\sigma^2}$. Разложим W в ряд, для чего разложим в ряд $1/r_1$ и $1/r_2$, помня, что

$$(1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k P_k(\cos\theta).$$

Тогда для r_1^{-1} и r_2^{-1} найдем

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k(\sigma+i)^k}{r^k} P_k\left(\frac{z}{r}\right), \tag{19.6}$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k(\sigma-i)^k}{r^k} P_k\left(\frac{z}{r}\right). \tag{19.7}$$

Подставляя (19.6) и (19.7) в формулу (19.4) и вводя средний экваториальный радиус Земли a_e и геоцентрическую широту φ, получим

$$W = \frac{fM}{r}\sum_{k=0}^{\infty} I'_k \left(\frac{a_e}{r}\right)^k P_k(\sin\varphi), \tag{19.8}$$

где

$$I'_k = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a_e}\right)^k \{(1 + i\sigma)(\sigma + i)^k + (1 - i\sigma)(\sigma - i)^k\}. \qquad (19.9)$$

Если в (19.9) $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, то получим

$$I'_0 = 1, \qquad I'_3 = -2\left(\frac{c}{a_e}\right)^3 \sigma(1 + \sigma^2),$$

$$I'_1 = 0, \qquad I'_4 = \left(\frac{c}{a_e}\right)^4 (1 + \sigma^2)(1 - 3\sigma^2), \qquad (19.9')$$

$$I'_2 = \frac{c^2}{a_e^2}(1 + \sigma^2), \quad I'_5 = 4\left(\frac{c}{a_e}\right)^5 \sigma(1 + \sigma^2)^2.$$

Все коэффициенты I'_n — вещественные величины. Это ясно, если заметить, что при любом целом k величины $(\sigma + i)^k$ и $(\sigma - i)^k$ комплексно сопряжены. Поэтому W есть действительная функция координат r и φ. На основании свойств полиномов Лежандра формулу (19.8) можно представить в виде

$$W = \frac{fM}{r}\left\{1 + \sum_{k=2}^{\infty} I'_k \left(\frac{a_e}{r}\right)^k P_k(\sin\varphi)\right\}. \qquad (19.10)$$

Сравнивая (19.10) с (19.2), видим, что функцию W можно интерпретировать как силовую функцию некоторого тела, обладающего осевой симметрией. Поэтому можно подобрать числовые значения постоянных c и σ так, чтобы W по возможности была близкой к потенциалу притяжения Земли.

Поскольку в уравнении (19.10) M — масса Земли, первый член этого разложения равен первому члену разложения (19.2) для потенциала U.

Выберем постоянные c и σ так, чтобы удовлетворялись условия

$$I'_2 = I_2, \quad I_3 = I_3,$$

откуда следует, что

$$c^2(1 + \sigma^2) = -I_2 a_e^2, \quad 2c^3\sigma(1 + \sigma^2) = -I_3 a_e^3. \qquad (19.11)$$

В этом случае уже первые три члена разложения (19.10) будут соответственно равны первым трем членам разложения (19.2).

Разрешая уравнения (19.11) относительно c и σ, находим

$$c = a_e\left\{-I_2 - \left(\frac{I_3}{2I_2}\right)^2\right\}^{1/2}, \quad \sigma = \frac{I_3}{2I_2}\left\{-I_2 - \left(\frac{I_3}{2I_2}\right)^2\right\}^{-1/2}. \qquad (19.11')$$

Для Земли $I_2 < 0$ и $|I_2| > \left(\frac{I_3}{2I_2}\right)^2$, а значит, согласно (19.11) c и σ—

вещественные величины. Если введем в (19.11′) числовые значения a_e, I_2, I_3, то получим для c и σ следующие величины:

$$c=209{,}730 \text{ км}, \quad \sigma=-0{,}0357583.$$

При этих значениях

$$I_4' = 1{,}166\cdot 10^{-6}, \qquad I_5' = -0{,}006\cdot 10^{-6}.$$

Таким образом, гармоники 4-го и 5-го порядков меньше 10^{-6}. Гармоники 6-го порядка и выше меньше 10^{-9}. Вследствие малости отношения c/a_e величины I_k убывают с возрастанием k быстрее, чем I_k.

Разность функций U и W будет содержать члены порядка 10^{-6} и выше. Таким образом функция W при надлежащем выборе параметров M, c, σ достаточно хорошо аппроксимирует потенциал притяжения Земли. Нормальный потенциал, определяемый формулами (19.9)—(19.11), иначе называют промежуточным потенциалом, а соответствующее гравитационное поле — промежуточным гравитационным полем Земли. Построенный таким образом потенциал W включает в себя полностью 2-ю и 3-ю и частично 4-ю зональные гармоники потенциала притяжения Земли. Разность $U—W$ содержит члены, порядок которых 10^{-6} и выше. При этом зональные гармоники, начиная с 5-й, а также секториальные и тессеральные гармоники практически не отличаются от соответствующих членов потенциала Земли.

Потенциал W зависит от трех постоянных fM, c, σ. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в поле с потенциалом W интегрируются в квадратурах.

Последнее свойство является следствием того, что функция W может рассматриваться как силовая функция задачи двух неподвижных центров с массами $\frac{M}{2}(1+i\sigma)$ и $\frac{M}{2}(1-i\sigma)$, удаленными друг от друга на расстояние, равное $2ic$.

§ 3. Уравнение идеального геоида

Рассмотрим модель Земли, потенциал которой во внешнем пространстве задается формулой (19.10) и которая вращается с угловой скоростью вращения Земли ω. Пусть внешняя поверхность этой модели совпадает с поверхностью уровня Земли. Уровенные поверхности определятся уравнением

$$\frac{\omega^2}{2} r^2 \cos^2\varphi + W(r, \varphi) = C, \tag{19.12}$$

где первый член есть центробежный потенциал.

Из семейства поверхностей выберем ту, экваториальный радиус которой равен экваториальному радиусу Земли a_e. Тогда, полагая в (19.12) $\varphi=0$ и $r=a_e$, получим

$$C=\frac{\omega^2 a_e^2}{2}+W(a_e, 0)$$

или, имея в виду (19.10),

$$C=\frac{fM}{a_e}\left\{1+\frac{1}{2}q+\sum_{k=2}^{\infty}I_k' P_k(0)\right\}, \tag{19.13}$$

где

$$q=\frac{\omega^2 a_e^3}{fM}.$$

Уравнение (19.12) теперь можно записать так:

$$\frac{fM}{r}\left\{1+\frac{1}{2}q\left(\frac{r}{a_e}\right)^3\cos^2\varphi+\sum_{k=2}^{\infty}I_k'\left(\frac{a_e}{r}\right)^k P_k(\sin\varphi)\right\}=$$

$$=\frac{fM}{a_e}\left\{1+\frac{1}{2}q+\sum_{k=2}^{\infty}I_k' P_k(0)\right\}, \tag{19.14}$$

если считать c/a_e, σ малыми первого порядка, q и I_2' — второго порядка, I_3', I_4' — четвертого порядка и т. д.

Будем искать решение уравнения (19.14) в виде разложения по степени малых q и I_k'. Тогда, полагая

$$r=a_e\left(1+qx_1+I_2'x_2+I_3'x_3+I_4'x_4+I_2'^2x_5+q^2x_6+I_2'qx_7\right) \tag{19.15}$$

и подставляя (19.15) в (19.14), получим следующие уравнения для определения x_k:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=-\frac{1}{2}\sin^2\varphi,\\ x_2&=P_2(\sin\varphi)-P_2(0),\\ x_3&=P_3(\sin\varphi)-P_3(0),\\ x_4&=P_4(\sin\varphi)-P_4(0),\end{aligned}\right\} \tag{19.16}$$

$$\left.\begin{aligned} x_5&=x_2^2-3x_2P_2(\sin\varphi),\\ x_6&=x_1^2+x_1\cos^2\varphi,\\ x_7&=2x_1x_2+x_2\cos^2\varphi-3x_1P_2(\sin\varphi).\end{aligned}\right\} \tag{19.17}$$

Вычислив при помощи (19.16) и (19.17) величины $x_1, x_2, \ldots, x_7$ и подставив их в (19.15), а затем заменив I_2', I_3', I_4' их выражени-

ями из (19.9′), получим уровенную поверхность с точностью до членов четвертого порядка, совпадающую с эллипсоидом вращения,

$$r = a_e(1 + \beta_1 \sin\varphi + \beta_2 \sin^2\varphi + \beta_3 \sin^3\varphi + \beta_4 \sin^4\varphi), \qquad (19.18)$$

где

$$\beta_1 = 3\left(\frac{c}{a_e}\right)^3\sigma,$$

$$\beta_2 = -\frac{3}{2}\left(\frac{c}{a_e}\right)^3\left[1 + \left(\frac{c}{a_e}\right)^2 + \sigma^2\right] - \frac{3}{4}\left(\frac{c}{a_e}\right)^2 q - \frac{1}{2}q(1+q), \qquad (19.19)$$

$$\beta_3 = -5\left(\frac{c}{a_e}\right)^3\sigma,$$

$$\beta_4 = \frac{3}{4}q^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{c}{a_e}\right)^2 q - \frac{1}{8}\left(\frac{c}{a_e}\right)^4.$$

Обозначим через a' и a'' полярные радиусы северного и южного полушарий и введем величины

$$\alpha' = \frac{a_e - a'_e}{a_e}; \qquad \alpha'' = \frac{a_e - a''_e}{a_e}, \qquad (19.20)$$

$$\alpha = \frac{a_e - \frac{1}{2}(a'_e + a''_e)}{a_e}.$$

Очевидно, α — среднее сжатие поверхности (19.18), α' и α'' — сжатия северного и южного полушарий соответственно. Полагая в (19.18) $\varphi = 90°$ и $\varphi = -90°$, получим из (19.20)

$$\alpha = \frac{1}{2}q + \frac{3}{2}\left(\frac{c}{a_e}\right)^2(1+\sigma^2) - \frac{1}{4}q^2 + \frac{13}{8}\left(\frac{c}{a_e}\right)^4, \qquad (19.21)$$

$$\alpha' = \alpha + 2\left(\frac{c}{a_e}\right)^3\sigma, \qquad \alpha'' = \alpha - 2\left(\frac{c}{a_e}\right)^3\sigma.$$

Следовательно, все три сжатия отличаются членами четвертого порядка малости. Если в (19.18) отбросить члены четвертого порядка, то ее можно привести к виду

$$\frac{x'^2 + y'^2}{a_e^2} + \frac{z'^2}{a_e^2(1-\alpha)^2} = 1. \qquad (19.22)$$

Следовательно, с точностью до второго порядка уровенная поверхность совпадает со сжатым эллипсоидом вращения.

Подставим теперь в (19.18) числовые значения a_e, q, c/a_e, σ. Значения c и σ получим из (19.11′) при значениях I_2, I_3, принятых по Козаи. Тогда

$$k=0{,}7292123\cdot 10^{-4}\ сек^{-1},$$
$$fM=3{,}986032\cdot 10^{5}\ км^3\cdot сек^{-2},$$
$$a_e=6378165\ км,$$
$$c/a_e=0{,}0328825,\quad q=0{,}00346142,$$
$$c=209{,}730\ км,\quad \sigma=-0{,}0357583,$$

поэтому

$$r=6\,378\,165-21\,464\sin^2\varphi+74\sin^4\varphi-24\sin\varphi+41\sin^3\varphi. \qquad (19.23)$$

Таким образом, экваториальный радиус a_e превосходит северный полярный a' и южный a'' на 21 737 и 21 406 $м$, соответственно, а $a'-a''=33$ $м$.

Для сжатия имеем

$$\alpha=1:298{,}19,\ \alpha'=1:298{,}42,\ \alpha''=1:297{,}96.$$

Если в потенциале U ограничиться членами до четвертой гармоники включительно, то фигура Земли будет описываться уравнением

$$r=6\,378\,165-21\,475\sin^2\varphi+88\sin^4\varphi-24\sin\varphi+41\sin^3\varphi. \qquad (19.24)$$

В последнее время в качестве эллипсоида относимости для Земли принимается эллипсоид с большой полуосью $a_e=6\,378\,160$ $м$ и $\alpha=1:298{,}25$ (см. стр. 459), т. е.

$$r=6\,378\,165-21\,493\sin^2\varphi+108\sin^4\varphi. \qquad (19.25)$$

Эти эллипсоиды расходятся максимум на 3 $м$.

§ 4. Нормальное значение силы тяжести

Силу тяжести на уровенной поверхности $W=\text{const}$ можно получить как производную потенциала по координатам:

$$g=\sqrt{\left(\frac{\partial\overline{W}}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\overline{W}}{\partial\varphi}\right)^2}, \qquad (19.26)$$

где

$$\overline{W}=\frac{\omega^2}{2}r^2\cos^2\varphi+W.$$

Второе слагаемое имеет 4-й порядок малости. Поэтому с точностью до 4-го порядка

$$g = \left|\frac{\partial \overline{W}}{\partial r}\right|\left\{1 + \frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial \overline{W}}{\partial \varphi}\right)^2\left(\frac{\partial \overline{W}}{\partial r}\right)^{-2}\right\}. \tag{19.27}$$

Но

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \overline{W}}{\partial \varphi} = \frac{fM}{r^2}\left\{3I_2\left(\frac{a_e}{r}\right)^2 - q\left(\frac{r}{a_e}\right)^3\right\}\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial \overline{W}}{\partial r} = -\frac{fM}{r^2}\left\{1 + 3I_2\left(\frac{a_e}{r}\right)^2 P_2(\sin\varphi) - \right.$$

$$\left. - q\left(\frac{r}{a_e}\right)^3\cos^2\varphi + 4I_3\left(\frac{a_e}{r}\right)^3 P_3(\sin\varphi) + 5I_4\left(\frac{a_e}{r}\right)^4 P_4(\sin\varphi)\right\}.$$

Поэтому

$$g = \frac{fM}{r^2}\left\{1 - q\left(\frac{r}{a_e}\right)^3\cos^2\varphi + 3I_2\left(\frac{a_e}{r}\right)^2 P_2(\sin\varphi) + \right.$$

$$+ 4I_3'\left(\frac{a_e}{r}\right)^2 P_3(\sin\varphi) + 5I_4'\left(\frac{a_e}{r}\right)^4 P_4(\sin\varphi) +$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left[3I_2'\left(\frac{a_e}{r}\right)^2 - q\left(\frac{r}{a_e}\right)^3\right]^2(\sin^2\varphi - \sin^4\varphi)\right\}.$$

Подставляя сюда вместо r его выражение из (19.18) и пользуясь (19.17) и (19.19), окончательно найдем

$$g = g_0(1 + \alpha_1\sin\varphi + \alpha_2\sin^2\varphi + \alpha_3\sin^3\varphi + \alpha_4\sin^4\varphi), \tag{19.28}$$

где

$$g_0 = \frac{fM}{a_e^2}\left(1 - q + \frac{3}{2}\varkappa^2 + \frac{3}{2}\varkappa\sigma^2 + \frac{15}{8}\varkappa^4\right),$$

$$\alpha_1 = 6\varkappa^3\sigma,$$

$$\alpha_2 = 2q - \frac{3}{2}\varkappa^2(1 + \sigma^2) + 4q^2 + \frac{9}{2}\varkappa^2 q, \tag{19.29}$$

$$\alpha_3 = -10\varkappa^3\sigma,$$

$$\alpha_4 = -\frac{7}{4}q^2 - \frac{21}{2}\varkappa^2 q - \frac{21}{8}\varkappa^4.$$

Из формулы (19.28) при принятых в предыдущем параграфе числовых значениях fM, a, q, $\varkappa = \frac{c}{a_e}$, σ найдем

$$g' = 978\,029 + 5{,}241\sin^2\varphi - 0{,}056\sin^4\varphi - 0{,}007\sin\varphi + 0{,}012\sin^3\varphi. \tag{19.30}$$

Сравним полученную формулу с нормальным распределением по формуле Гельмерта

$$g = 978\,030 + 5{,}229 \sin^2 \varphi - 0{,}043 \sin^4 \varphi. \qquad (19.31)$$

Наибольшее расхождение получается в северном полушарии в 2,6 *мгл*, а в южном — 9 *мгл*. Таким образом, формула (19.28) хорошо согласуется с формулой нормального значения силы тяжести.

§ 5. Принцип построения дифференциальных уравнений движения спутника

Предположим, что спутник движется только под действием притяжения Земли. Тогда дифференциальные уравнения движения спутника будут

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}. \qquad (19.32)$$

Те же дифференциальные уравнения движения спутника можно записать также, пользуясь промежуточным потенциалом W:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{\partial W}{\partial x} &= \frac{\partial R_T}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\partial W}{\partial y} &= \frac{\partial R_T}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{\partial W}{\partial z} &= \frac{\partial R_T}{\partial z}, \end{aligned} \qquad (19.33)$$

где R_T — возмущающая функция, зависящая от гравитационного поля Земли. Эта функция имеет вид

$$R_T = \frac{fM}{r} \sum_{n=4}^{\infty} I_n \left(\frac{a_e}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi) + \\ + \frac{fM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} I_{nk} \left(\frac{a_e}{r}\right)^n P_n^k(\sin\varphi) \cos(\lambda - \lambda_{nk}), \qquad (19.34)$$

причем I_n' определяется формулой (19.9).

Если в (19.33) положить $R_T = 0$, то получим следующие уравнения движения:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial W}{\partial x}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial W}{\partial y}; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial W}{\partial z}. \qquad (19.35)$$

Это уравнения промежуточного движения, поскольку они имеют промежуточный характер между возмущенным и невозмущенным движением.

Эти уравнения, в которые входит потенциал W, определяемый притяжением двух неподвижных центров, получены с учетом 2-й и 3-й зональных гармоник, т. е. главных возмущающих членов потенциала Земли. Поэтому уравнения (19.35) представляют движения искусственных спутников Земли лучше, чем уравнения невозмущенного кеплеровского движения, а соответствующая им промежуточная орбита ближе к истинной орбите, чем кеплеровский эллипс. Кроме того, эти уравнения, будучи составленными для потенциала тяготения двух неподвижных центров, интегрируются до конца.

Введенный промежуточный потенциал W отличается от потенциала реальной Земли членами 2-го порядка относительно сжатия и имеет достаточно простой вид. Фигура идеализированной Земли, соответствующая этому потенциалу, близка к фигуре реальной Земли, а распределение силы тяжести на ней очень мало отличается от результатов, полученных на основе различных нормальных формул.

Промежуточный потенциал зависит от постоянных, которые с высокой точностью определяются по наблюдениям ИСЗ. Поэтому этот потенциал удобен для исследования гравитационного поля и фигуры Земли с применением искусственных спутников.

Потенциал W содержит три неизвестные переменные: c, fM и σ. В общем случае силовая функция задачи двух неподвижных центров зависит от большего числа постоянных. Однако, если иметь в виду ее применение к Земле, эта функция должна быть действительной и коэффициент при первой гармонике должен равняться нулю. В силу этого формула (19.4) является самой общей из всех формул для силовой функции двух неподвижных центров, которые могут быть использованы для аппроксимации потенциала Земли.

Положим $\sigma=0$; тогда W примет вид

$$W = \frac{fM}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-ic)^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+ic)^2}}\right\}. \quad (19.36)$$

Если разложить (19.36) в ряд по полиномам Лежандра, то ряд будет содержать только гармоники четного порядка. При этом его первые два члена будут равны первым двум членам разложения потенциала Земли, если

$$c = a_e\sqrt{-I_2}. \quad (19.37)$$

Поэтому можно различить два варианта задачи: симметричный ($\sigma=0$) и несимметричный ($\sigma\neq 0$). В обоих вариантах строго учитывается вторая гармоника. Несимметричный случай учитывает также асимметрию Земли относительно плоскости экватора.

ГЛАВА 20

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ИЗУЧЕННОСТИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ И ФИГУРЫ ЗЕМЛИ

§ 1. Мировая гравиметрическая система

Изучение гравитационного поля Земли способствует в первую очередь решению трех важнейших проблем, две из которых уже давно интересуют человечество. Это, во-первых, уточнение наших знаний и представлений о фигуре Земли. Во-вторых, это получение некоторой информации о внутреннем строении Земли, ее физико-химическом состоянии и строении земной коры, и, в-третьих, разведка полезных ископаемых. Нас интересует сейчас первая из этих проблем, а именно, использование гравиметрических съемок для изучения фигуры Земли. Для того чтобы можно было изучить фигуру Земли более или менее детально с помощью гравиметрических измерений, очень важно, чтобы вся Земля в целом была покрыта гравиметрическими съемками и для каждой точки ее поверхности можно было получить с достаточной точностью аномалию силы тяжести. Дело в том, что форма поверхности, представляющей Землю в данной точке, определяется не только гравитационным полем в ближайшей окрестности к точке, но и гравитационным полем всей Земли, включая самые отдаленные ее части. Поэтому вопрос о форме Земли можно решить только при условии гравитационной изученности Земли в целом.

Гравиметрические измерения, как правило, относительны, т. е. в данной точке измеряется не само значение напряженности гравитационного поля, а приращение его по отношению к исходной точке, в которой напряжение поля известно. Поэтому уже на ранних стадиях развития гравиметрического метода возник вопрос об унификации гравиметрических измерений и приведении всех их в одну систему. В период 1898—1904 гг. Кюненом и Фуртвенглером было проведено в Потсдамском геодезическом институте определение абсолютного значения ускорения силы тяжести, положенное в основу мировой гравиметрической системы. С этого времени было решено, что все гравиметрические измерения должны делаться относительно этого абсолютного

пункта. Во всех странах, занимающихся гравиметрией, были определены основные опорные пункты, непосредственно связанные с Потсдамом. Все же съемки внутри страны должны были выполняться относительно этих основных пунктов. По мере расширения гравиметрических работ начали создаваться в различных странах национальные опорные сети, состоящие из ряда достаточно точно определенных гравиметрических пунктов, каждый из которых мог бы служить исходным для местных, более или менее детальных гравиметрических съемок.

Абсолютные определения выполнены теперь уже во многих местах. Такие определения сделаны в Вашингтоне, Теддингтоне, Париже, Ленинграде, Сиднее, Буэнос-Айресе, Бад-Гарцбурге, Иоганнесбурге и в ряде других мест. Сопоставление их с Потсдамом показало, что значение g в мировом исходном пункте завышено на 14 *мгл*. Все это сняло исключительность Потсдама как мирового исходного пункта, а потсдамскую гравиметрическую систему сделало скорее символом унификации гравиметрических определений, чем реальным пунктом относимости. В упомянутых местах абсолютное значение ускорения силы тяжести определено с несравненно большей точностью, чем в Потсдаме, все значения увязаны между собой и перенесены в Потсдам. Таким образом, уточненное значение ускорения силы тяжести в Потсдаме (с поправкой в 14 *мгл*) является исходным значением для новой системы, которую только условно можно назвать потсдамской и в которой абсолютное значение ускорения силы тяжести дано несравненно точнее. Можно считать, что новое значение ускорения силы тяжести в мировом исходном гравиметрическом пункте совпадает с истинным, во всяком случае в пределах миллигала.

В таблице 19 приведены основные абсолютные определения последних лет, давшие надежную величину поправки потстдамской системы.

Для приведения национальных опорных гравиметрических сетей используется мировая опорная сеть. Начало создания мировой опорной гравиметрической сети было положено Г. Вуллардом, который в период 1950—1960 гг. определил на разных континентах ряд опорных пунктов с помощью маятникового прибора Галф и гравиметров Уорден. В 1953 г. вопрос о создании такой сети и ее последующих усовершенствованиях рассматривался на ассамблее Международного геодезического союза, а в 1956 г. У. Уотилой было произведено уравнивание и был опубликован каталог, содержащий около 100 опорных пунктов. В 1967 г. более подробный каталог составлен Морелли. В период 1963—1967 гг. американскими гравиметристами определено большое количество новых и повторены старые опорные пункты. Эта система уравнена. Все определения отнесены к Севру,

Таблица 19

Пункт, исполнитель и год определения	g (измеренное), *мгл*	Δg (опред. пункт-Потсдам), *мгл*	g (редуцированное к Потсдаму), *мгл*	Поправка потсдамской системы, *мгл*
1. Теддингтон, Кук, 1967 г.	981 181,81± ±0,13	+78,23± ±0,05	981 260,04± ±0,14	—13,96± ±0,14
2. Теддингтон, Фаллер, 1969 г.	981 181,865± ±0,06	+78,23± +0,05	981 260,095± ±0,08	—13,90± ±0,08
3. Север А., Фаллер, 1969 г.	980 925,965± ±0,05	+334,13± ±0.05	981 200,095± ±0,10	—13,90± ±0,10
4. Потсдам, Шулер, 1969 г.	981 260,1± ±0,3	0	981 260,1± ±0,3	—13,9± ±0,3
5. Берлин, Дитрих, 1970 г.	981 266,31± ±0,5	—5,96± ±0,01	981 260,35± ±0,5	—13,65± ±0,5
6. Север А., Сакума, 1970 г.	980 925,931± ±0,03	+334,13± ±0,09	981 260,061+ 0,09	—13,94± ±0,09
		Среднее весовое значение поправки		—13,92± 0,05

пункту, в котором Сакумой определено абсолютное значение силы тяжести. Масштаб сети задан измерениями с прибором Фаллера для абсолютных определений силы тяжести. Точность уравненных значений составляет $\pm 0{,}1 \div \pm 0{,}2$ *мгл*. Схема мировой опорной гравиметрической сети по состоянию на 1966 г. дана на рис. 124.

Ныне существующая мировая опорная гравиметрическая сеть создана с помощью гравиметров — приборов, позволяющих делать только относительные измерения и требующих калибровки на пунктах с известными значениями силы тяжести. В силу этого точность определения ускорения силы тяжести на опорных пунктах зависит от того, как и с какой точностью были прокалиброваны гравиметры, причем отклонение измеренных значений силы тяжести от истинных, полученных с такими гравиметрами, зависит от величины разности измеряемой силы тяжести. Иными словами, от калибровки приборов зависит шкала, в которой ведутся измерения. Поэтому, хотя все опорные пункты и считаются отнесенными к Потсдаму, но выражены они могут быть в разных системах шкал, в зависимости от того, как получен масштаб этих шкал. В этом смысле иной раз говорят об европейском или об американском миллигале и т. п. Правда, такие отклонения малы по сравнению, например, с ошибкой абсолютных определений в Потсдаме. Но все же при больших разностях они могут достигать нескольких миллигалов. Примерно с такой точностью и построена современная сеть опорных пунктов, связывающая ныне все континенты и ряд больших островов, большинство столиц крупных государств и важных портов.

На базе этих мировых опорных пунктов большинство стран развили внутренние национальные опорные сети, служащие основой для выполнения будущих детальных гравиметрических определений.

В виду основных задач, решаемых гравиметрией, гравиметрические работы можно подразделить на три основные категории:

1. Геодезические съемки, которые в силу предъявляемых к ним требований с самого начала осуществлялись в одной системе, по крайней мере в меру технических возможностей. При этих съемках всегда стремились к равномерному охвату больших территорий при сравнительно редком размещении пунктов. В идеале такие съемки должны покрывать всю Землю.

2. Гравиметрические съемки, выполняемые с целью поисков и разведки полезных ископаемых. Разнообразие этих съемок велико: здесь и очень детальные съемки малых участков для разведки и изучения залежей и структур, и сравнительно разреженные региональные съемки, служащие в основном целям тектонического районирования, здесь и местные опорные сети. По существу геолого-разведочные задачи не требуют от гравиметрических съемок быть строго унифицированными. Не очень важна также и шкала, в которой они выполнены. Поэтому на первых порах такие съемки велись без хорошей увязки с общей системой. Однако важность построения общих гравиметрических карт на большие территории и целиком страны и континенты, с помощью которых можно было бы интерпретировать региональную гравиметрическую картину в целом, привела к унификации этих съемок, после чего они начали служить двойной цели: геолого-разведочной и геодезической.

3. Специальные гравиметрические измерения, выполняемые для изучения физики Земли или некоторых других задач. Это изучение лунно-солнечных вариаций силы тяжести, абсолютные определения силы тяжести для уточнения гравиметрической системы, создание вековых реперов и специальных сетей для изучения вековых изменений силы тяжести, создание калибровочных полигонов и т. п.

Во всяком случае все виды гравиметрических работ приводят к накоплению данных и постепенному покрытию съемкой всей поверхности Земли, а это в свою очередь приближает нас к возможности высокоточного определения всех характеристик гравитационного поля и фигуры Земли. Надо полагать, что в ближайшем будущем радикально будет решен вопрос унификации гравиметрических определений и утверждение единой системы.

Очевидно, что гравиметры по своей идее являются приборами, не приспособленными для создания опорных гравиметрических сетей, и только достижение высокого совершенства в развитии их, высокие точности, получаемые с ними, с одновременным

отставанием в развитии других методов, привели к их использованию в этом виде работ. Современное развитие электроники и измерительной техники сделали возможным высокоточное измерение силы тяжести методом свободного падения. Этот метод дает абсолютное значение g в точке измерения. При его применении не требуется никакой калибровки, и где бы ни определялось g, оно всегда будет в одной системе истинного значения ускорения силы тяжести. Точнее, в этом случае теряется смысл говорить о системе. В последнее время создано несколько стационарных установок и переносных приборов для высокоточных измерений силы тяжести свободным падением. Точность таких приборов даже на первых порах достигает нескольких сотых миллигала для переносных установок и нескольких тысячных для стационарных.

§ 2. Гравиметрическая изученность мира

Как уже говорилось, для надежного получения параметров фигуры Земли гравиметрическим путем требуется равномерное покрытие Земли гравиметрическими пунктами. Вопрос, как часто эти пункты должны быть размещены, зависит от того, с какой точностью нужно получить характеристики фигуры Земли. С современной точки зрения можно считать, что задача решалась бы удовлетворительно, если бы было известно значение силы тяжести в каждой площадке со сторонами по одному градусу дуги, т. е. в каждой одноградусной площадке. Даже если бы каждая площадка со стороной 5° имела гравитационную характеристику, можно было бы получить надежные результаты. Обычно при изучении фигуры Земли гравитационное поле представляют в виде средних значений аномалий в границах одно-, пяти- или десятиградусных трапеций. Однако при образовании таких средних картина получается весьма неоднородная. Есть области на Земле, где гравитационное поле изучено весьма подробно и средние в границах одноградусных или пятиградусных трапеций выведены надежно из большого числа определений. Но много областей и таких, где в рассматриваемую пяти- или одноградусную трапецию не попадает ни одного пункта.

Наиболее подробно изучены в гравитационном отношении континенты. Так оно и должно быть. Во-первых, естественно познавать сначала те области, где ты живешь, во-вторых, такой деликатный эксперимент как измерение ускорения силы тяжести с точностью до 10^{-6} или 10^{-7} ее величины проще сделать на суше, на стабильном основании, чем на зыбкой платформе, плавающей на воде. Отдельные измерения силы тяжести на суше начаты еще в середине прошлого столетия. В 20-е годы нашего столетия уже ведутся гравиметрические съемки с целью поис-

ков полезных ископаемых, а в 30-е годы начинают выполняться планы сплошного покрытия маятниковыми гравиметрическими пунктами в ряде стран, в том числе в США и СССР.

Гравиметрические измерения на океанах длительное время вообще считалось невыполнимыми. В конце 20-х годов нашего столетия голландский геофизик Венинг-Мейнес предложил метод определения силы тяжести на корабле и построил первый морской маятниковый прибор. Он же осуществил измерение силы тяжести на подводной лодке в Индийском и Тихом океанах. В СССР его идеи развивал и применил на практике русский гравиметрист Л. В. Сорокин, который на том же принципе сконструировал морской маятниковый прибор и осуществил гравиметрические наблюдения на Черном, Каспийском и Охотском морях. Однако такие работы долгое время были уникальными работами отдельных энтузиастов морской гравиметрии.

Только после войны 1941—1945 гг. и особенно в последующее за ней десятилетие отдельные страны начали проявлять большой интерес к изучению гравитационного поля морей и океанов. В это время широко проводятся морские гравиметрические работы в таких странах, как США, Англия и СССР. Для морских гравиметрических работ создаются усовершенствованные маятниковые приборы и специальные гравиметры. В то же время и несколько раньше начинают проводиться гравиметрические съемки на мелководных областях морей с гравиметрами, опускаемыми на дно. В настоящее время изучение гравитационного поля океанов идет нарастающим темпом. Однако именно южное полушарие, бóльшая часть которого покрыта водой, является наименее изученным.

Сейчас можно считать покрытыми сплошной гравиметрической съемкой Европу, Северную Америку, Австралию, значительные части Азии. Однако здесь почти не изучены обширные территории в Гималаях, бóльшая часть юго-восточной Азии. Африка представлена довольно густыми гравиметрическими съемками в северных областях, Сахаре, бассейне Красного моря, а также в области озер Ньяса и Виктория, Республики Чад. Обширные территории центральной Африки, Судан и ряд областей Западной Африки остаются белыми пятнами. Можно считать, что в настоящее время изучено от 40 до 50% общей территории континента. Среди обитаемых континентов меньше всего гравиметрических съемок произведено в Южной Америке. Во всяком случае совершенно неизученными остаются обширные области Бразилии и Аргентины, почти весь район Анд. Последний континент, Антарктида, начал серьезно изучаться с 1956 г., когда был проведен Международный геофизический год — международное сотрудничество в исследовании океанов и Антарктиды. За прошедшее с тех пор время в Антарктиде

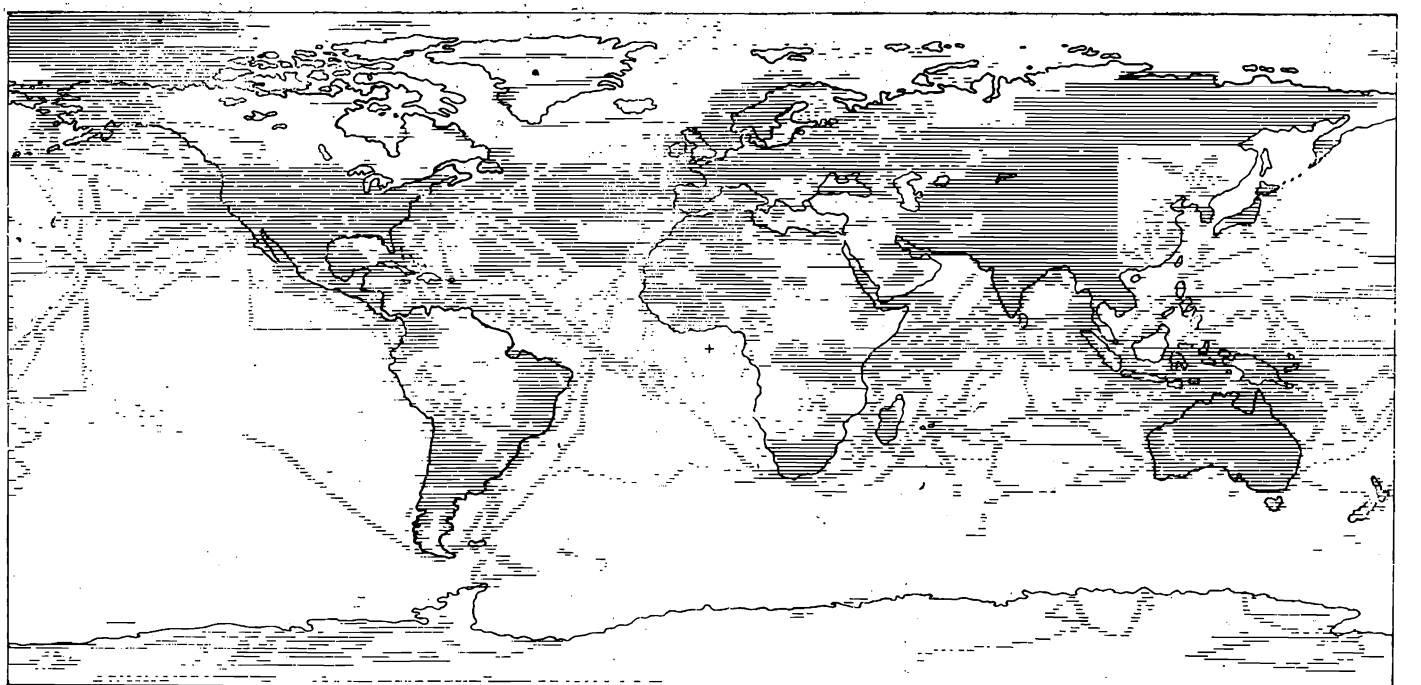


Рис. 125.

произведены гравиметрические съемки на значительных прибрежных территориях, ряд маршрутов пересекли континент от береговых станций до полюса, проведены съемки на льду припая, т. е. в шельфовых зонах и в окружающих акваториях и, хотя эти пункты расположены неравномерно, Антарктиду уже нельзя считать белым пятном.

Значительно хуже обстоит дело с океаном. Однако и на их акваториях за последние два десятилетия произведено значительное количество наблюдений. Процент изученности, естественно, уменьшается с уменьшением площади осреднения. Так, в случае осреднения по пятиградусным трапециям процент изученности составляет 64%, а в случае осреднения по одноградусным трапециям он убывает до 30%.

Таблица 20

Размер трапеций, *град.*	Всего трапеций по Земле в целом	Изученных трапеций	%
1	64 800	19 328	29,79
5	2 592	1 654	63,8
	На суше		
1	21 882	10 115	46,2
	На океане		
1	42 918	9 213	21,5

В таблице 20 приведено распределение изученных и неизученных областей на суше и на океанах по данным Смитсонианской обсерватории. На рис. 125 приведена обобщенная схема изученности мира (см. сборник «Стандартная Земля III»). Штриховкой даны области, имеющие гравиметрические характеристики.

§ 3. Гравиметрические карты

Исходным материалом для всех теоретических выводов служат осредненные значения и гравиметрические карты аномалий в свободном воздухе. Осреднения, как правило, делаются в границах одноградусных трапеций. Если требуется, то из них легко получаются аномалии, осредненные по пяти- или десятиградусным трапециям. Схема аномалий в пятиградусных трапециях по данным университета в Огайо приведена на рис. 126. Видно, что поле осредненных аномалий в свободном воздухе очень спокойное. Аномалии достигают максимума в +49 *мгл* только на континенте Америки и в +40 *мгл* на границе Азии и Европы. Самый глубокий минимум в —45 *мгл* лежит в области Гималаев. В океанах амплитуда изменения аномалий мала: она достигает максимума в Атлантике (от —47 до +36 *мгл*).

Осредненные значения аномалий удобны для вычислений на ЭВМ по заданной сетке точек. Если в задаче надо получить аномалии с предельной возможной точностью в любой точке земной поверхности, то строятся гравиметрические карты. Карты представляют собой наиболее наглядную и наиболее

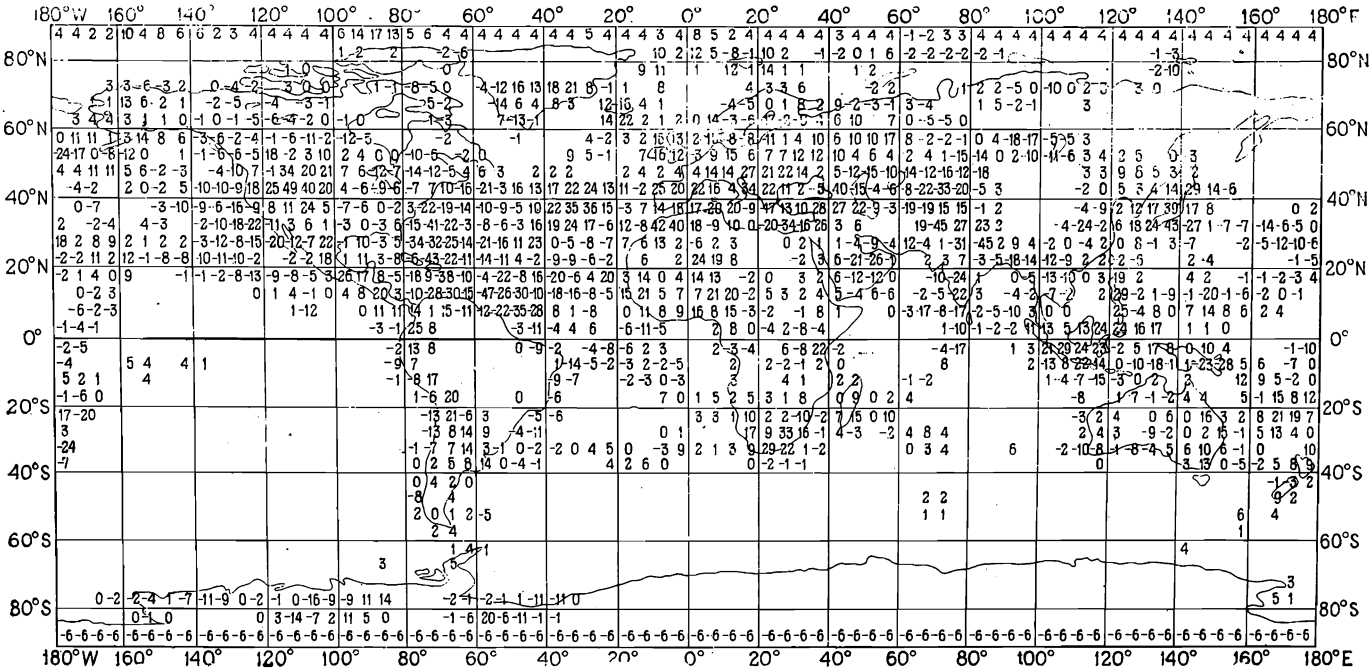

180°W
160°
140°
120°
100°
80°
60°
40°
20°
0°
20°
40°
60°
80°
100°
120°
140°
160°
180°E
80°N
60°N
40°N
20°N
0°
20°S
40°S
60°S
80°S

Рис. 126.

удобную интерполяционную форму представления аномалий. Плавно проведенные линии интерполяции — изолинии — позволяют с наибольшей точностью получить интерполяционное значение аномалий в любой точке Земли. Для решения различных задач изучения фигуры Земли требуются карты различных масштабов.

§ 4. Геометрическая структура гравитационного поля и фигуры Земли

Современное представление о фигуре Земли находится в постоянной эволюции. Непрерывный прирост гравиметрических наблюдений и увеличение количества наблюдавшихся спутников требует постоянного улучшения полученных результатов. Поэтому в настоящее время представления о фигуре Земли и ее гравитационном поле не установились и непрерывно развиваются. Но это относится к деталям. В основных чертах современные гравиметрические и спутниковые данные дают надежные представления об основных чертах гравитационного поля и фигуры Земли.

Сейчас очевидно, что Земля вполне хорошо представляется эллипсоидом вращения. Отклонения геоида от хорошо подобранного эллипсоида не превосходят сотни метров, т. е. $\sim 10^{-5}$ ее радиуса. Сглаженные высоты геоида надежно определяются по спутникам. Для значительной части Земли, покрытой гравиметрическими съемками, они могут быть вычислены детально практически для любой точки земной поверхности. Известные высоты в нормальной системе также позволяют определить положение любой точки физической поверхности Земли.

В большом круге вопросов достаточно знать крупные черты фигуры и гравитационного поля Земли. Это вполне надежно дают современные решения задачи при совместном использовании спутниковых и гравиметрических данных.

Традиционное представление нормального гравитационного поля в виде формулы нормального значения силы тяжести

$$g = \gamma_e(1 + \beta \sin^2 \varphi + \beta' \sin^2 2\varphi)$$

сейчас обычно заменяется разложением по сферическим функциям. Потенциал силы тяжести может быть записан в общем виде

$$W = \frac{fM}{r}\left\{1 + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{a_e}{r}\right)^n (C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda) P_{nm}(\sin\varphi)\right\} + \frac{\omega^2 r^2}{2}\cos^2\varphi, \quad (20.1)$$

где a_e — экваториальный радиус Земли, r — геоцентрический радиус любой точки на поверхности Земли или во внешнем пространстве, φ, λ — широта и долгота места, ω — угловая скорость вращения Земли, C_{nm}, S_{nm} — гармонические коэффициенты разложения потенциала по сферическим функциям.

Как уже было показано, гармоника нулевого порядка определяет потенциал сферической Земли fM/r, а первая гармоника обращается в нуль выбором начала координат в центре масс Земли. Зональные коэффициенты, начиная со второго порядка, характеризуют моменты инерции тела вращения. Они не зависят от долготы λ. Поскольку в этих членах $m = 0$, то

$$(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda)_{m=0} = C_{n0},$$

т. е.

$$C_{20} = J_2, \quad C_{40} = J_4, \ \ldots$$

Выделяя зональную составляющую

$$W_{\text{зон}} = \frac{fM}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a_e}{r}\right)^n J_n P_n(\sin\varphi), \tag{20.2}$$

формулу (20.1) можно представить в виде

$$W = \frac{fM}{r}\left\{1 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a_e}{r}\right)^n J_n P_n(\sin\varphi) + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{a_e}{r}\right)^n (C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda) P_{nm}(\sin\varphi)\right\} +$$
$$+ \frac{\omega^2 r^2}{2}\cos^2\varphi. \tag{20.3}$$

В случае эллипсоида вращения потенциал представляется только через зональные гармоники

$$W = \frac{fM}{r}\left\{1 + \sum_{n=2}^{\infty} J_n\left(\frac{a_e}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi)\right\} + \frac{\omega^2 r^2}{2}\cos^2\varphi. \tag{20.4}$$

Аномалии гравитационного поля получаются дифференцированием потенциала по радиусу и исключением зональной части, которая определяет нормальную составляющую

$$\Delta g = \frac{fM}{r^2}\left\{\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{a_e}{r}\right)^{n-1}(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda) P_{nm}(\sin\varphi).\right\} \tag{20.5}$$

Нормальное гравитационное поле можно представить формулой (20.4) как в ее полном виде, так и в любом сокращении, т. е. с удержанием желаемого числа членов. Обычная формула

нормального значения силы тяжести соответствует сохранению членов до J_4. В этом случае нормальный потенциал будет

$$W = \frac{fM}{r}\left\{1 + \left(\frac{a_e}{r}\right)^2 J_2 P_{20}(\sin\varphi) + \left(\frac{a_e}{r}\right)^4 J_4 P_{40}(\sin\varphi)\right\} + \frac{\omega^2 r^2}{2}\cos^2\varphi \quad (20.6)$$

и нормальное значение ускорения силы тяжести

$$\gamma = \frac{fM}{r^2}\left\{1 + \left(\frac{a_e}{r}\right)^2 J_2 P_{20}(\sin\varphi) + \left(\frac{a}{r}\right)^4 J_4 P_{40}(\sin\varphi)\right\} + \frac{\omega^2 r^2}{2}\cos^2\varphi. \quad (20.7)$$

Принципиально в качестве нормального значения силы тяжести можно принять любое приближение в разложении потенциала и γ как с учетом только зональных, так и всех остальных гармоник. Обычно, как уже сказано, нормальное значение γ определяется формулой (20.7), что соответствует фигуре сфероида.

Сейчас показано, что при использовании данных наблюдений спутников уверенно определяются только низкие гармоники потенциала, а именно до 8—10-го порядка. Значительно хуже, с большим разбросом, определяются гармоники до 16—18-го порядка. К гармоникам выше 18-го порядка орбиты спутников нечувствительны. Поэтому детали гравитационного поля выше 18-го порядка по спутникам выявить нельзя. Гармоника 18-го порядка соответствует на земной поверхности длине волны в 10°, т. е. 1100 *км*. Иными словами, спутниками могут быть выявлены на земной поверхности аномалии протяженностью порядка 1000 *км*. Гармоники более высоких порядков, соответствующие аномалиям меньшего протяжения, изучить можно только с помощью наземной гравиметрии. Поэтому при изучении общего гравитационного поля Земли в крупных чертах по спутниковым и гравиметрическим данным нет надобности рассматривать каждый гравиметрический пункт отдельно. Достаточно иметь осредненные значения по более или менее большим площадям. Кроме того, такое осреднение избавляет от случайных ошибок отдельных определений. Сейчас приняты две сетки осреднений.

1. Осреднение по одноградусным трапециям. В каждой трапеции, ограниченной 1° по широте и 1° по долготе, образуется среднее из всех определенных в трапеции аномалий. Если внутри трапеции пункты размещены неравномерно, то, чтобы избавиться от преобладания аномалий той части площади, на которой размещено неравномерно много пунктов, трапецию разбивают на более мелкие площадки, в них производят осреднение, а затем осредняют по всей трапеции, рассматривая среднюю аномалию каждой более мелкой клетки за индивидуальную.

Для образования средних более крупных площадей, например, для трапеций $5°\times5°$ или $10°\times10°$, производится второе осреднение средних в каждой одноградусной трапеции.

При разделении Земли по градусным трапециям площади осреднения оказываются неравными. Они уменьшаются от экватора к полюсу пропорционально косинусу широты. Поэтому они не могут выступать при вычислениях как равновесные. В этом случае приходится вводить $\cos\varphi$ в качестве веса соответствующих средних аномалий.

2. Второй способ осреднения состоит в образовании равновеликих трапеций. В этом случае за исходную принимается обычно трапеция площадью $5°\times5°$ под экватором, равная по площади приблизительно 550×550 *км*. Чтобы сохранить площадь по мере ухода от экватора, градусная мера широтной границы трапеции все время должна увеличиваться, все время сохраняя линейную длину 550 *км*. Для получения более мелких трапеций, в которых осуществляют первичное осреднение исходных данных трапеции 550×550 *км* делят параллелями и меридианами на 25 равных площадок, соответствующих по площади одноградусной трапеции под экватором. При таком способе осреднения средние аномалии получаются равновесными, что удобно, хотя такая система сложнее для первичной подготовки данных. Именно такая система применялась И. Д. Жонголовичем при его выводах параметров гравитационного поля и фигуры Земли в 1950—1952 гг. и автором в 1960—1962 гг. В настоящее время эта же система принята учеными Смитсонианской обсерватории при их подробном изучении гравитационного поля и фигуры Земли по спутниковым и наземным измерениям.

§ 5. Определение потенциала Земли. «Стандартная Земля»

Появление искусственных спутников и систематическое увеличение получаемых по ним данных, а также быстро развивающееся гравиметрическое покрытие мира позволило произвести ряд вычислений параметров гравитационного поля Земли с постоянно улучшающейся точностью. Так, уже на первых порах сжатие Земли было определено с точностью второго знака после запятой, тогда как по наземным гравиметрическим и геодезическим данным оно определялось более чем на порядок грубее. Также с высокой степенью точности позволили спутники определить экваториальную константу γ_e, произведение fM и крупные асимметрии фигуры Земли. В то же время спутник, двигаясь по орбите в гравитационном поле планеты, автоматически интегрирует все проявления аномальностей поля и не может выделять его детали. По спутникам уверенно определяются

первые 8—10 гармоник разложения поля. Это значит, что уверенно выделяются возмущающие осредненные аномалии, расположенные в зонах размером 18—20°. Поэтому новый метод не может претендовать на самостоятельность в вопросе изучения гравитационного поля и фигуры Земли, а должен комбинироваться с наземными методами. Однако когда вопрос касается установления некоторого нормального гравитационного поля и эллипсоида относимости, наиболее удобного для решения геодезических задач,— здесь новый метод способен дать прекрасные результаты. Кроме того, он дает с высокой степенью точности основные константы фигуры и гравитационного поля Земли, включены в систему мировых стандартных физических констант. Система единиц, характеризующих наиболее точно гравитационное поле и фигуру Земли получила название *нормальной Земли*. Нормальная Земля является удобной формой представления гравитационного поля и фигуры Земли в первом приближении. Она включает формулы нормального распределения силы тяжести и содержит как параметры этих формул, так и некоторые другие единицы. К фундаментальным геодезическим постоянным, которые характеризуют «нормальную Землю», принимаемую за уровенный эллипсоид вращения, относятся: a_e — экваториальный радиус эллипсоида, α — сжатие эллипсоида, fM — геоцентрическая гравитационная постоянная, γ_e — экваториальное значение ускорения силы тяжести, J_2 — коэффициент при второй зональной гармонике, β, β_1 — параметры нормальной формулы ускорения силы тяжести, U_0 — потенциал нормальной силы тяжести на поверхности нормальной Земли, ω — угловая скорость вращения Земли.

При представлении гравитационного поля и фигуры Земли по наземным данным в качестве основных параметров обычно принимаются a_e, γ_e, α. При использовании спутниковых данных обычно принимаются параметры a_e, fM, J_2.

На XIV Генеральной Ассамблее Международного геодезического и геофизического союза в 1967 г. была принята «Геодезическая референц-система 1967», согласованная с системой астрономических фундаментальных постоянных 1964 г. В ней принято:

$$a_e = 6\,378\,160 \text{ м}, \quad fM = 398\,603 \text{ км}^3 \cdot \text{сек}^{-2}, \quad J_2^* = 10\,827 \cdot 10^{-7};$$

им соответствует в системе нормальной формулы ускорения силы тяжести

$$\begin{aligned} a_e &= 6\,378\,160 \text{ м}, \\ \gamma_e &= 978\,031{,}8 \text{ мгл}, \\ \alpha &= 1 : 298{,}25, \\ \omega &= 7{,}2\,921\,151\,467 \cdot 10^{-5} \text{ рад/сек}. \end{aligned}$$

Таблица 21

Порядок гармоник	Козаи				Кинг-Хили	Кук	Смит	Фишер	Козаи
	1964	1964	1967	1969	1965	1965	1965	1967	1971
2	1082,630 ±0,005	1082,645 ±0,006	1082,639 ±0,007	1082,628 ±0,002	1082,64 ±0,02	1082,65 ±0,10	1082,64 ±0,08	1082,66 ±0,02	1082,637
4	—1,627 ±0,011	—1,649 ±0,016	—1,608 ±0,021	—1,593 ±0,007	—1,52 ±0,03	—1,61 ±0,15	—1,70 ±0,25	—1,68 ±0,4	—1,617
6	0,593 ±0,031	0,646 ±0,030	0,542 ±0,041	0,592 ±0,014	0,57 ±0,07	0,73 ±0,40	0,73 ±0,40	0,72 ±0,04	0,555
8	—0,149 ±0,034	—0,270 ±0,050	—0,128 ±0,64	—0,118 ±0,020	—0,44 ±0,11	—	—0,46 ±0,42	—0,23 ±0,07	—0,209
10	—0,155 ±0,045	—0,054 ±0,050	—0,338 ±0,084	—0,354 ±0,025	—	—	—0,17 ±0,29	—0,14 ±0,07	—0,240
12	—0,294 ±0,049	—0,357 ±0,044	0,053 ±0,097	—0,042 ±0,027	—	—	—0,22 ±0,10	—0,25 ±0,06	—0,190
14	—	0,179 ±0,063	0,174 ±0,099	—0,073 ±0,028	—	—	0,19 ±0,11	—0,01 ±0,12	0,105
16	—	—	0,449 ±0,102	0,187 ±0,026	—	—	—	—	0,024
18	—	—	—0,324 ±0,074	—0,231 ±0,022	—	—	—	—	—0,103
20	—	—	0,334 ±0,069	—0,005 ±0,022	—	—	—	—	—0,126
a_e, км	6 378,165		6 378,160	6 378,16		6,378,163			
fM км^3·сек$^{-2}$	398 603,2		398 601,0	398 601,0		398 602,0			

Легко пересчитать значения коэффициента J_2 в сжатие Земли. Для этого можно воспользоваться формулой

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[3J_2 + \frac{a_e\omega^2}{\gamma_e}(1-\alpha)\right]\left[1 + \frac{3}{4}J_2 + \frac{3}{8}\frac{a_e\omega^2}{\gamma_e}(1-\alpha)\right]. \quad (18.24)$$

Для значения $J_2 = 1082{,}79$ $\alpha = 1 : 298{,}24 \pm 0{,}02$. Это значение удивительно хорошо совпадает со значениями сжатия эллипсоида Красовского и гравиметрическим сжатием Гельмерта.

В течение последнего десятилетия коэффициенты разложения потенциала Земли по сферическим функциям определялись неоднократно. В таблице 21 приводятся коэффициенты четных зональных гармоник $J_n \cdot 10^6$ и соответствующих констант fM и a_e, в таблице 22 даны коэффициенты нечетных зональных гармоник.

В 1971 г. Козаи осуществил в Смитсонианской обсерватории в США определение коэффициентов сферических гармоник до 36-го порядка.

Полученная система коэффициентов была представлена Козаи 15-й ассамблее Геодезического союза в Москве в 1971 г. Эти величины приведены в таблице 23. Весьма любопытным фактором является обнаружение Козаи годовой вариации J_2 с изменением амплитуды $1{,}3 \cdot 10^{-9}$.

Работы по наблюдению геодезических спутников и вычислению гармонических коэффициентов разложения потенциала выполняются систематически. Для наблюдения спутников создана специальная сеть станций слежения, охватывающая весь мир. На рис. 127 показано размещение станций, наблюдения которых были использованы для вывода параметров «Стандартной Земли III» (см. ниже). На рисунке большим залитым кружком обозначены станции с координатами, определенными обоими: динамическим и геометрическим способами; малым залитым кружком — станции с координатами, определенными только геометрическим способом, незалитым кружком — только динамическим способом, треугольником — комбинированным способом, крестом обозначены станции опорной сети, определенные с камерой ВС-4.

Смитсонианской астрофизической обсерваторией (США) регулярно публикуются результаты наблюдений и их обработки. Комплекс данных, характеризующих гравитационное поле, был назван в этой обсерватории термином «Стандартная Земля». «Стандартная Земля» начала публиковаться периодически. В 1966 г. была издана первая книга «Стандартная Земля I», в 1969 г.— вторая «Стандартная Земля II» и в 1973 г.— «Стандартная Земля III».

Аналогичные работы выполнялись Годдаровским центром космических полетов США и центром космических исследований

Франции. Ниже мы приводим таблицу зональных коэффициентов разложения гравитационного поля Земли J_n, полученных в разное время со все улучшающейся точностью (таблица 24), таблицу нормированных тессеральных гармоник C_{nm} до 15 порядка (таблица 25) и таблицу зональных нормированных гармоник C_{n0} до 36 порядка (таблица 26), опубликованных в сборнике «Стандартная Земля III» 1973 г.

Таблица 22

Порядок гармоник	Козаи				Кинг-Хили и др.			Гуир и Ньютон
	1964	1964	1967	1969	1966	1966	1968	1965
3	—2,559	—2,546	—2,565	—2,538	—2,53	—2,50	—2,54	—2,676
	±0,011	±0,020	±0,007	±0,004	±0,04	±0,01	±0,01	±0,010
5	—1,185	—0,210	—0,174	—0,230	—0,22	—0,26	—0,21	—0,028
	±0,017	±0,025	±0,012	±0,007	±0,04	±0,01	±0,01	±0,017
7	—0,376	—0,333	—0,419	—0,361	—0,41	—0,40	—0,40	—0,593
	±0,022	±0,339	±0,023	±0,015	±0,06	±0,02	±0,01	±0,028
9	0,039	—0,053	—0,022	—0,100	0,09	0,00	0	0,177
	±0,017	±0,060	±0,033	±0,023	±0,06	±0,06		±0,022
11	0,296	0,302	0,176	0,202	—0,14	—0,27	0	—
	±0,035	±0,035	±0,045	±0,035	±0,05	±0,06		
13	—	—0,114	—0,146	—0,123	0,29	0,36	0	—
		±0,084	±0,055	±0,049	±0,06	±0,08		
15	—	—	—0,065	—0,174	—0,46	—0,65	—0,20	—
			±0,063	±0,061	±0,06	±0,10	±0,03	
17	—	—	—0,052	0,085	—	0,30	0	—
			±0,050	±0,065		±0,08		
19	—	—	—0,075	—0,216	—	0,00	0	—
			±0,051	±0,053		±0,11		
21	—	—	—	0,145	—	0,58	0,26	—
				±0,029		±0,11	±0,05	
23	—	—	—	—	—	—	—0,15	—
							±0,10	

Таблица 23

Четные				Нечетные			
n	$J_n \cdot 10^6$	n	$J_n \cdot 10^6$	n	$J_n \cdot 10^6$	n	$J_n \cdot 10^6$
2	1082,637	20	—0,126	3	—2,539	21	—0,036
4	—1,617	22	0,024	5	—0,234	23	0,128
6	0,555	24	—	7	—0,348	25	—
8	—0,209	26	—	9	—0,159	27	—
10	—0,240	28	0,058	11	0,323	29	—
12	—0,190	30	—	13	—0,333	31	—
14	0,105	32	—	15	0,108	33	—
16	0,024	24	0,055	17	—0,218	35	—
18	—0,103	36	0,148	19	0,084	—	—

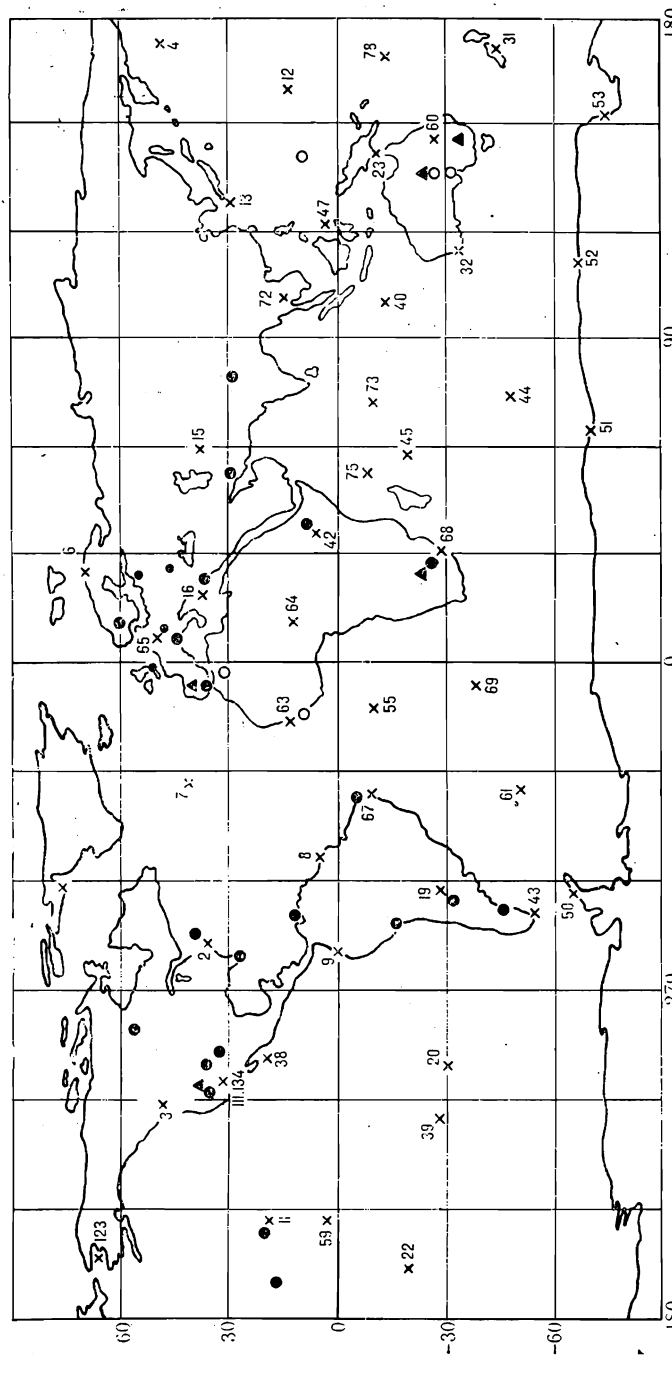


Рис. 127.

Таблица 24

Год	J_2	J_4	J_6	J_8	J_{10}	J_{12}	J_{14}	J_{16}	J_{18}	J_{20}	J_{22}	J_{24}
1959	1082,1	—2,15										
1961	1082,19 ±3	—2,13 ±5										
1963	1082,48 ±4	—1,84 ±9	0,39 ±9	—0,02 ±7								
1964	1082,639 ±6	—1,649 ±16	0,646 ±30	—0,270 ±50	—0,054 ±50	—0,357 ±44	0,179 ±63					
1969	1082,628 ±2	—1,593 ±7	0,502 ±14	—0,118 ±20	—0,354 ±25	—0,042 ±27	—0,073 ±28	0,187 ±26	—0,231 ±22	—0,005 ±22		
1973 I	1082,637 ±1	—1,618 ±1	0,552 ±2	—0,205 ±2	—0,237 ±2	—0,192 ±2	0,105 ±4	0,034 ±4	—0,102 ±5	—0,119 ±5	0,092 ±7	0,119 ±22
1973 II	1082,636 ±1	—1,619 ±2	0,552 ±3	—0,204 ±4	—0,232 ±4	—0,196 ±3	0,101 ±8	0,043 ±7	—0,077 ±9	—0,108 ±9	0,075 ±13	
Козаи и др. 1971	1082,637 ±4	—1,619 ±10	0,558 ±17	—0,209 ±24	—0,233 ±26	—0,188 ±27	0,085 ±34	0,048 ±43	—0,137 ±44	—0,087 ±52		

Год	J_3	J_5	J_7	J_9	J_{11}	J_{13}	J_{15}	J_{17}	J_{19}	J_{21}	J_{23}	J_{25}
1959	—2,20 ±8											
1961	—2,29 ±2	—0,23 ±2										
1963	—2,262 ±7	—0,064 ±7	—0,470 ±10	0,117 ±11								
1964	—2,546 ±20	—0,210 ±25	—0,333 ±39	—0,053 ±60	0,302 ±35	—0,114 ±84						
1969	—2,538 ±4	—0,230 ±7	—0,361 ±15	—0,100 ±23	0,202 ±35	—0,123 ±49	—0,174 ±61	0,085 ±65	—0,216 ±53	0,145 ±29		
1973 I	—2,541 ±3	—0,228 ±4	—0,352 ±7	—0,154 ±7	0,312 ±6	—0,339 ±7	0,105 ±9	—0,220 ±10	0,099 ±11	—0,083 ±11	0,145 ±15	—0,134 ±36
1973 II	—2,540 ±3	—0,230 ±3	—0,345 ±7	—0,162 ±8	0,317 ±7	—0,336 ±7	0,104 ±11	—0,227 ±11	0,083 ±12	—0,070 ±17	0,111 ±21	
Козаи и др. 1971	—2,543 ±5	—0,226 ±7	—0,365 ±12	—0,118 ±13	0,236 ±12	—0,202 ±14	—0,081 ±21	—0,027 ±23	—0,112 ±23	—0,106 ±15		

Таблица 25

Гармоника	Значение	Гармоника	Значение	Гармоника	Значение	Гармоника	Значение
$\bar{C}_{2,2}$	2,3799E—06	$\bar{S}_{2,2}$	—1,3656E—06	$\bar{C}_{3,1}$	1,9977E—06	$\bar{S}_{3,1}$	2,2337E—07
$\bar{C}_{3,2}$	7,7830E—07	$\bar{S}_{3,2}$	—7,5519E—07	$\bar{C}_{3,3}$	4,9011E—07	$\bar{S}_{3,3}$	1,5283E—06
$\bar{C}_{4,1}$	—5,1748E—07	$\bar{S}_{4,1}$	—4,8140E—07	$\bar{C}_{4,2}$	3,4296E—07	$\bar{S}_{4,2}$	6,7174E—07
$\bar{C}_{4,3}$	1,0390E—06	$\bar{S}_{4,3}$	—1,1923E—07	$\bar{C}_{4,4}$	—1,0512E—07	$\bar{S}_{4,4}$	3,5661E—07
$\bar{C}_{5,1}$	—5,3667E—08	$\bar{S}_{5,1}$	—7,9973E—08	$\bar{C}_{5,2}$	5,9869E—07	$\bar{S}_{5,2}$	—3,9910E—07
$\bar{C}_{5,3}$	—5,8429E—07	$\bar{S}_{5,3}$	—1,6338E—07	$\bar{C}_{5,4}$	—1,1583E—07	$\bar{S}_{5,4}$	—4,5393E—08
$\bar{C}_{5,5}$	1,3956E—07	$\bar{S}_{5,5}$	—8,6841E—07	$\bar{C}_{6,1}$	—7,2166E—08	$\bar{S}_{6,1}$	1,7756E—08
$\bar{C}_{6,2}$	2,4670E—08	$\bar{S}_{6,2}$	—4,0654E—07	$\bar{C}_{6,3}$	4,4139E—09	$\bar{S}_{6,3}$	2,9055E—08
$\bar{C}_{6,4}$	—1,0003E—07	$\bar{S}_{6,4}$	—3,0297E—07	$\bar{C}_{6,5}$	—1,3504E—07	$\bar{S}_{6,5}$	—6,0964E—07
$\bar{C}_{6,6}$	—2,9136E—08	$\bar{S}_{6,6}$	—2,6327E—07	$\bar{C}_{7,1}$	2,3532E—07	$\bar{S}_{7,1}$	5,5634E—08
$\bar{C}_{7,2}$	2,0425E—07	$\bar{S}_{7,2}$	1,7321E—07	$\bar{C}_{7,3}$	2,1994E—07	$\bar{S}_{7,3}$	—3,4644E—07
$\bar{C}_{7,4}$	—2,8617E—07	$\bar{S}_{7,4}$	—2,7738E—07	$\bar{C}_{7,5}$	3,4727E—08	$\bar{S}_{7,5}$	8,7014E—08
$\bar{C}_{7,6}$	—2,7496E—07	$\bar{S}_{7,6}$	8,5865E—08	$\bar{C}_{7,7}$	—2,4856E—08	$\bar{S}_{7,7}$	—8,8968E—09
$\bar{C}_{8,1}$	1,0946E—08	$\bar{S}_{8,1}$	4,8429E—08	$\bar{C}_{8,2}$	1,1084E—07	$\bar{S}_{8,2}$	1,0359E—07
$\bar{C}_{8,3}$	—8,8578E—08	$\bar{S}_{8,3}$	—5,0715E—08	$\bar{C}_{8,4}$	—2,2315E—07	$\bar{S}_{8,4}$	2,6511E—07
$\bar{C}_{8,5}$	1,5318E—07	$\bar{S}_{8,5}$	8,1158E—08	$\bar{C}_{8,6}$	—9,7542E—08	$\bar{S}_{8,6}$	2,8082E—07
$\bar{C}_{8,7}$	2,0498E—07	$\bar{S}_{8,7}$	2,4592E—07	$\bar{C}_{8,8}$	1,6967E—07	$\bar{S}_{8,8}$	9,3261E—08
$\bar{C}_{9,1}$	1,8099E—07	$\bar{S}_{9,1}$	4,1091E—08	$\bar{C}_{9,2}$	—2,2013E—08	$\bar{S}_{9,2}$	2,4215E—08
$\bar{C}_{9,3}$	—9,9252E—08	$\bar{S}_{9,3}$	—2,3085E—08	$\bar{C}_{9,4}$	—4,0867E—08	$\bar{S}_{9,4}$	—3,8525E—08
$\bar{C}_{9,5}$	—5,8957E—08	$\bar{S}_{9,5}$	3,6834E—09	$\bar{C}_{9,6}$	4,8812E—08	$\bar{S}_{9,6}$	1,1115E—07

Продолжение табл. 25

Гармоника	Значение	Гармоника	Значение	Гармоника	Значение	Гармоника	Значение
$\bar{C}_{9,7}$	—1,9880E—07	$\bar{S}_{9,7}$	—1,4978E—07	$\bar{C}_{9,8}$	2,3523E—07	$\bar{S}_{9,8}$	9,6355E—09
$\bar{C}_{9,9}$	—3,4533E—08	$\bar{S}_{9,9}$	5,9502E—08	$\bar{C}_{10,1}$	8,9008E—08	$\bar{S}_{10,1}$	—6,0157E—08
$\bar{C}_{10,2}$	—3,7256E—08	$\bar{S}_{10,2}$	—6,3676E—08	$\bar{C}_{10,3}$	—1,3307E—07	$\bar{S}_{10,3}$	—7,2728E—08
$\bar{C}_{10,4}$	—2,1887E—08	$\bar{S}_{10,4}$	—7,8408E—08	$\bar{C}_{10,5}$	—6,1509E—09	$\bar{S}_{10,5}$	—1,1904E—07
$\bar{C}_{10,6}$	—9,4142E—08	$\bar{S}_{10,6}$	—1,1728E—08	$\bar{C}_{10,7}$	1,8525E—07	$\bar{S}_{10,7}$	2,1656E—08
$\bar{C}_{10,8}$	1,0887E—09	$\bar{S}_{10,8}$	7,0781E—09	$\bar{C}_{10,9}$	7,8473E—08	$\bar{S}_{10,9}$	5,6381E—09
$\bar{C}_{10,10}$	1,3321E—07	$\bar{S}_{10,10}$	9,8839E—08	$\bar{C}_{11,1}$	—1,2194E—08	$\bar{S}_{11,1}$	7,5463E—08
$\bar{C}_{11,2}$	—2,0255E—08	$\bar{S}_{11,2}$	—6,2998E—08	$\bar{C}_{11,3}$	—1,0988E—09	$\bar{S}_{11,3}$	—3,8098E—08
$\bar{C}_{11,4}$	1,5676E—08	$\bar{S}_{11,4}$	—1,9551E—07	$\bar{C}_{11,5}$	—1,8591E—09	$\bar{S}_{11,5}$	6,1113E—08
$\bar{C}_{11,6}$	6,3601E—08	$\bar{S}_{11,6}$	—2,6457E—08	$\bar{C}_{11,7}$	—3,3761E—08	$\bar{S}_{11,7}$	—1,2825E—07
$\bar{C}_{11,8}$	—1,3634E—08	$\bar{S}_{11,8}$	4,5229E—08	$\bar{C}_{11,9}$	2,1256E—08	$\bar{S}_{11,9}$	6,6721E—08
$\bar{C}_{11,10}$	5,2555E—08	$\bar{S}_{11,10}$	—7,7401E—08	$\bar{C}_{11,11}$	8,6996E—08	$\bar{S}_{11,11}$	—2,5691E—08
$\bar{C}_{12,1}$	—5,6935E—08	$\bar{S}_{12,1}$	—6,6159E—08	$\bar{C}_{12,2}$	—9,7424E—08	$\bar{S}_{12,2}$	4,6341E—03
$\bar{C}_{12,3}$	1,1555E—07	$\bar{S}_{12,3}$	—4,8666E—08	$\bar{C}_{12,4}$	—5,0379E—08	$\bar{S}_{12,4}$	5,3568E—08
$\bar{C}_{12,5}$	8,1834E—08	$\bar{S}_{12,5}$	2,7932E—08	$\bar{C}_{12,6}$	—2,1177E—08	$\bar{S}_{12,6}$	3,5034E—08
$\bar{C}_{12,7}$	2,9751E—08	$\bar{S}_{12,7}$	3,1783E—08	$\bar{C}_{12,8}$	4,0190E—08	$\bar{S}_{12,8}$	5,6877E—08
$\bar{C}_{12,9}$	—1,1503E—07	$\bar{S}_{12,9}$	1,4508E—08	$\bar{C}_{12,10}$	—4,5921E—08	$\bar{S}_{12,10}$	—4,3264E—08
$\bar{C}_{12,11}$	—7,8443E—09	$\bar{S}_{12,11}$	—4,7858E—08	$\bar{C}_{12,12}$	—2,7617E—08	$\bar{S}_{12,12}$	—1,6808E—08
$\bar{C}_{13,1}$	8,6136E—09	$\bar{S}_{13,1}$	—3,2401E—08	$\bar{C}_{13,2}$	—1,0679E—08	$\bar{S}_{13,2}$	—9,0670E—08
$\bar{C}_{13,3}$	—3,2361E—08	$\bar{S}_{13,3}$	4,9286E—08	$\bar{C}_{13,4}$	3,9852E—08	$\bar{S}_{13,4}$	—1,0608E—07

Окончание табл. 25

Гармоника	Значение	Гармоника	Значение	Гармоника	Значение	Гармоника	Значение
$\overline{C}_{13,5}$	4,0047E—08	$\overline{S}_{13,5}$	3,8114E—08	$\overline{C}_{13,6}$	—2,1906E—08	$\overline{S}_{13,6}$	—1,1321E—08
$\overline{C}_{13,7}$	—7,6933E—08	$\overline{S}_{13,7}$	1,1140E—08	$\overline{C}_{13,8}$	—2,7448E—09	$\overline{S}_{13,8}$	1,4309E—08
$\overline{C}_{13,9}$	—1,1588E—08	$\overline{S}_{13,9}$	7,2989E—08	$\overline{C}_{13,10}$	4,1979E—09	$\overline{S}_{13,10}$	7,6769E—09
$\overline{C}_{13,11}$	—5,4381E—08	$\overline{S}_{13,11}$	1,3450E—08	$\overline{C}_{13,12}$	—4,6633E—08	$\overline{S}_{13,12}$	7,9963E—08
$\overline{C}_{13,13}$	—6,8944E—08	$\overline{S}_{13,13}$	7,1891E—08	$\overline{C}_{14,1}$	—1,4359E—08	$\overline{S}_{14,1}$	5,2590E—08
$\overline{C}_{14,2}$	—1,5908E—08	$\overline{S}_{14,2}$	2,7374E—08	$\overline{C}_{14,3}$	9,6915E—08	$\overline{S}_{14,3}$	—2,5631E—08
$\overline{C}_{14,4}$	—2,9864E—08	$\overline{S}_{14,4}$	—3,8189E—09	$\overline{C}_{14,5}$	—1,3828E—09	$\overline{S}_{14,5}$	—5,8680E—08
$\overline{C}_{14,6}$	—1,3872E—08	$\overline{S}_{14,6}$	—2,7976E—08	$\overline{C}_{14,7}$	7,1056E—08	$\overline{S}_{14,7}$	2,4043E—09
$\overline{C}_{14,8}$	—1,8779E—08	$\overline{S}_{14,8}$	—5,8750E—08	$\overline{C}_{14,9}$	—2,4322E—08	$\overline{S}_{14,9}$	6,0461E—08
$\overline{C}_{14,10}$	2,8985E—08	$\overline{S}_{14,10}$	—3,4224E—08	$\overline{C}_{14,11}$	8,2611E—08	$\overline{S}_{14,11}$	—1,9627E—09
$\overline{C}_{14,12}$	1,1751E—09	$\overline{S}_{14,12}$	—3,0967E—08	$\overline{C}_{14,13}$	3,0793E—08	$\overline{S}_{14,13}$	4,7620E—08
$\overline{C}_{14,14}$	—6,5969E—08	$\overline{S}_{14,14}$	3,3030E—09	$\overline{C}_{15,1}$	2,9358E—08	$\overline{S}_{15,1}$	—1,6691E—08
$\overline{C}_{15,2}$	—1,2291E—08	$\overline{S}_{15,2}$	—6,8963E—08	$\overline{C}_{15,3}$	—5,8921E—08	$\overline{S}_{15,3}$	4,4772E—08
$\overline{C}_{15,4}$	1,4876E—08	$\overline{S}_{15,4}$	7,0359E—09	$\overline{C}_{15,5}$	3,6806E—08	$\overline{S}_{15,5}$	—8,4051E—09
$\overline{C}_{15,6}$	1,0081E—08	$\overline{S}_{15,6}$	—3,0473E—08	$\overline{C}_{15,7}$	3,0439E—08	$\overline{S}_{15,7}$	1,5775E—08
$\overline{C}_{15,8}$	—6,8884E—08	$\overline{S}_{15,8}$	6,0808E—08	$\overline{C}_{15,9}$	—4,5169E—08	$\overline{S}_{15,9}$	5,5556E—08
$\overline{C}_{15,10}$	6,2126E—08	$\overline{S}_{15,10}$	—7,1799E—09	$\overline{C}_{15,11}$	—4,4724E—08	$\overline{S}_{15,11}$	—3,4391E—09
$\overline{C}_{15,12}$	—4,2025E—08	$\overline{S}_{15,12}$	5,9072E—09	$\overline{C}_{15,13}$	—4,1654E—08	$\overline{S}_{15,13}$	—5,5892E—09
$\overline{C}_{15,14}$	9,5654E—09	$\overline{S}_{15,14}$	—2,7145E—08	$\overline{C}_{15,15}$	—5,6358E—08	$\overline{S}_{15,15}$	3,4895E—08

Внимательное рассмотрение этих таблиц приводит к заключению, что по спутникам надежно определяются только низкие гармоники разложения потенциала. Если коэффициент J_{20} имеет ошибку только 0,002% от самой величины, то коэффициенты J_{40} и J_{50} — 15%÷20%, коэффициенты J_{80} и J_{90} определяются уже с ошибкой в 50%. Далее ошибки сравниваются и даже превосходят саму определяемую величину. Однако совершенствование

Таблица 26

Гармоника	Значение	Гармоника	Значение
$\bar{C}_{2,0}$	—4,84170E—04	$\bar{C}_{14,0}$	—1,94980E—0,8
$\bar{C}_{3,0}$	9,60408E—07	$\bar{C}_{15,0}$	—1,88586E—08
$\bar{C}_{4,0}$	5,39333E—07	$\bar{C}_{16,0}$	—5,91864E—09
$\bar{C}_{5,0}$	6,87446E—08	$\bar{C}_{17,0}$	3,71868E—08
$\bar{C}_{6,0}$	—1,53097E—07	$\bar{C}_{18,0}$	1,67687E—08
$\bar{C}_{7,0}$	9,08860E—08	$\bar{C}_{19,0}$	—1,58527E—08
$\bar{C}_{8,0}$	4,97198E—08	$\bar{C}_{20,0}$	1,85847E—08
$\bar{C}_{9,0}$	3,53300E—08	$\bar{C}_{21,0}$	1,26574E—08
$\bar{C}_{10,0}$	5,17176E—08	$\bar{C}_{22,0}$	—1,37146E—08
$\bar{C}_{11,0}$	—6,50565E—08	$\bar{C}_{23,0}$	—2,11504E—08
$\bar{C}_{12,0}$	3,84000E—08	$\bar{C}_{35,0}$	1,59029E—08
$\bar{C}_{13,0}$	6,52406E—08	$\bar{C}_{36,0}$	—2,32912E—08

Таблица 27

Постоянная часть	Поправки к системам				
	Референц-система 1967 г.	Кук 1965 г.	Каула 1967 г.	Вейс 1967г.	Рапп 1967г.
$a_e = 6\,378\,100$ *м*	60	44 13	53 8	42 6	43
$fM = 398\,600$ *км*$^3 \cdot$ *сек*$^{-2}$	3	2,6 8	1,22 37	0,9 7	1,22
$g_e = 978\,000$ *мгл*	31,84558	41,3 4,4	29,6 1,3	31,1 3,2	32,6
$J_2 = 10820$	7	6,0 0,8	6,4 2	6,4 1	—
$1/\alpha = 298{,}0$	0,249167427	0,26 0,1	0,25 0,1	0,255 0,05	0,25

методов наблюдения и обработки результатов ведет к непрерывному прогрессу: улучшению точности определений и возрастанию порядка получаемых гармоник.

В результате совместного использования геодезических, гравиметрических и спутниковых данных были получены основные параметры гравитационного поля и фигуры Земли, включающиеся в систему фундаментальных геодезических постоянных. В таблице 27 приводится эта система постоянных, полученных разными авторами. Результаты разных авторов, приведенные в таблице, весьма близки.

Стандартная Земля III 1973 г. характеризуется следующими основными постоянными:

$$J_2 = 1082{,}637 \cdot 10^{-3},$$

$$a_e = 6\,378\,140 \cdot 10^8 \text{ м},$$

$$fM = 398\,601{,}3 \text{ км}^3\text{сек}^{-2},$$

$$\omega = 7{,}292\,115\,085 \cdot 10^{-5} \text{ сек}^{-1},$$

$$1/\alpha = 298{,}256.$$

Поправка к международной гравиметрической системе

$$\Delta g = 1{,}3 - 13{,}8 \sin^2 \varphi \text{ мгл}.$$

Гравитационные аномалии образованы по нормальной формуле Кассиниса с поправкой к абсолютной потсдамской системе 14 *мгл*

$$\gamma = 978{,}0490\,(1 + 0{,}0052884 \sin^2 \varphi - 0{,}0000059 \sin^2 2\varphi) \text{ гал}.$$

§ 6. Основные черты аномального гравитационного поля и фигуры Земли

По вычисленным коэффициентам разложения гравитационного потенциала и наземным гравиметрическим определениям построена схематическая карта аномалий силы тяжести и высот геоида. Эти схемы приведены на рис. 128 и 129, которые наглядно представляют ход аномалий и превышения геоида над эллипсоидом вращения со сжатием 1:298,256.

При рассмотрении рисунка 129 обращает на себя внимание удивительная правильность изменений высот геоида. Наибольшие превышения геоида не превосходят 50 *м* вблизи Бискайского залива, 60 *м* в Северной Атлантике и 70 *м* вблизи Новой Гвинеи — Индонезийского архипелага.

Если Землю представить в виде трехосного эллипсоида, то большая экваториальная ось должна проходить через области

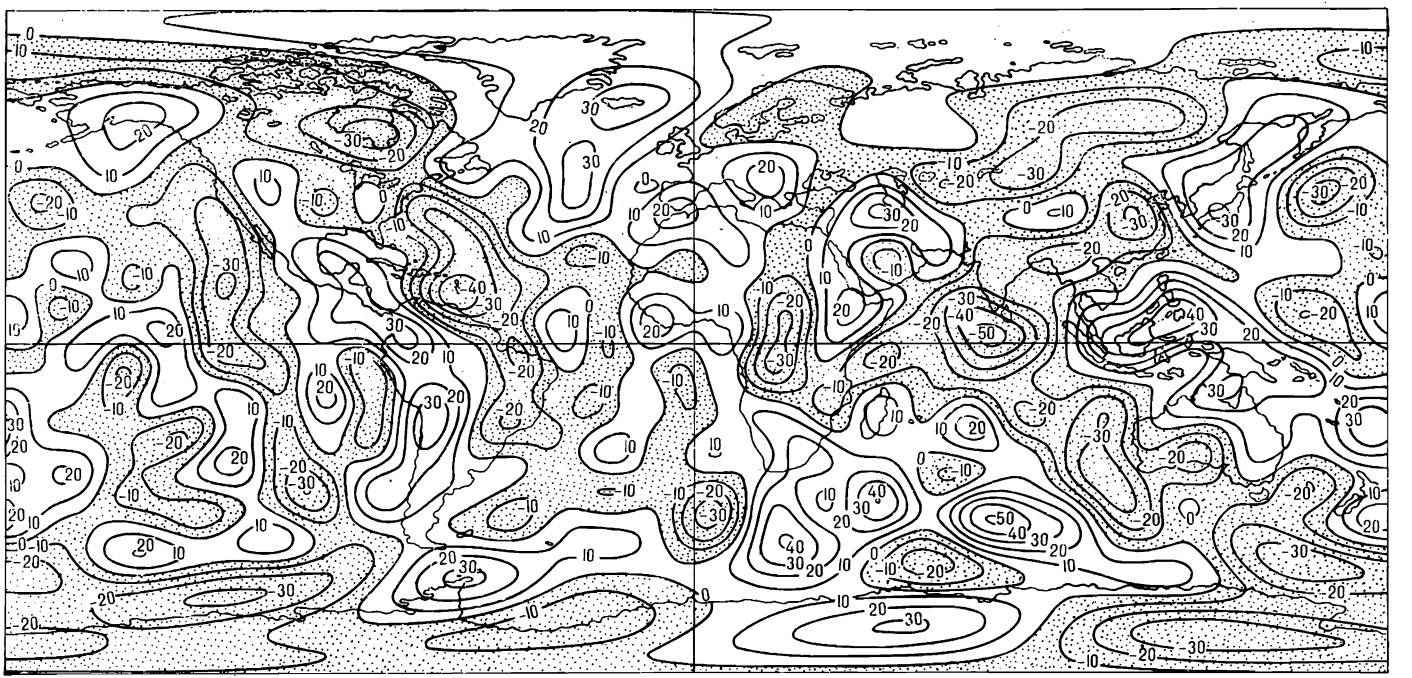


Рис. 128.

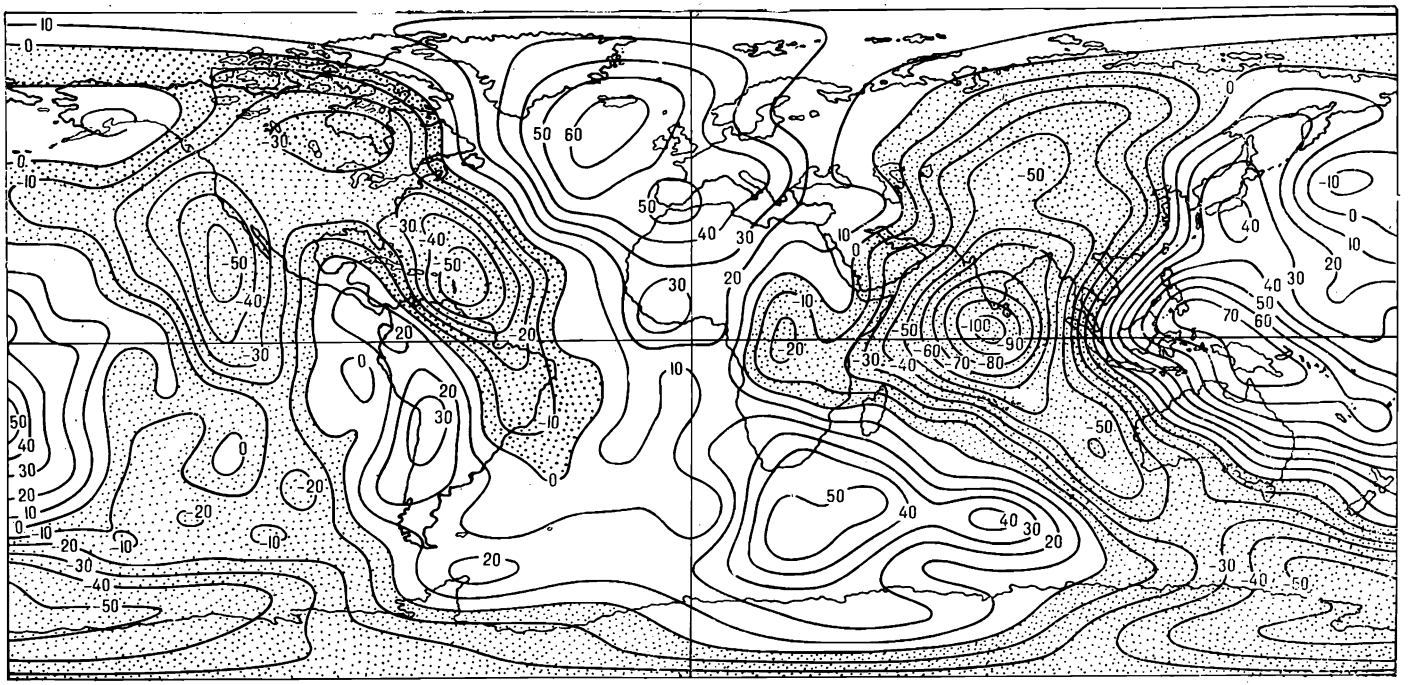

10
0
-10
30
50 60
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-100
-90
-80
-70
-60
70
60
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50

Рис. 129.

экватора вблизи этих мест. Однако здесь имеет место асимметрия: в западной части максимум высот геоида заметно смещен в северные широты, восточный максимум лежит в экваториальной области.

Кроме того, западный конец наибольшего экваториального радиуса падает на долготы 0—10° к западу от Гринвича, а восточный конец — на долготы порядка 30—40° к западу от меридиана 180°, т. е. противоположные концы наибольшего экваториального диаметра асимметричны примерно на 30°. Это было показано и раньше по исследованию гравитационного поля автором и Уотилой (см. гл. 10).

Также асимметричны северное и южное полушария. В районе северного полюса геоид проходит на 20 *м* над эллипсоидом, тогда как в Антарктиде он опускается на столько же под эллипсоид. Отрицательные высоты достигают 50 *м* у западного побережья Америки и в Карибском море и 100 *м* на юге Индии.

Из всего сказанного видно, что если Землю аппроксимировать трехосным эллипсоидом, то превышения геоида можно свести всего к нескольким десяткам метров. Однако для практического пользования это неудобно. По-видимому, целесообразно в некоторых специальных случаях нормальное поле и соответствующую ему фигуру относимости задавать разложением, содержащим не только первые зональные, но и первые тессеральные гармоники.

Обобщенное гравитационное поле, представленное на рис. 128, не носит столь ясно выраженных черт, как поле высот геоида. Оно мозаично в основном, однако и в нем четко проявляется асимметрия северного и южного полушарий. Основное простирание аномалий — с северо-запада на юго-восток. Так, от Гренландии к Антарктиде, пересекая юг Африки, проходит полоса положительных аномалий. От Скандинавии к Австралии идет основная полоса отрицательных аномалий с минимумом в 50 *мгл* в Индийском океане у южной оконечности Индии. Полоса положительных аномалий простирается от Панамы до Огненной Земли и полуострова Грехема в Антарктиде, имея максимум в 30 *мгл*. По обе стороны от нее лежат две отрицательные полосы, протянувшиеся от Алеутской гряды в юго-восточную часть Тихого океана и от Лабрадора в южную Атлантику. Все эти полосы параллельны и свидетельствуют о том же скручивании северного полушария относительно южного.

Если обобщенное гравитационное поле, полученное по спутниковым данным, т. е. с учетом гармоник разложения до 18 порядка, сравнить с нормальным полем, представленным формулой (10.87), т. е. разложением до 8 порядка, то аномалии получаются сильно сглаженными. Такие аномалии приведены на рис. 130.

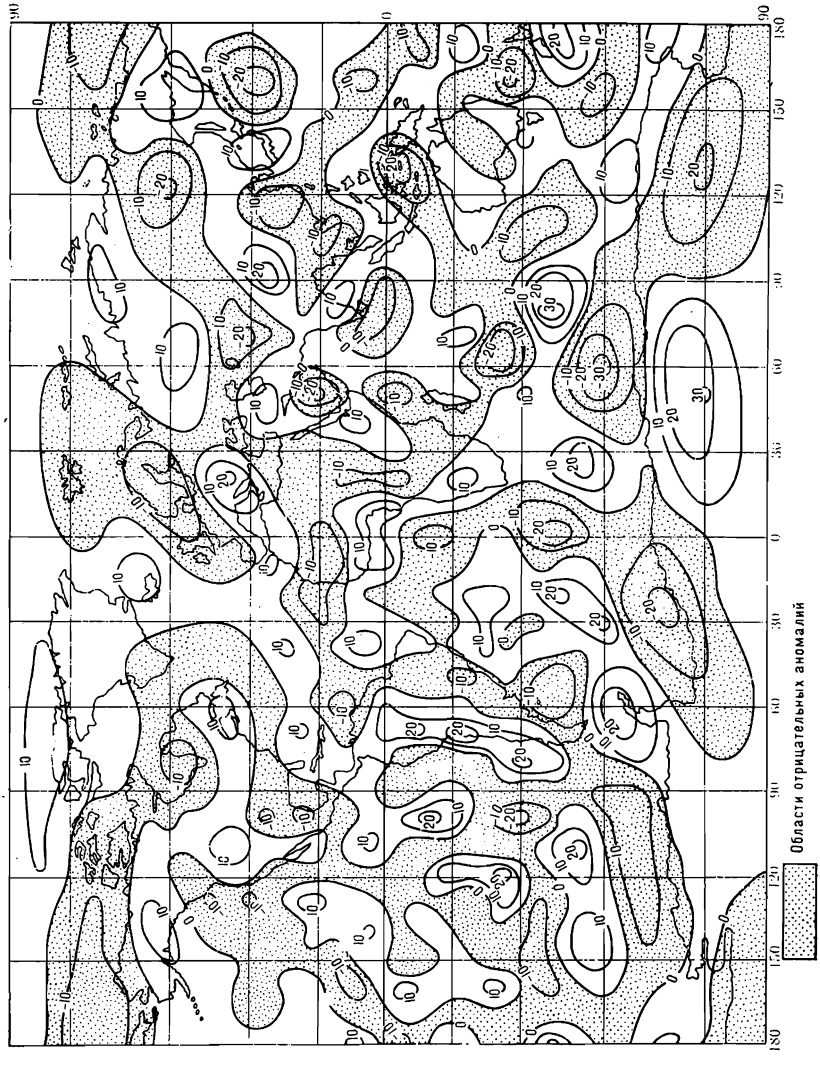


Рис. 130.

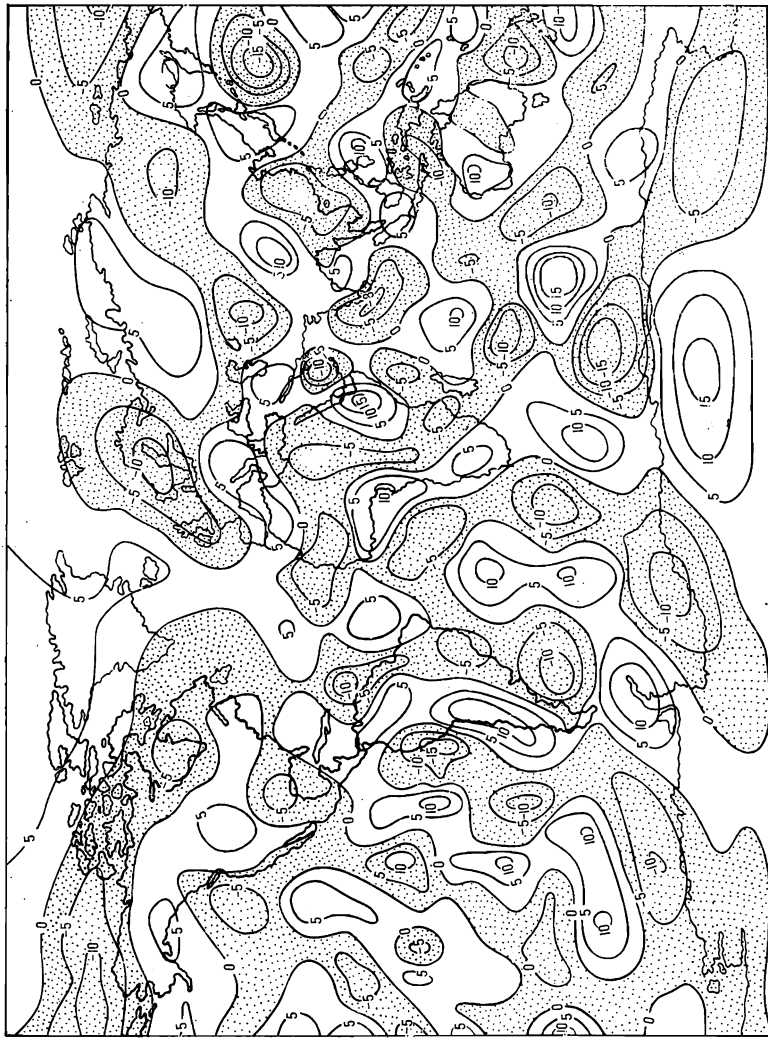


Рис. 131.

Вся амплитуда изменения таких аномалий укладывается в пределы $-30 - +30$ *мгл*. Таких максимальных значений аномалии достигают только в южной области Индийского океана и в восточной Антарктиде. Во всех других частях Земли они не превышают по абсолютной величине 20 *мгл*.

Высоты геоида, полученного по спутниковым данным относительно поверхности относимости, представляемой членами разложения гравитационного поля до восьмого порядка, приведены на рис. 131. Эти высоты не превосходят по абсолютной величине 25 *м*, а на большей части Земли составляют 5—10 *м*. Приведенные здесь данные вычислены аспирантом Чан Ван Няком под руководством автора и М. У. Сагитова.

ГЛАВА 21

ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ И ФИГУРА ЛУНЫ И ПЛАНЕТ

§ 1. Основные соображения об изучении гравитационного поля Луны и ее фигуры

Изучение гравитационного поля и фигуры Луны и планет важно как с точки зрения построения космогонических гипотез для познания происхождения и эволюции Солнечной системы, так и с точки зрения практического познания, а в дальнейшем и использования Луны и планет в сфере человеческой деятельности.

Луна всегда особенно привлекала внимание человечества. Ее изучали еще в глубокой древности. Многие народы жили по лунному календарю, некоторые, например Непал, применяют его и поныне. Для этого надо знать движение Луны. Сейчас аналитическая теория движения Луны построена с высокой степенью точности. Она использована для построения наиболее точной системы времени, так называемого эфемеридного времени. Давно изучается и поверхность Луны. По наземным наблюдениям были измерены основные формы рельефа видимой стороны Луны. На основании закона Кеплера довольно точно определено отношение масс Луны и Земли.

Все эти выводы основывались только на наземных астрономических наблюдениях. Однако и они на первых порах позволили составить довольно правильное представление о фигуре Луны.

В качестве некоторой средней Луны или, точнее говоря, в качестве фигуры относимости принимается сфера радиуса 1738,0 *км*, над которой даются высоты видимых точек. Такие точки в области лунных материков и в особенности лунных гор лежат значительно выше поверхности средней сферы, а лунные моря в основном ниже ее. Амплитуда изменения высот на Луне достигает 9 *км*. В предположении известного отношения масс Луна—Земля, скорости вращения Луны, при допущении ее однородности и состояния гидростатического равновесия, было рассчитано и гипотетическое гравитационное поле.

Таблица 28

Планета	Сжатие, α	Период вращения, T, *сек*	Средняя плотность, σ, *г/см*^{3}	Масса, *г*	Экваториальной радиус, *км*	$q=\frac{\omega^2 a}{g_e}$	$\beta=\frac{5}{2}q-\alpha$	Притяжение минус центробежное ускорение, g_e, *гал*
Меркурий	0,0	7600320	5,3	$3{,}166\cdot10^{26}$	$242\cdot10^6$	$4{,}6\cdot10^{-7}$	$11{,}5\cdot10^{-7}$	$360{,}5—17\cdot10^{-5}$
Венера	0,0	604800	4,95	$4{,}86\cdot10^{27}$	$61\cdot10^7$	$7{,}8\cdot10^{-5}$	$19{,}5\cdot10^{-5}$	$870{,}9—6{,}6\cdot10^{-2}$
		80220				$4{,}44\cdot10^{-3}$	$11{,}1\cdot10^{-5}$	870,9—3,74
		810000**)				$4{,}4\cdot10^{-5}$	$11{,}0\cdot10^{-5}$	$870{,}9—3{,}7\cdot10^{-2}$
Марс	0,0052	88642,6	3,95	$6{,}395\cdot10^{26}$	$34\cdot10^7$	$4{,}55\cdot10^{-3}$	$6{,}2\cdot10^{-3}$	368,88—1,71
Юпитер	0,062	35405 *)	1,330	$1900{,}686\cdot10^{27}$	$714\cdot10^7$	$8{,}5\cdot10^{-2}$	$15{,}0\cdot10^{-2}$	2486,04—224,87
Сатурн	0,096	36840 *)	0,687	$569{,}13\cdot10^{27}$	$604\cdot10^7$	$15{,}16\cdot10^{-2}$	$28{,}3\cdot10^{-2}$	1040,24—175,69
Уран	0,06	38940	1,56	$86{,}97\cdot10^{27}$	$238\cdot10^7$	$5{,}97\cdot10^{-2}$	$8{,}9\cdot10^{-2}$	1023,8—61,97
Нептун	0,02	56400	2,27	$102{,}98\cdot10^{27}$	$223\cdot10^7$	$1{,}96\cdot10^{-2}$	$2{,}9\cdot10^{-2}$	1380,9—27,68
Плутон	?	57600	4	$5{,}38\cdot10^{27}$	$72\cdot10^7$	$1{,}06\cdot10^{-2}$		692,0—8,57

*) Для экваториальной зоны.
**) Вращение обратное.

После запуска искусственных спутников Луны и аппаратов, совершающих посадки на Луне, возможности изучения ее фигуры и гравитационного поля существенно расширились. Рассмотренные ранее методы изучения гравитационного поля Земли стали применимыми для исследования Луны. В первую очередь стало доступным изучение гравитационного поля и фигуры Луны динамическим методом по возмущениям окололунных орбит. По возмущениям в движении спутников построено осредненное гравитационное поле Луны и получены параметры фигуры Луны до восьмого порядка. Более того, обнаружены неоднородности распределения плотностей, так называемые *масконы*. Непосредственные измерения силы тяжести осуществлены в местах посадки лунных отсеков американских лунных кораблей «Аполлон-11, -12 и -14». Появилась возможность осуществить измерения силы тяжести вдоль маршрутов луноходов. Таким образом уже сейчас можно довольно хорошо представить себе фигуру Луны, а в ближайшем будущем она будет изучена довольно подробно.

На современном этапе исследований пока еще нет возможности непосредственно измерять гравитационное поле и геометрические размеры на Луне. Параметры ее фигуры могут быть получены теоретическим путем на основе гипотез о внутреннем строении Луны и о состоянии масс внутри нее. Такие теории называют внутренними теориями фигуры Луны. Представление динамических характеристик фигуры и гравитационного поля Луны по возмущениям спутников называют внешними теориями фигуры Луны.

Что касается изучения гравитационного поля планет Солнечной системы, то здесь сделано пока еще очень мало, однако использование космических кораблей, безусловно, в ближайшее время приведет к прогрессу.

Основные параметры планет приведены в таблице 28.

§ 2. Основные характеристики Луны по астрономическим наблюдениям

Приводим основные числовые характеристики Луны:

Геоцентрический радиус-вектор Луны изменяется в пределах 356 000—407 000 *км*

Среднее расстояние до Луны от центра Земли 384 400 *км* = = 60,267 экваториальных радиусов Земли

Время распространения света до Луны $1^s,28$

Период обращения Луны вокруг Земли $27^d,32\,166$

Средняя скорость движения Луны по орбите 3681 *км/час* = = 1023 *м/сек* = 33 мин. дуги/*час*

Средний видимый диаметр диска Луны 1865″,2 с колебаниями в пределах 102″,4

Средний радиус Луны 1736 *км*

Период вращения вокруг оси $27^d,32\,166$ = периоду обращения вокруг Земли

Либрация Луны по долготе 7°,7

Либрация Луны по широте 6°,5

Отношение массы Луны к массе Земли $M_{\leftmoon}/M_{\oplus}=1/81{,}53$

Среднее значение силы тяжести $g=fM_{\leftmoon}/a^2=162\,683$ *мгл*,

Нормальный вертикальный градиент силы тяжести

$$\frac{\partial\gamma}{\partial r}=\frac{2fM_{\leftmoon}}{a^3}=0{,}1867\ \textit{мгл/м}$$

Селеноцентрическая постоянная $fM_{\leftmoon}=4902{,}78$ *км*^{3}/*сек*^{2}

Масса Луны $M_{\leftmoon}=7{,}35\cdot10^{25}$ *г*

Средняя плотность $\sigma_m=3{,}34$ *г/см*

Параболическая скорость изменяется от 2,204 *км/сек*, когда Земля в зените, до 2,44 *км/сек*, когда Земля в надире.

Сжатие $\alpha=0{,}00039$, экваториальное сжатие $=0{,}00016$.

Основными формами рельефа на Луне являются темные области, так называемые моря, возвышенные области материков, представляющих собой горы, плоскогорья и кольцевые горы, разделяющиеся на цирки и кратеры. Эти кольцевые горы достигают в диаметре 200 *км*. Уровень морей в среднем на 1,4 *км* ниже среднего уровня материков и изменяется от −3,29 *км* до +0,04 *км* над сферой относимости. Высота наибольших лунных гор достигает 9 *км*. Высота валов кольцевых гор, ограничивающих кратеры, достигает 1600 *м* (у кратера Клавдий), а высота центральной горы 2200 *м* (у кратера Теофил).

Луна имеет выпуклость, направленную к Земле и выступающую на 2,9 *км*. Фигура Луны неправильная. Если представить ее рельеф в виде разложения по сферическим функциям, то для Луны не будет наблюдаться резкое уменьшение всех гармоник по сравнению с коэффициентом J_2, как это имеет место для Земли. Поэтому Луну нецелесообразно аппроксимировать эллипсоидом относимости, трех- или двухосным.

Разложение рельефа Луны по сферическим гармоникам впервые обстоятельно было сделано С. Л. Гудасом. Общее выражение для радиуса-вектора выражается следующей формулой:

$$r(\lambda,\varphi)=r_{\leftmoon}\left\{1+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(a_{nm}\cos m\lambda+b_{nm}\sin m\lambda)\,P_{nm}(\sin\varphi)\right\},\quad(21.1)$$

где φ и λ — лунные широта и долгота. Полагая $\lambda=\pi/2$ и изменяя значения угла φ, получим уравнение лимба. При нулевой

либрации это уравнение имеет вид

$$r = r_0 + a_{00} + \frac{1}{4}a_{20} - \frac{3}{2}a_{22} + \frac{9}{64}a_{40} - \frac{45}{16}a_{42} + \frac{315}{8}a_{44} +$$
$$+ \left(a_{10} + \frac{3}{8}a_{30} - \frac{15}{4}a_{32}\right)\sin\varphi + \left(b_{11} + \frac{3}{8}b_{31} - \frac{45}{4}b_{33}\right)\cos\varphi +$$
$$+ \left(\frac{3}{2}b_{21} + \frac{5}{8}b_{41} - \frac{105}{4}b_{43}\right)\sin 2\varphi +$$
$$+ \left(-\frac{3}{4}a_{20} - \frac{3}{2}a_{22} - \frac{5}{16}a_{40} + \frac{15}{4}a_{42} + \frac{105}{2}a_{44}\right)\cos 2\varphi +$$
$$+ \left(-\frac{5}{8}a_{30} - \frac{15}{4}a_{32}\right)\sin 3\varphi + \left(-\frac{15}{8}b_{31} - \frac{15}{4}b_{33}\right)\cos 3\varphi +$$
$$+ \left(-\frac{35}{16}b_{41} - \frac{105}{8}b_{43}\right)\sin 4\varphi + \left(\frac{35}{64}a_{40} + \frac{105}{16}a_{42} + \frac{105}{8}a_{44}\right)\cos 4\varphi. \quad (21.2)$$

Удобнее рассматривать не радиус-вектор r, а высоты h над некоторой сферой относимости. Тогда

$$h = r_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\sin m\lambda) P_{nm}(\sin\varphi). \quad (21.3)$$

Приняв в качестве сферы относимости сферу радиуса $r_0 = 1735{,}4$ *км*, Гудас получил по системе известных высот h в 1200 точках на видимой стороне Луны гармонические коэффициенты a_{nm} и b_{nm}.

Коэффициенты разложения рельефа Луны позволяют определить параметры фигуры Луны. Так, средний радиус Луны будет

$$r_m = r_0 + a_{00} = 1738{,}0 \text{ км}.$$

Коэффициенты a_{10} и b_{11} позволяют найти смещение центра фигуры Луны относительно центра, принятого в использованном каталоге точек:

$a_{10} = \Delta\eta$ — смещение центра по оси η $(\lambda = 0)$,

$b_{11} = \Delta\xi$ — смещение центра по оси ξ $(\lambda = 90°)$.

Коэффициент a_{20} определяет полярное сжатие

$$\alpha = \frac{a-c}{r_0} = -\frac{3}{2}\frac{a_{20}}{r_0}.$$

Коэффициент a_{22} определяет экваториальное сжатие

$$\alpha' = \frac{a-b}{r_0} = \frac{6a_{22}}{r_0}.$$

Коэффициент b_{21} позволяет найти угол поворота осей симметрии видимой фигуры Луны относительно оси y, направленной по движению Луны,

$$\gamma = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2b_{21}}{a_{20}+2a_{22}}.$$

Приводим численные величины этих параметров, полученных по коэффициентам Гудаса:

$$r_0 = 1737{,}42\ км, \qquad \alpha = 0{,}12\cdot 10^{-3},$$
$$\Delta\xi = 0{,}1\ км, \qquad \alpha' = 0{,}12\cdot 10^{-2},$$
$$\Delta\eta = -0{,}49\ км, \qquad \gamma = -8°.$$

§ 3. Определение потенциала гравитационного поля Луны по рельефу

По известному уравнению поверхности Луны, представленному в виде разложения по сферическим функциям, можно построить потенциал силы тяжести также в виде разложения

$$V(r, \varphi, \lambda) =$$
$$= \frac{fM_{\text{Л}}}{r}\left\{1 + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n (c_{nm}\cos m\lambda + d_{nm}\sin m\lambda)\, P_{nm}(\sin\varphi)\right\}. \quad (21.4)$$

Коэффициенты c_{nm}, d_{nm} могут быть выражены через a_{nm} и b_{nm}, если принять, что плотность σ_m Луны постоянна и равна средней плотности ее, а рельеф имеет постоянную плотность σ_s.

Представим рельеф сконденсированным в бесконечно тонкий слой переменной плотности σ на сферу

$$\sigma = \sigma_s h.$$

При переходе через этот слой нормальная производная потенциала терпит скачок

$$\left(\frac{\partial V_i}{\partial n}\right)_\Sigma - \left(\frac{\partial V_e}{\partial n}\right)_\Sigma = 4\pi f\sigma. \quad (21.5)$$

Потенциал внутри сферического слоя можно представить в виде

$$V_i = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} fM_{\text{Л}}\frac{r^n}{r_0^{n+1}}(c_{nm}\cos m\lambda + d_{nm}\sin m\lambda)\, P_{nm}(\sin\varphi). \quad (21.6)$$

Потенциал вне слоя

$$V_e = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} fM_{\text{Л}}\frac{r_0^n}{r^{n+1}}(c_{nm}\cos m\lambda + d_{nm}\sin m\lambda)\, P_{nm}(\sin\varphi). \quad (21.7)$$

Сравнивая (21.6) и (21.7), видим, что V_i можно получить из V_e, заменив r на r_0^2/r и умножив полученное выражение на r_0/r:

$$\frac{r_0^n}{(r_0^2/r)^{n+1}} \cdot \frac{r_0}{r} = \frac{r^n}{r_0^{n+1}}.$$

Тогда

$$V_i = \frac{r_0}{r} V_e\left(\frac{R^2}{r}, \varphi, \lambda\right).$$

Дифференцируя V_i по r, получим

$$\frac{\partial V_i}{\partial r} = -\frac{r_0}{r^2} V_e - \frac{r_0^3}{r^3} \frac{\partial V_e}{\partial r}.$$

Так как при $r \to r_0$

$$\left(\frac{\partial V_i}{\partial r}\right)_\Sigma = -\frac{1}{r} V_{e\Sigma} - \left(\frac{\partial V_e}{\partial r}\right)_\Sigma,$$

то, воспользовавшись (21.5), получим

$$4\pi f\sigma = \left(\frac{\partial V_i}{\partial r}\right)_\Sigma - \left(\frac{\partial V_e}{\partial r}\right)_\Sigma = -\frac{V_{e\Sigma}}{r_0} - 2\left(\frac{\partial V_e}{\partial r}\right)_\Sigma. \qquad (21.8)$$

Вводя V_e из (21.7) и имея в виду, что для поверхности сферы Σ $r_0 = r$, получаем

$$V_{e\Sigma} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{fM_{\mathbb{C}}}{r_0} (c_{nm} \cos m\lambda + d_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) \qquad (21.9)$$

и

$$\left(\frac{\partial V_e}{\partial r}\right)_\Sigma = -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (n+1) \frac{fM_{\mathbb{C}}}{r_0^2} (c_{nm} \cos m\lambda + d_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi).$$

Введем эти выражения в правую часть уравнения (21.8), а в левой части его заменим σ на $\sigma_s h$, причем h представим в виде разложения согласно (21.3)

$$\sigma = h\sigma_s = \sigma_s r_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (a_{nm} \cos m\lambda + b_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi);$$

тогда будем иметь

$$4\pi f\sigma_s r_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (a_{nm} \cos m\lambda + b_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) =$$

$$= \frac{fM_{\mathbb{C}}}{r_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \{-1 + 2(n+1)\} (c_{nm} \cos m\lambda + d_{nm} \sin m\lambda) \times$$

$$\times P_{nm}(\sin \varphi). \qquad (21.10)$$

Приравнивая коэффициенты при равных порядках сферических функций, получим связь между коэффициентами:

$$\frac{c_{nm}}{d_{nm}} = \frac{3}{2n+1}\frac{\sigma_s}{\sigma_m}\frac{a_{nm}}{b_{nm}}. \tag{21.11}$$

Теперь, выражая коэффициенты c_{nm} и d_{nm} через a_{nm} и b_{nm}, для потенциала согласно (21.4) найдем следующее окончательное выражение:

$$V(r, \varphi, \lambda) = \frac{fM_{\mathbb{C}}}{r}\left[1 + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{3}{2n+1}\frac{\sigma_s}{\sigma_m}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n \times \right.$$
$$\left. \times (a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\sin m\lambda) P_{nm}(\sin\varphi)\right]. \tag{21.12}$$

Ускорение силы тяжести может быть легко получено из этой формулы дифференцированием по r:

$$g = \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{fM_{\mathbb{C}}}{r^2}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{3(n+1)}{2n+1}\frac{\sigma_s}{\sigma_m}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n \times \right.$$
$$\left. \times (a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\sin m\lambda) P_{nm}(\sin\varphi)\right]. \tag{21.13}$$

§ 4. Основы гидростатической теории фигуры Луны

До появления возможности измерять напряженность силы тяжести на Луне и в окололунном пространстве динамическими методами или непосредственными наблюдениями на Луне, применялся метод построения фигуры Луны, исходя из предположения ее гидростатического равновесия. При этом Луна рассматривается как равномерно вращающееся жидкое тело, находящееся в постоянном поле притяжения Земли. Внешний потенциал притяжения Луны задается формулой (21.4)

$$V_e = fM_{\mathbb{C}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{r_0^n}{r^{n+1}}(c_{nm}\cos m\lambda + d_{nm}\sin m\lambda) P_{nm}(\sin\varphi),$$

а коэффициенты c_{nm} и d_{nm} задаются уравнениями

$$\left.\begin{aligned} c_{n0} &= \int_{\tau}\sigma(r) r^n P_{n0}(\sin\varphi)\, d\tau, \\ c_{nm} &= 2\frac{(n-1)!}{(n+1)!}\int_{\tau}\sigma(r) r^n P_{nm}(\sin\varphi)\cos m\lambda d\tau, \\ d_{nm} &= 2\frac{(n-1)!}{(n+1)!}\int_{\tau}\sigma(r) r^n P_{nm}(\sin\varphi)\sin m\lambda d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{21.14}$$

Коэффициенты c_{n0} определяют зональные гармоники потенциала.

Первую зональную гармонику получим из первого уравнения (21.14): $P_{00}=1$; $c_{00}=\int\sigma\ (r)\ d\tau = M_{\mathbb{C}}$ — масса Луны. При выборе начала координат в центре масс $c_{10}=c_{11}=d_{11}=0$.

Коэффициенты при гармониках второго порядка d_2, d_{12}, d_{22} являются центробежными моментами инерции:

$$c_{21}=\int\sigma xz d\tau,\quad d_{12}=\int\sigma yz d\tau,\ d_{22}=\frac{1}{2}\int\sigma xy d\tau.$$

Эти моменты также можно обратить в нули, направив оси координат по главным центральным осям инерции тела.

Наконец, коэффициенты c_{20} и c_{22} можно выразить через моменты инерции тела:

$$C_{20}=\int\sigma\left(z^2-\frac{x^2+y^2}{2}\right)d\tau=\frac{1}{2}(A+B-2C), \tag{21.15}$$

$$C_{22}=\int\sigma(x^2-y^2)\,d\tau=\frac{1}{4}(B-A).$$

В этих предположениях внешний потенциал Луны может быть записан в виде

$$V=\frac{fM_{\mathbb{C}}}{r}+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{r_0^n}{r^{n+1}}(c_{nm}\cos m\lambda+d_{nm}\sin m\lambda)\,P_{nm}(\sin\varphi). \tag{21.16}$$

В случае гидростатического равновесия, т. е. когда внутренние напряжения в теле равны гидростатическому давлению, выполняется условие

$$dp=\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz=\sigma\left(\frac{\partial W}{\partial x}dx+\frac{\partial W}{\partial y}dy+\frac{\partial W}{\partial z}dz\right). \tag{21.17}$$

Здесь W — потенциал всех сил, действующих на тело, p — давление, т. е. поверхность постоянного потенциала является поверхностью постоянных давления и плотности. На поверхности гидростатического равновесия давление постоянно и равно нулю, поэтому эта поверхность является поверхностью постоянного потенциала

$$W=\text{const}.$$

Рассмотрим теперь находящуюся в равновесии вращающуюся Луну, в экваториальной плоскости которой расположена Земля, принимаемая за точечное тело. В этом случае будем иметь

$$W=V+T+P=\text{const}, \tag{21.18}$$

где V — гравитационный потенциал Луны, T — потенциал тяготения Земли, P — центробежный потенциал.

Потенциал точечной Земли

$$T = \frac{fM_T}{r_T}\frac{fM_T}{\sqrt{(\Delta - x)^2 + y^2 + z^2}} = \frac{fM_T}{\Delta\sqrt{1 - \frac{2x}{\Delta} + \frac{x^2}{\Delta^2} + \frac{y^2}{\Delta^2} + \frac{z^2}{\Delta^2}}},$$

где M_T — масса Земли, r_T — расстояние элемента поверхности Луны от центра Земли, Δ — расстояние между центрами Земли и Луны. Здесь ось z совпадает с осью вращения Луны, а ось x направлена к Земле.

Раскладывая $1/r_T$ в ряд по степеням $\frac{x}{\Delta}$, $\frac{y}{\Delta}$, $\frac{z}{\Delta}$ и удерживая члены до второго порядка малости, получим

$$T = \frac{fM_T}{\Delta}\left(1 + \frac{x}{\Delta} + \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{2\Delta^2}\right). \qquad (21.19)$$

Найдем потенциал центробежной силы. Луна вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости орбиты с постоянной угловой скоростью ω, равной скорости ее орбитального движения. Тогда движение Луны есть вращение с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр инерции системы Луна—Земля, отстоящий от центра Луны на расстоянии $\Delta M_T/(M_\text{☾} + M_T)$. Потенциал центробежной силы будет

$$P = \frac{1}{2}\omega^2\left[\left(\frac{\Delta}{1 + M/M_T} - x\right)^2 + y^2\right].$$

Заменим здесь ω^2 его выражением из третьего закона Кеплера:

$$\omega^2 = \frac{fM_T(1 + \mu)}{\Delta^3}, \quad \text{где} \quad \mu = \frac{M_\text{☾}}{M_T},$$

тогда

$$P = \frac{fM_T}{\Delta}\left[\frac{1}{2(1 + \mu)} - \frac{x}{\Delta} + \frac{x^2 + y^2}{2\Delta^2}\right]. \qquad (21.20)$$

Складывая T и P, получим

$$T + P = \frac{fM_T}{\Delta}\left[1 + \frac{1}{2(1 + \mu)}\right] + \frac{fM_T}{2\Delta^3}(3x^2 - z^2) + \mu\frac{fM_T}{2\Delta^3}(x^2 + y^2). \qquad (21.21)$$

Эта сумма является возмущающим потенциалом, определяющим отклонения поверхности Луны от сферы.

Добавим к (21.21) член $\lambda(x^2+y^2+z^2)$, который в силу симметрии может только вызвать ничтожное общее расширение Луны, но не повлияет на ее фигуру. Параметр λ выберем так, чтобы возмущающий потенциал выразился в виде гармонической функции второго порядка

$$\nabla^2(T+P+\lambda r^2)=0.$$

Выполняя дифференцирование, получим

$$\frac{2fM_T}{\Delta^3}+6\lambda=0,$$

откуда

$$\lambda=-\frac{fM_T}{3\Delta^3}. \tag{21.22}$$

Теперь возмущающий потенциал представим в виде

$$\Phi=T+P+\lambda r^2=\frac{fM_T}{\Delta}\left[1+\frac{1}{2(1+\mu)}\right]+$$
$$+\frac{fM_T}{2\Delta^3}(3x^2-z^2)+\mu\frac{fM_T}{2\Delta^3}(x^2+y^2)-\frac{fM_T}{3\Delta^3}r^2$$

или, имея в виду, что первый член как постоянный, а третий как малый, могут быть отброшены, в виде

$$\Phi=\frac{fM_T}{2\Delta^3}(3x^2-z^2)-\frac{fM_T}{3\Delta^3}r^2=\frac{fM_T}{6\Delta^3}(7x^2-2y^2-5z^2). \tag{21.23}$$

Под действием возмущающего потенциала поверхность испытывает деформацию, выражающуюся гармонической функцией второго порядка J_2:

$$r=r_0(1+\varepsilon J_2). \tag{21.24}$$

Ограничиваясь гармониками второго порядка, получим из (21.12) потенциал однородного сфероида

$$V=\frac{fM_{\mathbb{C}}}{r}\left(1+\frac{3}{5}\frac{\varepsilon J_2 r_0^2}{r^2}\right), \tag{21.25}$$

где за ε принято σ_{n1}/σ_s. Вводя (21.24) в выражение потенциала сфероида (21.25), находим

$$V=\frac{fM_{\mathbb{C}}}{r_0(1+\varepsilon J_2)}\left[1+\frac{3}{5}\frac{\varepsilon J_2}{(1+\varepsilon J_2)^2}\right]=$$
$$=\frac{fM_{\mathbb{C}}}{r_0}\left[(1-\varepsilon J_2)\left(1+\frac{3}{5}\frac{\varepsilon J_2 r_0^2}{r_0(1+\varepsilon J_2)^2}\right)\right]. \tag{21.26}$$

Складывая потенциал Луны (21.26) с возмущающим потенциалом Ф (21.23), получим уравнение уровенной поверхности Луны:

$$W = \frac{fM_T}{6\Delta^3}(7x^2 - 2y^2 - 5z^2) + \\ + \frac{fM_{\mathbb{C}}}{r_0}(1 - \varepsilon J_2)\left[1 + \frac{3}{5}\frac{\varepsilon J_2 r_0^2}{r_0^2(1+\varepsilon J_2)^2}\right] = \text{const.} \quad (21.27)$$

Пренебрегая малыми второго порядка и полагая константу равной $fM_{\mathbb{C}}/r_0$, из (21.27) определяем значение εJ_2:

$$\varepsilon J_2 = \frac{5}{12}\frac{M_T}{M_{\mathbb{C}}}\frac{r_0^3}{\Delta^3}\frac{7x^2 - 2y^2 - 5z^2}{r_0^2},$$

которое введем в (21.24). Теперь уравнение уровенной поверхности Луны с точностью до гармоник второго порядка будет иметь вид

$$r = r_0\left(1 + \frac{5}{12}\frac{M_T}{M_{\mathbb{C}}}\frac{r_0^3}{\Delta^3}\frac{7x^2 - 2y^2 - 5z^2}{r_0^2}\right). \quad (21.28)$$

Полагая в (21.28) последовательно

$$x = r_0, \quad y = r_0, \quad z = r_0,$$

найдем полуоси лунного сфероида:

$$\left.\begin{aligned} a &= r_0\left(1 + \frac{35}{12}\frac{M_T}{M_{\mathbb{C}}}\frac{r_0^3}{\Delta^3}\right), \\ b &= r_0\left(1 - \frac{10}{12}\frac{M_T}{M_{\mathbb{C}}}\frac{r_0^3}{\Delta^3}\right), \\ c &= r_0\left(1 - \frac{25}{12}\frac{M_T}{M_{\mathbb{C}}}\frac{r_0^3}{\Delta^3}\right). \end{aligned}\right\} \quad (21.29)$$

Значение отношений в скобках известны: $M_T/M_{\mathbb{C}} = 81{,}3$; $\Delta/r_0 = 221$. Из (21.29) можно получить сжатие уровенного сфероида:

полярное сжатие

$$\alpha = \frac{b-c}{r_0} = 0{,}94 \cdot 10^{-5},$$

экваториальное сжатие

$$\beta = \frac{a-c}{r_0} = 0{,}375 \cdot 10^{-4}.$$

Эти величины оказываются значительно меньше сжатия Луны, полученного по наблюдениям либрации: $\alpha_{\text{либ}} = 4{,}0 \cdot 10^{-4}$, $\beta_{\text{либ}} = 6{,}3 \cdot 10^{-4}$. Отношение теоретических динамических сжатий

$f = \frac{C-B}{C-A} = \frac{\alpha}{\beta} = 0{,}25$ также сильно расходится с наблюденным:

$$0{,}5 \leqslant f \leqslant 0{,}75.$$

Это расхождение свидетельствует о том, что Луна далека от гидростатического равновесия и не может аппроксимироваться ни двухосным, ни трехосным эллипсоидом. Это расхождение свидетельствует о неоднородном распределении вещества в теле Луны.

Сопоставление отношений моментов инерции со сжатием

$$\frac{C-A}{C} = \alpha_1 - \alpha_3 \approx 5\frac{M_{\mathbb{C}} r_0^3}{M_T C^3},$$

$$\frac{C-B}{C} = \alpha_2 - \alpha_3 \approx \frac{5}{4}\frac{M_{\mathbb{C}} r_0^3}{M_T C^3}$$

позволяет рассчитать разности полуосей, которые оказываются равными

$$a_1 - a_3 = 1{,}09 \text{ км}, \quad a_2 - a_3 = 0{,}83 \text{ км},$$

где a_1 — полуось, направленная к Земле, a_2 — полуось в направлении движения Луны, a_3 — полуось в направлении лунного полюса.

Таким образом, экваториальное несимметричное вздутие больше полярного сжатия.

§ 5. Определение параметров гравитационного поля и фигуры Луны по наблюдениям искусственных спутников

Искусственные спутники Луны дали возможность изучать гравитационное поле и фигуру Луны по наблюдению возмущений в их движении. При этом применяется в основном тот же метод, который используется при изучении гравитационного поля и фигуры Земли.

Уравнения Лагранжа для оскулирующих элементов орбиты связывают скорости изменения этих элементов с возмущающей силой. Для определения сферических гармоник гравитационного поля Луны используются уравнения Лагранжа для узла и долготы перицентра орбиты, поскольку именно эти уравнения содержат вековые и долгопериодические члены:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e}, \end{aligned}\right\} \qquad (21.30)$$

где приняты те же обозначения, что и в главе 18. В качестве возмущающей силы R принимается часть разложения потенциала силы тяжести Луны, начиная со второго члена.

После введения возмущающей функции (21.4) в уравнения (21.30) получим уравнения, связывающие изменения долготы узла и долготы перицентра с различными гармониками гравитационного поля.

Если в возмущающей функции положить $m = 0$, получим уравнения для нахождения зональных гармоник. Тогда уравнение для долготы узла (21.30) можно преобразовать, например, к виду

$$\frac{d\Omega}{dv} = \frac{\operatorname{ctg} i}{a(1-e^2)} \frac{\sin(\omega+v)}{\cos\varphi} \sum_{n=2}^{\infty} c_{n0} P_n(\sin\varphi) =$$

$$= \frac{3\cos i}{(1-e^2)^2}\left(\frac{r_0}{a}\right)^2 c_{20}\sin^2(\omega+v)(1+e\cos v) + \frac{3}{2}\frac{\operatorname{ctg} i}{(1-e^2)^3}\left(\frac{r_0}{a}\right)^3 J_{30} \times$$

$$\times [5\sin^3(\omega+v)\sin^2 v - \sin(\omega+v)](1+2e\cos v + e^2\cos^2 v) +$$

$$+ \frac{5}{2}\frac{\cos i}{(1-e^2)^4}\left(\frac{r_0}{a}\right)^4 c_{40}[7\sin^4(\omega+v)\sin^2 i - 3\sin^2(\omega+v)] \times$$

$$\times (1+3e\cos v + 3e^2\cos^2 v + e^3\cos^3 v) + \ldots, \quad (21.31)$$

где v — истинная аномалия, связанная с t уравнением

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{r^2}\sqrt{fM}\sqrt{a(1-e^2)}.$$

В уравнении (21.31) короткопериодические возмущения происходят за счет изменения v. Их легко исключить осреднением

$$\frac{d\Omega}{dv} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\Omega}{dv}\, dv. \quad (21.32)$$

Тогда все короткопериодические члены из уравнения исчезнут и уравнение (21.31) примет вид

$$\frac{d\Omega}{dv} = \frac{3}{2}\frac{\cos i}{(1-e^2)^2}\left(\frac{r_0}{a}\right)^2 c_{20} - \frac{3}{2}\frac{\operatorname{ctg} i}{(1-e^2)^3}\left(\frac{r_0}{a}\right)^3 \times$$

$$\times c_{30} e\left(1 - \frac{15}{4}\sin^2 i\right)\sin\omega - \frac{15}{4}\frac{\cos i}{(1-e^2)^4}\left(\frac{r_0}{a}\right)^4 \times$$

$$\times c_{40}\left[\left(1 - \frac{7}{4}\sin^2 i\right)\left(1 + \frac{3}{2}e^2\right) - \frac{3}{4}e^2\left(1 - \frac{7}{3}\sin^2 i\right)\cos 2\omega\right] + \ldots$$

(2 1.33)

Для исключения долгопериодических возмущений надо еще произвести осреднение по ω. Тогда получится уравнение, содержащее только вековые члены и только четные зональные гармоники:

$$\frac{d\Omega}{dv} = \cos i \left\{ \frac{3}{2} \frac{1}{(1-e^2)^2} \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 c_{20} - \right.$$
$$- \frac{15}{4} \frac{1}{(1-e^2)^4} \left(\frac{r_0}{a}\right)^4 c_{40} \left(1 - \frac{7}{4}\sin^2 i\right)\left(1 + \frac{3}{2}e^2\right) +$$
$$+ \frac{105}{16} \frac{1}{(1-e^2)^6} \left(\frac{r_0}{a}\right)^6 c_{60} \left(1 - \frac{9}{2}\sin^2 i + \frac{33}{8}\sin^4 i\right) \times$$
$$\left. \times \left(1 + 5e^2 + \frac{15}{8}e^4\right) + \ldots \right\}. \quad (21.34)$$

Уравнение (21.34) позволяет определить четные зональные гармоники по наблюденным осредненным изменениям узла и известным элементам орбиты.

Преобразовывая уравнение Лагранжа и удерживая разные гармоники возмущающей силы, можно получить уравнения, удобные для определения различных гармоник гравитационного поля.

Приведем сводку формул, дающих вековые возмущения элементов в зависимости от коэффициентов нескольких первых членов разложения гравитационного поля Луны.

1. Скорость изменения элементов орбиты, зависящая от c_{20}:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{da}{dt} = \frac{de}{dt} = \frac{di}{dt} = 0, \\ &\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3\cos i}{2(1-e^2)^2}\left(\frac{r_0}{a}\right)^2 c_{20}, \\ &\frac{d\omega}{dt} = -\frac{3(1-5\cos^2 i)}{4(1-e^2)^2}\left(\frac{r_0}{a}\right)^2 c_{20}. \end{aligned}\right\} \quad (21.35)$$

2. Скорость изменения элементов орбиты, зависящая от c_{22} и s_{22}:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{di}{dt} = \frac{3\sin i}{(1-e^2)^2}\left(\frac{r_0}{a}\right)^2 \{c_{22}\cos 2(\Omega-\theta) + s_{22}\sin 2(\Omega-\theta)\}, \\ &\frac{d\Omega}{dt} = \frac{3\cos i}{(1-e^2)^2}\left(\frac{r_0}{a}\right)^2 \{c_{22}\cos 2(\Omega-\theta) + s_{22}\sin 2(\Omega-\theta)\}, \\ &\frac{d\omega}{dt} = \frac{3(3-5\cos^2 i)}{2(1-e^2)^2}\left(\frac{r_0}{a}\right)^2 \{c_{22}\cos 2(\Omega-\theta) + s_{22}\sin 2(\Omega-\theta)\}. \end{aligned}\right\} \quad (21.36)$$

3. Скорость изменения элементов орбиты, зависящая от c_{30}:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= 0,\\
\frac{de}{dt} &= \frac{3\cos\omega\sin i}{2(1-e^2)^2}\left(\frac{r_0}{a}\right)^3\left(\frac{5}{4}\sin^2 i-1\right)c_{30},\\
\frac{di}{dt} &= \frac{3e\cos\omega}{2(1-e^2)^3}\left(\frac{r_0}{a}\right)^3\left(\frac{5}{4}\sin^2 i-1\right)c_{30},\\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{3e\sin\omega}{2(1-e^2)^3}\left(\frac{r_0}{a}\right)^3\operatorname{ctg} i\left(\frac{15}{4}\sin^2 i-1\right)c_{30},\\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{3\sin\omega}{2(1-e^2)^3}\left(\frac{r_0}{a}\right)^3\left(\frac{1+4e^2}{e}\sin i-e\operatorname{ctg} i\right)\left(\frac{15}{4}\sin^2 i-1\right)c_{30}.
\end{aligned}\right\} \qquad (21.37)$$

Таким образом, вековые возмущения долготы узла позволяют определить четные зональные гармоники. Долгопериодические возмущения позволяют найти нечетные зональные гармоники. Возмущения с периодом обращения Луны дают возможность определить короткопериодические гармоники c_{nm}, s_{nm}.

В основном метод определения параметров гравитационного поля Луны по наблюдению искусственных спутников аналогичен методу определения параметров гравитационного поля Земли. Однако есть некоторые различия. Например, земной спутник проходит через поле зрения станции слежения очень быстро, так что с одной станции спутник наблюдается короткое время и на малом участке орбиты. Отсюда вытекает необходимость наличия сети станций слежения, разбросанных по всей Земле. Лунный спутник можно видеть с Земли от восхода до захода Луны. Поэтому две станции, удобно расположенные, обеспечат все данные для определения орбиты.

Вследствие большого удаления лунных спутников от наблюдателя угловые измерения их положения оказываются недостаточно точными. Они заменяются измерением расстояний и скоростей. Угловая ошибка в 0°,1 соответствует ошибке в положении более 600 *км*. Измерения расстояний обеспечивают точность 10—15 *м*. Точность определения скоростей 0,01—0,02 *м/сек*.

Вследствие малой скорости вращения Луны можно считать, что спутник движется в стационарном поле силы тяжести. За один оборот Луны спутник сделает около 200 оборотов, т. е. за оборот спутника Луна повернется лишь на 1°,8, в то время как за один оборот земного спутника Земля повернется на 25—30°.

В таблице 29 приводятся коэффициенты разложения гравитационного поля Луны c_{nm} и s_{nm}, полученные по наблюдениям «Луны-10» (по Акиму — графа 1), по наблюдениям спутников

Таблица 29

nm	$c_{nm}\cdot10^4$	$\varepsilon\cdot10^4$	$c_{nm}\cdot10^4$	$\varepsilon\cdot10^4$	$c_{nm}\cdot10^4$	$\varepsilon\cdot10^4$
2,0	—2,06	+0,22	—2,0596	±0,141	—2,0263	±0,0143
2,1	—0,157	0,059	—0,1661	0,051	—0,0878	0,0131
2,2	0,140	0,012	0,2042	0,029	0,2191	0,0249
3,0	—0,363	0,099	—0,3773	0,180	—0,2223	0,0262
3,1	0,568	0,026	0,3012	0,048	0,3636	0,0025
3,2	0,118	0,047	0,1294	0,028	—0,0257	0,0058
3,3	—	—	0,0317	0,015	—0,0265	0,0079
4,0	0,333	0,270	0,0798	0,128	0,0941	0,190
4,1	—	—	—0,1560	0,036	—0,1236	0,0046
4,2	—	—	0,0011	0,010	0,0361	0,0034
4,3	—	—	—0,0082	0,008	0,0164	0,0021
4,4	—	—	—0,0007	0,003	0,0091	0,0011
5,0	—	—	—0,5505	0,171	—0,1614	0,0321
5,1	—	—	—0,0385	0,037	—	—
5,2	—	—	—0,0342	0,009	—	—
5,3	—	—	—0,0071	0,002	—	—
5,4	—	—	—0,0008	0,001	—	—
5,5	—	—	—0,0003	0,0002	—	—
6,0	—	—	—	—	—0,1089	0,0121
7,0	—	—	—	—	0,1734	0,122
8,0	—	—	—	—	—0,2011	0,0114

nm	$s_{nm}\cdot10^4$	$\varepsilon\cdot10^4$	$s_{nm}\cdot10^4$	$\varepsilon\cdot10^4$	$s_{nm}\cdot10^4$	$\varepsilon\cdot10^4$
2,1	—0,0361	0,0358	0,0080	0,039	0,0150	0,0139
2,2	—0,0139	0,0145	—0,0342	0,025	0,1310	0,0335
3,1	0,178	0,032	0,1762	0,053	0,0740	0,0032
3,2	—0,00702	0,046	—0,0147	0,033	—0,0200	0,0063
3,3	—	—	—0,0043	0,018	—0,0496	0,0114
4,1	—	—	0,0391	0,028	0,0564	0,0051
4,2	—	—	0,0072	0,013	0,0035	0,0157
4,3	—	—	—0,0001	0,006	0,0015	0,0251
4,4	—	—	0,0011	0,003	0,0011	0,0521
5,1	—	—	0,0829	0,031	—	—
5,2	—	—	—0,0203	0,008	—	—
5,3	—	—	—0,0078	0,002	—	—
5,4	—	—	—0,0013	0,001	—	—
5,5	—	—	0,0003	0,0002	—	—

«Орбитер-1, -3, -4» (по Л. Толсону — графа 2) и по тем же спутникам по Л. Лореллу (графа 3) и среднеквадратические ошибки ε.

Помимо скоростей и расстояний применяется метод измерения изменений локальных ускорений в движении лунных спутников. Обработка таких ускорений позволяет построить распределение силы притяжения на высоте полета спутника. На



Рис. 132.

величину локального ускорения больше всего влияют массы, расположенные непосредственно под спутником. Поэтому определение ускорений дает возможность изучить распределение масс под траекторией полета. Этим методом П. Мюллером и В. Съёгреном было обнаружено наличие на Луне областей значительных

положительных аномалий ускорения силы тяжести, расположенных над шестью морями видимой стороны Луны: над Морями Дождей, Ясности, Кризисов, Нектара, Влажности и Паров. Эти аномалии достигают величин соответственно +230, +180, 100, 100, 60, 70 *мгл* и объясняются предположительно концентрацией масс под этими морями. Эти аномалии были названы *масконами.*

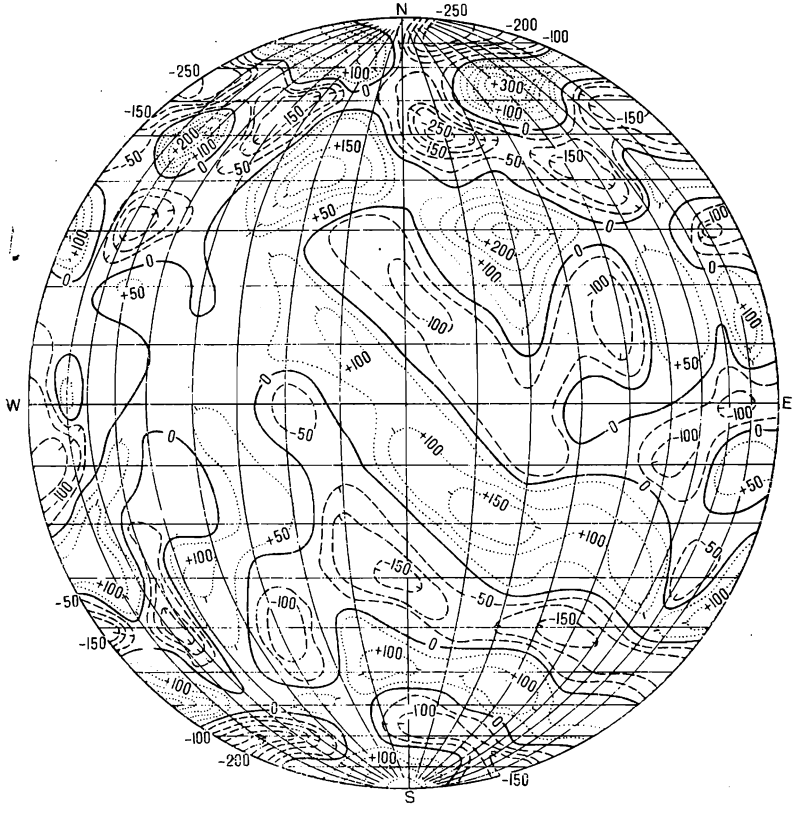


Рис. 133.

Наличие их привело к появлению ряда гипотез их происхождения. Предполагают их метеоритное происхождение, вулканическое и даже осадконакопление в древних, еще не испарившихся морях. На рис. 132 приведена схема гравитационных ускорений над масконами, на рис. 133 — схема аномалий силы тяжести на селеноиде по Бланкшиеру без учета гармоник c_{20} и c_{22}, принятых за нормальное поле.

§ 6. Непосредственные измерения силы тяжести на Луне

Спутниковый метод дает осредненные аномалии силы тяжести. Для того чтобы изучать детали гравитационного поля, требуется непосредственное измерение g на поверхности. На Луне до настоящего времени было произведено три непосредственных измерения силы тяжести с помощью акселерометров, установленных на лунных модулях космических кораблей «Апполон-11, -12 и -14». Приводим таблицу значений ускорения силы тяжести, измеренных экипажами этих кораблей, и координаты точек, в которых эти измерения производились (табл. 30).

Таблица 30

Наименование аппаратов	Координаты точки посадки		Высота в км над сферой радиуса R=1736,0, км	Наблюдаемое значение силы тяжести, $g_н$, мгл	$\frac{\partial\gamma}{\partial R}H$, мгл	Нормальное значение силы тяжести, $\gamma(H)$, мгл	Аномалии силы тяжести Δg, мгл
	φ	λ					
«Аполлон-11»	0°40′N	23°29′E	—0,53	162852±13	+100	162783	69
«Аполлон-12»	3°12′S	23°24′W	0	162674	0	162683	—9
«Аполлон-14»	3°40′S	17°28′W	0,39	162653	—74	162610	43

Непосредственное измерение силы тяжести позволяет вычислить расстояние точки наблюдения от центра масс Луны. Для этого можно воспользоваться простейшей формулой

$$r_g = \sqrt{\frac{fM_{\text{☾}}}{g}}.$$

При вычислениях принято $fM_{\text{☾}} = 4902{,}78$ км^3/сек^2. Эту же величину можно получить по наблюдениям движения корабля по лунной орбите с Земли с помощью доплеровских измерений и радиолокационных определений высоты полета над поверхностью Луны. Эта величина обозначается $r_т$.

В таблице 31 приведено сопоставление значений расстояний от точки нахождения лунного модуля до центра масс Луны, определенных разными способами, по непосредственным гравиметрическим и по орбитальным измерениям.

Таблица 31

Аппарат / Способ определения r	«Аполлон»			Среднее расстояние, км
	11	12	14	
r_g, км	1735,10	1736,05	1736,16	1735,77
$r_т$, км	1735,47	1736,00	1736,39	1735,95

ГЛАВА 22

ПРОБЛЕМА ПРЕДСКАЗАНИЯ АНОМАЛИЙ

§ 1. Причины, вызывающие потребность предсказания аномалий. Средняя аномалия

При решении многих задач гравиметрии и теории фигуры Земли требуется предсказание аномалий для областей, где они неизвестны. Такого предсказания требует, например, решение проблемы Стокса. Высоты геоида по формуле Стокса находятся с помощью интегралов, распространенных на всю Землю. Таковы же формулы Молоденского для высот квазигеоида и формулы Венинг-Мейнеса для вычисления уклонений отвеса. Для использования этих формул требуется знать аномалии силы тяжести на всей Земле. При представлении гравитационного поля в виде разложения по сферическим функциям и при определении коэффициентов такого разложения также требуется знание аномалий на всей Земле. Таким образом, в принципе мы должны знать Δg в любой точке земной поверхности.

Фактически, даже при густых съемках сила тяжести определяется в ограниченном числе пунктов. Значения силы тяжести между ними оцениваются методом интерполяции. Значительные области Земли, особенно на акваториях, совсем не имеют гравиметрических данных. В этих случаях для построения гипотетических аномалий приходится тем или иным способом выбирать их значение. Например, все неизвестные аномалии принимаются равными нулю, или значения аномалий интерполируются по соседним пунктам, или эти аномалии вычисляются по известным коэффициентам общего разложения аномалий по сферическим функциям. Выбор метода предсказания является одной из важных задач, решаемых применением статистики в гравиметрии. Не менее важно оценить надежность предсказанного значения.

Часто при решении задач теории фигуры Земли практически можно ограничиться знанием гравитационного поля в некоторой ограниченной области, отбрасывая влияние дальних зон или учитывая их приближенно по редкой сети данных. В этих случаях очень важно оценить, каково влияние отброшенных об-

ластей или каково влияние их схематизации. Наконец, возникает задача оценки влияния ошибок предсказания аномалий на выводы таких величин как высоты геоида или уклонения отвесных линий.

Очевидно, что все эти задачи носят временный характер и будут в основном сняты после того как будет завершено подробное изучение гравитационного поля Земли.

Решению этих задач помогает использование средних квадратических величин и средних парных произведений, так называемых ковариаций.

Заметим, что средняя аномалия по всей Земле обращается в нуль, тогда как средняя квадратическая аномалия всегда отличается от нуля и характеризует аномальное гравитационное поле. В самом деле, если предположить, что

$$\overline{\Delta g} = m = \frac{1}{4\pi}\iint_S \Delta g\, ds \neq 0,$$

то достаточно образовать новые аномалии

$$\Delta g^* = \Delta g - m,$$

чтобы выполнялось равенство нулю средней аномалии:

$$\overline{\Delta g}^* = \frac{1}{4\pi}\iint_S \Delta g^*\, ds = 0.$$

В то же время средняя квадратическая аномалия

$$\overline{\Delta g^2} = \frac{1}{4\pi}\iint_S \Delta g^2\, ds \neq 0.$$

По расчетам Каулы $\overline{\Delta g^2} = \pm 35$ *мгл*. Часто средняя квадратическая величина в статистике называется вариацией данной величины и обозначается

$$\overline{\Delta g^2} = \operatorname{var}\{\Delta g\} = M\{\Delta g^2\} = \frac{1}{4\pi}\iint_{(S)} \Delta g^2\, ds. \qquad (22.1)$$

При случайном распределении аномалий средняя квадратическая величина или вариация характеризует амплитуду разброса аномалий и равняется приблизительно 1/3 от крайних отклонений. Понятие среднего квадратического уклонения применяется в гравиметрии и для оценки точности гравиметрических определений, построения карт, оценки интерполированных или экстраполированных величин. Для таких оценок в гравиметрии введены понятия ошибок представительства и интерполяции.

§ 2. Методы интерполяции и экстраполяции гравитационных аномалий. Ошибка интерполяции и ошибка представительства

При предсказании аномалий требуется определить аномалии в одном или нескольких пунктах, там, где они не известны, по значениям в остальных точках. При этом главная информация получается от близрасположенных точек. Чем дальше расположены точки с известными аномалиями, тем слабее их связь с аномалией, которую надо предсказать.

Математически предсказание можно сформулировать как нахождение такой функции известных аномалий Δg_1, Δg_2, ..., Δg_n, которая определяла бы неизвестную аномалию в точке

$$\Delta g_p = f(\Delta g_1, \Delta g_2, \ldots, \Delta g_n).$$

Простейшей формой такой функции является линейная форма, соответствующая линейной интерполяции

$$\widetilde{\Delta g}_p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta g_i. \tag{22.2}$$

Коэффициенты этой формулы могут быть подобраны решением уравнений (22.2) для точек с известной аномалией. Частным случаем такого интерполирования является интерполирование внутри треугольника по известным аномалиям в его вершинах. Аномалия $\widetilde{\Delta g}$ в произвольной точке внутри такого треугольника определится по расположению этой точки и аномалиям в вершинах Δg_1, Δg_2, Δg_3 с использованием формулы интерполяции:

$$z = \frac{(x_2 - x)(y_3 - y_2) - (y_2 - y)(x_3 - x_2)}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_2)} z_1 + \\ + \frac{(x_3 - x)(y_1 - y_3) - (y_3 - y)(x_1 - x_3)}{(x_3 - x_2)(y_1 - y_3) - (y_3 - y_2)(x_1 - x_3)} z_2 + \\ + \frac{(x_1 - x)(y_2 - y_1) - (y_1 - y)(x_2 - x_1)}{(x_1 - x_3)(y_2 - y_1) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_1)} z_3, \tag{22.3}$$

или, обозначая соответствующие дроби через α_1, α_2, α_3,

$$\widetilde{\Delta g} = \alpha_1 \Delta g_1 + \alpha_2 \Delta g_2 + \alpha_3 \Delta g_3.$$

В случае применения ошибки представительства значение аномалии в одной точке, например, в первой, принимается за аномалию, представляющую всю площадь, т. е. $\widetilde{\Delta g} = \Delta g_1$. В этом случае $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Для того чтобы оценить, насколько хорошо представляют аномалии, полученные методом интерполяции или методом

представительства, истинные аномалии данной области, введено понятие ошибок представительства и интерполяции.

Под ошибкой представительства понимается средняя квадратическая ошибка, с которой один произвольно выбранный пункт представляет гравитационную аномалию на некоторой площади. Понятие ошибки представительства было введено Грааф-Хантером. Для того чтобы получить ошибку представительства для некоторой площади, равномерно покрытой гравиметрическими пунктами, пользуются формулой

$$E = \pm \sqrt{\frac{\sum (\overline{\Delta g} - \Delta g_i)^2}{n-1}},$$

где $\overline{\Delta g}$ — среднее значение аномалий для всех пунктов рассматриваемой площади, Δg_i — значение аномалии в i-й точке, n — число пунктов.

Грааф-Хантер установил эмпирическую зависимость ошибки представительства от величины представляемой площади

$$E = k(\sqrt{x} + \sqrt{y}), \tag{22.4}$$

где x и y — стороны представляемой площади, k — эмпирический коэффициент. Он получил этот коэффициент по материалам маятниковой съемки в Индии равным 0,55.

Введение ошибки представительства позволяет оценить ошибки определения высот геоида и уклонения отвеса, возникающие за счет того, что многие области представляются лишь отдельными пунктами. Для оценки влияния совсем неизученных мест Молоденским была введена ошибка интерполяции. Ошибкой интерполяции называется средняя квадратическая ошибка, с которой получается интерполированное по окружающим пунктам или по карте значение силы тяжести в любой произвольно взятой точке. Ошибка интерполяции рассчитывается по формуле

$$E = \pm \sqrt{\frac{\sum (\Delta g_{\text{н}} - \Delta g_{\text{инт}})^2}{n-1}},$$

где $\Delta g_{\text{н}}$ — наблюденная в данной точке аномалия, $\Delta g_{\text{инт}}$ — интерполированное значение аномалии в той же точке, n — число точек, по которым производилось сравнение.

Ошибка интерполяции зависит от густоты гравиметрической сети и аномальности поля. Для вычисления ошибок интерполяции по расстояниям между пунктами при однородном характере съемки можно применить следующую эмпирическую формулу:

$$E_{\text{инт}} = 2kx^l, \tag{22.5}$$

где x — среднее расстояние между пунктами, k — эмпирический коэффициент, l — эмпирический показатель степени.

Параметры формулы (22.5) k и l характеризуют степень аномальности поля. Если положить $l = 1/2$ и считать расстояние между пунктами по осям x и y неравным, то получится формула, аналогичная формуле Грааф-Хантера (22.4)

$$E = k\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right).$$

Недостатком использования ошибки представительства или интерполяции является то, что их можно вычислить только при наличии достаточно большого числа пунктов в рассматриваемой области. Применять же их требуется именно к областям, где таких определений нет. Иными словами, для слабо изученных областей приходится применять ошибки интерполяции или представительства, полученные совсем для других областей.

Введение понятия ошибки интерполяции дало критерий для оценки точности гравиметрических карт. Величина ошибки интерполяции зависит от среднего расстояния между пунктами съемки и от аномальности поля. Для спокойного поля с медленно изменяющимися аномалиями ошибка интерполяции будет меньше, чем для поля, имеющего большие и неправильно изменяющиеся аномалии. В формуле (22.5) эта зависимость выражается тем, что коэффициент k и показатель степени l будут различными для различных полей. В силу сказанного величина ошибки интерполяции, при некотором постоянном расстоянии между пунктами, или величины параметров k, l (независимо от расстояния) могут служить критерием для оценки аномальности поля. Этот критерий, будучи независимым от интуиции исследователя, является объективным. Ошибка интерполяции определяет точность карты. В самом деле, под точностью карты мы понимаем ту точность, с которой можно получить с данной карты аномалию в любой произвольно взятой точке. Эта точность характеризуется ошибкой, с которой мы можем проинтерполировать аномалию по карте в данную точку.

Применение ошибки интерполяции позволило также ввести строгие критерии при решении вопроса о рациональном размещении пунктов, выборе точности определения аномалий и выборе сечения изоаномал при составлении гравиметрических карт.

§ 3. Ковариация

Если средняя квадратическая величина или вариация характеризует поле независимых аномалий, как бы не связанных друг с другом, то ошибка интерполяции или представительства уже указывает на взаимозависимость аномалий в разных точках. Для близких точек ошибка интерполяции будет мала, а

для удаленных велика, что указывает на малое взаимовлияние таких далеких точек. В развитие этой идеи было введено понятие ковариации как средней суммы произведений аномалий $\Delta g_i \Delta g_j$ в разных точках i и j, находящихся на постоянном расстоянии s:

$$\mathrm{Cov}_s\{\Delta g\} = M\{\Delta g_i \Delta g_j\} = \overline{\Delta g_{ij}}. \qquad (22.6)$$

Ковариация характеризует статистическую корреляцию аномалий Δg_i и Δg_j. Если ковариация равна нулю, то аномалии не коррелируют друг с другом, т. е. являются независимыми. В этом случае величина и знак аномалий Δg_i не влияют на величину и знак аномалий Δg_j.

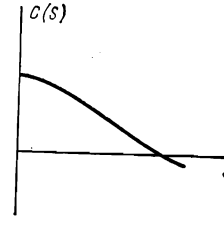


Рис. 134

Очевидно, что чем дальше расположены точки i и j, тем слабее корреляция, т. е. слабее влияние одной из них на другую. Наоборот, при сближении точек корреляция увеличивается и при $s = 0$ ковариация превращается в вариацию, т. е. просто в среднеквадратическую величину. Таким образом, ковариация является функцией расстояния:

$$\mathrm{Cov}_s\{\Delta g\} = c(s), \quad \overline{\Delta g} = c(0). \qquad (22.7)$$

На рис. 134 представлен характер изменения ковариационной функции с расстоянием между пунктами.

Эта функция при больших s имеет малые положительные или отрицательные значения и увеличивается при сближении избранных точек. Строго говоря, ковариационная функция для всей Земли, так же как и ошибка интерполяции или представительства, может быть вычислена только при наличии сплошной гравиметрической съемки. Однако тогда теряется смысл их вычисления. Практически ковариация вычисляется для изученных областей и применяется для всей Земли. Возможно провести некоторое районирование, например, по принципу морфологически или тектонически сходных областей, и получить разные ковариации для разных областей. Оценочные значения ковариации в *мгл*^{2} для всей Земли были получены Каулой. Они приведены в таблице 32.

Таблица 32

ψ	$C(\psi)$	ψ	$C(\psi)$	ψ	$C(\psi)$
0°	1201	8°	124	27°	18
0,5	751	9	104	29	6
1	468	10	82	31	8
1,5	356	11	76	33	5
2	332	13	54	35	— 8
2,5	306	15	47	40	—12
3,0	296	17	45	50	—20
4	272	19	34	60	—30
5	246	21	35	90	— 4
6	214	23	10	120	12
7	174	25	20	150	—21

Для практического применения, например, для оценки влияния отброшенных областей, ковариационную функцию целесообразно разложить в ряд по сферическим функциям.

Как уже говорилось, аномалия Δg может быть представлена в виде ряда сферических функций:

$$\Delta g(\theta, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \Delta g_n(\theta, \lambda) = \\ = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (a_{nm} \cos m\lambda + b_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos\theta), \qquad (22.8)$$

где θ — полярное расстояние, λ — долгота.

Чтобы получить ковариационную функцию, надо найти среднее произведение Δg, взятых в каждой паре равноудаленных точек.

Найдем среднее произведение двух лапласовых гармоник:

$$\overline{\Delta g_n \Delta g_{n'}} = M\{\Delta g_n \Delta g_{n'}\} = \\ = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta g_i(\theta, \lambda) \Delta g_j(\theta, \lambda) \sin\theta \, d\theta \, d\lambda. \qquad (22.9)$$

Положив $n' = n$, вычислим средний квадрат лапласовых гармоник:

$$\overline{\Delta g_n^2} = M\{\Delta g_n^2\} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} [\Delta g_n(\theta, \lambda)]^2 \sin\theta \, d\theta \, d\lambda.$$

Имея в виду, что

$$\Delta g_n = \sum_{m=0}^{n} (a_{nm} \cos m\lambda + b_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos\theta) \qquad (22.10)$$

и что функции $P_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda$ и $P_{nm}(\cos\theta)\sin m\lambda$ ортогональны, получим

$$\overline{\Delta g^2} = M\{\Delta g^2\} = \sum_{m=0}^{n} (a_{nm}^2 + b_{nm}^2). \qquad (22.11)$$

Для случая $n' \neq n$ вследствие ортогональности

$$\overline{\Delta g_n \Delta g_{n'}} = M\{\Delta g_n \Delta g_{n'}\} = 0. \qquad (22.12)$$

Это означает, что между лапласовыми гармониками разных порядков нет корреляции.

Аналогично разложим по сферическим гармоникам ковариационную функцию:

$$C(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (c_{nm} \cos m\alpha + d_{nm} \sin m\alpha) P_{nm}(\cos\psi), \quad (22.13)$$

где ψ — полярное расстояние, α — азимут, а полюс выбран произвольно.

Поскольку ковариационная функция C зависит только от расстояния и не зависит от азимута α, правая часть равенства (22.13) тоже не зависит от азимута, т. е. сумма содержит только зональные гармоники:

$$C(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} c_{n0} P_n(\cos\psi). \quad (22.14)$$

Коэффициенты этого разложения c_{n0} имеют вид

$$c_n = c_{n0} = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} C(\psi) P_n(\cos\psi) \sin\psi \, d\psi \, d\alpha$$

или, после интегрирования по азимуту,

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} C(\psi) P_n(\cos\psi) \sin\psi \, d\psi. \quad (22.15)$$

Нормирующим множителем коэффициентов будет $1/\sqrt{2n+1}$, так что

$$\bar{c}_n = \frac{c_n}{\sqrt{2n+1}}. \quad (22.16)$$

Выразим теперь коэффициенты c_n через a_{nm} и b_{nm}, т. е. через коэффициенты разложения аномалий Δg.

Функция ковариаций $C(\psi)$ выражается через осреднение всех произведений $\Delta g_i \Delta g_j$. Это осреднение можно сделать следующим образом: сначала осуществить осреднение по кругу радиуса ψ при постоянном полюсе; это дает значение

$$C' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta g(\theta, \lambda) \Delta g(\theta', \lambda') \, d\alpha;$$

далее произвести осреднение частной ковариационной функции C' по единичной сфере:

$$C(\psi) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} C'(\psi) \sin\theta \, d\theta \, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta g(\theta, \lambda) \Delta g(\theta', \lambda') \sin\theta \, d\theta \, d\lambda \, d\alpha. \quad (22.17)$$

Координаты θ, λ и θ', λ' связаны здесь соотношением

$$\cos\psi = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\lambda - \lambda'). \qquad (22.18)$$

Теперь коэффициенты c_n определятся по формуле (22.15) с учетом (22.17):

$$c_n = \frac{2n+1}{16\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \Delta g(\theta, \lambda)\,\Delta g(\theta', \lambda') \times$$

$$\times P_n(\cos\psi)\sin\psi\sin\theta\, d\psi\, d\alpha\, d\theta\, d\lambda. \qquad (22.19)$$

Выполняя интегрирование по α и ψ и имея в виду правомочность замены переменных

$$\frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \Delta g(\theta', \lambda')\, P_n(\cos\psi)\sin\psi\, d\psi\, d\alpha =$$

$$= \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \Delta g(\theta', \lambda')\, P_n(\cos\psi)\sin\theta\, d\theta'\, d\lambda' = \Delta g_n(\theta, \lambda), \qquad (22.20)$$

получим для коэффициентов ковариации c_n значение

$$c_n = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \Delta g(\theta, \lambda)\,\Delta g_n(\theta, \lambda)\sin\theta\, d\theta\, d\lambda. \qquad (22.21)$$

Но это, очевидно, есть среднее из всех произведений Δg и Δg_n:

$$c_n = \overline{\Delta g \cdot \Delta g_n} = M\{\Delta g \cdot \Delta g_n\}.$$

Вводя сюда выражение для Δg согласно (22.8)

$$\Delta g(\theta, \lambda) = \sum_{n'=2}^{\infty} \Delta g_{n'}(\theta, \lambda),$$

получим

$$c_n = \sum_{n'=2}^{\infty} \overline{\Delta g_n \Delta g_{n'}} = M\{\Delta g_n, \Delta g_{n'}\}. \qquad (22.22)$$

Однако в силу ортогональности только члены с $n' = n$ отличны от 0, поэтому

$$c_n = \sum_{m=0}^{\infty} (\bar{a}_{nm}^2 + \bar{b}_{nm}^2). \qquad (22.23)$$

Здесь $\bar{a}_{nm}$ и $\bar{b}_{nm}$ — нормированные коэффициенты.

§ 4. Оценка влияния неучета дальних зон при вычислении высот геоида

Интеграл Стокса для высот геоида разобьем на две части, представляющие влияние центральной зоны от 0 до полярного расстояния ψ_0 и дальней области вне радиуса ψ_0

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma}\int_0^{\psi_0}\int_0^{2\pi} \Delta g\, S(\cos\psi)\sin\psi\, d\psi\, d\alpha + \\ + \frac{R}{4\pi\gamma}\int_{\psi_0}^{\pi}\int_0^{2\pi} \Delta g\, S(\cos\psi)\sin\psi\, d\psi\, d\alpha. \quad (22.24)$$

Второй член запишем так, чтобы он распространялся на полную сферу. Для этого заменим функцию Стокса $S(\psi)$ функцией $\bar{S}(\cos\psi)$, удовлетворяющей условию

$$\bar{S}(\cos\psi) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant \psi < \psi_0, \\ S(\cos\psi) & \psi_0 \leqslant \psi \leqslant \pi. \end{cases} \quad (22.25)$$

В этом случае интеграл распространен на всю сферу

$$\delta\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \Delta g\, \bar{S}(\cos\psi)\sin\psi\, d\psi\, d\alpha \quad (22.26)$$

и подынтегральная функция $\bar{S}(\cos\psi)$ может быть разложена по полиномам Лежандра

$$\bar{S}(\cos\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} Q_n P_n(\cos\psi). \quad (22.27)$$

Вводя (22.27) в (22.26), получим

$$\delta\zeta = \frac{R}{8\pi\gamma}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,Q_n \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \Delta g P_n(\cos\psi)\sin\psi\, d\psi\, d\alpha, \quad (22.28)$$

где

$$Q_n = \int_0^{\pi} \bar{S}(\cos\psi)\, P_n(\cos\psi)\sin\psi\, d\psi, \quad (22.29)$$

но

$$\frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \Delta g_n(\theta', \lambda')\, P_n(\cos\psi)\sin\theta'\, d\theta'\, d\lambda' = \Delta g_n(\theta, \lambda),$$

поэтому

$$\delta\zeta(\theta,\lambda)=\frac{R}{2\gamma}\sum_{n=2}^{\infty}Q_n\Delta g_n(\theta,\lambda). \tag{22.30}$$

Уравнение (22.30) определяет ошибку высоты геоида, возникающую из-за пренебрежения влиянием аномалий вне области радиусом ψ_0. Вычислим среднеквадратическую ошибку

$$\overline{\delta\zeta^2}=\frac{R^2}{4\gamma^2}\overline{\sum_{n=2}^{\infty}(Q_n\Delta g_n)^2}=\frac{R^2}{4\gamma^2}\overline{\sum_{n=2}^{\infty}Q_n\Delta g_nQ_{n'}\Delta g_{n'}}=$$

$$=\frac{R^2}{4\gamma^2}\overline{\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{n'=2}^{\infty}Q_nQ_{n'}\Delta g_n\Delta g_{n'}}=\frac{R^2}{4\gamma^2}M\left\{\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{n'=2}^{\infty}Q_nQ_{n'}\Delta g_n\Delta g_{n'}\right\}=$$

$$=\frac{R^2}{4\gamma^2}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{n'=2}^{\infty}Q_nQ_{n'}\overline{\Delta g_n\Delta g_{n'}}=\frac{R^2}{4\gamma^2}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{n'=2}^{\infty}Q_nQ_{n'}M\{\Delta g_n\Delta g_{n'}\}.$$

Но $\overline{\Delta g_n\Delta g_{n'}}=0$ при $n\neq n'$, так что окончательно

$$\overline{\delta\zeta^2}=\frac{R^2}{4\gamma^2}\sum_{n=2}^{\infty}Q_n^2\overline{\Delta g_n^2}=\frac{R^2}{4\gamma^2}\sum_{n=2}^{\infty}Q_n^2c_n. \tag{22.31}$$

Таким образом, оценка влияния неучтенных дальних зон при вычислении высот геоида может быть получена по коэффициентам ковариации c_n и известной функции Q_n.

Ошибку предсказания получим из сравнения предсказанной аномалии с истинной. Пусть истинная аномалия в точке P будет Δg_P. Ее предсказанная величина $\widetilde{\Delta g}_P$ определится уравнением (22.2).

Тогда ошибка предсказания есть разность

$$\varepsilon_P=\Delta g_P-\widetilde{\Delta g}_P=\Delta g_P-\sum_{i=1}^{n}\alpha_{P_i}\Delta g_i. \tag{22.32}$$

Квадрат ошибки будет

$$\varepsilon_P^2=\Delta g_P^2-2\sum_{i=1}^{n}\alpha_{P_i}\Delta g_i\Delta g_P+\sum_i\sum_k\Delta g_i\Delta g_k\alpha_{P_i}\alpha_{P_k}. \tag{22.33}$$

Образуем теперь средний квадрат ошибки для всей изучаемой области

$$M\{\varepsilon_P^2\}=M\{\Delta g_P^2\}-2\sum\alpha_{P_i}M\{\Delta g_i\Delta g_P\}+$$

$$+\sum_i\sum_k\alpha_{P_i}\alpha_{P_k}M\{\Delta g_i\Delta g_k\}. \tag{22.34}$$

Но $M\{\varepsilon_P^2\}=m_P^2$ — среднеквадратическая ошибка предсказанной аномалии в точке P, а справа под знаком суммы стоят ве-

личины ковариации, поэтому формула (22.34) может быть записана следующим образом:

$$m_P^2 = C_0 - 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_{P_i} C_{P_i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_{P_i}\alpha_{P_k} C_{ik}. \qquad (22.35)$$

Для случая ошибки представительства все α, кроме одного, равны нулю, и ошибка предсказания методом введения пунктов представительства будет

$$m_P^2 = C_0 - 2C_{P_1} + C_0 = 2C_0 - 2C_{P_1}. \qquad (22.36)$$

Таким образом, знание ковариации позволяет оценить предсказанные аномалии.

Пользуясь понятием ковариации и формулой (22.36), выражающей среднеквадратическую ошибку через ковариации, можно получить еще один метод предсказания, который можно назвать среднеквадратическим предсказанием. Среднеквадратическое значение предсказанной аномалии определим как такое значение, которое имеет наименьшую среднеквадратическую ошибку m_P^2. Получим это значение путем минимизации ошибки как функции α. Условие это найдем, дифференцируя (22.35) и приравнивая нулю производную:

$$\frac{\partial m_P^2}{\partial \alpha_{P_i}} = -2C_{P_i} - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_{P_k} C_{ik} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} C_{ik}\alpha_{P_k} = C_{P_i}. \qquad (22.37)$$

Отсюда находим коэффициенты α:

$$\alpha_{P_i} = \sum_{i=1}^{n} C_{ik}^{-1} C_{P_i}$$

и, вводя коэффициенты α_{P_i} в (22.2), получим

$$\Delta g_P = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{P_k}\Delta g_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} C_{ik}^{-1} C_{P_i}\Delta g_k. \qquad (22.38)$$

Это можно записать в матричной форме:

$$\widetilde{\Delta g}_P = (C_{P_1} C_{P_2} \ldots C_{P_n}) \begin{Vmatrix} C_{11} & C_{12} \ldots C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} \ldots C_{2n} \\ \cdot & \cdot \ldots \cdot \\ \cdot & \cdot \ldots \cdot \\ \cdot & \cdot \ldots \cdot \\ C_{n1} & C_{n2} \ldots C_{nn} \end{Vmatrix}^{-1} \begin{Vmatrix} \Delta g_1 \\ \Delta g_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta g_n \end{Vmatrix}. \qquad (23.39)$$

Этот последний метод предсказания наиболее точен, хотя, конечно, и более сложен.

§ 5. Оценка сферических гармоник с помощью ковариационной функции

Часто возникает задача оценить гравитационные аномалии, представленные в виде разложения по сферическим функциям, и оценить отдельные гармоники такого разложения.

Аномалия может быть записана в виде

$$\Delta g(\theta, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left[\bar{a}_{nm} \bar{R}_{nm}(\theta,\lambda) + \bar{b}_{nm} \bar{S}_{nm}(\theta, \lambda)\right],$$

где

$$\bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) = \cos m\lambda P_{nm}(\cos\theta),$$

$$\bar{S}_{nm}(\theta, \lambda) = \sin m\lambda P_{nm}(\cos\theta),$$

$$\left.\begin{matrix}\bar{a}_{nm} \\ \bar{b}_{nm}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta g(\theta, \lambda) \left\{\begin{matrix}\bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) \\ \bar{S}_{nm}(\theta, \lambda)\end{matrix}\right\} \sin\theta \, d\theta \, d\lambda. \qquad (22.40)$$

Обозначим среднеквадратическую ошибку индивидуальной аномалии в точке $P(\theta, \lambda)$ через $\varepsilon(\theta, \lambda)$. Ошибка ковариации этой функции будет

$$\sigma(\theta, \lambda, \theta', \lambda') = M\{\varepsilon(\theta, \lambda)\varepsilon(\theta', \lambda')\} = \overline{\varepsilon(\theta, \lambda)\varepsilon(\theta', \lambda')}, \qquad (22.41)$$

т. е. это среднее произведение отдельных ошибок в двух точках (θ, λ) и (θ', λ'). Влияние этой ошибки на коэффициент $\bar{a}_{nm}$ согласно (22.40) будет

$$\eta = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon(\theta, \lambda) \bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) \sin\theta \, d\theta \, d\lambda. \qquad (22.42)$$

Ошибка ковариации σ рассматривается здесь как функция сферических координат θ и λ.

Полученная таким образом η есть индивидуальная ошибка a_{nm}. Среднеквадратическая ошибка $\bar{a}_{nm}$, т. е. вариация $\bar{a}_{nm}$, будет

$$m^2 = M\{\eta^2\} = \bar{\eta}^2. \qquad (22.43)$$

Величину η^2 образуем, пользуясь интегралом (22.42):

$$\eta^2 = \frac{1}{16\pi^2} \left[\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} [\varepsilon(\theta, \lambda) \bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) \sin\theta \, d\theta \, d\lambda]\right]^2.$$

Так как интеграл не зависит от переменных интегрирования, то можем написать

$$\eta^2 = \frac{1}{16\pi^2}\left[\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \varepsilon(\theta, \lambda)\, \bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) \sin\theta\, d\theta\, d\lambda \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \varepsilon(\theta', \lambda') \times \right.$$

$$\left. \times\, \bar{R}_{nm}(\theta', \lambda') \sin\theta'\, d\theta'\, d\lambda' \right]$$

или

$$\eta^2 = \frac{1}{16\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \varepsilon(\theta, \lambda)\, \varepsilon(\theta,' \lambda')\, \bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) \times$$

$$\times \bar{R}_{nm}(\theta', \lambda') \sin\theta \sin\theta'\, d\theta\, d\theta'\, d\lambda\, d\lambda'. \qquad (22.44)$$

Среднеквадратическую ошибку коэффициента $\bar{a}_{nm}$ найдем теперь, осредняя это уравнение согласно (22.43):

$$m^2 = \frac{1}{16\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} M\{\varepsilon(\theta, \lambda)\, \varepsilon(\theta', \lambda')\} \times$$

$$\times\, \bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) \bar{R}_{nm}(\theta', \lambda') \sin\theta \sin\theta'\, d\theta\, d\lambda\, d\theta'\, d\lambda'.$$

Но стоящее под знаком интеграла осреднение ошибок согласно (22.41) есть ковариация σ, так что

$$m^2 = \frac{1}{16\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sigma(\theta, \lambda, \theta', \lambda') \times$$

$$\times\, \bar{R}_{nm}(\theta, \lambda)\, \bar{R}_{nm}(\theta', \lambda') \sin\theta \sin\theta'\, d\theta\, d\lambda\, d\theta'\, d\lambda'. \qquad (22.45)$$

Аналогично получается ошибка для нормированного коэффициента $\bar{b}_{nm}$; в этом случае в интеграле (22.45) надо $\bar{R}_{nm}$ заменить через $\bar{S}_{nm}$.

Формула (22.45) сильно упрощается, если предположить, что все определения имеют одинаковую точность и что коррелируют только соседние пункты. В этом случае ошибка корреляции для удаленных пунктов равна нулю. Подынтегральное выражение отлично от нуля только при $\theta' = \theta$, $\lambda' = \lambda$; тогда

$$m^2 = \frac{1}{16\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sigma(\theta, \lambda, \theta', \lambda')\, [R_{nm}(\theta, \lambda)]^2 \sin\theta \sin\theta'\, d\theta\, d\lambda\, d\theta'\, d\lambda'.$$

Выполнив интегрирование по θ' и λ', положим

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sigma(\theta, \lambda, \theta', \lambda') \sin\theta'\, d\theta'\, d\lambda' = \frac{s}{R^2}, \qquad (22.46)$$

где R — радиус Земли, s — постоянная ошибка. Вводя это в (22.45), получим формулу для m^2:

$$m^2 = \frac{s}{16\pi^2 R^2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \overline{R}_{nm}^2(\theta, \lambda) \sin\theta \, d\theta \, d\lambda.$$

Но

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \overline{R}_{nm}^2(\theta, \lambda) \sin\theta \, d\theta \, d\lambda = 1,$$

поэтому для рассматриваемого случая получается простой результат:

$$m^2 = \frac{s}{4\pi R^2}.$$

Аналогично получается ошибка и для $\overline{b}_{nm}$.

§ 6. Оценка точности определения высот геоида

Предположим, что имеется сплошная гравиметрическая сеть для всей Земли. В этом случае высота геоида определится по формуле Стокса

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta g(\psi, \alpha) S(\psi) \sin\psi \, d\psi \, d\alpha.$$

Ошибка определения высоты геоида в зависимости от ошибок аномалий будет функцией ψ и α и может быть представлена интегралом

$$\delta\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon(\psi, \alpha) S(\psi) \sin\psi \, d\psi \, d\alpha. \tag{22.47}$$

Квадрат ошибки $\delta\zeta^2$ можно представить аналогично (22.44):

$$\delta\zeta^2 =$$

$$= \frac{R^2}{(4\pi\gamma)^2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon(\psi, \alpha) S(\psi) \sin\psi \, d\psi \, d\alpha \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon(\psi', \alpha') S(\psi') \sin\psi' \, d\psi' \, d\alpha' =$$

$$= \frac{R^2}{(4\pi\gamma)^2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon(\psi, \alpha) \varepsilon(\psi', \alpha') S(\psi) S(\psi') \sin\psi \sin\psi' \, d\psi \, d\alpha \, d\psi' \, d\alpha'. \tag{22.48}$$

Образовав средние от обеих частей этого уравнения, найдем $m^2 =$

$$= \left(\frac{R}{4\pi\gamma}\right)^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sigma(\psi, \alpha, \psi', \alpha')\, S(\psi)\, S(\psi') \sin\psi \sin\psi'\, d\psi\, d\alpha\, d\psi'\, d\alpha'. \tag{22.49}$$

Здесь m — среднеквадратическая ошибка определения высот геоида ζ, а $\sigma(\psi, \alpha, \psi', \alpha')$ — корреляционная ошибка гравитационных аномалий.

Если гравиметрическая съемка однородна, т. е. все аномалии определены с одинаковой ошибкой σ, и если корреляция имеет место только между соседними пунктами, то аналогично (22.49) получим

$$m^2 = \frac{\sigma}{16\pi^2\gamma^2} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} [S(\psi)]^2 \sin\psi\, d\psi\, d\alpha \tag{22.50}$$

или, интегрируя по α,

$$m^2 = \frac{\sigma}{8\pi\gamma^2} \int_0^{\pi} [S(\psi)]^2 \sin\psi\, d\psi. \tag{22.51}$$

При пользовании этой простой формулой следует иметь в виду, что функция $S(\psi)$ неограниченно возрастает при $\psi = 0$. Поэтому интеграл надо разбить на две части: в пределах от 0 до некоторого малого угла ψ_0 и от ψ_0 до π:

$$m^2 = \frac{\sigma}{8\pi\gamma^2} \int_0^{\psi_0} S^2(\psi) \sin\psi\, d\psi + \frac{\sigma}{8\pi\gamma} \int_{\psi_0}^{\pi} S^2(\psi) \sin\psi\, d\psi.$$

Первый интеграл из слагаемых правой части надо оценить каким-либо иным путем, например, численным интегрированием.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Рябов Ю. А., Справочное руководство по небесной механике и астродинамике, изд 2-е, «Наука», 1976.
2. Арнольд К., Методы спутниковой геодезии, «Недра», 1973.
3. Грушинский Н. П., Теория фигуры Земли, Физматгиз, 1963.
4. Дубошин Г. Н., Теория притяжения, «Наука», 1961.
5. Закатов П. Е., Курс высшей геодезии, изд. 3-е, «Недра», 1976.
6. Изотов А. А., Зубринский В. Н., Макаренко Н. Л., Микиша А. М., Основы спутниковой геодезии, «Недра», 1974.
7. Каула В., Спутниковая геодезия, «Мир», 1970.
8. Красовский Ф. Н., Руководство по высшей геодезии, ч. II, Геодезиздат, 1942.
9. Михайлов А. А., Курс гравиметрии и теории фигуры Земли, Геодезиздат, 1939.
10. Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И., Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли, Труды ЦНИИГАиК, вып. 131, Геодезиздат, 1960.
11. Шимбирев Б. П., Теория фигуры Земли, «Недра», 1975.
12. Стандартная Земля. Геодезические параметры Земли на 1966 г., под ред. К. Лундквиста и Г. Вейса, «Мир», 1969.
13. Levallois J., Géodésie Générale, tome 1, 2, 3 at Kovalevsky, tome 4, Ediations Eyrolles, Paris, 1969 — 71.
14. Heiskanen W. A., Moritz H., Physical Geodesy, Freeman W. H. and Co., San Francisco, London, 1966.
15. 1973 Smittsonian Standard Earth III, ed. by Gaposhkin E. M., SAO, Cambridge, 1973.

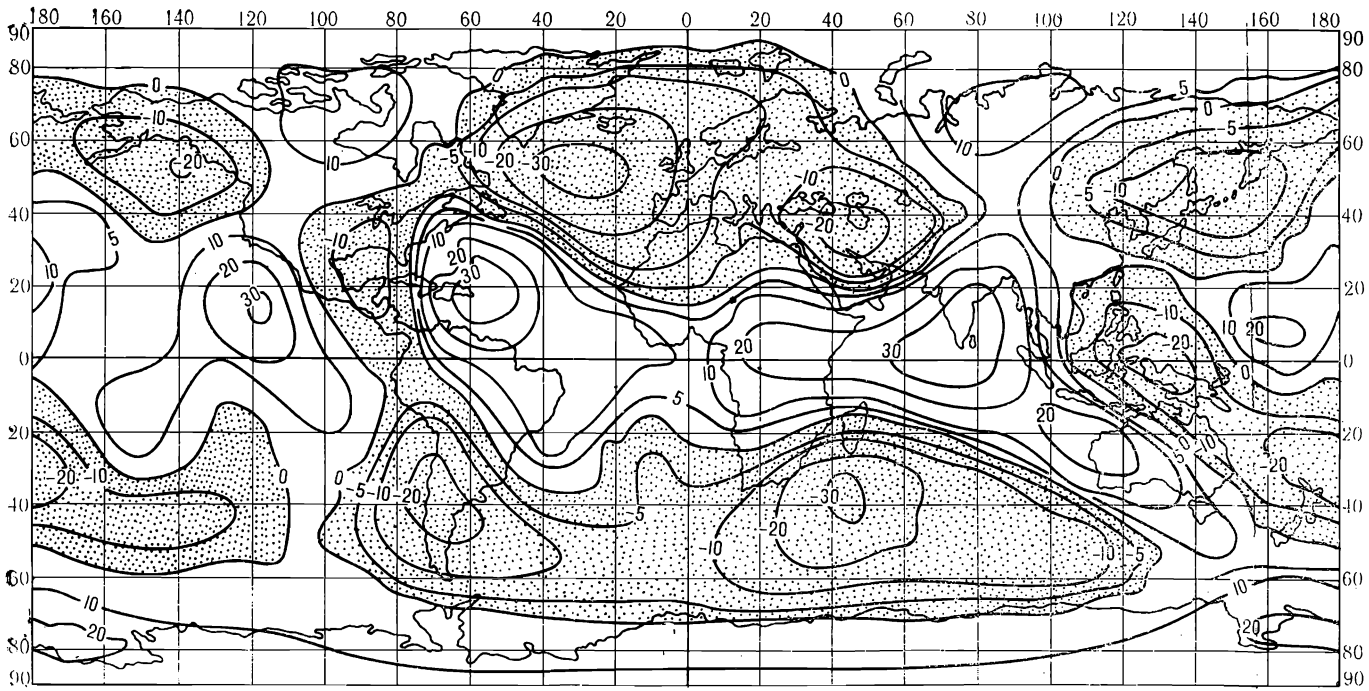

180 160 140 120 100 80 60 40 20 0 20 40 60 80 100 120 140 160 180
90 80 60 40 20 0 20 40 60 80 90

Рис. 71.

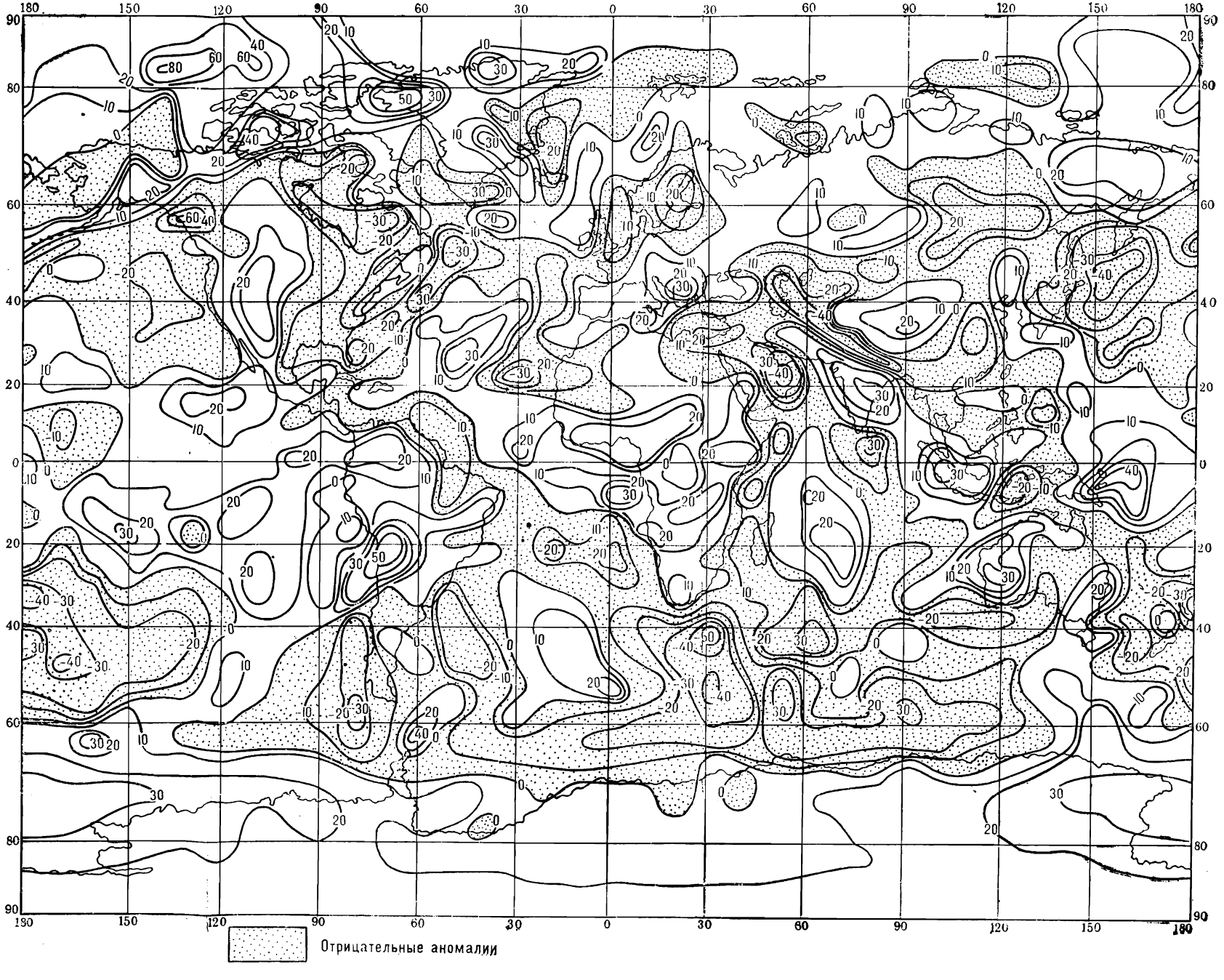


Рис. 72.

ФОРМА № 1

Название звена _____ *B* _____

Название пункта _____ *L* _____

K / i	1	7	9	15	ΣΣ ξ	ΣΣ η	2	6	10	14	ΣΣ ξ	ΣΣ η	3	5	11	13	ΣΣ ξ	ΣΣ η	16	8	4	12	ΣΣ ξ	ΣΣ η	Σ		
ξ	−	+	+	−			−	+	+	−			−	+	+	−			−	+	−	+			H_0		
η	−	−	+	+			−	−	+	+	0,0186	0,0186	−	−	+	+							0,0263	0,0263	+65		
0							+64	+64	+66	+66	0	−4							+64	+65	+64	+65	+1	+1	+518		
I	+64	+64	+65	+64			+64	+64	+66	+66			+66	+64	+66	+65			+63	+64	+64	+66			+1035		
II	+62	+64	+65	+64			+62	+64	+66	+65			+65	+65	+66	+65			+62	+64	+64	+66			+1029		
III	+62	+64	+64	+63			+62	+64	+65	+64			+64	+65	+66	+64			+62	+63	+64	+66			+1022		
IV	+59	+62	+62	+62			+60	+65	+65	+64			+62	+66	+65	+64			+60	+62	+64	+64			+1006		
V	+55	+60	+60	+58			+56	+67	+66	+62			+59	+69	+65	+62			+56	+58	+63	+62			+978		
VI	+50	+58	+54	+55			+52	+69	+66	+58			+55	+72	+58	+58			+51	+54	+61	+56			+922		
VII	+20	+46	+45	+43			+26	+52	+54	+54			+36	+58	+47	+52			+30	+42	+46	+48			+699		
VIII	+22	+20	+28	+10	0,0046	0,0019	−4	+26	+42	+50	0,0035	0,0035	+3	+37	+80	+37	0,0019	0,0046	−26	+22	+25	+35	0,0050	0,0050	+303		
Σ	+350	+438	+443	+419	+112	+74	+378	+471	+485	+473	+105	+109	+410	+496	+463	+467	+82	+24	+358	+429	+451	−463	+71	+12	+6994	+83	+83
		+186			+186			+214 / +4			+214 / +4			+106			+106						ξ″	η″	N_{mt}		
																							+1,42	+0,79	+4,82		

Палетку снимал _____ *дата* _____

Вычислял _____ *дата* _____

ФОРМА № 2

Название звена _____ *B* _____

Название пункта _____ *L* _____

K / i	1	11	13	23	ΣΣ ξ	ΣΣ η	2	10	14	22	ΣΣ ξ	ΣΣ η	3	9	15	21	ΣΣ ξ	ΣΣ η	4	8	16	20	ΣΣ ξ	ΣΣ η	5	7	17	19	ΣΣ ξ	ΣΣ η	24	12	6	1	ΣΣ ξ	ΣΣ η	Σ		
ξ	−	+	+	−			−	+	+	−			−	+	+	−			−	+	+	−			−	+	+											
η	−	−	+	+			−	−	+	+			−	−	+	+			−	−	+	+			−	−	+	+			−	+	−	+					
IX	+10	+2	+37	−4			+10	+2	+35	−10			+1	+10	+32	+15			+1	−47	+28	+24			−9	−25	+27	+33			−14	+37	−12	+36			+207	0,00118	
X	+10	+44	+44	−8			+10	+14	+35	−12			+6	−67	+34	−7			+3	−88	+30	+21			−4	−83	+29	+28			−6	+46	−12	+33			+100	148	
XI	+11	+47	+44	−7			+10	+47	+36	−25			+6	−83	+34	−11			+4	−89	+25	+10			+9	−102	+38	+18			0	+47	+1	+28			+98	186	
XII	+3	+37	+52	0			+9	+37	+38	−18			+9	−65	+21	−7			+19	−75	+20	+6			+26	−137	+35	+16			+10	+54	−12	+22			+100	232	
XIII	+20	+90	+17	+10	0,0019	0,0005	+15	+90	+10	+1	0,0017	0,0010	+18	+20	+4	+6	0,0014	0,0014	+20	+12	+2	+9	0,0010	0,0017	+38	+84	−7	+17	0,0005	0,0019	+6	+79	−50	+2	0,0020	0,0020	+445	288	
Σ	+54	+220	+194	+19	+379	+99	−54	+190	+154	−64	+354	−154	+38	−85	+125	−4	+6	+168	+47	−287	405	+70	−299	+415	+60	−431	+122	+112	−481	−605	−4	+263	−85	+121	+267	+207	+950		
																																			ξ″	η″	N^M		
																																			+1,32	+2,30	+2,09		

Палетку снимал _____ *дата* _____

Вычислял _____ *дата* _____

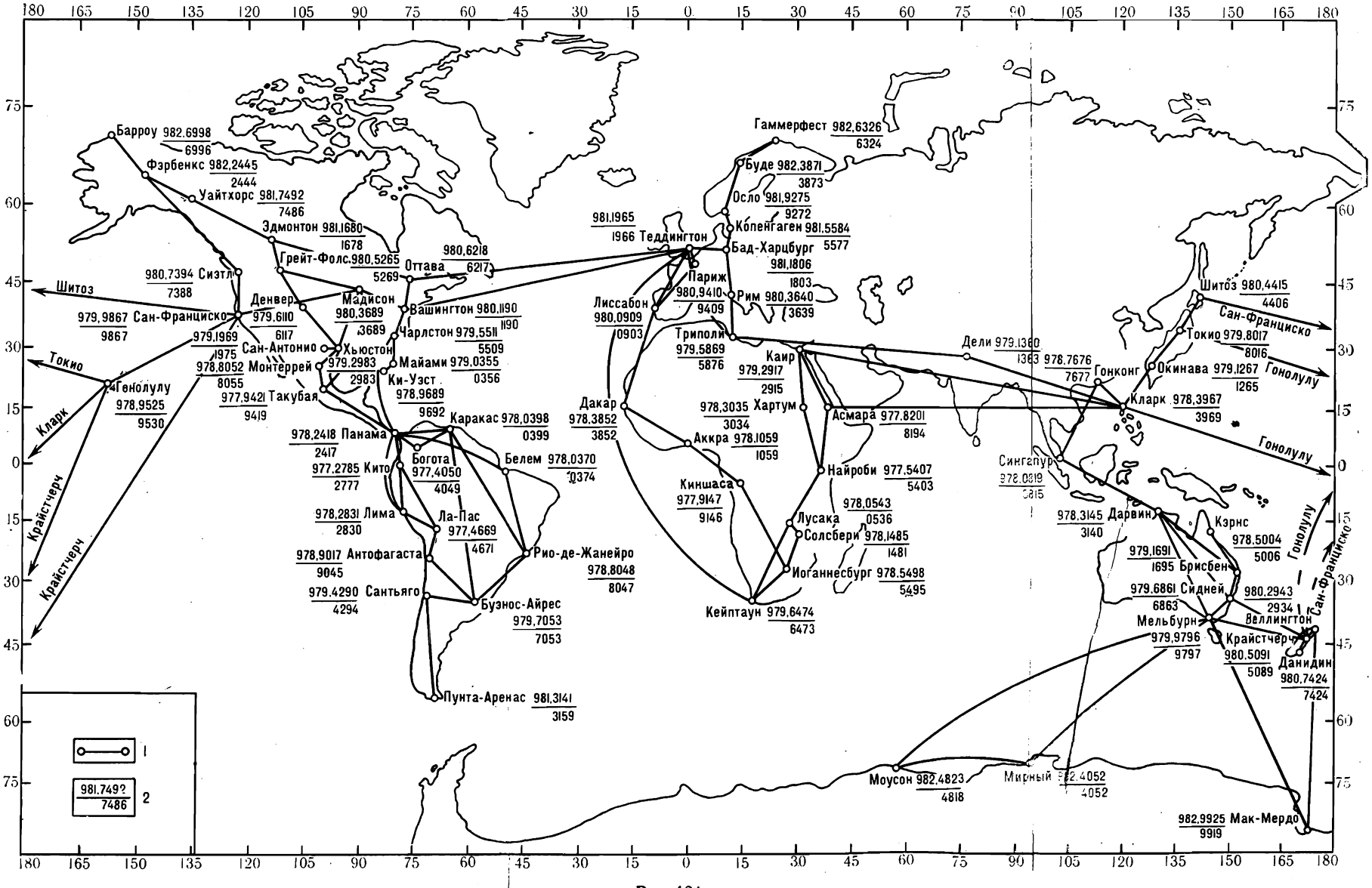

Барроу 982.6998 6996
Фэрбенкс 982,2445 2444
Уайтхорс 981.7492 7486
Эдмонтон 981.1680 1678
Грейт-Фолс 980,5265
980,6218 6217
Оттава 5269
980.7394 Сиэтл 7388
Шитоз
979,9867 Сан-Франциско 9867
Денвер 979.6110 6117
Мадисон 980,3689 3689
Вашингтон 980.1190 1190
979,1969 1975
Сан-Антонио
Чарлстон 979,5511 5509
Токио
Монтеррей 978,8052 8055
979.2983 2983
Майами 979,0355 0356
Хьюстон
Ки-Уэст 978,9689 9692
Гонолулу 978,9525 9530
977,9421 9419
Такубая
Кларк
Каракас 978,0398 0399
978,2418 Панама 2417
Крайстчерч
Богота 977,4050 4049
977,2785 Кито 2777
Белем 978,0370 0374
978,2831 Лима 2830
Ла-Пас 977,4669 4671
978,9017 Антофагаста 9045
Рио-де-Жанейро 978,8048 8047
979,4290 Сантьяго 4294
Бузнос-Айрес 979,7053 7053
Пунта-Аренас 981,3141 3159
1
981.749? 7486 2
Гаммерфест 982,6326 6324
Буде 982.3871 3873
Осло 981,9275 9272
981.1965 1966 Теддингтон
Копенгаген 981.5584 5577
Бад-Харцбург 981,1806 1803
Париж
980,9410 9409
Рим 980,3640 3639
Лиссабон 980,0909 0903
Триполи 979,5869 5876
Каир 979,2917 2915
Дели 979.1360 1363
978,7676 7677
Гонконг
Окинава 979.1267 1265
Токио 979.8017 8016
Шитоз 980,4415 4406
Сан-Франциско
Гонолулу
Кларк 978,3967 3969
Дакар 978,3852 3852
978,3035 Хартум 3034
Асмара 977.8201 8194
Аккра 978.1059 1059
Найроби 977,5407 5403
Сингапур 978,0819 0815
Гонолулу
Киншаса 977,9147 9146
978,0543
Лусака 0536
Солсбери 978,1485 1481
978,3145 Дарвин 3140
Кэрнс 978.5004 5006
Иоганнесбург 978,5498 5495
979,1691 1695 Брисбен
979,6861 Сидней 6863
980,2943 2934
Кейптаун 979,6474 6473
Мельбурн 979,9796 9797
Веллингтон
Крайстчерч 980.5091 5089
Данидин 980,7424 7424
Моусон 982,4823 4818
Мирный 982,4052 4052
982,9925 Мак-Мердо 9919

Рис. 124.