

Я. П. ПОНАРИН

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ  
ГЕОМЕТРИЯ

Том 2

СТЕРЕОМЕТРИЯ,  
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА

Москва  
Издательство МЦНМО, 2006

УДК 514.112  
ББК 22.151.0  
П56

**Понарин Я. П.**

П56      Элементарная геометрия: В 2 т. — Т. 2: Стереометрия, преобразования пространства. — М.: МЦНМО, 2006.— 256 с.: ил.

ISBN 5-94057-170-0

ISBN 5-94057-223-5 (том 2)

Пособие предназначено для учащихся старших классов школ с математической специализацией. Оно содержит углубленное и расширенное изложение геометрии. В нем изложена теория прямых и плоскостей, трехгранных углов, тетраэдров, сфер и других тел. Рассмотрены методы доказательства геометрических неравенств и нахождения экстремумов. Много внимания уделено преобразованиям пространства — движениям, подобиям и аффинным преобразованиям. Книга включает около 500 задач для самостоятельного решения с указаниями и ответами.

Книга может быть использована для внеклассной работы с учащимися, для самообразования учителей, для спецкурсов и спецсеминаров по элементарной геометрии в педагогических вузах.

ББК 22.151.0

*Яков Петрович Понарин*

Элементарная геометрия. Том 2.  
Стереометрия, преобразования пространства.

Редактор Семенов А. В.

Подписано в печать 14.12.2005 г. Формат 60 × 90 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная № 1.  
Печать офсетная. Печ. л. 16. Тираж 2000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования. 119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. 241–74–83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ОАО «Можайский полиграфический комбинат». 143200, г. Можайск, ул. Мира, д. 93.

---

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга», Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. 241–72–85. E-mail: biblio@mccme.ru

---

**ISBN 5-94057-170-0**  
**ISBN 5-94057-223-5** (том 2)

© Понарин Я. П., 2006.  
© МЦНМО, 2006.

Предисловие . . . . . 11

## Часть I. Стереометрия

### Глава 1. Прямые и плоскости

§ 1. Параллельные прямые и плоскости . . . . . 15  
1.1. Параллельность прямой и плоскости (15). 1.2. Параллельность двух плоскостей (16).

§ 2. Перпендикулярные прямые и плоскости . . . . . 17  
2.1. Перпендикулярность прямой и плоскости (17). 2.2. Перпендикулярность двух плоскостей (18).

§ 3. Скрещивающиеся прямые . . . . . 19  
3.1. Параллельные плоскости, заданные двумя скрещивающимися прямыми (19). 3.2. Описанный параллелепипед (19). 3.3. Общий перпендикуляр скрещивающихся прямых (20). 3.4. Построение и вычисление длины общего перпендикуляра векторным методом (22). 3.5. Пропорциональные отрезки на скрещивающихся прямых (22).

§ 4. Углы между прямыми и плоскостями . . . . . 23  
Угол между скрещивающимися прямыми (23). Угол между прямой и плоскостью (23). 4.3. Двугранный угол. Угол между двумя плоскостями (24). 4.4. О сущности стереометрической задачи на построение (25).

Задачи к главе 1 . . . . . 27

### Глава 2. Трехгранный угол

§ 1. Смежные и вертикальные триэдры. Полярные триэдры . . . . 31  
1.1. Трехгранный угол и его элементы (31). 1.2. Полярные триэдры (32).

§ 2. Неравенства для углов триэдра . . . . . 32  
2.1. Сумма плоских углов триэдра (32). 2.2. Аналог неравенства треугольника (33). 2.3. Сумма двугранных углов триэдра (33). 2.4. Сумма косинусов плоских углов триэдра (34).

§ 3. Теоремы косинусов и теорема синусов для триэдра . . . . . 34

3.1. Две теоремы косинусов (34).	
3.2. Теорема синусов для триэдра (35).	
3.3. Следствия из теоремы синусов (36).	
3.4. Необходимые и достаточные условия существования триэдра (36).	
3.5. Применение теорем косинусов в решении задач (38).	
§ 4. Замечательные прямые и плоскости триэдра . . . . .	39
4.1. Медианные плоскости триэдра (39).	
4.2. Ось вписанного кругового конуса (39).	
4.3. Ось описанного конуса (40).	
4.4. Высотные плоскости и ортоось триэдра (41).	
§ 5. Плоскости, перпендикулярные осям описанного и вписанного конусов триэдра . . . . .	43
5.1. Плоскость перпендикулярная оси конуса, описанного около триэдра (43).	
5.2. Плоскость, перпендикулярная оси вписанного в триэдр конуса (44).	
§ 6. Начальные сведения о сферической геометрии . . . . .	45
6.1. Основные понятия (45).	
6.2. Связь геометрии трехгранного угла со сферической геометрией (46).	
Задачи к главе 2 . . . . .	47

### **Глава 3. Ортогональное проектирование**

§ 1. Свойства ортогонального проектирования . . . . .	50
1.1. Ортогональное проектирование как частный вид параллельного проектирования (50).	
1.2. Площадь ортогональной проекции плоской фигуры (51).	
1.3. Формула проекций граней тетраэдра (53).	
1.4. Пример задачи (54).	
§ 2. Ортогональная проекция угла . . . . .	54
2.1. Общая формула ортогональной проекции угла (54).	
2.2. Частные случаи (55).	
2.3. Сравнение величины угла и величины его ортогональной проекции (57).	
2.4. Примеры решения задач (58).	
§ 3. Ортогональная проекция вектора на плоскость . . . . .	60
3.1. Вектор ортогональной проекции вектора (60).	
3.2. Решение задач (61).	
Задачи к главе 3 . . . . .	62

### **Глава 4. Геометрические места точек пространства**

§ 1. Основные геометрические места точек пространства . . . . .	65
1.1. Сущность задачи на нахождение ГМТ (65).	
1.2. Простейшие ГМТ пространства (66).	
§ 2. ГМТ пространства, задаваемые двумя скрещивающимися прямыми . . . . .	68
2.1. Серединная плоскость скрещивающихся прямых (68).	
2.2. Гиперболический параболоид (69).	

§3. Три ГМТ пространства, аналогичные ГМТ плоскости . . . . .	70
3.1. Окружность Аполлония и сфера Аполлония (70). ГМТ пространства, разность квадратов расстояний (72). ГМТ пространства, сумма квадратов расстояний (73).	
§4. Метод ГМТ в стереометрических задачах на построение . . . . .	74
Задачи к главе 4 . . . . .	75

### **Глава 5. Векторное и смешанное произведения векторов**

§1. Определения векторного и смешанного произведений, их геометрический смысл . . . . .	78
1.1. Ориентация упорядоченной тройки некопланарных векторов (78). 1.2. Определение векторного произведения, его следствия (79). 1.3. Смешанное произведение трех векторов, геометрический смысл его знака и модуля (80).	
§2. Алгебраические свойства смешанного и векторного произведений	81
2.1. Алгебраические свойства смешанного произведения (81).	
2.2. Алгебраические свойства векторного произведения (82).	
§3. Произведения в декартовых координатах . . . . .	83
3.1. Координатная формула векторного произведения (83).	
3.2. Координатное представление смешанного произведения (83).	
§4. Сложные произведения векторов . . . . .	84
4.1. Двойное векторное произведение (84). 4.2. Скалярное произведение двух векторных произведений (85). 4.3. Векторное произведение двух векторных произведений (85). 4.4. Квадрат смешанного произведения (85).	
§5. Некоторые геометрические приложения произведений векторов	86
5.1. Тригонометрия триэдра (86). 5.2. Теорема Менелая для триэдра (86). 5.3. Теорема Чебы для триэдра (87). 5.4. Выражение косинуса угла между противоположными ребрами тетраэдра через косинусы и синусы его двугранных углов (88).	
Задачи к главе 5 . . . . .	88

### **Глава 6. Тетраэдр**

§1. Медианы и бимедианы тетраэдра. Центроид . . . . .	91
1.1. Бимедианы (средние линии) тетраэдра (91). 1.2. Медианы тетраэдра (92). 1.3. Свойства центроида тетраэдра (93).	
§2. Площади граней тетраэдра . . . . .	94
2.1. Теорема косинусов для тетраэдра (94). Сумма квадратов площадей граней тетраэдра (95). 2.3. Зависимость между косинусами двугранных углов тетраэдра (96).	
§3. Объем тетраэдра и объем клина . . . . .	97

3.1. Первая формула Штаудта (97).	
3.2. Формулы Достора (97).	
3.3. Формула Сервуа (98).	
3.4. Теоремы синусов для тетраэдра (99).	
3.5. Выражение объема тетраэдра через длины его ребер (формула Юнгиуса) (99).	
3.6. Вторая формула Штаудта (100).	
3.7. Объем клина (100).	
§ 4. Бариецентрические координаты точки . . . . .	102
4.1. Определение (102).	
4.2. Аффинный и метрический смысл бариецентрических координат (103).	
4.3. Расстояние между двумя точками, заданными относительно тетраэдра (103).	
§ 5. Сферы, касающиеся плоскостей граней тетраэдра . . . . .	105
5.1. Условия существования и число сфер, касающихся плоскостей граней тетраэдра (105).	
5.2. Зависимость между радиусами вписанной и невписанных сфер и высотами тетраэдра (107).	
§ 6. Ортоцентрический тетраэдр . . . . .	108
6.1. Высоты тетраэдра. Определение и критерий ортоцентрического тетраэдра (108).	
6.2. Вектор ортоцентра (109).	
6.3. Характеристические свойства ортоцентрического тетраэдра (110).	
§ 7. Равногранный тетраэдр . . . . .	112
7.1. Определение и характеристическое свойство равногранного тетраэдра (112).	
7.2. Свойства углов равногранного тетраэдра (112).	
7.3. Критерии равногранного тетраэдра (113).	
7.4. Формулы для равногранного тетраэдра (114).	
Задачи к главе 6 . . . . .	115

## Глава 7. Вычисление объемов тел

§ 1. Формула Ньютона–Симпсона и ее применение . . . . .	119
1.1. Вывод формулы Ньютона–Симпсона (119).	
1.2. Объем пирамиды и усеченной пирамиды (120).	
1.3. Объем клина (121).	
§ 2. Объем шара и его частей . . . . .	123
2.1. Объем шара и шарового сегмента (123).	
2.2. Объем шарового сектора (124).	
2.3. Объем шарового слоя и шарового кольца (125).	
§ 3. Принцип Кавальери . . . . .	126
3.1. Сущность принципа Кавальери (126).	
3.2. Объем шара и шарового сегмента (127).	
3.3. Объем тора (128).	
§ 4. Объем тела вращения . . . . .	129
4.1. Лемма о площади поверхности, образованной вращением отрезка (129).	
4.2. Объем тела вращения треугольника (130).	
4.3. Объем тела вращения центрально-симметричной фигуры (132).	
4.4. Эквивалентная замена вращающейся фигуры (133).	
4.5. Замена оси вращения (134).	
Задачи к главе 7 . . . . .	136

## Глава 8. Сфера

- § 1. Касательные плоскости и прямые. Малые окружности сферы . 139
    - 1.1. Касательные плоскости к сфере (139). 1.2. Малые окружности сферы (140). 1.3. Касательные прямые к сфере (141). 1.4. Пересечение двух сфер (142).
  - § 2. Площадь сферы и ее частей . . . . . 143
    - 2.1. Площадь сферы (143). 2.2. Площадь сферического сегмента (143). 2.3. Площадь сферического пояса (144). 2.4. Площадь сферы, сферического сегмента и сферического пояса как поверхностей вращения (144). 2.5. Площадь сферического двуугольника и сферического треугольника (145).
  - § 3. Радикальная плоскость, радикальная ось и радикальный центр сфер . . . . . 146
    - 3.1. Степень точки относительно сферы (146). 3.2. Радикальная плоскость двух сфер (147). 3.3. Радикальная ось трех сфер и радикальный центр четырех сфер (148). 3.4. Ортогональные сферы (148).
  - § 4. Инверсия пространства относительно сферы . . . . . 149
    - 4.1. Определение инверсии и его следствия (149). 4.2. Образы плоскостей и сфер, прямых и окружностей при инверсии (150). 4.3. Инвариантность величины угла между кривыми при инверсии (151). 4.4. Вывод второй формулы Штаудта для объема тетраэдра (152). 4.5. Стереометрическое обобщение тождества Бретшнайдера (153).
  - § 5. Стереографическая проекция . . . . . 154
    - 5.1. Определение и свойства стереографической проекции (154).
    - 5.2. Координатные формулы стереографической проекции (155).
- Задачи к главе 8 . . . . . 156

## Глава 9. Стереометрические неравенства и экстремумы

- § 1. Классические алгебраические неравенства, используемые для доказательства геометрических неравенств . . . . . 159
  - 1.1. Неравенство Коши (159). 1.2. Сравнение квадрата суммы и суммы квадратов действительных чисел (160). 1.3. Тождество Лагранжа и неравенство Коши–Буняковского (160).
- § 2. Получение неравенств из тождественных равенств . . . . . 161
- § 3. Некоторые избранные неравенства . . . . . 164
  - 3.1. Неравенства для углов триэдра, тетраэдра и косоугольного четырехугольника (164). 3.2. Неравенства для прямоугольного тетраэдра (165). 3.3. Неравенства для произвольного тетраэдра (167).

§ 4. Стереометрические экстремумы . . . . .	168
4.1. Экстремумы как следствия нестрогих неравенств (168).	
4.2. Экстремумы суммы и произведения положительных чисел (169). Сведение задачи к планиметрической (170).	
§ 5. Точка Люиллье тетраэдра . . . . .	172
5.1. Задача Люиллье (172). 5.2. Бариецентрические координаты точки Люиллье (173). 5.3. Точка Люиллье — центроид ее тетраэдра проекций (173).	
§ 6. Экстремальные свойства правильного тетраэдра . . . . .	174
6.1. Тетраэдр минимальной площади поверхности с данным основанием и данной высотой (175). 6.2. Правильный тетраэдр — объект с экстремальными свойствами (176).	
Задачи к главе 9 . . . . .	177

## Часть II. Преобразования пространства

### Глава 10. Движения пространства

§ 1. Перенос, центральная, осевая и зеркальная симметрии пространства . . . . .	183
1.1. Определения движения и равных фигур (183). 1.2. Перенос (183). 1.3. Центральная симметрия (183). 1.4. Осевая симметрия (183). 1.5. Зеркальная симметрия (184). 1.6. Представление переноса композициями зеркальных и осевых симметрий (184).	
§ 2. Общие свойства движений пространства . . . . .	185
2.1. Два рода движений пространства (185). 2.2. Множества неподвижных точек движений пространства (185). 2.3. Инварианты движений пространства (186). 2.4. Признак зеркальной симметрии (188).	
§ 3. Поворот пространства около оси . . . . .	188
3.1. Поворот как частный вид движения (188). 3.2. Признак поворота (189). 3.3. Представление поворота композициями симметрий (189).	
§ 4. Переносная и поворотная симметрии, винтовое движение . . . . .	190
4.1. Переносная симметрия (190). 4.2. Поворотная симметрия (192). 4.3. Винтовое движение (192).	
§ 5. Конструктивное задание движения пространства . . . . .	193
5.1. Теорема о задании движения (193). 5.2. Следствия (195).	
§ 6. Классификация движений пространства . . . . .	195
6.1. Движения второго рода (195). 6.2. Движения первого рода (196).	

§ 7. Координатные формулы движений пространства . . . . .	197
7.1. Вывод формул движений (197). Матрица движения (198).	
7.3. Формулы обратного движения (200). 7.4. О критериях частных видов движений (200). 7.5. Формулы частных видов движений при специальном выборе прямоугольной декартовой системы координат (201).	
§ 8. Композиции движений пространства . . . . .	202
8.1. Композиция поворота и переноса (202). 8.2. Композиция зеркальной и осевой симметрий (202). 8.3. Композиция двух поворотов (203). 8.4. Композиция трех зеркальных симметрий (203). 8.5. Композиция симметрий относительно трех попарно скрещивающихся прямых (205).	
§ 9. Группы самосовмещений правильного тетраэдра и куба . . . . .	205
9.1. Группа самосовмещений правильного тетраэдра (205).	
9.2. Группа самосовмещений куба (207).	
§ 10. Решение задач с использованием движений пространства . . . . .	208
Задачи к главе 10 . . . . .	211

### **Глава 11. Подобия пространства**

§ 1. Гомотетия пространства . . . . .	219
1.1. Обзор теории (219). 1.2. Композиция гомотетии и переноса (220). 1.3. Гомотетия пространства в задачах (220).	
§ 2. Преобразования подобия . . . . .	222
2.1. Определение и инварианты подобий пространства (222). Координатные формулы подобий пространства (222). 2.3. Центр подобия пространства (223). 2.4. Построение центра подобия первого рода плоскости (223). 2.5. Классификация подобий пространства (224).	
Задачи к главе 11 . . . . .	225

### **Глава 12. Аффинные преобразования**

§ 1. Начала теории аффинных преобразований пространства . . . . .	228
1.1. Определение аффинного преобразования пространства и его следствия (228). 1.2. Задание аффинного преобразования пространства (228). 1.3. Координатные формулы аффинного преобразования (229).	
§ 2. Изменение объемов тел при аффинном преобразовании . . . . .	231
2.1. Выражение смешанного произведения векторов в аффинных координатах (231). 2.2. Зависимость между объемом тела и объемом его образа при аффинном преобразовании пространства (231).	

§ 3. Родство . . . . .	233
3.1. Определение и свойства родства (233). 3.2. Представление аффинного преобразования пространства композицией подобия и родства (234).	
§ 4. Метод аффинных преобразований в геометрических задачах .	234
4.1. Сущность метода аффинных преобразований (234). 4.2. При- меры решения задач методом аффинных преобразований (235).	
Задачи к главе 12 . . . . .	236
Задачи общего содержания . . . . .	238
Ответы, указания . . . . .	243
Литература . . . . .	254
Предметный указатель . . . . .	255

## *Предисловие*

Эта книга предназначена для учащихся школ, лицеев, гимназий с математической специализацией. Она является непосредственным продолжением учебного пособия [8] того же автора. Обе эти книги содержат углубленное изложение планиметрии и стереометрии для желающих знать больше школьного уровня и научиться лучше решать задачи. Их содержание находится, образно говоря, посередине между школьной и вузовской геометриями.

К написанию книги автора побудило большое желание привлечь внимание педагогов-математиков к неиспользуемому стереометрическому арсеналу, обладающему значительным потенциалом в образовательном и воспитательном аспектах. Возрастающее стремление к «урезаниям» математического содержания среднего образования может иметь в будущем непоправимые негативные последствия. Не являясь сторонником «широкого охвата», автор хочет помочь желающим иметь возможность овладевать геометрическим богатством.

Книга состоит из двух частей. Первая часть — собственно стереометрическая, вторая содержит преобразования пространства — движения, подобия, аффинные преобразования. Содержание не регламентировано заранее заданной программой. Оно сложилось в процессе многолетней работы автора со студентами педагогического института (университета), а также с учащимися физико-математического лицея г. Кирова и с учащимися Белорецкой компьютерной школы Башкортостана.

Автор не ставил целью пересказывать материал действующих школьных учебников, а стремился углубить и расширить его, показать применение излагаемых фактов к решению содержательных математических задач. Единственным отступлением от этого принципа служит первая глава «Прямые и плоскости», которая по существу является вводной к всему остальному материалу, но и она имеет оригинальные подходы к некоторым определениям и доказательствам теорем. Ее полезно прочитать читателю, даже хорошо знающему школьный учебник.

В имеющейся учебной литературе геометрические преобразования пространства освещены недостаточно. Изложение либо фрагментарно, либо архаично с точки зрения терминологии и методов доказательств. Удалось изложить теорию преобразований пространства с существенными упрощениями.

Важной частью содержания пособия являются задачи, в основном заимствованные из задачного материала отечественной учебной литературы. Их количество не очень велико, однако вполне достаточно для достижения поставленной цели. Обращаем внимание читателя, что раз-

бор приведенных авторских решений и самостоятельное решение задач из списков, данных в конце каждой главы, должно составить необходимую часть его работы. Учитывая критические замечания педагогов, пользующихся пособием [8], автор решил отказаться от развернутых «указаний», а ограничиться только подсказками и ответами.

Нельзя обещать легкого чтения книги. Надеемся на желание и настойчивость читателя. Предполагается знание действующих школьных учебников.

Пособие может быть использовано в педагогических вузах при подготовке учителей математики для чтения спецкурсов и проведения спецсеминаров, темами которых могут служить выбранные главы. Автор надеется, что книга окажет помощь в самообразовании учителей и во внеклассной работе с учащимися, в частности, при подготовке к математическим олимпиадам.

*Я. П. Понарин*

Часть I

Стереометрия



## Прямые и плоскости

## §1. Параллельные прямые и плоскости

**1.1. Параллельность прямой и плоскости.** Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Из этого определения сразу следует критерий параллельности прямой и плоскости.

**Теорема 1.** Прямая  $t$  параллельна плоскости  $\alpha$  тогда и только тогда, когда в этой плоскости существует некоторая прямая  $p$ , параллельная данной прямой  $t$ .

**Доказательство.** Пусть  $t \parallel \alpha$ . Проведем через прямую  $t$  произвольную плоскость  $\beta$ , пересекающую плоскость  $\alpha$  (рис. 1). Тогда прямая  $p$  пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  параллельна прямой  $t$ , так как в противном случае прямая  $t$  пересекала бы плоскость  $\alpha$ . Обратно, если в плоскости  $\alpha$  имеется некоторая прямая  $p$ , параллельная прямой  $t$ , то  $t \parallel \alpha$ , поскольку если бы  $t$  пересекала  $\alpha$ , то их общая точка лежала бы на прямой  $p$ , что противоречит условию  $t \parallel p$ .  $\square$

Очевидно, при  $t \parallel \alpha$  в плоскости  $\alpha$  существует бесконечное множество (*пучок*) прямых, каждая из которых параллельна  $t$ . Доказанный критерий мог бы быть принят в качестве *определения* параллельности прямой и плоскости.

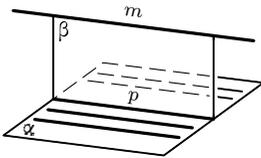


Рис. 1

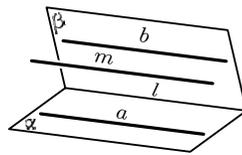


Рис. 2

**Теорема 2.** Если прямая  $t$  параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ , то она параллельна их линии пересечения.

**Доказательство.** Пусть  $t \parallel \alpha$  и  $t \parallel \beta$ . Согласно теореме 1 в плоскости  $\alpha$  существует прямая  $a$ , параллельная  $t$ , в плоскости  $\beta$  существует прямая  $b$ , параллельная  $t$  (рис. 2). Тогда  $a \parallel b$  (транзитивность параллельности прямых). По той же теореме 1  $a \parallel \beta$  и, значит,

прямая  $a$  параллельна прямой  $l = \alpha \cap \beta$ , так как иначе  $a$  пересекала бы  $\beta$ . Из  $m \parallel a$  и  $l \parallel a$  следует  $m \parallel l$ .  $\square$

Обратное утверждение очевидно на основании достаточного условия критерия параллельности прямой и плоскости.

**Теорема 3.** *Если три плоскости попарно пересекаются и не имеют общей прямой, то прямые их пересечения либо имеют общую точку, либо параллельны.*

**Доказательство.** Пусть даны плоскости  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  и  $\beta \cap \gamma = a, \gamma \cap \alpha = b, \alpha \cap \beta = c$ . По условию прямая  $c$  не лежит в плоскости  $\gamma$ . Для нее возможны только два случая: либо прямая  $c$  пересекает плоскость  $\gamma$  в некоторой точке  $M$ , либо  $c \parallel \gamma$ . В первом случае будет  $M \in a$  и  $M \in b$ , т. е.  $M \in \alpha \cap \beta \cap \gamma$ . Тогда точка  $M$  будет общей точкой прямых  $a, b$  и  $c$  (рис. 3, а). Во втором случае по теореме 2 будет  $c \parallel a$  и  $c \parallel b$  (рис. 3, б).  $\square$

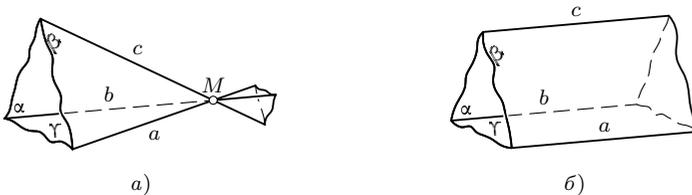


Рис. 3

**1.2. Параллельность двух плоскостей.** Две плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек.

**Теорема 4.** *Если в одной из двух данных плоскостей существуют две непараллельные прямые, каждая из которых параллельна другой плоскости, то эти плоскости параллельны.*

**Доказательство.** Пусть даны плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ , прямые  $a$  и  $b$  непараллельны и лежат в плоскости  $\alpha, a \parallel \beta, b \parallel \beta$ . Если бы плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекались по некоторой прямой  $l$ , то по теореме 2 было бы  $a \parallel l$  и  $b \parallel l$ , откуда  $a \parallel b$ , что противоречит условию теоремы.  $\square$

Если плоскости параллельны, то любая прямая одной плоскости параллельна другой плоскости. Если же плоскости пересекаются, то в каждой из них имеется пучок параллельных прямых, параллельных другой плоскости (все они параллельны линии пересечения этих плоскостей).

**Задача.** Плоскости  $\alpha$  и  $\alpha_1$  пересекаются по прямой  $a$ . Соответственно параллельные им плоскости  $\beta$  и  $\beta_1$  пересекаются по прямой  $b$ . Докажите, что прямые  $a$  и  $b$  параллельны.

**Решение.** Из  $\alpha \parallel \beta$  и  $a \subset \alpha$  следует  $a \parallel \beta$ . С равным правом  $a \parallel \beta_1$ . По теореме 2 будет  $a \parallel b$ .

## §2. Перпендикулярные прямые и плоскости

**2.1. Перпендикулярность прямой и плоскости.** Две пересекающиеся прямые называются *перпендикулярными*, если один из углов между ними равен своему смежному. Две *скрещивающиеся* прямые называются *перпендикулярными*, если перпендикулярны соответственно параллельные им пересекающиеся прямые.

Прямая и плоскость называются *перпендикулярными*, если эта прямая перпендикулярна *каждой* прямой, лежащей в данной плоскости.

**Теорема 5** (признак перпендикулярности прямой и плоскости). *Если прямая перпендикулярна каждой из двух непараллельных прямых данной плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.*

**Доказательство.** Пусть прямые  $a$  и  $b$  непараллельны и лежат в плоскости  $\alpha$ ; прямая  $h$  им перпендикулярна,  $m$  — произвольная прямая плоскости  $\alpha$  (рис. 4). Докажем, что  $h \perp m$ . Для этого выберем ненулевые векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{h}$ ,  $\vec{m}$ , коллинеарные соответственно прямым  $a$ ,  $b$ ,  $h$ ,  $m$ . Вектор  $\vec{m}$  разложим по неколлинеарным векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ :  $\vec{m} = x\vec{a} + y\vec{b}$ . Согласно распределительному закону скалярного умножения

$$\vec{m}\vec{h} = x(\vec{a}\vec{h}) + y(\vec{b}\vec{h}).$$

По условию теоремы  $\vec{a}\vec{h} = 0$  и  $\vec{b}\vec{h} = 0$ . Тогда и  $\vec{m}\vec{h} = 0$ , т.е.  $h \perp m$ . По определению перпендикулярности прямой и плоскости и в силу произвольного выбора прямой  $m$  плоскости  $\alpha$  прямая  $h$  перпендикулярна этой плоскости.  $\square$

Далее традиционным способом можно построить плоскость, проходящую через данную точку перпендикулярно данной прямой, т.е. доказать существование такой плоскости, и доказать существование и единственность перпендикуляра к плоскости, содержащего данную точку ([2], с. 39–41).

**Теорема 6** (о трех перпендикулярах). *Для того чтобы прямая  $m$ , лежащая в плоскости  $\alpha$  (или в плоскости, ей параллельной), была перпендикулярна наклонной к плоскости  $\alpha$ , необходимо и достаточно, чтобы эта прямая  $m$  была перпендикулярна ортогональной проекции наклонной на плоскость  $\alpha$ .*

**Доказательство.** Пусть прямая  $l = (AO)$  — наклонная к плоскости  $\alpha$ ,  $h = (AA_1)$  — перпендикуляр к  $\alpha$ . Тогда  $(OA_1) = l_1$  — ортогональная проекция прямой  $l$  на  $\alpha$  (рис. 5). Пусть  $m \subset \alpha$ ,  $m \perp l_1$ . Тогда  $h \perp m$  по

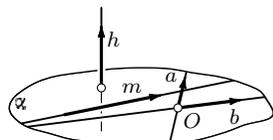


Рис. 4

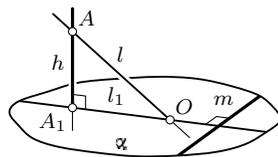


Рис. 5

определению перпендикулярности прямой и плоскости и прямая  $m$  перпендикулярна плоскости  $(OAA_1)$  (теорема 5). Поэтому  $m \perp l$ . Обратно, если предположить, что  $m \perp l$ , то будет следовать  $m \perp l_1$ .  $\square$

**Задача 1.** В тетраэдре  $OABC$  ребра  $OA, OB, OC$  попарно перпендикулярны. Докажите, что основание  $H$  высоты  $OH$  этого тетраэдра есть ортоцентр треугольника  $ABC$  (рис. 6).

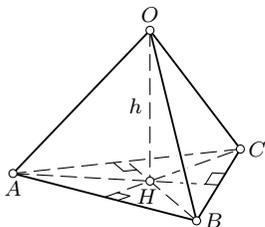


Рис. 6

**Решение.** Поскольку  $OA \perp OB$  и  $OA \perp OC$ , то  $OA \perp (OBC)$  и поэтому  $OA \perp BC$ . Прямая  $AH$  есть проекция прямой  $OA$  на плоскость  $ABC$ . Так как  $BC \perp OA$ , то по теореме 6  $BC \perp AH$ . Аналогично  $AB \perp CH$  и  $CA \perp BH$ , т.е. точка  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ .

**Задача 2.** На перпендикуляре  $h$  к плоскости остроугольного треугольника  $ABC$  в его ортоцентре  $H$  выбрана точка  $O$  так, что угол  $AOB$  является прямым. Докажите, что углы  $BOC$  и  $COA$  также прямые.

**Решение.** По условию  $OH \perp (ABC)$  и  $BC \perp AH$  (рис. 6). По теореме о трех перпендикулярах  $BC \perp AO$ . Из того, что  $AO \perp BC$  и  $AO \perp OB$  следует  $AO \perp OC$ . Аналогично  $BO \perp OC$ .

**2.2. Перпендикулярность двух плоскостей.** Плоскость  $\alpha$  называется перпендикулярной плоскости  $\beta$ , если она содержит перпендикуляр  $h$  к плоскости  $\beta$  (рис. 7):

$$\alpha \perp \beta \iff (\exists h \subset \alpha \mid h \perp \beta).$$

В этом определении плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  занимают неравноправное положение. Поэтому надо доказать, что из  $\alpha \perp \beta$  следует  $\beta \perp \alpha$ . Для этого построим в плоскости  $\beta$  перпендикуляр  $p$  к прямой  $l$  пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  в точке  $O = \beta \cap h$ . Тогда  $p \perp \alpha$ , так как  $h \perp p$  и  $p \perp l$ . Следовательно, в плоскости  $\beta$  существует перпендикуляр  $p$  к плоскости  $\alpha$ . Согласно принятому определению  $\beta \perp \alpha$ .

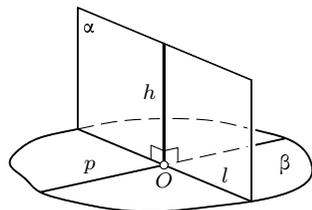


Рис. 7

**Следствие.** Если плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  перпендикулярны, то все перпендикуляры к плоскости  $\beta$ , проведенные из точек плоскости  $\alpha$ , лежат в плоскости  $\alpha$ , поскольку каждый из них параллелен одному и тому же перпендикуляру  $h \subset \alpha$ .

**Теорема 7.** Если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей, то прямая их пересечения перпендикулярна этой (третьей) плоскости.

**Доказательство.** Пусть  $\alpha \perp \gamma$ ,  $\beta \perp \gamma$  и  $\alpha \cap \beta = l$ . Тогда  $l \perp \gamma$ . В самом деле, через произвольную точку  $P$  прямой  $l$  проведем перпендикуляр  $p$  к плоскости  $\gamma$ . На основании предыдущего следствия он принадлежит как плоскости  $\alpha$ , так и плоскости  $\beta$ , следовательно, совпадает с прямой  $l$ .  $\square$

### §3. Скрещивающиеся прямые

**3.1. Параллельные плоскости, заданные двумя скрещивающимися прямыми.** Две прямые называются *скрещивающимися*, если не существует плоскости, которой они обе принадлежат.

**Теорема 8.** *Существует единственная пара параллельных плоскостей, каждая из которых содержит одну из двух данных скрещивающихся прямых и параллельна другой из них.*

**Доказательство.** Пусть даны скрещивающиеся прямые  $a$  и  $b$  (рис. 8). Через произвольную точку  $M$  прямой  $a$  проведем прямую  $b_1$ , параллельную прямой  $b$ . Прямые  $a$  и  $b_1$  непараллельны, поэтому задают плоскость  $\alpha$ , параллельную прямой  $b$  (теорема 1). Аналогично через произвольную точку  $N$  прямой  $b$  проведем прямую  $a_1 \parallel a$ . Плоскость  $\beta$ , заданная прямыми  $a_1$  и  $b$ , параллельна плоскости  $\alpha$ . Пара плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  — единственная. Действительно, если бы существовала аналогичная пара  $(\alpha_1, \beta_1)$ , т. е.  $\alpha \cap \alpha_1 = a$ ,  $\beta \cap \beta_1 = b$  и  $\alpha_1 \parallel \beta_1$ , то согласно утверждению задачи §1 прямые  $a$  и  $b$  оказались бы параллельными, что противоречит их выбору.  $\square$

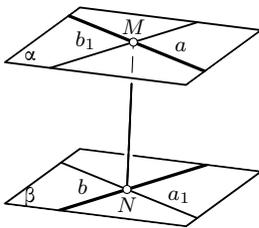


Рис. 8

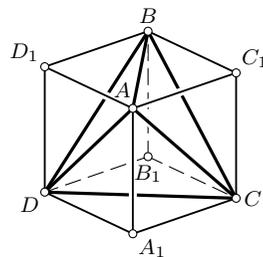


Рис. 9

**3.2. Описанный параллелепипед.** Рассмотрим тетраэдр  $ABCD$ . Прямые  $AB$  и  $CD$ ,  $BC$  и  $AD$ ,  $AC$  и  $BD$  определяют три пары параллельных плоскостей (теорема 8), которые своим пересечением образуют параллелепипед, называемый *описанным параллелепипедом* данного тетраэдра (рис. 9). Ребра тетраэдра служат диагоналями граней его описанного

параллелепипеда. В частности, если тетраэдр  $ABCD$  правильный, то его описанный параллелепипед — куб.

**3.3. Общий перпендикуляр скрещивающихся прямых.** Отрезок с концами на двух данных скрещивающихся прямых, перпендикулярный каждой из этих прямых, называется *общим перпендикуляром* этих скрещивающихся прямых. Так называют также и прямую, содержащую этот отрезок.

**Теорема 9.** *Для двух данных скрещивающихся прямых существует единственный общий перпендикуляр. Его длина меньше длины любого другого отрезка с концами на этих прямых.*

**Доказательство.** Пусть прямые  $a$  и  $b$  скрещиваются. Докажем сначала существование их общего перпендикуляра. Для этого выберем

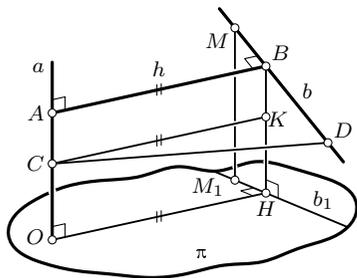


Рис. 10

некоторую плоскость  $\pi$  перпендикулярную прямой  $a$  (рис. 10), и построим перпендикуляр  $MM_1$  на эту плоскость из произвольной точки  $M \in b$ . Плоскость  $\omega$ , определяемая прямыми  $MM_1$  и  $b$ , пересекает плоскость  $\pi$  по прямой  $b_1$  (ортогональной проекции прямой  $b$ ). Из точки  $O = \pi \cap a$  проведем перпендикуляр  $OH$  на прямую  $b_1$ ,  $H \in b_1$ . Далее строим  $NB \parallel a$  ( $B \in b$ ) и  $BA \parallel OH$  ( $A \in a$ ). Тогда отрезок  $AB$  и является общим перпендикуляром данных скрещивающихся

прямых  $a$  и  $b$ . В самом деле, так как  $OH \perp b_1$ , то  $OH \perp b$  (теорема о трех перпендикулярах). Поскольку  $OH \perp a$ , то  $AB \perp a$ . Так как  $AB \parallel OH$ , то  $AB \perp b$ .  
Докажем теперь *единственность* общего перпендикуляра данных прямых  $a$  и  $b$ . Допустим, что отрезок  $CD$  — также общий перпендикуляр этих прямых. Тогда как  $AB$ , так и  $CD$  перпендикулярны плоскости  $\omega = (b, b_1)$ , поскольку оба они перпендикулярны прямым  $b$  и  $b_1$  этой плоскости. Следовательно,  $AB \parallel CD$ . Оказалось, что прямые  $a$  и  $b$  принадлежат плоскости  $ACD$ , что противоречит условию их скрещивания.

Наконец, покажем, что  $AB < CD$ , где  $CD$  — любой отрезок с концами на прямых  $a$  и  $b$ , отличный от их общего перпендикуляра  $AB$ . Пусть  $CK \perp \omega$ ,  $K \in \omega$ . Тогда  $CK = AB$ ,  $CD$  — наклонная к  $\omega$  и, значит,  $CK < CD$ , а потому  $AB < CD$ .  $\square$

Описанное в этом доказательстве построение есть один из возможных способов построения общего перпендикуляра скрещивающихся прямых.

**Определение.** Длина общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых называется *расстоянием* между этими прямыми.

Для вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми нет необходимости строить их общий перпендикуляр, так как  $AB = OH$ . Искомое расстояние равно также расстоянию между параллельными плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ , существование которых утверждается теоремой 8.

**Задача 1.** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  все ребра имеют длину  $a$ . Постройте общий перпендикуляр прямых  $BC$  и  $AB_1$  (рис. 11) и найдите его длину.

**Решение.** В качестве плоскости  $\pi$  служит плоскость  $AOO_1$  ( $O$  и  $O_1$  — середины ребер  $BC$  и  $B_1C_1$ ). Прямая  $AB_1$  проектируется на нее в прямую  $AO_1$ . В плоскости  $\pi$  построим перпендикуляр  $OH$  к прямой  $AO_1$ . В прямоугольном треугольнике  $AOO_1$  катеты  $OO_1$  и  $AO$  соответственно равны  $a$  и  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Перпендикуляр  $OH$  делит гипотенузу  $AO_1$  в отношении квадратов прилежащих катетов, т. е.

$AH : HO_1 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 : a^2 = 3 : 4$ . Это отношение сохраняется на изображении, что и определяет положение точки  $H$ . Далее проводим  $HP \parallel BC$  и  $PQ \parallel OH$ , получая  $PQ$  — общий перпендикуляр прямых  $BC$  и  $AB_1$ . Так как  $AO \cdot OO_1 = AO_1 \cdot OH$ ,

то  $OH = PQ = a\sqrt{\frac{3}{7}}$ .

**Задача 2.** В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром  $a$  найдите расстояние между прямыми  $AB_1$  и  $BC_1$

**Решение.** Искомое расстояние равно расстоянию между параллельными плоскостями  $AB_1D_1$  и  $BDC_1$  (рис. 12), которые делят диагональ  $CA_1$  куба на три равные части (задача 1.19). Руководствуясь теоремой о трех перпендикулярах, убеждаемся, что эта диагональ перпендикулярна указанным плоскостям. Следовательно, расстояние между прямыми  $AB_1$  и  $BC_1$ , равно  $\frac{1}{3}CA_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

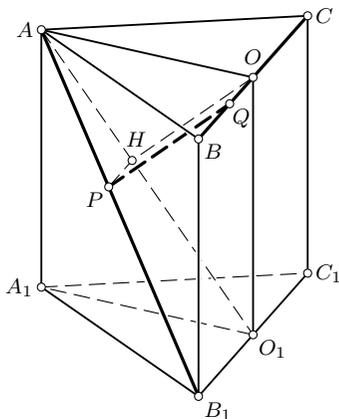


Рис. 11

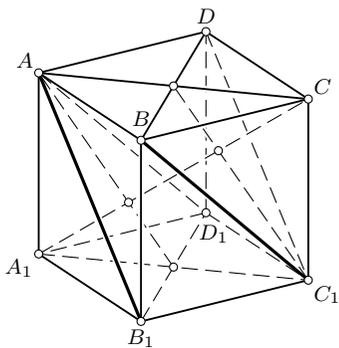


Рис. 12

Для решения задачи не потребовалось строить общий перпендикуляр.

**3.4. Построение и вычисление длины общего перпендикуляра векторным методом.** Решим ту же задачу 2 векторно. Выберем векторный базис  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ , где  $\bar{a} = \overline{BA}$ ,  $\bar{b} = \overline{BC}$ ,  $\bar{c} = \overline{BB_1}$  (рис. 13). Пусть  $P$  и  $Q$  — некоторые точки соответственно прямых  $BC_1$  и  $AB_1$ . Положим  $\overline{BP} = x\overline{BC_1} = x(\bar{b} + \bar{c})$ ,  $\overline{AQ} = y\overline{AB_1} = y(\bar{c} - \bar{a})$ . Тогда  $\overline{PQ} = \overline{PB} + \overline{BA} + \overline{AQ} = -x(\bar{b} + \bar{c}) + y(\bar{c} - \bar{a}) = (1 - y)\bar{a} - x\bar{b} + (y - x)\bar{c}$ . Найдем такие числа  $x$  и  $y$ , чтобы вектор  $\overline{PQ}$  был ортогонален векторам  $\overline{BC_1}$  и  $\overline{AB_1}$ , т. е. чтобы имели место равенства:

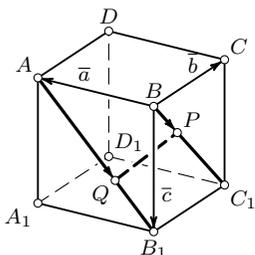


Рис. 13

$$\begin{cases} ((1 - y)\bar{a} - x\bar{b} + (y - x)\bar{c})(\bar{b} + \bar{c}) = 0, \\ ((1 - y)\bar{a} - x\bar{b} + (y - x)\bar{c})(\bar{c} - \bar{a}) = 0. \end{cases}$$

Полагая  $|\bar{a}| = |\bar{b}| = |\bar{c}| = 1$  и учитывая, что  $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{c} = \bar{c}\bar{a} = 0$ , получаем систему:

$$\begin{cases} 2x - y = 0, \\ x - 2y + 1 = 0, \end{cases}$$

из которой  $x = \frac{1}{3}$ ,  $y = \frac{2}{3}$ . Точки  $P$  и  $Q$  искомого общего перпендикуляра строятся согласно полученным равенствам  $\overline{BP} = \frac{1}{3}\overline{BC_1}$  и  $\overline{AQ} = \frac{2}{3}\overline{AB_1}$ . А так как  $\overline{PQ} = \frac{1}{3}(\bar{a} - \bar{b} + \bar{c})$ , то  $PQ^2 = \frac{1}{3}a^2$ ,  $PQ = \frac{a}{\sqrt{3}}$ .

**3.5. Пропорциональные отрезки на скрещивающихся прямых.** Если две скрещивающиеся прямые  $u$  и  $v$  пересечены параллельными плоскостями  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma, \dots$ , то отрезки, отсекаемые ими на одной прямой, пропорциональны соответственным отрезкам на другой прямой (рис. 14):

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \dots$$

Для доказательства через точку  $A = u \cap \alpha$  проведем прямую  $l$  параллельно прямой  $v$ . Пусть прямая  $l$  пересекает плоскости  $\beta$ ,  $\gamma, \dots$  в точках  $B_2, C_2, \dots$ . Тогда  $A_1B_1 = AB_2$ ,  $B_1C_1 = B_2C_2, \dots$  и  $\frac{AB}{A_2B_2} = \frac{BC}{B_2C_2} = \dots$ , откуда и следует сформулированное утверждение.

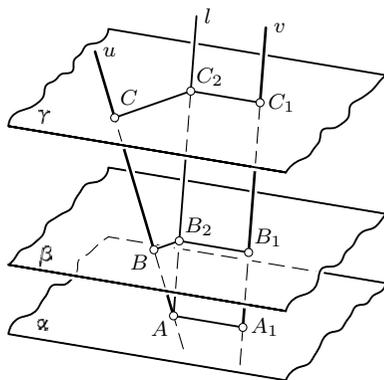


Рис. 14

## §4. Углы между прямыми и плоскостями

**4.1. Угол между скрещивающимися прямыми** определяется как угол между *пересекающимися* прямыми, соответственно параллельными данным прямым. Для корректности этого определения следует, конечно, показать, что этот угол не зависит от выбора точки, через которую проводятся прямые, параллельные данным.

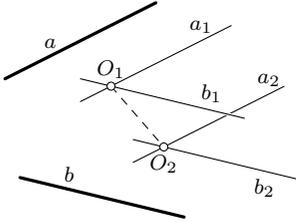


Рис. 15

Пусть даны скрещивающиеся прямые  $a$  и  $b$  и через точку  $O_1$  проведены прямые  $a_1 \parallel a$  и  $b_1 \parallel b$ , а через точку  $O_2$  проведены прямые  $a_2 \parallel a$  и  $b_2 \parallel b$ . Тогда  $a_1 \parallel a_2$  и  $b_1 \parallel b_2$  (рис. 15). Перенос пространства на вектор  $\overline{O_1O_2}$  отображает  $a_1$  на  $a_2$  и  $b_1$  на  $b_2$ , следовательно, угол  $\angle(a_1, b_1)$  на угол  $\angle(a_2, b_2)$ , и потому эти углы равны. Напомним, что мера угла между пересекающимися прямыми по определению не больше  $90^\circ$ , а между двумя лучами — не больше  $180^\circ$ .

**Задача.** Даны три попарно перпендикулярные скрещивающиеся прямые  $a, b, c$ . Прямая  $l$  образует с ними соответственно углы  $\alpha, \beta, \gamma$ . Докажите, что

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (1.1)$$

**Решение.** Пусть  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  — единичные векторы, коллинеарные соответственно данным прямым,  $\bar{r}$  — вектор, коллинеарный прямой  $l$ . Пусть  $\bar{r} = x\bar{a} + y\bar{b} + z\bar{c}$ . Тогда  $\bar{r}\bar{a} = x$ , так как  $\bar{a}^2 = 1$  и  $\bar{a}\bar{b} = \bar{a}\bar{c} = 0$ . Аналогично  $\bar{r}\bar{b} = y$  и  $\bar{r}\bar{c} = z$ . Находим, что  $\bar{r}^2 = (x\bar{a} + y\bar{b} + z\bar{c})^2 = x^2 + y^2 + z^2 = (\bar{r}\bar{a})^2 + (\bar{r}\bar{b})^2 + (\bar{r}\bar{c})^2 = \bar{r}^2 \cos^2 \alpha + \bar{r}^2 \cos^2 \beta + \bar{r}^2 \cos^2 \gamma$ . Отсюда и следует равенство (1.1).

**4.2. Угол между прямой и плоскостью** определяется как угол между этой прямой и ее ортогональной проекцией на данную плоскость. Это определение основано на свойстве: *угол  $\varphi$  между данной прямой  $m$ , не перпендикулярной и не параллельной плоскости  $\pi$ , и ее ортогональной проекцией  $m_1$  на эту плоскость меньше угла  $\gamma$  между прямой  $m$  и любой другой прямой  $l$  плоскости  $\pi$*  (рис. 16).

**Доказательство.** Пусть  $AH \perp \pi$ , тогда  $AH \perp l$ . Если  $m \cap \pi = O$  и  $B \in l$ , то  $\overline{OB} \cdot \overline{HA} = 0$ , поэтому  $\overline{OB}(\overline{OA} - \overline{OH}) = 0$ ,

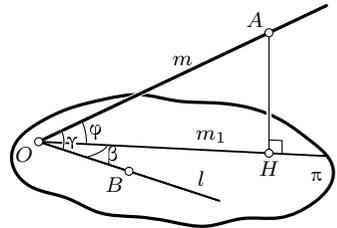


Рис. 16

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OB} \cdot \overline{OH}, \text{ откуда } OA \cdot OB \cos \gamma = OB \cdot OH \cos \beta \ (\beta = \widehat{BOH}),$$

$$\cos \gamma = \frac{OH}{OA} \cos \beta. \text{ Итак,}$$

$$\cos \gamma = \cos \varphi \cos \beta. \quad (1.2)$$

Поскольку  $0 < \cos \beta < 1$ , то  $\cos \gamma < \cos \varphi$ , откуда  $\gamma > \varphi$ .  $\square$

Если  $m \perp \pi$ , то угол между  $m$  и  $\pi$  принимается равным  $90^\circ$ , так как прямая  $m$  перпендикулярна по определению любой прямой плоскости  $\pi$ . В случае  $m \parallel \pi$  угол между ними по определению считается нулевым.

**4.3. Двугранный угол. Угол между двумя плоскостями.** Всякая плоскость делит пространство на два *полупространства*, для которых она является общей границей. Пусть даны две непараллельные плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ . Фиксируем по одному полупространству с границами  $\alpha$  и  $\beta$ .

**Определение.** Пересечение двух полупространств с непараллельными граничными плоскостями называется *двугранным углом*.

Двугранный угол ограничен двумя полуплоскостями, которые называются его *гранями*. Общая прямая граней называется *ребром* двугранного угла. Пересечение двугранного угла и плоскости, перпендикулярной к его ребру, называется *линейным углом* двугранного угла. Мера линейного угла принимается за меру двугранного угла, которую для простоты также называют линейным углом двугранного угла. Мера  $\varphi$  двугранного угла находится в промежутке от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ :  $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ .

Величину  $\varphi$  *меньшего* из двугранных углов, определяемых пересекающимися плоскостями, называют *углом между этими плоскостями*. Если они параллельны, то угол между ними считается равным  $0^\circ$ . Итак, по определению угол между плоскостями не больше  $90^\circ$ .

**Теорема 10.** Угол  $\varphi$  между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$  больше любого угла  $\gamma$ , который является их пересечением плоскостью, перпендикулярной только к одной из двух данных плоскостей.

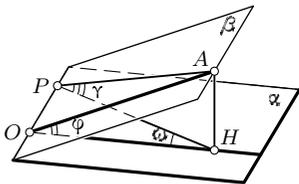


Рис. 17

**Доказательство.** Пусть  $AH \perp \alpha$ ,  $A \in \beta$ ,  $H \in \alpha$ , плоскость  $OAH$  — плоскость линейного угла  $\varphi$  двугранного угла  $\angle(\alpha, \beta)$ ,  $P$  — произвольная точка его ребра, отличная от точки  $O$  (рис. 17). Тогда плоскость  $PAH$  перпендикулярна  $\alpha$ , но не перпендикулярна  $\beta$ . Докажем, что  $\varphi > \gamma$ . Угол  $\widehat{ONP} = \omega$  — линейный угол двугранного угла между плоскостями  $OHA$  и  $AHP$ . Поэтому  $S_{OHA} = S_{AHP} \cos \omega$ ,  $\cos \omega = \frac{OH}{PH}$ , откуда  $OA \cdot OH \sin \varphi = PA \cdot PH \sin \gamma \cdot \frac{OH}{PH}$  и  $\sin \gamma = \sin \varphi \frac{OA}{PA}$ . Так как  $\frac{OA}{PA} < 1$ , то  $\sin \gamma < \sin \varphi$  и поэтому  $\gamma < \varphi$ .  $\square$

Заметим, что *угол между плоскостями равен углу между соответственно перпендикулярными к ним прямыми*.

**Задача.** Плоскость  $\sigma$  образует с тремя попарно перпендикулярными плоскостями  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  соответственно углы  $\alpha, \beta, \gamma$ . Докажите, что

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

**Решение.** Прямые  $a = \omega_2 \cap \omega_3, b = \omega_3 \cap \omega_1, c = \omega_1 \cap \omega_2$  попарно перпендикулярны (теорема 7). Если прямая  $l$  перпендикулярна плоскости  $\sigma$ , то углы между прямой  $l$  и соответственно прямыми  $a, b, c$  равны  $\alpha, \beta, \gamma$ . В силу утверждения задачи пункта 4.1 имеет место доказываемое равенство.

**4.4. О сущности стереометрической задачи на построение.** Не существует чертежных инструментов, позволяющих строить в пространстве неплоские фигуры. По этой причине задачи на построение в стереометрии по своему существу принципиально отличаются от конструктивных задач планиметрии. Стереометрические построения выполняются лишь мысленно, в уме. Они являются задачами на *доказательство существования* фигуры, удовлетворяющей требуемым условиям. Это доказательство должно состоять из конечного числа шагов, состоящих из элементарных (простейших) «построений», выполняемых на основе следующих *аксиом*.

A1. Прямая считается построенной, если даны (построены) две ее точки или две плоскости, линией пересечения которых служит эта прямая.

A2. Плоскость считается построенной, если даны (построены) определяющие ее элементы (три неколлинеарные точки, две прямые этой плоскости, прямая и не принадлежащая ей точка).

A3. Если даны (построены) прямая и не параллельная ей (и не содержащая ее) плоскость, то считается построенной их точка пересечения.

A4. Сфера считается построенной, если даны (построены) ее центр и принадлежащая ей точка.

Кроме того, используются следующие общие принципы (общие аксиомы) стереометрических построений.

П1. В построенной плоскости может быть выполнено любое построение, выполнимое в планиметрии с помощью циркуля и линейки.

П2. Фигура считается построенной, если построены определяющие ее элементы.

Решение конструктивной стереометрической задачи за редкими исключениями сопровождается чертежом (рисунком), который может быть принципиально двух различных типов. Первый тип — *эскизный*

рисунок («аксиоматический чертеж»), иллюстрирующий основные этапы построения. При его выполнении допускается определенный произвол, если он не приводит к противоречиям с требуемыми условиями задачи. К этому типу относятся, например, рисунки 1–10 этой книги и большинство чертежей школьных учебников. Второй тип — проекционный чертеж, то есть плоское изображение, выполненное на основе свойств параллельного проектирования (см. пособие [2], приложение 1). Например, здесь чертежи 11, 12, 13 выполнены на основе свойств параллельного проектирования. Построения на проекционном чертеже однозначно соответствуют пространственным построениям в оригинале изображаемой фигуры. Рассмотрим пример решения конструктивной стереометрической задачи с выполнением аксиоматического чертежа.

**Задача.** В данной плоскости  $\alpha$  через данную точку  $A$  проведите прямую, которая образует угол заданной величины  $\psi$  с данной прямой  $m$ , не параллельной и не перпендикулярной плоскости  $\alpha$ .

**Решение.** Проведем сначала небольшой анализ. Пусть прямая  $x$  — искомая и  $O = m \cap \alpha$  (рис. 18). В плоскости  $\alpha$  проведем через точку  $O$  прямую  $l \parallel x$ . Угол между прямыми  $m$  и  $l$  равен заданному углу  $\psi$ . Пусть прямая  $m_1$  — ортогональная проекция заданной прямой  $m$  на плоскость  $\alpha$ . Из точки  $M \in m$  опустим перпендикуляр  $MH$  на плоскость  $\alpha$ ,  $H \in m_1$ , а из точки  $H$  — перпендикуляр  $HB$  на  $l$ . Тогда по теореме о трех перпендикулярах  $MB \perp l$ . Задача, очевидно, сводится к построению точки  $B$ .

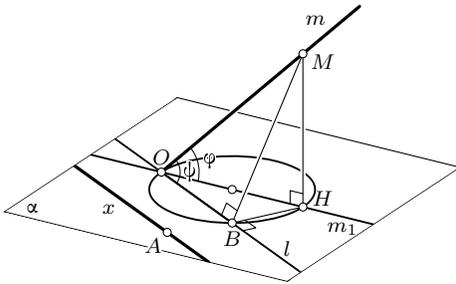


Рис. 18

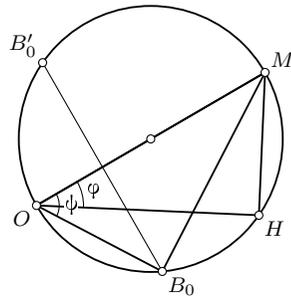


Рис. 19

Чтобы построить точку  $B$ , в плоскости  $MOH$  строим прямоугольный треугольник  $MOB_0$  по гипотенузе  $OM$  и данному острому углу  $\psi$  (рис. 19). (Заметим, что таких треугольников два.) Далее в данной плоскости  $\alpha$  строим окружность с диаметром  $OH$  и в ней хорду  $OB = OB_0$ . Прямая  $OB$  параллельна искомой прямой  $x \ni A$ .

По свойству п. 4.2 острый угол  $\psi$  должен быть больше угла  $\varphi$  между прямой  $m$  и плоскостью  $\alpha$ . Иначе задача не имеет решения. При этом условии задача имеет два решения. При  $\psi = \varphi$  решение единственно:  $l = m_1, x \parallel m_1$ .

## Задачи к главе 1

**1.1.** Для того чтобы две прямые были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы любая плоскость, пересекающая одну из них, пересекала и другую. Докажите.

**1.2.** Для того чтобы две плоскости были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы любая прямая, пересекающая одну из них, пересекала и другую. Докажите.

**1.3.** Постройте прямую, проходящую через данную точку и пересекающую две данные скрещивающиеся прямые.

**1.4.** Даны три попарно скрещивающиеся прямые. Постройте прямую, которая пересекает две из них и параллельна третьей.

**1.5.** Постройте прямую, которая проходит через данную точку  $A$ , параллельна данной плоскости  $\alpha$  и пересекает данную прямую  $l$ .

**1.6.** Даны  $n$  ( $n \geq 3$ ) прямых, каждые две из которых пересекаются. Докажите, что эти прямые либо пересекаются в одной точке, либо все принадлежат одной плоскости. В частности, оба эти случая могут иметь место одновременно.

**1.7.** Дано изображение пятиугольной призмы и прямых  $a$  и  $b$ , пересекающихся в точке  $M$ . Прямая  $a$  пересекает боковую поверхность призмы в данных точках  $P$  и  $Q$ , а прямая  $b$  — в данной точке  $S$ . Постройте изображение второй точки пересечения прямой  $b$  с поверхностью призмы.

**1.8.** Треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  расположены в пространстве так, что прямые  $AA_1, BB_1, CC_1$  пересекаются в одной точке или параллельны. Докажите, что имеет место один из трех случаев: 1) прямые, содержащие соответственные стороны этих треугольников, пересекаются в точках одной прямой; 2) две из них параллельны прямой, содержащей точки пересечения других соответственных сторон (прямых); 3) соответственные стороны данных треугольников параллельны. (Теорема Дезарга.)

**1.9.** Дано изображение параллелепипеда и трех точек на его попарно скрещивающихся ребрах. Постройте изображение сечения этого параллелепипеда плоскостью, определяемой данными точками.

**1.10.** Дано изображение четырехугольной пирамиды и трех точек  $A, B, C$ , лежащих на ее боковых гранях. Постройте изображение сечения пирамиды плоскостью  $ABC$ .

**1.11.** Постройте изображение сечения шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через диагональ основания и заданную точку на ее боковой поверхности.

**1.12.** Основанием пирамиды  $SABCD$  служит трапеция  $ABCD$ , отношение оснований  $AD$  и  $BC$  которой равно 2. Постройте изображение сечения пирамиды плоскостью, проходящей через вершину  $D$  и середины ребер  $SA$  и  $SB$ . Найдите отношение, в котором эта плоскость делит ребро  $SC$ .

**1.13.** Через каждую из двух данных скрещивающихся диагоналей боковых граней правильной треугольной призмы проведена плоскость, параллельная другой диагонали. Постройте изображения сечений призмы этими плоскостями и докажите, что они равны. Вычислите их площадь, если сторона основания призмы равна  $a$  а высота призмы равна  $h$ .

**1.14.** Даны три скрещивающиеся попарно перпендикулярные прямые. Расстояние между каждыми двумя из них равно  $a$ . Найдите площадь параллелограмма, две вершины которого расположены на одной прямой, а две оставшиеся — на двух других прямых.

**1.15.** Если три плоскости имеют общую точку и перпендикулярны некоторой плоскости, то они имеют общую прямую. Докажите.

**1.16.** Известно, что вне плоскости данного параллелограмма существует точка, равноудаленная от его сторон. Докажите, что этот параллелограмм является ромбом.

**1.17.** Даны три попарно скрещивающиеся прямые  $a, b, c$ , параллельные одной плоскости. Переменная прямая  $l$  пересекает данные прямые. Докажите, что отношение отрезков, отсекаемых прямыми  $a, b, c$  на прямой  $l$ , постоянно.

**1.18.** Даны три попарно скрещивающиеся прямые. Постройте параллелепипед, три ребра которого принадлежат этим прямым.

**1.19.** Докажите, что в параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  диагональ  $AC_1$  делится плоскостями  $B_1 CD_1$  и  $A_1 BD$  на три равные части.

**1.20.** Докажите, что диагональ  $AC_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  перпендикулярна плоскостям  $B_1 CD_1$  и  $A_1 BD$ .

**1.21.** Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через его центр перпендикулярно диагонали.

**1.22.** В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  диагональ  $AC_1$  перпендикулярна плоскости  $A_1 BD$ . Докажите, что этот параллелепипед является кубом.

**1.23.** Даны две пересекающиеся плоскости. Докажите, что имеются два направления таких, что каждая плоскость, равнонаклоненная к данным, параллельна либо одному, либо другому направлению.

**1.24.** В тетраэдре противоположные ребра равны соответственно в каждой из трех пар. Докажите, что три прямые, каждая из которых содержит середины двух противоположных ребер (*бимедианы тетраэдра*) попарно перпендикулярны.

**1.25.** Прямоугольник  $ABCD$  с длинами  $a$  и  $b$  сторон перегнут по диагонали  $BD$  так, что плоскости  $ABD$  и  $BCD$  стали перпендикулярны. Найдите длину диагонали  $AC$  в полученном косом четырехугольнике.

**1.26.** Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите угол между плоскостью грани  $BB_1 C_1 C$  и плоскостью, проходящей через диагональ  $BC_1$  этой грани и середину ребра  $AD$  куба.

**1.27.** В правильном тетраэдре  $ABCD$  точки  $B_1$  и  $C_1$  — середины  $BD$  и  $CD$ . Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $AB_1 C_1$ .

**1.28.** В правильной треугольной призме  $ABCA_1 B_1 C_1$  найдите угол между прямыми  $AB_1$  и  $BC_1$ , если  $AB = \sqrt{5}AA_1$ .

**1.29.** В правильной треугольной призме  $ABCA_1 B_1 C_1$  косинус угла между прямыми  $AB_1$  и  $BC_1$  равен  $\frac{1}{4}$ , сторона основания имеет длину  $a$ . Найдите длину бокового ребра.

**1.30.** Найдите величину угла между скрещивающимися медианами двух граней правильного тетраэдра.

**1.31.** В правильной четырехугольной пирамиде угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен углу наклона этого ребра к не содержащей его боковой грани. Найдите этот угол.

**1.32.** В правильной четырехугольной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите длину перпендикуляра, опущенного из вершины  $B_1$  на плоскость  $ACD_1$ , если  $AB = a$ ,  $AA_1 = b$ .

**1.33.** Постройте прямую, которая проходит через данную точку  $M$  ребра  $A_1 D_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , пересекает ребро  $AB$  и образует равные углы с прямыми  $AB$  и  $A_1 D_1$ .

**1.34.** Найдите угол наклона малой диагонали правильной шестиугольной призмы к плоскости ее основания, если диагональ боковой грани наклонена к плоскости основания под углом 1)  $45^\circ$ , 2)  $60^\circ$ .

**1.35.** Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Вычислите угол между плоскостями  $AB_1 C_1$  и  $A_1 B_1 C$ .

**1.36.** Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости основания под углами  $\alpha$  и  $\beta$ . Найдите угол между этими диагоналями.

**1.37.** Требуется пересечь три данные попарно скрещивающиеся прямые двумя параллельными плоскостями так, чтобы они высекали на этих прямых отрезки заданных длин.

**1.38.** В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  проведена плоскость через его вершину  $B$  и середины ребер  $AD$  и  $CC_1$ . Под каким углом эта плоскость наклонена к плоскости  $ABC$ ?

**1.39.** В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  диагональ  $AC_1$  наклонена к граням  $BB_1 C_1 C$  и  $CC_1 D_1 D$  под равными углами величины  $\alpha$ . Найдите угол между плоскостями  $BC_1 D$  и  $A_1 B_1 C_1$ .

**1.40.** Основанием пирамиды  $SABC$  является правильный треугольник  $ABC$ . Боковая грань  $SAB$  перпендикулярна плоскости основания, а две другие наклонены к плоскости основания под равными углами величины  $\alpha$ . Найдите угол между ребром  $SC$  и плоскостью основания.

**1.41.** В правильной четырехугольной пирамиде апофема равна стороне основания и имеет длину  $a$ . Постройте общий перпендикуляр стороны основания и не пересекающего ее бокового ребра. Найдите длину этого перпендикуляра.

**1.42.** В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна  $a$ , высота пирамиды равна  $h$ . Найдите расстояние между высотой основания и боковым ребром, не пересекающим эту высоту.

**1.43.** Дано изображение правильной шестиугольной призмы и прямой, пересекающей непараллельные ребра ее верхнего и нижнего оснований. Постройте изображение общего перпендикуляра этой прямой и скрещивающегося с ней бокового ребра призмы.

**1.44.** Ребра прямоугольного параллелепипеда относятся как  $1 : 2 : 3$ . Постройте изображение сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через его вершину перпендикулярно диагонали.

**1.45.** Через две данные параллельные прямые  $a$  и  $b$  проведите две параллельные плоскости так, чтобы они отсекали на данной прямой  $c$ , скрещивающейся с данными прямыми, отрезок заданной длины.

## Трехгранный угол

### §1. Смежные и вертикальные триэдры. Полярные триэдры

**1.1. Трехгранный угол и его элементы.** Пересечение трех полупространств, граничные плоскости которых имеют единственную общую точку, называется *трехгранным углом*, или *триэдром*. Общая точка граничных плоскостей этих полупространств называется *вершиной триэдра*. Граница триэдра представляет собой объединение трех плоских углов, каждые два из которых имеют общий граничный луч. Эти лучи называются *ребрами триэдра*, а сами плоские углы — *гранями триэдра*. Множество точек триэдра, не принадлежащих его границе, называется его *внутренней областью*. Двугранные углы, каждый из которых является пересечением двух из трех полупространств, образующих триэдр, называются *двугранными углами этого триэдра*.

Триэдр можно задать его вершиной  $O$  и ребрами  $a, b, c$ . Его будем обозначать  $Oabc$  или  $O(ABC)$ , где  $A, B, C$  — некоторые точки соответственно на его ребрах  $a, b, c$  (рис. 20).

Величины  $\alpha, \beta, \gamma$  плоских углов  $BOC, COA, AOB$  соответственно находятся в открытом промежутке от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ , так как каждый из них является пересечением двух полуплоскостей. По аналогичной причине этому же промежутку принадлежат меры  $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$  двугранных углов триэдра при ребрах  $OA, OB, OC$  соответственно.

Если в триэдре  $Oabc$  каждое из ребер  $a, b, c$  заменить его дополнительным лучом  $a_1, b_1, c_1$ , то они зададут триэдр  $Oa_1b_1c_1$ , называемый *вертикальным* триэдром к данному триэдру  $Oabc$  (рис. 21). При замене только одного ребра  $a$  его дополнительным лучом  $a_1$  получается триэдр  $Oa_1bc$ , который назовем триэдром, *смежным* с данным триэдром  $Oabc$  (рис. 22).

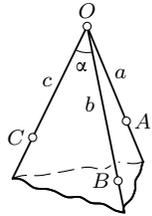


Рис. 20

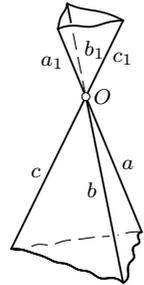


Рис. 21

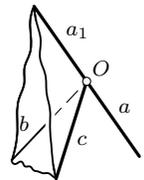


Рис. 22

**1.2. Полярные триэдры.** Построим три луча  $a', b', c'$  с началом во внутренней точке  $O'$  данного триэдра  $Oabc$ , перпендикулярные соответственным граням  $Obc, Oca, Oab$  этого триэдра. Триэдр  $O'a'b'c'$  называется *полярным* данному триэдру  $Oabc$ . Вершина  $O$  триэдра  $Oabc$  лежит внутри триэдра  $O'a'b'c'$ , а ребра  $a, b, c$  перпендикулярны соответственно граням  $O'b'c', O'c'a', O'a'b'$ . Следовательно, триэдр  $Oabc$  также полярен триэдру  $O'a'b'c'$ . Эти триэдры *взаимно полярны*.

Выбор точки  $O'$  несуществен, поскольку два триэдра, полярных данному, совмещаются друг с другом параллельным переносом.

Плоские и двугранные углы двух взаимно полярных триэдров находятся в определенной зависимости. Именно, *сумма радианных мер плоского угла триэдра и соответствующего ему двугранного угла полярного триэдра равна  $\pi$*  (принцип полярности).

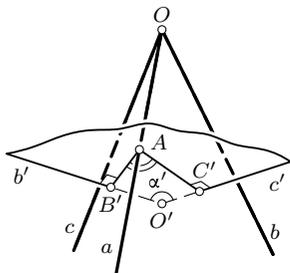


Рис. 23

Действительно, пусть  $a \cap (O'b'c') = A, b' \cap (Oca) = B', c' \cap (Oab) = C'$  (рис. 23). Тогда в четырехугольнике  $O'B'AC'$  углы  $AB'O'$  и  $AC'O'$  прямые и  $\widehat{B'AC'} = \widehat{A}, \widehat{B'O'C'} = \alpha'$ . Поэтому  $\widehat{A} + \alpha' = \pi$  и аналогично  $\widehat{B} + \beta' = \pi, \widehat{C} + \gamma' = \pi$ .

В силу взаимности полярности триэдров будет  $\widehat{A'} + \alpha = \pi, \widehat{B'} + \beta = \pi, \widehat{C'} + \gamma = \pi$ .

Здесь и всюду в дальнейшем в этой главе знак «штрих» означает принадлежность соответствующего элемента триэдру, полярному первоначально рассматриваемому триэдру.

## §2. Неравенства для углов триэдра

**2.1. Сумма плоских углов триэдра.** Эта сумма, очевидно, непостоянна. Однако она *меньше  $2\pi$* :

$$\alpha + \beta + \gamma < 2\pi. \quad (2.1)$$

**Доказательство.** Отложим на ребрах триэдра  $Oabc$  от его вершины  $O$  равные отрезки  $OA, OB, OC$  и опустим из точки  $O$  перпендикуляр  $OH$  на плоскость  $ABC$ . Тогда  $HA = HB = HC$  как проекции равных наклонных, причем  $HA < OA$ . Повернем треугольники  $OAB, OBC, OCA$  соответственно около прямых  $AB, BC, CA$  так, чтобы их образы — треугольники  $O_3AB, O_1BC, O_2CA$  лежали в плоскости  $ABC$  по разные стороны с треугольниками  $HAB, HBC, HCA$  от их общих сторон (рис. 24) Так как  $O_3A = O_3B$  и  $HA = HB$ , то прямая  $O_3H$  явля-

ется осью симметрии отрезка  $AB$ . Следовательно, треугольники  $O_3AH$  и  $O_3BH$  равны. Но в треугольнике  $O_3AH$  угол  $AO_3H$  меньше угла  $AHO_3$ , так как  $HA < AO_3$ . Поэтому  $\widehat{AO_3B} < \widehat{AHB}$ . Итак, углы при точках  $O_1, O_2, O_3$  меньше соответственных углов при точке  $H$ . Значит,

$$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COA} < 2\pi.$$

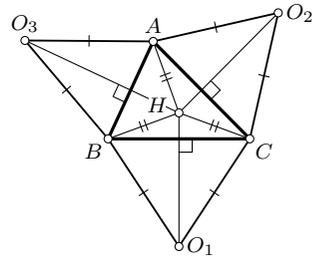


Рис. 24

Этот вывод не зависит от того, будет ли точка  $H$  лежать внутри треугольника  $ABC$ , вне его или на его стороне.  $\square$

**2.2. Аналог неравенства треугольника.** Сумма любых двух плоских углов триэдра больше третьего плоского угла.

Для доказательства рассмотрим триэдр  $Oa_1bc$ , смежный с данным триэдром  $Oabc$  (рис. 22). Если  $\alpha, \beta, \gamma$  — меры плоских углов триэдра  $Oabc$ , то триэдр  $Oa_1bc$  имеет плоские углы величины  $\alpha, \pi - \beta, \pi - \gamma$ . Для него по предыдущему свойству

$$\alpha + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma) < 2\pi,$$

откуда

$$\beta + \gamma > \alpha. \quad (2.2)$$

Аналогично доказывается, что  $\alpha + \gamma > \beta$  и  $\alpha + \beta > \gamma$ .

**Следствие.** Величина каждого плоского угла триэдра больше разности величин двух других его плоских углов.

В самом деле, из неравенства  $\alpha < \beta + \gamma$  следует  $\beta > \alpha - \gamma$  и из  $\gamma < \alpha + \beta$  следует  $\beta > \gamma - \alpha$ . Следовательно,

$$\beta > |\alpha - \gamma|.$$

**2.3. Сумма двугранных углов триэдра** удовлетворяет неравенствам

$$\pi < \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < 3\pi. \quad (2.3)$$

Для доказательства рассмотрим триэдр, полярный данному. Для него

$$0 < \alpha' + \beta' + \gamma' < 2\pi$$

Так как  $\alpha' = \pi - \widehat{A}$ ,  $\beta' = \pi - \widehat{B}$ ,  $\gamma' = \pi - \widehat{C}$ , то

$$0 < (\pi - \widehat{A}) + (\pi - \widehat{B}) + (\pi - \widehat{C}) < 2\pi,$$

откуда и следуют доказываемые неравенства (2.3).

**2.4. Сумма косинусов плоских углов триэдра.** Рассмотрим единичные векторы  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ , сонаправленные соответственно ребрам триэдра. Так как они некопланарны, то  $\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \neq \bar{0}$  и поэтому  $(\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3)^2 > 0$ , что равносильно  $\bar{e}_1^2 + \bar{e}_2^2 + \bar{e}_3^2 + 2(\bar{e}_1\bar{e}_2 + \bar{e}_1\bar{e}_3 + \bar{e}_2\bar{e}_3) > 0$ , т. е.  $3 + 2(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) > 0$ , откуда

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma > -\frac{3}{2}. \quad (2.4)$$

### §3. Теоремы косинусов и теорема синусов для триэдра

**3.1. Две теоремы косинусов.** Имеют место следующие тождества:

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \hat{A}, \quad (2.5)$$

$$\cos \hat{A} = -\cos \hat{B} \cos \hat{C} + \sin \hat{B} \sin \hat{C} \cos \alpha, \quad (2.6)$$

которые носят название *первой и второй теорем косинусов* для триэдра.

**Доказательство.** Для доказательства соотношения (2.5) отложим на ребрах триэдра отрезки  $OA, OB, OC$  длины 1 и рассмотрим векторы  $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ . Проведем перпендикуляры  $BM$  и  $CN$  к прямой  $OA$  (рис. 25). Тогда  $NC = \sin \beta$ ,  $MB = \sin \gamma$  и  $(\overline{MB}, \overline{NC}) = \hat{A}$ .

Так как  $\overline{OM} \parallel \overline{OA}$ , то  $\overline{OM} = (\pm OM)\overline{OA} = (OB \cos \gamma) \cdot \overline{OA} = \overline{OA} \cos \gamma$ ; здесь  $\pm OM$  означает, что  $OM$  либо сонаправлен с  $\overline{OA}$ , либо противоположен  $\overline{OA}$ . Аналогично  $\overline{ON} = \overline{OA} \cos \beta$ . Поэтому

$$\overline{OB} = \overline{OM} + \overline{MB} = \overline{OA} \cos \gamma + \overline{MB},$$

$$\overline{OC} = \overline{ON} + \overline{NC} = \overline{OA} \cos \beta + \overline{NC}.$$

Перемножим скалярно эти равенства. Учитывая, что  $\overline{MB} \perp \overline{OA}$  и  $\overline{NC} \perp \overline{OA}$ , получим:

$$\overline{OB} \cdot \overline{OC} = \cos \beta \cos \gamma \overline{OA}^2 + \overline{MB} \cdot \overline{NC}.$$

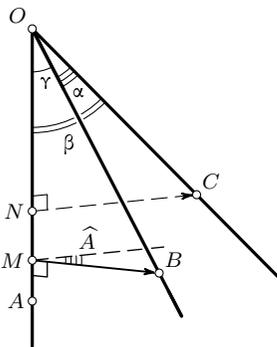


Рис. 25

Итак,  $\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \hat{A}$ .  $\square$

Для доказательства соотношения (2.6) применим доказанное равенство (2.5) к триэдру  $O'(A'B'C')$ , полярному данному:

$$\cos \alpha' = \cos \beta' \cos \gamma' + \sin \beta' \sin \gamma' \cos \hat{A}'.$$

Выполнив подстановки  $\alpha' = \pi - \widehat{A}$ ,  $\beta' = \pi - \widehat{B}$ ,  $\gamma' = \pi - \widehat{C}$ ,  $\widehat{A}' = \pi - \alpha$ , получаем:

$$-\cos \widehat{A} = \cos \widehat{B} \cos \widehat{C} - \sin \widehat{B} \sin \widehat{C} \cos \alpha,$$

что эквивалентно (2.6).

Рассмотрим частные случаи. Если  $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$ , то соотношение (2.5) принимает вид

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma, \quad (2.7)$$

а при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  из (2.6) имеем:

$$\cos \widehat{A} = -\cos \widehat{B} \cos \widehat{C}. \quad (2.8)$$

Зависимости (2.7) и (2.8) представляют собой *аналоги теоремы Пифагора* для триэдров соответственно с прямым двугранным углом и прямым плоским углом.

**3.2. Теорема синусов для триэдра.** *Синусы двугранных углов триэдра пропорциональны синусам его противолежащих плоских углов:*

$$\frac{\sin \widehat{A}}{\sin \alpha} = \frac{\sin \widehat{B}}{\sin \beta} = \frac{\sin \widehat{C}}{\sin \gamma}. \quad (2.9)$$

**Доказательство.** Выразим из (2.5)  $\cos \widehat{A}$ :

$$\cos \widehat{A} = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}. \quad (2.10)$$

Тогда

$$1 - \cos^2 \widehat{A} = \frac{\sin^2 \beta \sin^2 \gamma - (\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma)^2}{\sin^2 \beta \sin^2 \gamma}.$$

Разделив это равенство на  $\sin^2 \alpha$ , после очевидных преобразований получим:

$$\frac{\sin^2 \widehat{A}}{\sin^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma}.$$

Величины  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  входят в правую часть этого равенства равноправно (симметрично). Поэтому оно останется истинным при круговой замене букв  $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \alpha$  и соответственно  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ . Следовательно,

$$\frac{\sin^2 \widehat{A}}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \widehat{B}}{\sin^2 \beta} = \frac{\sin^2 \widehat{C}}{\sin^2 \gamma},$$

что равносильно (2.9), поскольку каждый из углов принадлежит промежутку  $(0, \pi)$ .  $\square$

**3.3. Следствия из теоремы синусов.** Умножим равенства (2.9) на  $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ :

$$\sin \hat{A} \sin \beta \sin \gamma = \sin \hat{B} \sin \gamma \sin \alpha = \sin \hat{C} \sin \alpha \sin \beta. \quad (2.11)$$

Таким образом, *произведение синуса двугранного угла и синусов заключающих его плоских углов постоянно для данного триэдра.*

Это произведение называется *синусом первого рода триэдра*, или *синусом Штаудта триэдра*. Будем обозначать его  $\Delta(\mathcal{O})$ .

Далее разделим равенства (2.9) на  $\sin \hat{A} \sin \hat{B} \sin \hat{C}$ . Тогда получим:

$$\sin \alpha \sin \hat{B} \sin \hat{C} = \sin \beta \sin \hat{C} \sin \hat{A} = \sin \gamma \sin \hat{A} \sin \hat{B}. \quad (2.12)$$

Итак, *произведение синуса плоского угла и синусов прилежащих к нему двугранных углов постоянно для данного триэдра.* Это произведение будем называть *синусом второго рода триэдра* и обозначать  $\Delta'(\mathcal{O})$ .

Синус первого рода  $\Delta(\mathcal{O})$  и синус второго рода  $\Delta'(\mathcal{O})$  полярно сопряжены друг другу, то есть синус второго рода триэдра равен синусу первого рода полярного ему триэдра и обратно.

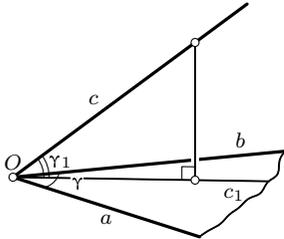


Рис. 26

Ребро  $c$  триэдра  $Oabc$  спроектируем ортогонально на плоскость  $Oab$ . Пусть  $c_1$  — полученная проекция и  $\gamma_1$  — угол между лучами  $c$  и  $c_1$  (рис. 26). По теореме синусов для триэдра

$$\frac{\sin \hat{A}}{\sin \gamma_1} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\sin \beta},$$

откуда  $\sin \gamma_1 = \sin \hat{A} \sin \beta$ . Аналогично  $\sin \alpha_1 = \sin \hat{B} \sin \gamma$  и  $\sin \beta_1 = \sin \hat{C} \sin \alpha$ , где  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  — углы наклона лучей  $a$  и  $b$  к плоскостям противоположных граней триэдра. Тогда равенства (2.11) принимают вид:

$$\sin \alpha \sin \alpha_1 = \sin \beta \sin \beta_1 = \sin \gamma \sin \gamma_1 = \Delta(\mathcal{O}). \quad (2.13)$$

Таким образом, *произведение синуса угла между двумя ребрами триэдра и синуса угла наклона третьего ребра к плоскости первых двух постоянно для данного триэдра и равно его синусу Штаудта.*

**3.4. Необходимые и достаточные условия существования триэдра.** Для того чтобы существовал триэдр с заданными плоскими углами величин  $\alpha, \beta, \gamma$ , принадлежащих промежутку  $(0, \pi)$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства:

$$|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma \quad \text{и} \quad \alpha + \beta + \gamma < 2\pi. \quad (2.14)$$

Доказательство. Необходимость этих неравенств доказана ранее (§ 2). Докажем их достаточность. Пусть даны неравенства (2.14). Рассмотрим два случая: а)  $\beta + \gamma \leq \pi$ , б)  $\beta + \gamma > \pi$ .

а) В промежутке  $(0, \pi)$  косинус монотонно убывает, а синус принимает положительные значения, поэтому  $\cos(\beta + \gamma) < \cos \alpha < \cos |\beta - \gamma| = \cos(\beta - \gamma)$ , что равносильно  $\cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma < \cos \alpha < \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma$ , откуда

$$-1 < \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma} < 1.$$

Это неравенство говорит о том, что существует двугранный угол величины  $\hat{A} \in (0, \pi)$  такой, что

$$\cos \hat{A} = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}. \quad (2.15)$$

Построим триэдр по двугранному углу  $\hat{A}$  и заключающим его плоским углам  $\beta$  и  $\gamma$ . Согласно первой теореме косинусов его третий плоский угол  $\alpha_1$  удовлетворяет условию

$$\cos \alpha_1 = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \hat{A}. \quad (2.16)$$

С другой стороны, из равенства (2.15) имеем:

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \hat{A}. \quad (2.17)$$

Из (2.16) и (2.17) следует  $\cos \alpha_1 = \cos \alpha$  и  $\alpha_1 = \alpha$ . Итак, построенный триэдр имеет заданные плоские углы  $\alpha, \beta, \gamma$ .

б)  $\beta + \gamma > \pi$ . Из первого неравенства (2.14)  $|\beta - \gamma| < \alpha$ , а из второго  $\alpha < 2\pi - (\beta + \gamma)$ , тогда  $|\beta - \gamma| < \alpha < 2\pi - (\beta + \gamma) < \pi$  и поэтому  $\cos(\beta - \gamma) > \cos \alpha > \cos(2\pi - (\beta + \gamma)) = \cos(\beta + \gamma)$ . Далее завершение доказательства аналогично случаю а).  $\square$

Приведем еще *другое доказательство* достаточности неравенств (2.14), основанное на свойстве непрерывности движения.

Пусть плоские углы искомого триэдра имеют заданные величины  $\alpha, \beta, \gamma$ , удовлетворяющие неравенствам (2.14). Пусть данные углы, имеющие величины  $\beta$  и  $\gamma$ , лежат в одной полуплоскости от их общей стороны  $a$  и имеют общую вершину  $O$ . Тогда угол между остальными их сторонами будет равен  $|\beta - \gamma|$ . Фиксируем сторону  $b$  угла  $\gamma$ , а угол  $\angle aOc$  величины  $\beta$  будем вращать около луча  $a$  пока он не повернется на  $180^\circ$ . Тогда угол между другой стороной  $b$  угла  $\gamma$  и новым положением стороны  $c$  угла будет равен  $\beta + \gamma$ . По условию величина  $\alpha$  принадлежит промежутку  $(|\beta - \gamma|, \beta + \gamma)$ . Так как угол поворота в силу непрерывности

вращения принимает все значения из этого промежутка, то существует момент, при котором угол поворота будет равен заданному значению  $\alpha$ . В этот момент вращающийся луч  $c$  займет положение третьего ребра искомого триэдра  $Oabc$ .

**3.5. Применение теорем косинусов в решении задач.** Рассмотрим решения трех задач. При необходимости рисунки предлагаем сделать читателю самостоятельно.

**Задача 1.** В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$  плоский угол при вершине имеет величину  $\alpha$ . Найдите величины двугранных углов при боковом ребре и при основании.

**Решение.** Рассмотрим триэдр  $A(BSD)$ . Его плоские углы равны  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$  и  $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ . Тогда по первой теореме косинусов для этого триэдра

$$\cos \frac{\pi}{2} = \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) + \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \cos(AS),$$

откуда

$$\cos(AS) = -\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

По той же теореме

$$\cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = -\cos \frac{\pi}{2} \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) + \sin \frac{\pi}{2} \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \cos(AB),$$

откуда

$$\cos(AB) = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

**Проверка.** По второй теореме косинусов для этого же триэдра

$$\cos(AS) = -\cos^2(AB) + \sin^2(AB) \cos \frac{\pi}{2},$$

т. е.  $\cos(AS) = -\cos^2(AB)$ . Полученные ответы удовлетворяют этому условию.

**Задача 2.** Плоские углы триэдра  $Oabc$  равны  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Найдите угол между ребром  $a$  и биссектрисой  $l$  угла  $\alpha$ .

**Решение.** Двугранные углы триэдров  $Oabl$  и  $Oacl$  при их общем ребре  $l$  являются смежными, поэтому их сумма равна  $\pi$ . Из триэдра  $Oabl$   $\cos \gamma = \cos x \cos \frac{\alpha}{2} + \sin x \sin \frac{\alpha}{2} \cos \omega$ , а из триэдра  $Oacl$   $\cos \beta = \cos x \cos \frac{\alpha}{2} + \sin x \sin \frac{\alpha}{2} \cos(\pi - \omega)$ . Следовательно,  $\cos \beta + \cos \gamma = 2 \cos x \cos \frac{\alpha}{2}$ , откуда

$$\cos x = \frac{\cos \beta + \cos \gamma}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

**Задача 3.** Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите угол между плоскостями  $ABD_1$  и  $ADC_1$ .

Решение. Указанные плоскости пересекаются по прямой  $AC_1$ . Рассмотрим триэдр  $A(BC_1D)$  (можно использовать рис. 12). Угол  $BAD$  прямой, косинусы углов  $BAC_1$  и  $DAC_1$  равны  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ , а их синусы равны  $\sqrt{\frac{2}{3}}$ . Поэтому  $0 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 \cos x$ , откуда  $\cos x = -\frac{1}{2}$ . Но угол между плоскостями по определению тупой. Значит, он равен  $60^\circ$ .

Иное решение получается сразу, без вычислений, если заметить, что угол между указанными плоскостями равен углу между соответственно перпендикулярными к ним прямыми  $CB_1$  и  $CD_1$ , а он равен  $60^\circ$ , поскольку треугольник  $CB_1D_1$  правильный.

## §4. Замечательные прямые и плоскости триэдра

**4.1. Медианные плоскости триэдра.** Плоскость, содержащая ребро триэдра и биссектрису противоположного плоского угла, называется *медианной плоскостью* этого триэдра.

**Теорема 1.** *Три медианные плоскости триэдра имеют общую прямую.* (Она называется *медианой триэдра*).

**Доказательство.** Отложим на ребрах данного триэдра от его вершины равные отрезки  $OA, OB, OC$  и проведем биссектрисы  $OA_1, OB_1, OC_1$  углов  $BOC, COA, AOB$  соответственно (рис. 27). Тогда отрезки  $AA_1, BB_1, CC_1$  будут медианами треугольника  $ABC$ . Если  $G$  — точка их пересечения, то прямая  $OG$  является общей прямой медианных плоскостей  $OAA_1, OBB_1, OCC_1$  триэдра.  $\square$

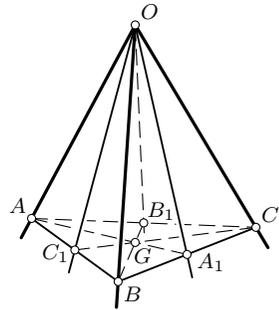


Рис. 27

**4.2. Ось вписанного кругового конуса.** Пусть дан двугранный угол с ребром  $a$ . Построим один из его линейных углов и проведем его биссектрису  $l$  (рис. 28). Полуплоскость с границей  $a$ , содержащая луч  $l$ , делит данный двугранный угол на два равных двугранных угла. Она называется *биссекторной полуплоскостью* этого угла. Плоскость, содержащая эту полуплоскость, имеет такое же название — *биссекторная плоскость* двугрannого угла.

Точка  $M$  принадлежит биссекторной плоскости двугрannого угла тогда и только тогда, когда она равноудалена от плоскостей граней этого угла. Иначе говоря, *биссекторная плоскость двугрannого угла есть*

множество точек пространства, каждая из которых равноудалена от плоскостей граней этого угла.

**Теорема 2.** Биссекторные плоскости двугранных углов триэдра имеют общую прямую, равнонаклоненную к его граням.

**Доказательство.** Действительно, две биссекторные плоскости пересекаются по прямой  $p$ , каждая точка которой равноудалена от трех

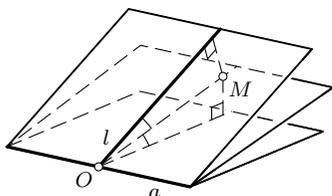


Рис. 28

граней триэдра, поэтому эта прямая лежит и в третьей биссекторной плоскости. Она образует равные углы с гранями триэдра, что видно из равенства соответствующих прямоугольных треугольников (рис. 28).  $\square$

Построим ортогональные проекции прямой  $p$  пересечения биссекторных плоскостей триэдра на плоскости его граней.

Эти прямые задают *круговую коническую поверхность* (круговой конус), для которой они служат образующими, а прямая  $p$  — осью. Этот конус называется *вписанным* в данный триэдр. Итак, *общая прямая трех биссекторных плоскостей триэдра является осью кругового конуса, вписанного в этот триэдр.* Вписанный в триэдр круговой конус касается плоскостей его граней по ортогональным проекциям его оси на грани.

**4.3. Ось описанного конуса.** Три плоскости, каждая из которых проходит через биссектрису плоского угла триэдра перпендикулярно соответствующей грани, имеют общую прямую.

**Доказательство.** Пусть дан триэдр  $Oabc$ . Рассмотрим одну из указанных плоскостей (плоскость  $\pi$ ) и в ней произвольный луч  $m$  с началом  $O$  (рис. 29). Применяя формулу (2.7) к триэдрам  $Oamt_1$  и  $Ovmt_1$ , где  $t_1$  — биссектриса плоского угла  $\gamma$  (ортогональная проекция луча  $m$  на его плоскость), убеждаемся, что луч  $m$  образует равные углы с ребрами  $a$  и  $b$  данного триэдра. Это свойство является характеристическим для лучей плоскости  $\pi$ . Две из рассматриваемых плоскостей имеют общий луч  $l$  с началом  $O$ . В силу доказанного свойства он равнонаклонен к ребрам данного триэдра и поэтому лежит и в третьей из этих плоскостей.  $\square$

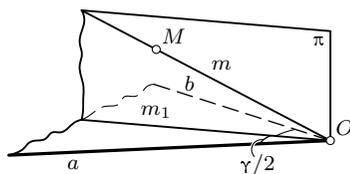


Рис. 29

Существует круговой конус (коническая поверхность), для которого общая прямая трех указанных в теореме плоскостей служит осью,

а ребра триэдра принадлежат образующим. Он называется конусом, описанным около данного триэдра.

**4.4. Высотные плоскости и ортоось триэдра.** Три плоскости, каждая из которых проходит через ребро триэдра перпендикулярно плоскости противоположной грани, называются *высотными плоскостями* этого триэдра. Они определены однозначно, если ни одно ребро триэдра не перпендикулярно противоположной грани. Будем предполагать это ограничение.

**Теорема 3.** *Три высотные плоскости триэдра имеют общую прямую. Она называется ортоосью триэдра.*

*Доказательство.* Обозначим буквой  $a$  то ребро триэдра  $Oabc$ , которое не перпендикулярно остальным. Пусть плоскость  $\pi$  перпендикулярна ребру  $a$  и пересекает его в точке  $A$ , а прямые, содержащие ребра  $b$  и  $c$ , — в точках  $B$  и  $C$  (рис. 30). Пусть плоскость  $OAM$  перпендикулярна

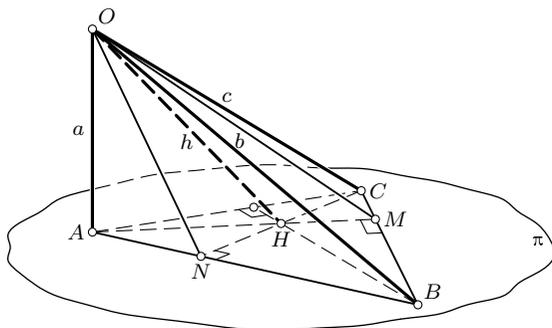


Рис. 30

$BC$ ,  $M \in (BC)$ . Плоскость  $OBC$  содержит перпендикуляр  $BC$  к плоскости  $OAM$ , поэтому эти плоскости перпендикулярны. Построим плоскость  $OCN$ , перпендикулярную плоскости  $OAB$ . Тогда плоскости  $OAM$  и  $OCN$  — высотные плоскости данного триэдра. Так как плоскости  $\pi$  и  $OCN$  перпендикулярны плоскости  $OAB$ , то прямая  $NC$  их пересечения перпендикулярна плоскости  $OAB$ . Прямые  $AM$  и  $CN$  — высоты треугольника  $ABC$ . Следовательно, если  $(AM) \cap (CN) = H$ , то  $BH$  — третья высота этого треугольника. Поскольку  $OA \perp BH$  и  $AC \perp BH$ , то плоскость  $OAC$  перпендикулярна  $BH$ , и поэтому плоскости  $OAC$  и  $OBH$  перпендикулярны (вторая из них содержит перпендикуляр  $BH$  к первой). Итак, плоскость  $OBH$  — третья высотная плоскость триэдра, а прямая  $OH$  — его ортоось.  $\square$

**Следствие 1.** Если плоскость  $\pi$  перпендикулярна ребру триэдра, то ортоцентр  $H$  треугольника  $ABC$  ее пересечения с триэдром принадлежит ортооси триэдра.

Согласно определению ортооси каждое ребро служит ортоосью триэдра, ребрами которого является два других ребра данного триэдра и его ортоось: если  $h$  — ортоось триэдра  $Oabc$ , то  $a$  — ортоось триэдра  $Ohbc$  и т. д. Поэтому предыдущее следствие можно переформулировать так.

**Следствие 2.** Если плоскость перпендикулярна ортооси триэдра, то ортоцентр треугольника ее пересечения с триэдром принадлежит ортооси.

**Теорема 4.** Если ортоось триэдра лежит внутри него, то высотные плоскости триэдра пересекают соответственные им грани по лучам  $a_1, b_1, c_1$ , образующим такой триэдр, для которого эти высотные плоскости являются биссекторными плоскостями двугранных углов (рис. 31).

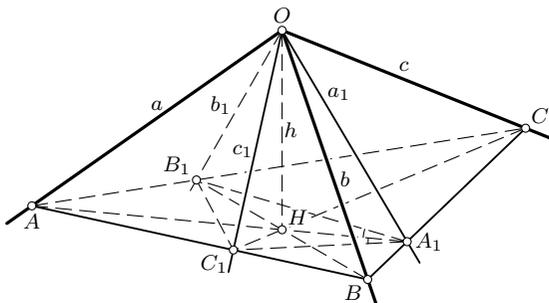


Рис. 31

**Доказательство.** Пусть плоскость  $ABC$  перпендикулярна ортооси  $h$  триэдра  $Oabc$ . Согласно следствию 2 точка  $H = h \cap (ABC)$  есть ортоцентр треугольника  $ABC$ . Из планиметрии известно, что лучи  $AH, BH, CH$  делят пополам углы треугольника  $ABC$  с вершинами в основаниях высот треугольника  $ABC$ . Так как смежные двугранные углы с общим ребром  $A_1H$  прямые, то согласно (2.7) из равенства углов  $B_1A_1H$  и  $C_1A_1H$  следует равенство углов  $OA_1B_1$  и  $OA_1C_1$ . В триэдрах  $A_1(OB_1H)$  и  $A_1(OC_1H)$  соответственные плоские углы равны. Поскольку все они острые, то по теореме синусов (2.9) следует равенство соответственных двугранных углов. Итак, двугранные углы этих триэдров с общим ребром  $OA_1$  равны. Аналогично и другие высотные плоскости триэдра  $Oabc$  делят пополам двугранные углы триэдра  $Oa_1b_1c_1$ .  $\square$

## §5. Плоскости, перпендикулярные осям описанного и вписанного конусов триэдра

**5.1. Плоскость перпендикулярная оси конуса, описанного около триэдра.** Рассматривается круговой конус, содержащий ребра триэдра своими образующими. Его ось  $l$  образует равные углы с ребрами. Рассмотрим плоскость  $\delta$ , содержащую вершину триэдра и перпендикулярную оси  $l$  конуса. Ребра триэдра равнонаклонены к плоскости  $\delta$ .

**Теорема 5.** *Плоскость  $\delta$ , перпендикулярная оси описанного около триэдра конуса, проходящая через его вершину, содержит биссектрисы углов, смежных с плоскими углами этого триэдра.*

Предварительно докажем следующую лемму.

**Лемма.** *Для того чтобы плоскость, проходящая через вершину угла, была равнонаклонена к его сторонам, необходимо и достаточно, чтобы она содержала биссектрису этого угла или биссектрису смежного с ним угла.*

**Доказательство.** **Достаточность.** Пусть плоскость  $\alpha$  проходит через биссектрису  $m$  угла  $AOB$  (рис. 32). При симметрии с осью  $m$  плоскость  $\alpha$  отображается на себя, луч  $OA$  — на луч  $OB$ . Так как осевая симметрия есть движение, то угол наклона луча  $OA$  к плоскости  $\alpha$  равен углу наклона луча  $OB$  к этой плоскости. Если плоскость проходит через биссектрису угла  $A_1OB$  смежного с углом  $AOB$ , то по доказанному она равнонаклонена к лучам  $OA_1$  и  $OB$ , а значит, равнонаклонена к лучам  $OA$  и  $OB$ .

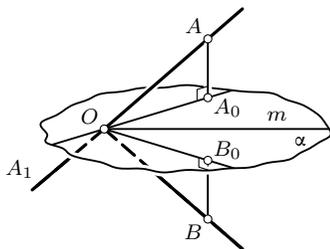


Рис. 32

**Необходимость.** Пусть плоскость  $\alpha$  равнонаклонена к лучам  $OA$  и  $OB$ , причем они лежат в разных полупространствах от плоскости  $\alpha$ . Пусть  $OA_0$  и  $OB_0$  — ортогональные проекции лучей  $OA$  и  $OB$  на  $\alpha$ . По условию углы  $AOA_0$  и  $BOB_0$  равны. Если  $m$  — биссектриса угла  $A_0OB_0$ , то при симметрии с осью  $m$  луч  $OA_0$  отображается на луч  $OB_0$ , плоскость  $OAA_0$  — на плоскость  $OBB_0$  и луч  $OA$  — на луч  $OB$ . Следовательно, плоскость  $\alpha$  проходит через биссектрису угла  $AOB$ . Если же лучи  $OA$  и  $OB$  лежат в одном полупространстве с границей  $\alpha$ , то луч  $OB_1$ , дополняющий луч  $OB$  до прямой, находится с лучом  $OA$  в разных полупространствах от  $\alpha$  и  $\alpha$  равнонаклонена к ним. По доказанному плоскость  $\alpha$  проходит через биссектрису угла  $AOB_1$ , смежного с углом  $AOB$ . □

Переходим к доказательству сформулированной выше теоремы. Плоскость  $\delta$  равнонаклонена к ребрам триэдра и она не имеет с триэдром общих внутренних точек. На основании леммы она содержит биссектрисы углов, смежных с плоскими углами триэдра.

Кроме плоскости  $\delta$ , существуют еще три плоскости, каждая из которых равнонаклонена к ребрам данного триэдра. Эти плоскости перпендикулярны к осям конусов, описанных соответственно около триэдров, смежных с данным (см. п. 1.1). Каждая из них содержит биссектрисы двух плоских углов данного триэдра и биссектрису угла, смежного с его третьим плоским углом.

## 5.2. Плоскость, перпендикулярная оси вписанного в триэдр конуса.

Ось вписанного в триэдр конуса образует равные углы с его гранями и образует равные углы с ребрами полярного ему триэдра, поэтому служит осью описанного около него конуса. Обратно, ось описанного около триэдра конуса образует равные углы с гранями триэдра, полярного данному, т. е. является для него осью вписанного конуса.

Плоскость, перпендикулярная оси вписанного в триэдр конуса, равнонаклонена к плоскостям его граней.

**Теорема 6.** *Плоскость  $\omega$ , перпендикулярная оси  $l$  вписанного в триэдр конуса и проходящая через его вершину, содержит три прямые  $u_1, u_2, u_3$ , каждая из которых лежит в биссекторной плоскости двугранного угла, смежного с одним двугранным углом данного триэдра, проходит через его вершину перпендикулярно соответствующему ребру.*

**Доказательство.** Пусть дан триэдр  $Oabc$ . Через его вершину проведем плоскость  $\alpha$ , перпендикулярную ребру  $a$ . Прямая  $u_1 = \alpha \cap \omega$  удовлетворяет заданным условиям. Действительно, она принадлежит биссекторной плоскости двугранного угла, смежного с двугранным углом при ребре  $a$ , так как эта плоскость перпендикулярна биссекторной плоскости  $(l, a)$ , а биссекторные плоскости смежных двугранных углов перпендикулярны. Так как  $\alpha \perp a$ , то  $u_1 \perp a$ . Аналогично строятся две другие прямые  $u_2$  и  $u_3$  плоскости  $\omega$ , удовлетворяющие указанным в теореме условиям.  $\square$

Кроме плоскости  $\omega$  существуют еще три плоскости, каждая из которых содержит вершину данного триэдра и равнонаклонена к плоскостям его граней. Они перпендикулярны соответственно осям конусов, вписанных в триэдры, смежные с данным триэдром.

**Задача 1.** Дан триэдр, ни одно ребро которого не перпендикулярно противоположной грани. Через вершину триэдра в плоскости каждой его грани проведена прямая, перпендикулярная противополож-

ному ребру. Докажите, что полученные таким образом три прямые лежат в одной плоскости  $\sigma$ , перпендикулярной ортооси триэдра.

**Решение.** Пусть прямая  $p$  лежит в плоскости  $Obc$  и перпендикулярна ребру  $a$  триэдра  $Oabc$ ,  $O \in p$ . Прямая  $a_1$  пересечения плоскости  $Obc$  с высотной плоскостью, содержащей ребро  $a$ , есть проекция прямой  $a$  на плоскость  $Obc$ . По теореме о трех перпендикулярах  $p \perp a_1$ . Следовательно, прямая  $p$  перпендикулярна высотной плоскости и ортооси триэдра. По аналогичной причине две другие прямые, удовлетворяющие условиям задачи, перпендикулярны ортооси. Поэтому все три эти прямые лежат в одной плоскости  $\sigma$ .

**Задача 2.** Докажите, что прямые, содержащие биссектрисы углов, смежных с плоскими углами триэдра, лежат в одной плоскости, равнонаклоненной к трем ребрам триэдра.

**Решение.** На ребрах триэдра отложим равные отрезки  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ . Векторы  $\overline{OA} - \overline{OB}$ ,  $\overline{OB} - \overline{OC}$ ,  $\overline{OC} - \overline{OA}$  соответственно коллинеарны указанным прямым. Сумма этих векторов равна нуль-вектору, поэтому они компланарны, а эти прямые лежат в одной плоскости, так как имеют общую точку  $O$ . По лемме пункта 5.1 эта плоскость равнонаклонена к ребрам триэдра.

## §6. Начальные сведения о сферической геометрии

**6.1. Основные понятия.** Сферическая геометрия возникла в связи с потребностями астрономии. В сферической геометрии роль прямых играют *большие окружности сферы*, т. е. окружности, являющиеся сечениями сферы плоскостями, проходящими через ее центр. Через две точки  $A$  и  $B$  сферы, не принадлежащие одному диаметру, можно провести единственную большую окружность, которая точками  $A$  и  $B$  разбивается на две дуги — два сферических отрезка. Длину меньшей из этих дуг принимают за *расстояние* между данными точками, которое удобно измерять величиной соответствующего центрального угла. Если углы измерять в радианах, то на сфере радиуса 1 такое измерение сферического отрезка равно обычной длине дуги.

Любые две большие окружности пересекаются в двух диаметрально противоположных точках сферы. Поэтому в сферической геометрии *нет параллельных* больших окружностей. Геометрия на сфере является *неевклидовой* — первой из неевклидовых геометрий.

*Угол между большими окружностями* определяется как угол между их плоскостями. А он равен углу между касательными к этим окруж-

ностям в точке их пересечения (рис. 33). Три большие окружности сферы разбивают ее на восемь областей, называемых *сферическими треугольниками*.

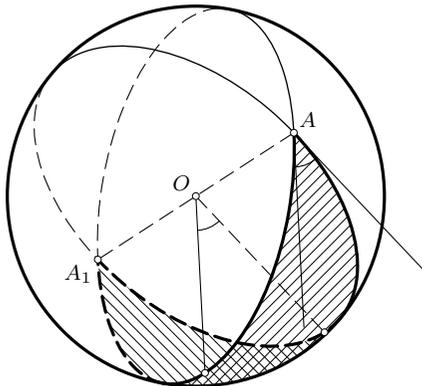


Рис. 33

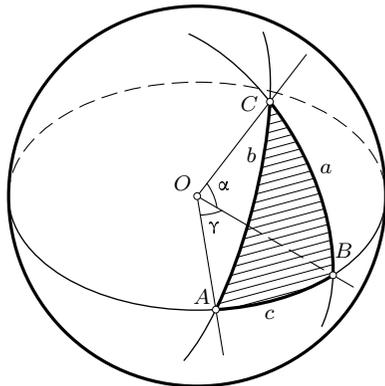


Рис. 34

**6.2. Связь геометрии трехгранного угла со сферической геометрией.** Все формулы и теоремы, относящиеся к трехгранному углу, можно истолковать в терминах сферической геометрии следующим образом. Построим сферу единичного радиуса с центром в вершине  $O$  триэдра. Тогда его ребра определяют некоторый сферический треугольник  $ABC$  (рис. 34). Углы  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  сферического треугольника  $ABC$  измеряются двугранными углами триэдра, а стороны  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — его плоскими углами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

Если радиус сферы равен  $r$ , то  $\alpha = \frac{a}{r}$ ,  $\beta = \frac{b}{r}$ ,  $\gamma = \frac{c}{r}$  — радианные меры этих углов. Отсюда каждая формула для триэдра имеет определенный смысл в сферической геометрии и обратно. Так, например, равенства (2.5), (2.6), (2.9) выражают смысл теорем косинусов и теоремы синусов для сферического треугольника. Равенства (2.13) означают, что произведение синуса стороны сферического треугольника и синуса соответствующей его высоты постоянно для данного треугольника.

Полярным триэдрам соответствуют на сфере полярные сферические треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$ , между сторонами и углами которых имеет место полярная зависимость:  $a + \hat{A}' = b + \hat{B}' = c + \hat{C}' = \pi$  и  $a' + \hat{A} = b' + \hat{B} = c' + \hat{C} = \pi$ .

Биссекторной плоскости двугранного угла триэдра соответствует биссектриса сферического треугольника. Поэтому теорема пункта 4.2 означает, что биссектрисы сферического треугольника пересекаются

в одной точке, равноудаленной от его сторон. Биссектрисе плоского угла триэдра соответствует середина стороны сферического треугольника. Согласно теореме пункта 4.1 медианы сферического треугольника пересекаются в одной точке. Теорема п. 4.3 гласит: серединные перпендикуляры к сторонам сферического треугольника пересекаются в одной точке. Теорема об ортооси (п. 4.4) может быть переформулирована так: высоты сферического треугольника пересекаются в одной точке.

Описанный и вписанный конусы триэдра высекают на сфере «малые» окружности — соответственно описанную и вписанную окружности треугольника на сфере.

Нет надобности переводить на язык сферической геометрии все формулы и теоремы этой главы. Читатель при желании может это сделать сам.

## *Задачи к главе 2*

**2.1.** Докажите, что триэдры равны, если равны их соответственные двугранные углы.

**2.2.** Луч  $OM$  лежит внутри триэдра  $O(ABC)$ . Докажите, что сумма плоских углов триэдра  $O(ABC)$  больше суммы плоских углов триэдра  $O(ABM)$ .

**2.3.** Если все плоские углы триэдра тупые, то и все его двугранные углы также тупые. Докажите это утверждение и обратное ему утверждение.

**2.4.** В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре имеет величину  $\alpha$ . Найдите величину двугранного угла при основании.

**2.5.** В триэдре величина каждого плоского угла равна  $\alpha$ . Найдите величину его двугранного угла.

**2.6.** В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при основании равен  $\varphi$ . Найдите величину двугранного угла при боковом ребре.

**2.7.** Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен  $\alpha$ . Найдите величину двугранного угла при основании.

**2.8.** В триэдр с вершиной  $O$  вписана сфера с центром  $S$ . Докажите, что прямая  $OS$  перпендикулярна плоскости, содержащей точки касания.

**2.9.** В триэдр  $O(ABC)$  вписана сфера, касающаяся его граней в точках  $A_1, B_1, C_1$ . Выразите величину угла  $AOB_1$  через величины плоских углов триэдра.

**2.10.** В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен  $\alpha$ . Найдите угол между противоположными боковыми гранями.

**2.11.** В треугольной пирамиде  $ABCD$  грани  $ABC$  и  $ABD$  — прямоугольные равнобедренные треугольники с общей гипотенузой  $AB$ . Угол между ними равен  $\alpha$ . Найдите величину двугранного угла при ребре  $BC$ .

**2.12.** В триэдре  $O(ABC)$  сумма углов  $AOB$  и  $AOC$  равна  $180^\circ$ . Вычислите угол между ребром  $OA$  и биссектрисой угла  $BOC$ .

**2.13.** Плоские углы триэдра имеют величину  $\alpha$ . Найдите угол между его ребром и осью описанного около него конуса.

**2.14.** В правильный триэдр с плоским углом  $\alpha$  вписан конус. Определите угол между ребром триэдра и осью этого конуса.

**2.15.** Плоские углы триэдра имеют величину  $\alpha$ . Точка  $M$  внутренней области триэдра удалена от каждой его грани на расстояние  $a$ . Вычислите расстояние от точки  $M$  до вершины триэдра.

**2.16.** Докажите, что углы между биссектрисами плоских углов триэдра либо все одновременно острые, либо все тупые, либо все прямые.

**2.17.** Докажите, что сумма косинусов двугранных углов триэдра меньше 1,5.

**2.18.** Даны три попарно скрещивающиеся прямые, не параллельные одной плоскости, и на одной из них точка  $P$ . Постройте плоскость, содержащую данную точку  $P$  и образующую равные углы с этими прямыми.

**2.19.** Через данную точку проведите плоскость, пересекающую ребра данного триэдра под равными углами.

**2.20.** Все плоские углы триэдра прямые. Постройте плоскость, пересекающую этот триэдр по треугольнику, который равен заданному остроугольному треугольнику.

**2.21.** Постройте триэдр по его заданным плоским углам.

**2.22.** Постройте триэдр по его заданным двугранным углам.

**2.23.** Дан триэдр  $O(ABC)$ , у которого плоские углы  $BOC$  и  $COA$  равны. В плоскостях  $COA$  и  $BOC$  выбраны соответственно лучи  $u$ ,  $v$  с началом  $O$ , лежащие по разные стороны от плоскости  $AOB$  так, что угол  $\angle(OA, u)$  равен углу  $\angle(OB, v)$ . Докажите, что биссектриса угла  $\angle(u, v)$  и ребра  $OA$  и  $OB$  лежат в одной плоскости.

**2.24.** Даны три плоскости, содержащие общую прямую, и луч, лежащий в одной из них и имеющий начало на этой прямой. Постройте триэдр, обладающий тем свойством, что каждая из данных плоскостей проходит через одно из его ребер и перпендикулярна противоположной грани, причем одним из ребер служит данный луч.

**2.25.** Даны три прямые в одной плоскости и плоскость  $\alpha$ , проходящая через одну из них. Постройте триэдр, обладающий тем свойством, что каждая из данных прямых перпендикулярна одному из ребер и лежит в противоположащей грани, причем одна из граней лежит в плоскости  $\alpha$ .

**2.26.** Докажите, что синус Штаудта триэдра может быть выражен так:

$$\Delta(O) = 2\sqrt{\sin \sigma \sin(\sigma - \alpha) \sin(\sigma - \beta) \sin(\sigma - \gamma)}, \quad \text{где } \sigma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma).$$

**2.27.** Докажите, что плоские углы любого триэдра удовлетворяют неравенству:

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha < \frac{4}{3}\pi^2.$$

**2.28.** В треугольной пирамиде сумма плоских углов при вершине больше  $180^\circ$ . Докажите, что каждое боковое ребро меньше полупериметра основания.

**2.29.** Докажите, что если в триэдре  $O(ABC)$  двугранный угол при ребре  $OC$  равен  $90^\circ$ , то  $\sin \alpha = \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \hat{B}$ .

**2.30.** Сечением куба плоскостью, содержащей его вершину, является равнобедренный треугольник с углом  $\alpha$  между неравными сторонами. Найдите углы наклона плоскости сечения к плоскостям граней куба.

**2.31.** Если прямая образует равные углы с тремя непараллельными прямыми плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости. Докажите.

**2.32.** Для того чтобы в четырехгранный угол можно было вписать сферу, необходимо и достаточно, чтобы суммы его противоположных двугранных углов были равны. Докажите.

## Ортогональное проектирование

### §1. Свойства ортогонального проектирования

**1.1. Ортогональное проектирование как частный вид параллельного проектирования.** Читатель уже знаком с параллельным проектированием пространства на плоскость ([2], приложение 1). Образ фигуры  $\Phi$  при заданном параллельном проектировании называется *параллельной проекцией*, или *изображением* этой фигуры на плоскости, которую называют *плоскостью проекций*, или плоскостью изображения. Напомним свойства параллельного проектирования.

1. Если прямая не является проектирующей, то ее параллельная проекция есть прямая. Проекцией проектирующей прямой является точка.

2. Проекция проектирующей плоскости — прямая.

3. Проекции непроектирующих параллельных прямых параллельны.

4. Отношение отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, равно отношению их проекций.

В частности, если направление проектирующих прямых перпендикулярно плоскости проекций, то проектирование называется *ортогональным*. Ортогональная проекция точки есть основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость проекций. Ортогональное проектирование обладает свойствами 1–4 и, кроме того, имеет дополнительно другие свойства. К ним можно отнести известную теорему о трех перпендикулярах. Ее следствием служит такое свойство.

5. Если хотя бы одна из двух перпендикулярных прямых параллельна плоскости проекций, а другая не перпендикулярна этой плоскости, то ортогональные проекции этих прямых перпендикулярны.

*Доказательство.* Пусть  $a$  и  $b$  — взаимно перпендикулярные прямые,  $a_1$  и  $b_1$  — их ортогональные проекции на плоскость  $\pi$  (рис. 35), причем  $a \parallel \pi$ . Тогда  $a_1 \perp b_1$ . Действительно, из  $a \parallel \pi$  следует  $a \parallel a_1$  и из  $a \perp b$  следует  $a_1 \perp b$ . По теореме о трех перпендикулярах  $a_1 \perp b_1$ .  $\square$

6. Длина ортогональной проекции отрезка, не перпендикулярного плоскости проекций, равна длине этого отрезка, умноженной на косинус угла его наклона к плоскости проекций (рис. 36):

$$A_1B_1 = AB \cos \alpha \quad (3.1)$$

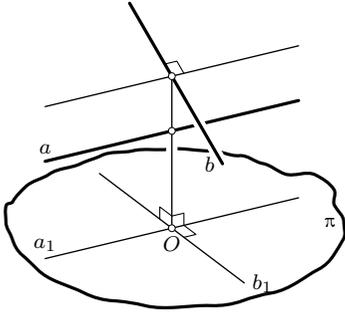


Рис. 35

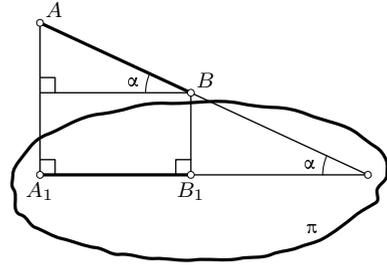


Рис. 36

**1.2. Площадь ортогональной проекции плоской фигуры.** Проекцией фигуры на плоскость  $\pi$  называется множество проекций точек этой фигуры на плоскость  $\pi$ .

**Теорема.** *Площадь ортогональной проекции фигуры, лежащей в плоскости, равна произведению площади этой фигуры и косинуса угла между ее плоскостью и плоскостью проекций:*

$$S_{\text{пр.}} = S \cos \alpha. \quad (3.2)$$

**Доказательство.** Сначала рассмотрим ортогональную проекцию  $A_1B_1C_1$  треугольника  $ABC$ , одна сторона которого параллельна плоскости  $\pi$  проекций (рис. 37). Если  $AB \parallel \pi$  и  $CD$  — высота треуголь-

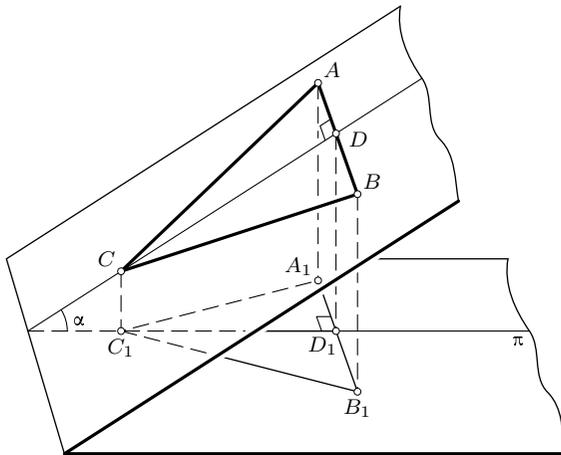


Рис. 37

ника  $ABC$ , то  $C_1D_1$  — высота треугольника  $A_1B_1C_1$  (по свойству 5). Тогда получаем:

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}A_1B_1 \cdot C_1D_1 = \frac{1}{2}AB \cdot (CD \cos \alpha) = S_{ABC} \cos \alpha.$$

Пусть теперь ни одна сторона проектируемого треугольника  $ABC$  не параллельна плоскости проекций. Тогда через его вершину проведем прямую  $m \parallel \pi$ , разбивающую треугольник  $ABC$  на два треугольника (рис. 38). Ее проекция  $m_1$  разбивает треугольник  $A_1B_1C_1$  на два треугольника. По доказанному

$$\begin{aligned} S_{A_1B_1C_1} &= S_{A_1B_1M_1} + S_{A_1C_1M_1} = S_{ABM} \cos \alpha + S_{ACM} \cos \alpha = \\ &= (S_{ABM} + S_{ACM}) \cos \alpha = S_{ABC} \cos \alpha. \end{aligned}$$

Если данная фигура есть плоский многоугольник, то разобьем его на треугольники. Их ортогональные проекции составят ортогональную проекцию данного многоугольника. Поэтому для него также будет истинно равенство (3.2).

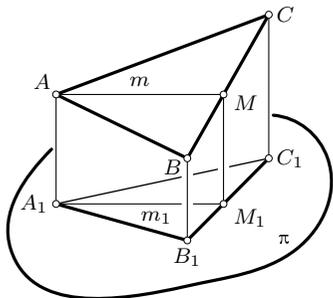


Рис. 38

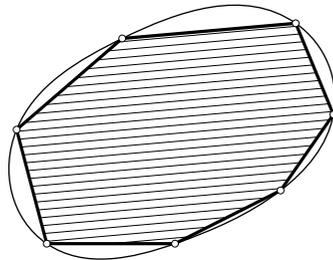


Рис. 39

Наконец, пусть данная фигура  $\Phi$  имеет криволинейную границу (рис. 39). Ее площадь может быть определена как предел последовательности площадей многоугольников, каждый из которых вписан в граничную кривую, при условии, что число вершин (сторон) многоугольника неограниченно увеличивается, а длина наибольшей стороны стремится к нулю. Предполагается, что этот предел существует. В силу того, что теорема истинна для многоугольников и существует предел указанной последовательности площадей многоугольников, она будет истинна и для фигуры  $\Phi$ .  $\square$

Рассмотрим важный пример на применение теоремы о площади ортогональной проекции фигуры. Дан круг радиуса  $r$ , лежащий в плоскости, которая наклонена к плоскости  $\pi$  проекций под углом  $\alpha$ . Проекция

окружности этого круга является *эллипсом* (рис. 40). Проведем в этом круге два перпендикулярных диаметра  $AB$  и  $CD$ , причем  $CD \parallel \pi$ . Тогда  $C_1D_1 \perp A_1B_1$  (по свойству 5) и  $C_1D_1 = 2r$  — наибольший из диаметров эллипса. Перпендикулярный ему диаметр  $A_1B_1 = 2r \cos \alpha$ . Числа  $r$  и  $r \cos \alpha$  называются соответственно большой и малой полуосями эллипса:  $a = r$  и  $b = r \cos \alpha$ . Поэтому на основании доказанной теоремы площадь  $S$  области плоскости проекций, ограниченной эллипсом, равна площади круга, умноженной на  $\cos \alpha$ :

$$S = \pi r^2 \cdot \cos \alpha = \pi r \cdot r \cos \alpha = \pi ab.$$

Итак,  $S = \pi ab$  — площадь области плоскости, ограниченной эллипсом, имеющим полуоси  $a$  и  $b$ .

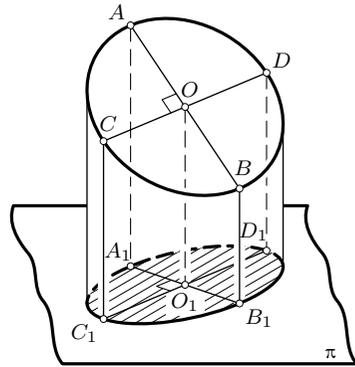


Рис. 40

**1.3. Формула проекций граней тетраэдра.** Пусть  $H$  — ортогональная проекция вершины  $D$  тетраэдра  $DABC$  на плоскость грани  $ABC$ . Обозначим площади граней  $BCD$ ,  $ACD$ ,  $ABD$  и  $ABC$  соответственно  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  и  $S_4$ . Если плоскости первых трех граней наклонены к плоскости четвертой грани  $ABC$  под углами величины  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ , то по теореме о площади ортогональной проекции имеем (рис. 41):

$$S_1 \cos \varphi_1 + S_2 \cos \varphi_2 + S_3 \cos \varphi_3 = S_{HBC} + S_{HAC} + S_{HAB}.$$

Косинусы двугранных углов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  тетраэдра  $DABC$  при ребрах  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  могут отличаться от косинусов углов  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  только знаком.

Если точка  $H$  находится внутри треугольника  $ABC$ , то  $\alpha = \varphi_1$ ,  $\beta = \varphi_2$ ,  $\gamma = \varphi_3$  и тогда сумма площадей проекций трех граней равна  $S_4$ . Поэтому

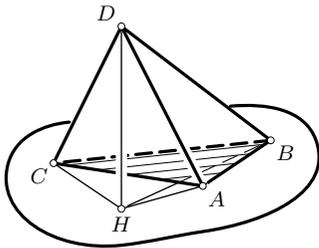


Рис. 41

$$S_1 \cos \alpha + S_2 \cos \beta + S_3 \cos \gamma = S_4. \quad (3.3)$$

Однако один или два из углов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  могут быть тупыми. Например, в случае, представленном на рис. 41,  $\beta > \frac{\pi}{2}$ ,  $\beta = \pi - \varphi_2$ ,  $\cos \beta = -\cos \varphi_2$ . Следовательно, слагаемое  $S_2 \cos \beta$  отрицательно, поэтому

площадь проекции  $HAC$  будет вычитаться из рассматриваемой суммы, а эта сумма снова будет равна  $S_4$ . Очевидно, равенство (3.3) останется

верным и тогда, когда один или два из углов  $\alpha, \beta, \gamma$  прямые, т. е. когда точка  $H$  лежит на стороне треугольника  $ABC$  или совпадает с его вершиной.

Итак, соотношение (3.3) истинно при любом положении проекции  $H$  вершины тетраэдра  $DABC$ , т. е. для любого тетраэдра. Оно называется *формулой проекций для тетраэдра*.

**Следствие.** *Площадь любой грани тетраэдра меньше суммы площадей трех остальных его граней:*

$$S_4 < S_1 + S_2 + S_3.$$

**1.4. Пример задачи.** Дан тетраэдр  $ABCD$ . Докажите, что  $S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2 \cos(\widehat{CD}) = \frac{1}{4}(AB \cdot CD \sin(\widehat{AB, CD}))^2$ , где  $(\widehat{CD})$  — величина двугранного угла при ребре  $CD$ .

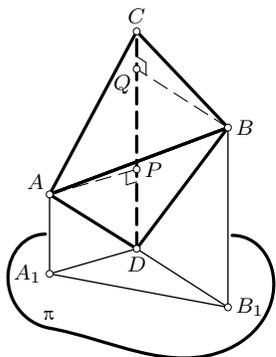


Рис. 42

**Доказательство.** Через вершину  $D$  проведем плоскость  $\pi$  перпендикулярно ребру  $CD$ . Ортогональной проекцией тетраэдра  $ABCD$  на плоскость  $\pi$  является треугольник  $A_1B_1D$  (рис. 42). Пусть  $AP \perp CD$  и  $BQ \perp CD$ . Тогда  $DA_1 = AP = \frac{2S_2}{CD}$  и  $DB_1 = BQ = \frac{2S_1}{CD}$ . По свойству 6

$$A_1B_1 = AB \cos(\widehat{AB, \pi}) = AB \sin(\widehat{AB, CD}).$$

По теореме косинусов для треугольника  $A_1B_1D$  имеем:

$$A_1B_1^2 = DA_1^2 + DB_1^2 - 2DA_1 \cdot DB_1 \cos \widehat{A_1DB_1}.$$

После соответствующих подстановок получаем:

$$(AB \sin(\widehat{AB, CD}))^2 = \left(\frac{2S_2}{CD}\right)^2 + \left(\frac{2S_1}{CD}\right)^2 - 2\frac{4S_1S_2}{CD^2} \cos(\widehat{CD}).$$

А это эквивалентно доказываемому равенству.  $\square$

## §2. Ортогональная проекция угла

**2.1. Общая формула ортогональной проекции угла.** Пусть угол  $ACB$  величины  $\varphi$  ортогонально спроектирован на плоскость, и его проекция  $AC_1B$  имеет меру  $\psi$  (рис. 43). Пусть лучи  $CA, CB$  и плоскость угла наклонены к плоскости проекций соответственно под углами  $\alpha, \beta, \omega$ .

Искомая зависимость между указанными углами является следствием известной зависимости между площадью треугольника  $ABC$  и площадью его ортогональной проекции:  $S_{ABC_1} = S_{ABC} \cos \omega$ , которая эквивалентна равенству

$$AC_1 \cdot BC_1 \sin \psi = AC \cdot BC \sin \varphi \cos \omega,$$

откуда

$$\sin \psi = \frac{AC}{AC_1} \cdot \frac{BC}{BC_1} \sin \varphi \cos \omega.$$

Так как  $\frac{AC}{AC_1} = \frac{1}{\cos \alpha}$  и  $\frac{BC}{BC_1} = \frac{1}{\cos \beta}$ , то получаем окончательно:

$$\sin \psi = \frac{\cos \omega}{\cos \alpha \cos \beta} \sin \varphi. \quad (3.4)$$

Угол  $AC_1B$  есть линейный угол двугранного угла между плоскостями  $ACC_1$  и  $BCC_1$ . Поэтому аналогичную зависимость можно написать сразу по теореме косинусов для трехгранного угла с вершиной  $C$  и ребрами  $CA$ ,  $CB$ ,  $CC_1$ :

$$\cos \varphi = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \cos \psi. \quad (3.5)$$

Это соотношение не содержит угла  $\omega$ , однако оно неудобно в использовании из-за того, что его правая часть есть сумма, а не произведение.

**2.2. Частные случаи.** Рассмотрим важные частные случаи, часто встречающиеся при решении задач.

1°. Если  $\alpha = \beta$ , т.е. треугольник  $ABC$  равнобедренный ( $AC = BC$ ), то на основании соотношения (3.5) имеем:  $\cos \varphi = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cos \psi$ , откуда

$$\cos^2 \alpha = \frac{\cos \varphi - 1}{\cos \psi - 1} = \frac{-2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{-2 \sin^2 \frac{\psi}{2}} \quad \text{и} \quad \cos \alpha = \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}}.$$

Итак, если стороны проектируемого угла меры  $\varphi$  равнонаклонены к плоскости проекций под углом  $\alpha$ , то величина  $\psi$  его ортогональной проекции связана с  $\alpha$  и  $\varphi$  зависимостью:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{\psi}{2} \cos \alpha. \quad (3.6)$$

Тогда соотношение (3.4) принимает вид:

$$\sin \psi = \frac{\cos \omega}{\cos^2 \alpha} \sin \varphi, \quad \text{или} \quad \sin \psi = \frac{\sin^2 \frac{\psi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} \sin \varphi \cos \omega,$$

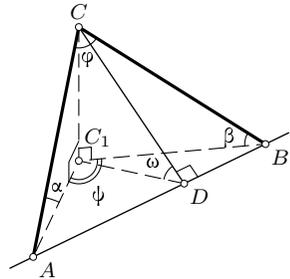


Рис. 43

откуда

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \cos \omega. \quad (3.7)$$

Таким образом, если стороны проектируемого угла меры  $\varphi$  равна-клонены к плоскости проекций и его плоскость наклонена к плоскости проекций под углом  $\omega$ , то величина  $\psi$  ортогональной проекции данного угла связана с  $\varphi$  и  $\omega$  зависимостью (3.7).

2°. Если  $\beta = \omega$  (рис. 44), то зависимость (3.4) упрощается:

$$\sin \varphi = \sin \psi \cos \alpha. \quad (3.8)$$

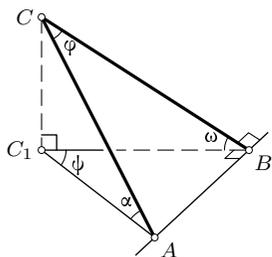


Рис. 44

Используя зеркальную симметрию относительно плоскости  $BCC_1$ , этот случай можно свести к предыдущему. Тогда согласно формуле (3.7) будем иметь

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \psi \cos \omega, \quad \varphi < 90^\circ, \quad \psi < 90^\circ. \quad (3.9)$$

С равным правом

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \omega \cos \psi, \quad \alpha < 90^\circ, \quad \omega < 90^\circ. \quad (3.9a)$$

Итак, если ортогональной проекцией прямоугольного треугольника  $ABC$  является прямоугольный треугольник  $ABC_1$ , в которых прямые углы при вершине  $B$  (или  $A$ ), то имеют место равенства (3.8), (3.9), (3.9a).

Поскольку в этом случае углы  $\omega$  и  $\psi$  меньше  $90^\circ$ , то из последних формул следует, что  $\varphi < \psi$  и  $\alpha < \omega$ . Отсюда получаем известное экстремальное свойство угла между плоскостями (§ 4 гл. 1, теорема 10).

Во всех предыдущих рассуждениях предполагалось, что вершина  $C$  проектируемого угла не принадлежит плоскости проекций. Однако это обстоятельство несущественно. Ясно, что если плоскость проекций заменить любой другой параллельной ей плоскостью, то каждый из рассматриваемых углов не изменит свою величину и потому все полученные формулы останутся в силе. В частности, это имеет место и тогда, когда плоскость проекций будет содержать вершину  $C$  данного угла. В этом можно убедиться еще с помощью зеркальной симметрии относительно плоскости симметрии точек  $C$  и  $C_1$ .

3°. Остался не рассмотренным случай, когда одна из сторон проектируемого угла параллельна плоскости проекций (рис. 45). Пусть такой стороной является сторона  $CB$ . Считая пока угол  $\varphi$  острым, проведем через точку  $A$  плоскость, перпендикулярную  $CB$ . Тогда угол  $C_1AB_1$  является ортогональной проекцией угла  $CAB$  в случае 2° (с учетом

замечания о замене плоскости проекций). Заменяв углы  $\varphi$  и  $\psi$  соответственно на  $90^\circ - \varphi$  и  $90^\circ - \psi$ , по формулам (3.8) и (3.9) получаем:

$$\cos \varphi = \cos \psi \cos \alpha, \quad (3.10)$$

$$\operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{ctg} \psi \cos \omega. \quad (3.11)$$

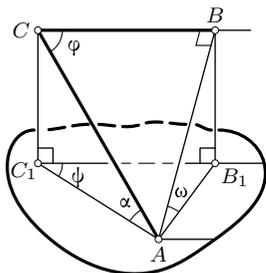


Рис. 45

Когда углы  $\varphi$  и  $\psi$  больше  $90^\circ$ , то смежные с ними углы меньше  $90^\circ$ , и потому для них эти формулы также имеют место. Следовательно, они остаются в силе и для углов  $\varphi$  и  $\psi$ .

Зависимость (3.10) получается из (3.5) при  $\beta = 0$ .

В других возможных ситуациях, кроме рассмотренных, когда одна или обе стороны проектируемого угла не пересекают плоскость проекций и не параллельны ей, следует использовать полученные формулы для углов, смежных или вертикальных проектируемым.

**2.3. Сравнение величины угла и величины его ортогональной проекции.** Исследование начнем со случая, когда  $\beta = \omega$  (рис. 44). Тогда имеет место равенство (3.8), в котором все углы меньше  $90^\circ$ . Из него видно, что  $\sin \varphi < \sin \psi$  и, значит,  $\varphi < \psi$ .

В случае, когда углы  $A$  и  $B$  треугольника  $ABC$  острые, угол  $ACB$  разбивается плоскостью  $CC_1D$ , перпендикулярной прямой  $AB$ , на два угла, каждый из которых на основании предыдущего вывода меньше своей проекции (рис. 43). Поэтому и угол  $ACB$  также меньше своей проекции независимо от его величины.

Если один из углов  $A$  и  $B$  треугольника  $ABC$  тупой, то точка  $D$  находится вне отрезка  $AB$  и поэтому рассуждение, аналогичное предыдущему, будет неверным. Обратимся к равенству (3.4), в котором для данного случая углы  $\varphi$  и  $\psi$  меньше  $90^\circ$ . Сравнение их равносильно сравнению с единицей коэффициента  $\frac{\cos \omega}{\cos \alpha \cos \beta}$ . Следовательно, априори имеем следующие критерии:

$$\begin{aligned} \psi < \varphi &\Leftrightarrow \cos \omega < \cos \alpha \cos \beta, \\ \psi > \varphi &\Leftrightarrow \cos \omega > \cos \alpha \cos \beta, \\ \psi = \varphi &\Leftrightarrow \cos \omega = \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned} \quad (3.12)$$

В силу экстремального свойства линейного угла двугранного угла  $\omega > \alpha$  и  $\omega > \beta$ , следовательно,  $\cos \omega < \cos \alpha$  и  $\cos \omega < \cos \beta$ . Поэтому  $\cos \alpha \cos \beta > \cos^2 \omega$ . Кроме того,  $\cos^2 \omega < \cos \omega < 1$ . При изменении  $\alpha$  и  $\beta$  (они могут быть сколь угодно малыми) произведение  $\cos \alpha \cos \beta$  изменяется непрерывно и принимает все значения из открытого промежутка  $(\cos^2 \omega, 1)$ ,

которому принадлежит  $\cos \omega$ . Таким образом, каждый из трех случаев (3.12) может иметь место.

Осталось рассмотреть случай, когда сторона  $CB$  проектируемого угла  $ACB$  параллельна плоскости проекций (рис. 45). Тогда имеет место зависимость (3.10), из которой видно, что для углов  $\varphi$  и  $\psi$ , меньших  $90^\circ$ , будет  $\cos \varphi < \cos \psi$  и поэтому  $\varphi > \psi$ . Если же эти углы больше  $90^\circ$ , то смежные с ними углы  $180^\circ - \varphi$  и  $180^\circ - \psi$  меньше  $90^\circ$  и по доказанному  $180^\circ - \varphi > 180^\circ - \psi$ , откуда  $\varphi < \psi$ . При  $\varphi = 90^\circ$  из (3.10) следует  $\psi = 90^\circ$ .

Подведем итоги. Если обе стороны угла  $ACB$  пересекают плоскость проекций (в точках  $A$  и  $B$ ) и углы треугольника  $ABC$  при вершинах  $A$  и  $B$  тупые, то ортогональная проекция этого угла больше его. Если один из указанных углов тупой, то сравнение величины  $\varphi$  угла  $ACB$  и величины  $\psi$  его проекции производится по критериям (3.12). Если одна сторона проектируемого угла параллельна плоскости проекций, а другая ее пересекает, то этот угол больше своей проекции, если он острый, и меньше ее, если он тупой, а проекцией прямого угла является также прямой угол.

Если одна или обе стороны проектируемого угла не пересекают плоскость проекций и не параллельны ей, то сравнение величины этого угла с величиной его проекции осуществляется помощью смежного с ним угла или вертикального ему. К нему применимы предыдущие критерии. Однако существенно учитывать, что неравенство для данного угла и его проекции и неравенство для смежного угла и его проекции имеют противоположный смысл, так как сумма смежных углов постоянна.

**2.4. Примеры решения задач.** Полученные соотношения весьма эффективны в приложениях. Покажем это на примерах.

**Задача 1.** Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен  $\varphi$ . Найдите величину двугранного угла при ее основании.

**Решение.** Поскольку ортогональной проекцией боковой грани пирамиды является равнобедренный треугольник с углом  $120^\circ$  при его вершине, то на основании формулы (3.7) сразу получаем:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg} 60^\circ \cos \omega, \quad \text{откуда} \quad \cos \omega = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

**Задача 2.** В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  двугранный угол при основании равен  $\alpha$ . Найдите величину двугранного угла при боковом ребре.

**Решение.** Пусть  $SA = SB = SC$ , плоские углы при вершине  $S$  равны  $\gamma$ ,  $Q$  — середина ребра  $BC$ . Тогда ребро  $BC$  перпендикулярно плоскости  $ASQ$  и угол  $AQS$  есть линейный угол  $\alpha$  данного двугранного угла

(рис. 46). Заметив, что угол  $\alpha$  есть ортогональная проекция угла  $ABS$ , используем соотношение (3.4). Если плоскость  $BSP$  перпендикулярна ребру  $SA$  и  $x$  — величина искомого угла  $BPC$ , то заменив в (3.4)  $\alpha$  на  $30^\circ$ ,  $\beta$  на  $\frac{\gamma}{2}$ ,  $\omega$  на  $\frac{x}{2}$ ,  $\varphi$  на  $90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ ,  $\psi$  на  $\alpha$ , получим:

$$\sin \alpha = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} \sin \left( 90^\circ - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{2 \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{3}},$$

откуда  $\cos x = \frac{3}{2} \sin^2 \alpha - 1$ .

**Задача 3.** Плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен  $\alpha$ . Найдите угол между противоположными боковыми гранями.

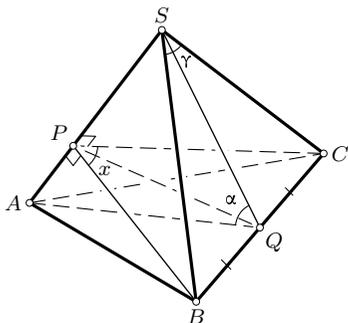


Рис. 46

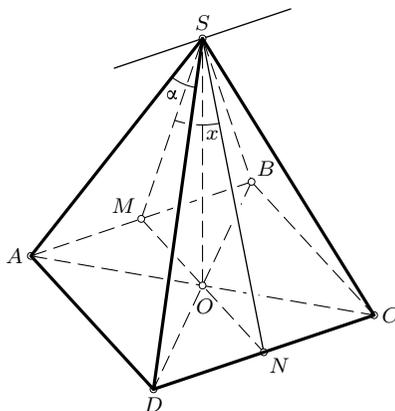


Рис. 47

**Решение.** Пусть  $M$  и  $N$  — середины ребер  $AB$  и  $CD$  данной пирамиды  $SABCD$  (рис. 47). Тогда угол  $MSN$  есть искомый линейный угол двугранного угла между плоскостями  $SAB$  и  $SCD$  (его ребро параллельно  $AB$  и  $CD$ ). Угол  $ASD$  ортогонально проектируется на плоскость  $SMN$ . Используем зависимость (3.7):

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2},$$

откуда  $\sin \frac{x}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  и  $\cos x = 1 - 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$ .

**Задача 4.** Найдите величину угла между скрещивающимися медианами двух граней правильного тетраэдра.

**Решение.** Угол  $x$  между медианами  $DE$  и  $AF$  граней  $ABD$  и  $ADC$  правильного тетраэдра  $ABCD$  (рис. 48) равен углу  $MAF$  ( $AMDE$  —

прямоугольник). Этот угол ортогонально проектируется на угол  $DEF$ , являющийся половиной  $\psi$  линейного угла двугранного угла правильного тетраэдра. Так как  $AM \parallel ED$ , то имеет место зависимость (3.10), на основании которой  $\cos x = \cos^2 \psi$ . Так как  $\cos 2\psi = \frac{1}{3}$ , то  $\cos^2 \psi = \frac{1 + \cos 2\psi}{2} = \frac{2}{3}$ . Итак,  $\cos x = \frac{2}{3}$ .

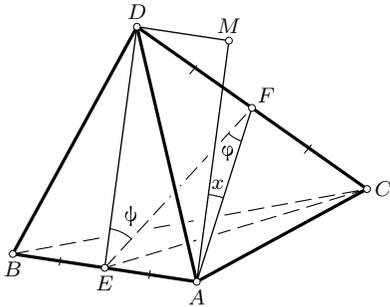


Рис. 48

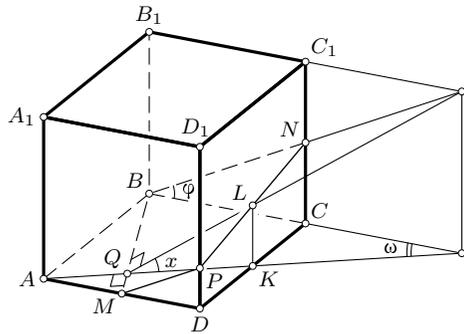


Рис. 49

**Задача 5.** В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  через вершину  $B$  и середины  $M$  и  $N$  ребер  $AD$  и  $CC_1$  проведена плоскость. Найдите величину угла, под которым эта плоскость наклонена к плоскости грани  $ABCD$ .

**Решение.** Сечение  $BMPN$  куба плоскостью  $BMN$  изображено на рис. 49. Линейный угол  $KQL$  искомого двугранного угла ( $K$  — середина  $DC$ ) есть ортогональная проекция угла  $\varphi = \angle NBC$ . Пользуясь формулой (3.9), получаем:  $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} x \cos \omega$ , где  $\omega$  — величина угла между плоскостями углов  $\varphi$  и  $x$ . Согласно условиям, определяющим секущую плоскость  $BMN$ ,  $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \omega = \frac{1}{2}$ , откуда  $\cos \omega = \frac{2}{\sqrt{5}}$ , и поэтому  $\frac{1}{2} = \operatorname{tg} x \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}$ ,  $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{5}}{4}$ .

### §3. Ортогональная проекция вектора

#### на плоскость

**3.1. Вектор ортогональной проекции вектора.** Если отрезок  $A_1 B_1$  — ортогональная проекция отрезка  $AB$  на прямую с направляющим единичным вектором  $\bar{e}$ , то число  $|\overline{AB}| \cos \alpha$ , где  $\alpha = (\overline{AB}, \bar{e})$ , называется скалярной проекцией вектора  $\overline{AB}$  на эту прямую, а вектор  $A_1 B_1$  называется векторной проекцией вектора  $\overline{AB}$ , или вектором ортогональной

проекция вектора  $\overline{AB}$  (рис. 50):

$$Pr_{\vec{e}} \overline{AB} = \overline{A_1B_1} = |\overline{AB}| \cos \alpha \cdot \vec{e} = (\overline{AB} \cdot \vec{e}) \vec{e}. \quad (3.13)$$

Пусть дана плоскость  $\pi$  и перпендикулярный ей единичный вектор  $\vec{e}$  и пусть  $\vec{p}$  — вектор ортогональной проекции данного вектора  $\vec{r}$  на

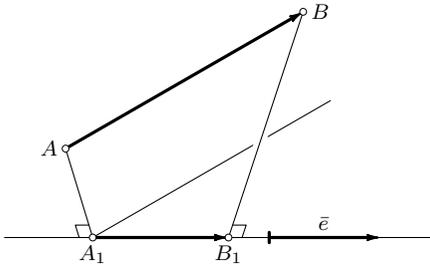


Рис. 50

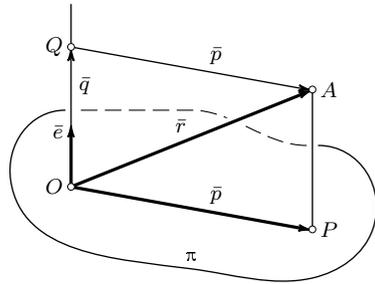


Рис. 51

плоскость  $\pi$  (рис. 51). Тогда  $\vec{p} = \vec{r} - \vec{q}$ , где  $\vec{q}$  — вектор ортогональной проекции вектора  $\vec{r}$  на прямую с направляющим вектором  $\vec{e}$ :

$$\vec{q} = Pr_{\vec{e}} \vec{r} = (\vec{r} \cdot \vec{e}) \vec{e}. \quad (3.14)$$

Так как  $\vec{r} = \vec{p} + \vec{q}$  и  $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$ , то

$$\vec{r}^2 = \vec{p}^2 + \vec{q}^2 = \vec{p}^2 + (\vec{r} \cdot \vec{e})^2,$$

откуда

$$\vec{p}^2 = \vec{r}^2 - (\vec{r} \cdot \vec{e})^2. \quad (3.15)$$

**3.2. Решение задач.** Формулы (3.14) и (3.15) удобны в применениях. Рассмотрим решения трех следующих задач.

**Задача 1.** Докажите, что сумма квадратов ортогональных проекций всех ребер куба на произвольную плоскость постоянна.

**Решение.** Пусть  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  — векторы попарно перпендикулярных трех ребер куба и  $\vec{e}$  — единичный вектор, перпендикулярный плоскости проекций. Тогда сумма квадратов проекций всех 12 ребер куба равна  $4(\vec{a}_1^2 + \vec{b}_1^2 + \vec{c}_1^2)$ , где  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{b}_1$ ,  $\vec{c}_1$  — векторные проекции векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ . Согласно (3.15) эта сумма равна  $4(\vec{a}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{e})^2 + \vec{b}^2 - (\vec{b} \cdot \vec{e})^2 + \vec{c}^2 - (\vec{c} \cdot \vec{e})^2) = 4(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 - \vec{a}^2 \cos^2 \alpha - \vec{b}^2 \cos^2 \beta - \vec{c}^2 \cos^2 \gamma)$ , где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — углы вектора  $\vec{e}$  с векторами  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ . Если  $a$  — длина ребра куба, то  $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = a^2$  и поэтому искомая сумма равна  $12a^2 - 4a^2(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$ . Учитывая тождество (1.1), получаем, что рассматриваемая сумма равна  $8a^2$ , т. е. не зависит от выбора плоскости проекций.

**Задача 2.** Докажите, что сумма квадратов ортогональных проекций всех ребер правильного тетраэдра на произвольную плоскость не зависит от выбора плоскости.

**Решение.** Построим для данного тетраэдра описанный параллелепипед — куб (п. 3.2, гл. 1). Пусть векторы  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  — векторы трех попарно перпендикулярных ребер этого куба. Тогда векторы  $\bar{a} + \bar{b}$ ,  $\bar{b} + \bar{c}$ ,  $\bar{c} + \bar{a}$ ,  $\bar{a} - \bar{b}$ ,  $\bar{a} - \bar{c}$ ,  $\bar{b} - \bar{c}$  есть векторы ребер данного тетраэдра. По формуле (3.15) рассматриваемая сумма  $\sigma$  квадратов их проекций равна:  $\sigma = (\bar{a} + \bar{b})^2 - ((\bar{a} + \bar{b})\bar{e})^2 + (\bar{b} + \bar{c})^2 - ((\bar{b} + \bar{c})\bar{e})^2 + (\bar{c} + \bar{a})^2 - ((\bar{c} + \bar{a})\bar{e})^2 + (\bar{a} - \bar{b})^2 - ((\bar{a} - \bar{b})\bar{e})^2 + (\bar{a} - \bar{c})^2 - ((\bar{a} - \bar{c})\bar{e})^2 + (\bar{b} - \bar{c})^2 - ((\bar{b} - \bar{c})\bar{e})^2 = 4(\bar{a}^2 + \bar{b}^2 + \bar{c}^2) - 4((\bar{a}\bar{e})^2 + (\bar{b}\bar{e})^2 + (\bar{c}\bar{e})^2) = 12a^2 - 4a^2(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$ , где  $a$  — длина ребра куба,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — углы векторов  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  с вектором  $\bar{e}$ . Так как  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ , то  $\sigma = 8a^2$ . Если  $m$  — длина ребра тетраэдра, то  $m^2 = 2a^2$  и  $\sigma = 4m^2$ .

**Задача 3.** Докажите, что сумма квадратов расстояний от вершин правильного тетраэдра  $ABCD$  до произвольной прямой, проходящей через его центр  $O$ , не зависит от выбора прямой.

**Решение.** Пусть  $\bar{e}$  — единичный вектор, коллинеарный заданной прямой. Рассматриваемая сумма квадратов расстояний  $d_i$  от вершин тетраэдра до этой прямой равна сумме квадратов ортогональных проекций векторов  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$ ,  $\overline{OC}$ ,  $\overline{OD}$  на плоскость, перпендикулярную вектору  $\bar{e}$ . Рассмотрим куб, описанный около тетраэдра, и векторы  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  ребер куба, направленные в вершины  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Тогда  $\overline{OD} = \frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$ ,  $\overline{OA} = \frac{1}{2}(\bar{a} - \bar{b} - \bar{c})$ ,  $\overline{OB} = \frac{1}{2}(\bar{b} - \bar{a} - \bar{c})$ ,  $\overline{OC} = \frac{1}{2}(\bar{c} - \bar{a} - \bar{b})$  и  $\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = \overline{OC}^2 = \overline{OD}^2 = R^2$ , где  $R$  — радиус описанной около тетраэдра сферы. По формуле (3.15) находим:  $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 4R^2 - \frac{1}{4} \cdot 4((\bar{a}\bar{e})^2 + (\bar{b}\bar{e})^2 + (\bar{c}\bar{e})^2) = 4R^2 - a^2(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$ , где  $a$  — длина ребра описанного куба,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — углы заданной прямой с его ребрами,  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ . Легко подсчитать, что  $a^2 = \frac{4}{3}R^2$ . Следовательно,  $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = \frac{8}{3}R^2 = \text{const}$ .

## Задачи к главе 3

**3.1.** В тетраэдре  $ABCD$  ребра  $DA$ ,  $DB$ ,  $DC$  попарно перпендикулярны. Докажите, что площадь каждой грани, содержащей вершину  $D$ , есть средняя геометрическая величина площади ее ортогональной проекции на плоскость  $ABC$  и площади грани  $ABC$ .

**3.2.** Докажите, что в прямоугольном тетраэдре  $ABCD$  с прямыми плоскими углами при вершине  $D$  имеет место равенство:

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2,$$

где  $S$  — площадь грани  $ABC$ . (Стереометрический аналог теоремы Пифагора.)

**3.3.** Измерения прямоугольного параллелепипеда равны  $a, b, c$ . Найдите площадь сечения плоскостью, содержащей середины шести его ребер.

**3.4.** Основание пирамиды — ромб со стороной  $a$ . Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания и образуют между собой угол величины  $\beta$ . Две другие боковые грани наклонены к плоскости основания под равными углами величины  $\alpha$ . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

**3.5.** Основанием прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  является параллелограмм. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через середины сторон  $AB$  и  $AD$  основания и вершину  $C_1$ . Вычислите площадь сечения, если секущая плоскость наклонена к плоскости основания под углом  $\alpha$ , а площадь основания равна  $S$ .

**3.6.** Основание пирамиды — правильный треугольник со стороной  $a$ . Одна из боковых граней также является правильным треугольником и перпендикулярна плоскости основания. Определите площадь боковой поверхности пирамиды.

**3.7.** Основанием пирамиды служит равнобокая трапеция с боковой стороной  $a$  и острым углом  $\alpha$ . Все боковые грани наклонены к плоскости основания под равными углами величины  $\beta$ . Вычислите площадь полной поверхности пирамиды.

**3.8.** Основанием пирамиды является равнобокая трапеция, длины оснований которой равны  $a$  и  $b$  ( $a > b$ ). Боковые грани наклонены к плоскости основания под равными углами величины  $\alpha$ . Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

**3.9.** Площадь полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды равна  $S$ , двугранный угол при основании имеет величину  $\alpha$ . Найдите объем пирамиды.

**3.10.** Докажите, что сумма квадратов площадей ортогональных проекций плоской фигуры на три попарно перпендикулярные плоскости равна квадрату площади этой фигуры.

**3.11.** В правильном тетраэдре  $ABCD$  точка  $M$  — середина высоты  $DH$ . Докажите, что прямые  $MA, MB, MC$  попарно перпендикулярны.

**3.12.** В тетраэдре  $ABCD$  ребра  $DA$ ,  $DB$ ,  $DC$  попарно перпендикулярны и равны, точка  $H$  — ортогональная проекция вершины  $D$  на плоскость  $ABC$ , точка  $Q$  симметрична точке  $H$  относительно вершины  $D$ . Докажите, что тетраэдр  $QABC$  правильный.

**3.13.** В триэдре все плоские углы прямые. Докажите, что треугольник, являющийся сечением этого триэдра плоскостью, не проходящей через его вершину, остроугольный.

**3.14.** Постройте прямой триэдр, ребра которого ортогонально проектировались бы на данную плоскость в три заданных луча.

**3.15.** В правильной треугольной пирамиде угол при вершине равен  $\alpha$ , боковое ребро имеет длину  $l$ . Вычислите площадь сечения ее плоскостью, проходящей через сторону основания перпендикулярно противоположному боковому ребру.

**3.16.** В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро имеет длину  $l$ , а двугранный угол при нем равен  $\alpha$ . Найдите объем пирамиды.

**3.17.** В правильной четырехугольной усеченной пирамиде угол между плоскостью, содержащей диагонали оснований, и плоскостью, проходящей через сторону нижнего основания и противоположную сторону верхнего основания, равен  $\alpha$ . Найдите отношение площадей сечений пирамиды этими плоскостями.

**3.18.** Отношение площади плоской фигуры к площади ее параллельной проекции на некоторую плоскость обратно отношению синусов углов между направлением проектирования и плоскостями данной фигуры и ее проекции. Докажите это утверждение, пользуясь ортогональным проектированием плоскости на плоскость.

**3.19.** Докажите, что отношение площадей двух фигур, лежащих в одной плоскости, равно отношению площадей их параллельных проекций на другую плоскость.

**3.20.** В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен углу наклона бокового ребра к плоскости основания. Найдите этот угол. Постройте его циркулем и линейкой. Решите аналогичную задачу для правильной четырехугольной пирамиды.

# Геометрические места точек пространства

## §1. Основные геометрические места точек пространства

**1.1. Сущность задачи на нахождение ГМТ.** Напомним, что *геометрическим местом точек* (ГМТ) пространства, обладающих данным свойством, называется множество *всех* точек пространства, каждая из которых обладает этим свойством. Все остальные точки пространства указанным свойством не обладают. ГМТ задается свойством точек, которое называется *характеристическим свойством* этого ГМТ (фигуры).

Каждая задача, в которой требуется *найти ГМТ* по его характеристическому свойству, предполагает требование описать это ГМТ наглядно через известные элементарные фигуры. Решение задачи на отыскание ГМТ неизбежно приводит к доказательству двух утверждений — *прямого и ему противоположного*: необходимо доказать, что 1) каждая точка предполагаемого (искомого) ГМТ обладает заданным свойством, 2) любая точка, не принадлежащая этой фигуре, заданным свойством не обладает. Вместо второго утверждения можно доказывать эквивалентное ему утверждение, обратное первому: если точка обладает заданным свойством, то она принадлежит искомой фигуре.

Решение задачи на нахождение ГМТ пространства по заданному его характеристическому свойству в большинстве случаев начинается с создания предположения (гипотезы) о виде искомой фигуры, в чем существенную роль играют известные ГМТ плоскости. Потом исследуются другие положения плоскости, сохраняющие заданное свойство точек, что позволяет определить вид искомой фигуры.

Нередко искомое ГМТ представляет собой пересечение уже известных ГМТ.

Исследование полученного решения состоит в рассмотрении особых случаев взаимного расположения объектов (точек, прямых, плоскостей и др.), через которые задано характеристическое свойство точек искомой фигуры (ГМТ).

Для примера найдем геометрическое место точек пересечения плоскостей, содержащих данную точку  $A$ , со всеми перпендикулярными им прямыми, лежащими в данной плоскости  $\alpha$  и пересекающимися в данной точке  $B$ .

Пусть точка  $A$  не лежит в плоскости  $\alpha$  и точка  $H$  — ее ортогональная проекция на плоскость  $\alpha$  (рис. 52). Пусть  $M$  — произвольная точка искомого ГМТ, т. е.  $M = (BM) \cap \gamma$ ,  $BM \perp \gamma$ ,  $BM \subset \alpha$ ,  $A \in \gamma$ .

По определению  $\alpha \perp \gamma$  (п. 2.2, гл. 1). На основании следствия из него  $(AH) \subset \gamma$ . Поскольку  $BM \perp AM$ , то  $MH \perp BM$ . Следовательно, точка  $M$

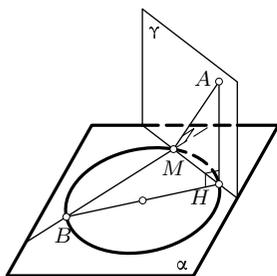


Рис. 52

лежит на окружности с диаметром  $BH$ . Докажем обратное утверждение. Пусть  $M$  — произвольная точка окружности с диаметром  $BH$ , не совпадающая с точками  $B$  и  $H$ . Тогда угол  $BMH$  прямой и из  $BM \perp MN$  следует  $BM \perp AM$  и затем  $BM \perp (AMH)$ . Значит, точка  $M$  обладает заданным свойством (является точкой пересечения прямой, лежащей в плоскости  $\alpha$ , и плоскости, перпендикулярной этой прямой и содержащей точку  $A$ ). Точки  $H$  и  $B$  также обладают этим свойством: точка  $H$  лежит в плоскости, проходящей через точку  $A$  и перпендикулярной  $BH$ , а точка  $B$  лежит в плоскости  $ABH$  и на прямой плоскости  $\alpha$  и перпендикулярной  $BH$ .

Таким образом, искомым ГМТ является окружность в плоскости  $\alpha$  с диаметром  $BH$ .

Отметим два частных случая. 1)  $A \in \alpha$ . Тогда точки  $A$  и  $H$  совпадают и искомым ГМТ является та же окружность. 2) Если точки  $B$  и  $H$  совпадают, то искомым ГМТ является одна точка  $B$ .

**1.2. Простейшие ГМТ пространства.** Следующие девять ГМТ пространства являются простейшими (в определенном смысле первоначальными).

I. Множество точек пространства, удаленных от данной точки  $O$  на заданное расстояние  $R$ , есть по определению сфера  $(O, R)$  с центром  $O$  радиуса  $R$ . Ее можно рассматривать и как ГМТ пространства, из которых данный отрезок виден под прямым углом.

II. Множество точек пространства, каждая из которых равноудалена от двух данных точек  $A$  и  $B$ , есть плоскость  $\sigma$ , проходящая через середину  $O$  отрезка  $AB$  перпендикулярно этому отрезку (плоскость симметрии точек  $A$  и  $B$ ). Действительно, проведем через прямую  $AB$  произвольную плоскость  $\alpha$ . Множество точек плоскости  $\alpha$ , каждая из которых равноудалена от точек  $A$  и  $B$ , есть серединный перпендикуляр

к отрезку  $AB$ . Объединение всех таких перпендикуляров, получаемых во всех плоскостях  $\alpha$ , и есть указанная плоскость  $\sigma$ .

III. Геометрическое место точек пространства, удаленных от данной плоскости  $\alpha$  на данное расстояние  $h$ , есть пара плоскостей, параллельных данной плоскости  $\alpha$ . Эти же две плоскости можно рассматривать как объединение прямых, каждая из которых параллельна плоскости  $\alpha$  и удалена от нее на расстояние  $h$ .

IV. ГМТ пространства, равноудаленных от двух данных параллельных плоскостей, есть параллельная им плоскость, делящая пополам любой отрезок с концами на данных плоскостях.

V. ГМТ пространства, удаленных от данной прямой  $l$  на данное расстояние  $r$ , есть круговая цилиндрическая поверхность с осью  $l$  радиуса  $r$ . Ее можно рассматривать как объединение всех прямых, каждая из которых параллельна  $l$  и удалена от нее на расстояние  $r$ , а также как объединение всех окружностей радиуса  $r$  с центрами на  $l$  в плоскостях, перпендикулярных прямой  $l$ .

VI. ГМТ пространства, каждая из которых равноудалена от двух данных параллельных прямых  $a$  и  $b$ , есть плоскость  $\gamma$ , перпендикулярная плоскости  $\pi$  этих прямых и содержащая среднюю линию  $m$  полосы между этими прямыми (рис. 53).

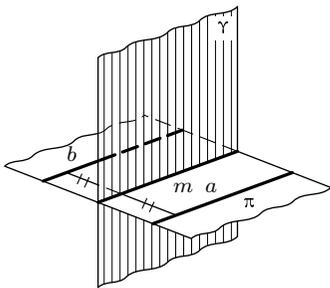


Рис. 53

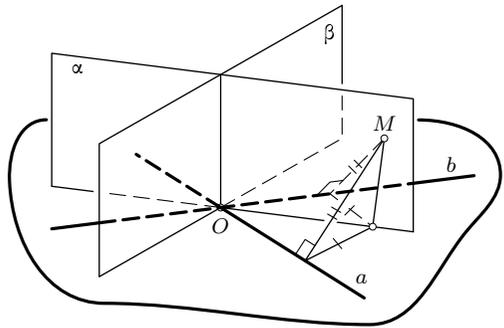


Рис. 54

VII. ГМТ пространства, каждая из которых равноудалена от двух данных пересекающихся прямых  $a$  и  $b$ , есть пара взаимно перпендикулярных плоскостей, перпендикулярных плоскости данных прямых и содержащих биссектрисы углов между ними (рис. 54).

VIII. Геометрическое место точек, каждая из которых равноудалена от двух данных пересекающихся плоскостей, состоит из двух перпендикулярных плоскостей — биссекторных плоскостей двугранных углов между данными плоскостями.

IX. ГМТ пространства, каждая из которых равноудалена от трех неколлинеарных точек  $A, B, C$  есть пересечение двух геометрических мест  $\Pi$ : плоскости  $\gamma$  симметрии точек  $A$  и  $B$  и плоскости  $\alpha$  симметрии точек  $B$  и  $C$ , т.е. прямая  $l = \gamma \cap \alpha$  (рис. 55). Точка  $O = l \cap (ABC)$  является центром окружности, описанной около треугольника  $ABC$ . По этой причине прямая  $l$  называется *осью окружности*  $ABC$ . Она принадлежит также и плоскости  $\beta$  симметрии точек  $C$  и  $A$ .

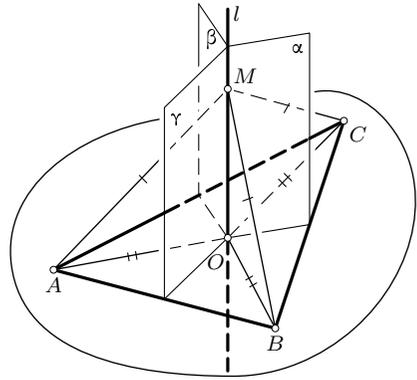


Рис. 55

## §2. ГМТ пространства, задаваемые двумя скрещивающимися прямыми

**2.1. Серединная плоскость скрещивающихся прямых.** Найдем геометрическое место середин отрезков, концы каждого из которых принадлежат двум данным скрещивающимся прямым  $a$  и  $b$ .

Решение 1. Пусть  $M$  — произвольная точка искомого множества, т.е. середина некоторого отрезка  $AB$ ,  $A \in a$ ,  $B \in b$  (рис. 56). Построим пару параллельных плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ , содержащих соответственно прямые  $a$  и  $b$  (п. 3.1, гл. 1). Проведем через точку  $M$  плоскость  $\gamma$ , параллельную этим плоскостям. По теореме п. 3.5 гл. 1 в плоскостях  $\alpha$  и  $\beta$  лежат середины всех отрезков с концами на  $\alpha$  и  $\beta$ , в частности, и середины всех отрезков с концами на прямых  $a$  и  $b$ . Плоскость  $\gamma$  называется *серединной плоскостью* скрещивающихся прямых.

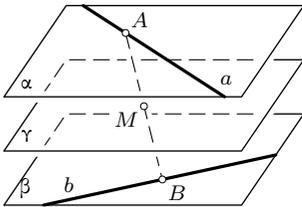


Рис. 56

Обратно, пусть точка  $M$  — произвольная точка серединной плоскости  $\gamma$ . Прямая  $l$  пересечения плоскостей  $(M, a)$  и  $(M, b)$  пересекает каждую из прямых  $a$  и  $b$ . Следовательно, точка  $M$  принадлежит искомому ГМТ.

Итак, *геометрическим местом середин отрезков, концы каждого из которых принадлежат двум скрещивающимся прямым, является серединная плоскость  $\gamma$  этих прямых.*

Решение 2 (методом преобразований). Фиксируем точку  $A$  прямой  $a$ . Гомотетия с центром  $A$  и коэффициентом  $1/2$  отображает прямую  $b$  на прямую  $b_0 \parallel b$  (рис. 57), на которой лежат середины отрезков  $AB$  для любой точки  $B$  прямой  $b$ . Аналогично фиксируем точку  $B$ . Гомотетия с центром  $B$  и коэффициентом  $1/2$  отображает прямую  $a$  на прямую  $a_0 \parallel a$ . Если перемещать одновременно точку  $A$  по прямой  $a$ , а точку  $B$  по прямой  $b$ , то объединение всех прямых  $a_0$  и  $b_0$  — образов прямых  $a$  и  $b$  при указанных гомотетиях есть срединная плоскость  $\gamma$ , содержащая середины всех отрезков  $AB$ .

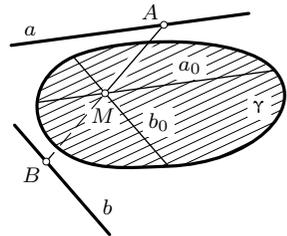


Рис. 57

**2.2. Гиперболический параболоид.** Поставим задачу найти ГМТ, каждая из которых равноудалена от двух скрещивающихся прямых  $a$  и  $b$ . Для этого пересечем их произвольной прямой  $c$ . На основании ГМТ VII геометрическим местом точек, каждая из которых равноудалена от прямых  $a$  и  $c$ , есть определенная пара плоскостей  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Геометрическим местом точек, каждая из которых равноудалена от прямых  $c$  и  $b$  есть определенная пара плоскостей  $\sigma_3$  и  $\sigma_4$ . Точки четырех прямых пересечения плоскостей  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$  принадлежат искомому ГМТ. Меняя секущую прямую  $c$ , получим этим путем бесконечное множество прямых, каждая точка которых равноудалена от данных скрещивающихся прямых  $a$  и  $b$ . Объединение всех прямых этого множества представляет собой поверхность, называемую *гиперболическим параболоидом*. Часть его изображена на рис. 58.

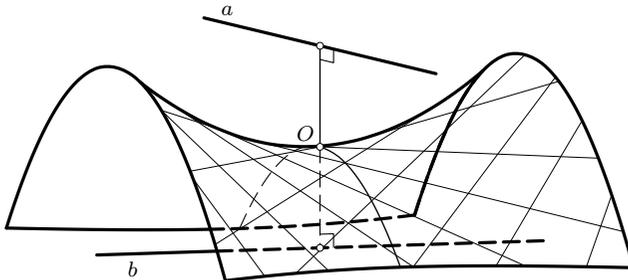


Рис. 58

Эта седлообразная поверхность изучается в вузах. Гиперболический параболоид может быть определен как множество прямых, каждая из которых пересекает три данные попарно скрещивающиеся пря-

мые, параллельные одной плоскости. Тогда три данные прямые также принадлежат заданному ими гиперболическому параболоиду. Каждая принадлежащая ему прямая называется его *образующей*. Параболоид имеет два подмножества (два семейства) образующих: одно семейство состоит из всех секущих прямых для заданных трех прямых, а второе включает эти три прямые. Любые две образующие одного семейства скрещиваются, а любые две образующие разных семейств пересекаются или параллельны.

**Теорема.** *Каждая точка биссектрис  $l$  и  $m$  углов между ортогональными проекциями двух данных скрещивающихся прямых на их серединную плоскость равноудалена от данных прямых, т. е. принадлежит гиперболическому параболоиду.*

**Доказательство.** Пусть  $AB$  — общий перпендикуляр данных скрещивающихся прямых  $a$  и  $b$ ,  $\gamma$  — их серединная плоскость,  $l$  — одна

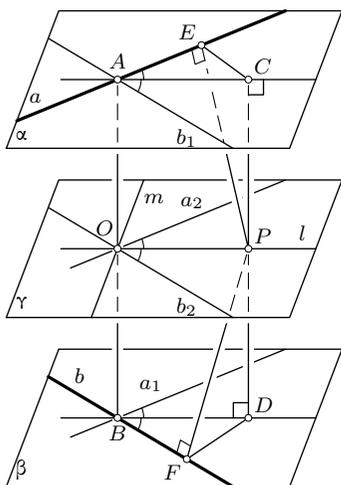


Рис. 59

из биссектрис углов между ортогональными проекциями  $a_2$  и  $b_2$  прямых  $a$  и  $b$  на плоскость  $\gamma$  (рис. 59). Из произвольной точки  $P \in l$  опустим перпендикуляры  $PC$  и  $PD$  на плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ , а также перпендикуляры  $PE$  и  $PF$  на прямые  $a$  и  $b$ . По теореме о трех перпендикулярах  $CE \perp a$  и  $DF \perp b$ . Из равенства прямоугольных треугольников  $ACE$  и  $BDF$  следует  $CE = DF$ , а из равенства прямоугольных треугольников  $PCE$  и  $PDF$  следует  $PE = PF$ . Некоторые опущенные подробности доказательства читатель восполнит сам, пользуясь рис. 59.  $\square$

Указанные в теореме прямые  $l$  и  $m$  принадлежат к разным семействам образующих гиперболического параболоида.

### §3. Три ГМТ пространства, аналогичные ГМТ плоскости

**3.1. Окружность Аполлония и сфера Аполлония.** Найдем ГМТ пространства, для каждой из которых отношение расстояний до двух данных точек  $A$  и  $B$  одно и то же (равно данному отношению  $t : n$  двух отрезков).

Проведем через прямую  $AB$  произвольную плоскость  $\alpha$  и найдем сначала множество точек плоскости  $\alpha$ , принадлежащих искомому ГМТ-пространства. На прямой  $AB$  существуют две точки  $P$  и  $Q$ , для которых  $PA : PB = QA : QB = m : n$ . Для их построения проведем через точки  $A$  и  $B$  две параллельные прямые произвольного направления и отложим на них данные отрезки  $m$  и  $n$  как показано на рис. 60. Дальнейшее ясно из этого рисунка. Говорят, что точка  $P$  делит отрезок  $AB$  в данном отношении *внутренним образом*, а точка  $Q$  делит его *внешним образом*.

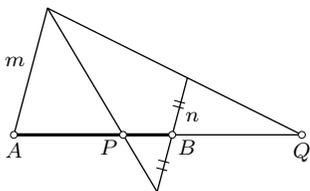


Рис. 60

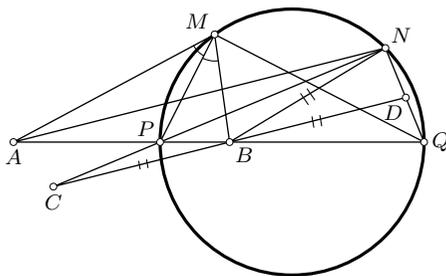


Рис. 61

Пусть точка  $M \in \alpha$  принадлежит искомому ГМТ, т. е.  $MA : MB = m : n$ . Тогда  $MA : MB = PA : PB = QA : QB$ . По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника и биссектрисы его внешнего угла луч  $MP$  есть биссектриса угла  $AMB$ , а луч  $MQ$  — биссектриса его внешнего угла, смежного с углом  $AMB$ , и поэтому  $MP \perp MQ$ . Следовательно, точка  $M$  лежит на окружности с диаметром  $PQ$  (рис. 61).

Обратно, пусть  $N$  — произвольная точка этой окружности. Докажем, что  $NA : NB = m : n$ . Проведем  $CD \parallel AN$ ,  $B \in (CD)$ . Из подобия треугольников  $ANP$  и  $CBP$  и из подобия треугольников  $ANQ$  и  $BDQ$  получаем:  $AN : BC = AP : PB = m : n$  и  $AN : BD = AQ : QB = m : n$ , откуда  $BC = BD$ . В прямоугольном треугольнике  $CND$  медиана  $NB$  равна половине гипотенузы  $CD$ , т. е.  $NB = BC$ . Но  $AN : BC = m : n$  и поэтому  $AN : NB = m : n$ .

Таким образом, ГМТ плоскости  $\alpha$ , для каждой из которых отношение расстояний до двух данных точек  $A$  и  $B$  равно заданному отношению, есть окружность с диаметром  $PQ$ . Она называется *окружностью Аполлония* для данного отрезка  $AB$  и данного отношения  $m : n$ .

Теперь будем поворачивать плоскость  $\alpha$  около прямой  $AB$ . В каждом ее положении получим свою окружность Аполлония с одним и тем же

диаметром  $PQ$ . Поэтому их объединением является сфера, называемая *сферой Аполлония* для данного отрезка и заданного отношения.

Итак, ГМТ пространства, для каждой из которых отношение расстояний до данных точек  $A$  и  $B$  постоянно, есть сфера Аполлония, концы диаметра которой делят отрезок  $AB$  в заданном отношении (внутренним и внешним образом).

**3.2. ГМТ пространства, разность квадратов расстояний** каждой из которых до двух данных точек  $A$  и  $B$  равна квадрату данного отрезка, найдем сначала для произвольной плоскости  $\alpha$ , проходящей через прямую  $AB$ . Пусть точка  $M$  этой плоскости удовлетворяет заданному условию  $AM^2 - BM^2 = a^2$  ( $a$  — данный отрезок). Проведем  $MC \perp AB$  (рис. 62). Тогда  $AM^2 = AC^2 + MC^2$  и  $BM^2 = BC^2 + MC^2$ , откуда  $AM^2 - BM^2 = AC^2 - BC^2 = a^2$ . Следовательно, любая точка перпендикуляра  $MC$  удовлетворяет заданному условию.

В каждой из плоскостей, содержащих прямую  $AB$ , имеется проходящий через точку  $C$  перпендикуляр к  $AB$ , каждая точка которого принадлежит искомому ГМТ пространства. Объединением всех этих перпендикуляров является плоскость, перпендикулярная к прямой  $AB$  и содержащая ее точку  $C$ , определяемую равенством  $AC^2 - BC^2 = a^2$ .

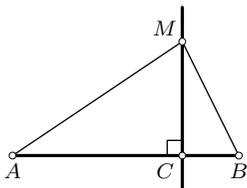


Рис. 62

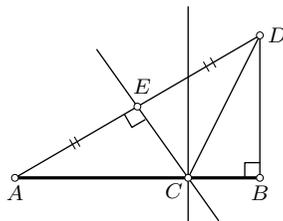


Рис. 63

Построение точки  $C \in (AB)$  можно выполнить так. Построим отрезок  $BD \perp AB$ ,  $BD = a$ . Тогда серединный перпендикуляр к отрезку  $AD$  пересечет  $AB$  в искомой точке  $C$  (рис. 63). В самом деле,  $AC = CD$ ,  $AC^2 = CD^2 = CB^2 + a^2$  и  $AC^2 - CB^2 = a^2$ . При  $a < AB$  точка  $C$  лежит внутри отрезка  $AB$ , при  $a = AB$  совпадает с  $B$ , а при  $a > AB$  — вне отрезка  $AB$ .

Итак, ГМТ пространства, разность квадратов расстояний каждой из которых до двух данных точек  $A$  и  $B$  равна квадрату данного отрезка  $a$ , есть плоскость, перпендикулярная прямой  $AB$  в точке  $C$ , определяемой условием  $AC^2 - BC^2 = a^2$ .

**3.3. ГМТ пространства, сумма квадратов расстояний** каждой из которых до двух данных точек  $A$  и  $B$  равна квадрату данного отрезка  $a$ , найдем аналогично решению двух предыдущих задач. Сначала рассмотрим произвольную плоскость  $\alpha$ , содержащую прямую  $AB$ , и в ней найдем точки искомого ГМТ.

Пусть  $M$  — какая-нибудь точка этой плоскости, удовлетворяющая условию  $AM^2 + BM^2 = a^2$ . Построим параллелограмм  $AMBN$  с диагональю  $AB$  (рис. 64). Тогда  $AB^2 + MN^2 = 2(AM^2 + BM^2) = 2a^2$ , откуда  $MN^2 = 2a^2 - AB^2$ . Так как отрезки  $a$  и  $AB$  даны, то точка  $M$  принадлежит окружности с центром в середине  $O$  отрезка  $AB$  радиуса  $OM = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 - AB^2}$ . Эта окружность существует при условии  $AB \leq a\sqrt{2}$ . Обратно, если точка  $M$  принадлежит этой окружности, то из того же параллелограмма  $AB^2 + BM^2 = \frac{1}{2}(AM^2 + MN^2) = \frac{1}{2}(AB^2 + (2OM)^2) = \frac{1}{2}(AB^2 + 2a^2 - AB^2) = a^2$ , т. е. точка  $M$

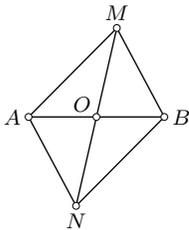


Рис. 64

принадлежит искомому ГМТ плоскости  $\alpha$ . Следовательно, ГМТ плоскости  $\alpha$ , удовлетворяющих заданному условию, есть окружность.

При повороте плоскости  $\alpha$  около прямой  $AB$  центр и радиус этой окружности остаются неизменными. Поэтому объединением всех полученных окружностей будет сфера, являющаяся искомым ГМТ пространства.

Итак, ГМТ пространства, сумма квадратов расстояний каждой из которых до двух данных точек  $A$  и  $B$  равна квадрату данного отрезка  $a$ , есть сфера с центром в середине отрезка  $AB$  и радиуса  $r = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 - AB^2}$  ( $AB \leq a\sqrt{2}$ ).

Радиус  $r$  этой сферы можно построить так. На заданном отрезке  $a$  как на диаметре построим окружность и вписанный в нее некоторый прямоугольный треугольник  $PQK$  (рис. 65). Затем построим треугольник  $ABC$  по трем сторонам, две из которых равны катетам  $m$  и  $n$  треугольника  $PQK$ . Тогда вершина  $C$  и середина  $O$  отрезка  $AB$  определяют радиус  $r = OC$  указанной сферы. Действительно, квадрат медианы  $OC$  треугольника  $ABC$  равен  $OC^2 = 2m^2 + 2n^2 - AB^2 = 2a^2 - AB^2 = r^2$ .

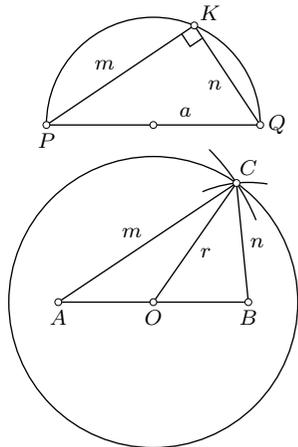


Рис. 65

#### §4. Метод ГМТ в стереометрических задачах на построение

Сущность метода геометрических мест заключается в следующем. Данная задача на построение сводится к построению некоторой точки, которая в дальнейшем давала бы возможность построить всю искомую фигуру. В процессе анализа выясняется, что эта «ключевая» точка обладает несколькими (чаще двумя) свойствами по отношению к заданным элементам искомой фигуры. Одно из этих свойств временно оставляется в стороне и находится ГМТ, удовлетворяющих остальным свойствам. Затем привлекается отброшенное свойство и устраняется другое свойство из тех, которым должна обладать искомая «ключевая» точка. Находится ГМТ, удовлетворяющих новой совокупности свойств. Искомая точка должна принадлежать пересечению двух полученных ГМТ. Если эти два ГМТ исчерпывают всю совокупность свойств, то искомая точка (одна или несколько) найдена, а если нет, то процесс продолжается дальше до тех пор, пока все требуемые свойства не будут использованы.

Для иллюстрации сказанного решим две задачи.

**Задача 1.** Даны три попарно скрещивающиеся прямые  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , не параллельные одной плоскости, и точка  $D$ , не принадлежащая этим прямым. Постройте плоскость, которая бы пересекала эти прямые в точках, являющихся вершинами параллелограмма, одна из вершин которого есть точка  $D$ .

**Решение.** «Ключевой» точкой может служить центр  $O$  параллелограмма, так как она позволяет построить неизвестные его вершины  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (рис. 66). Точка  $O$  обладает двумя свойствами: 1) она является серединой отрезка  $DB$ ,  $B \in b$ , 2) она является серединой отрезка  $AC$

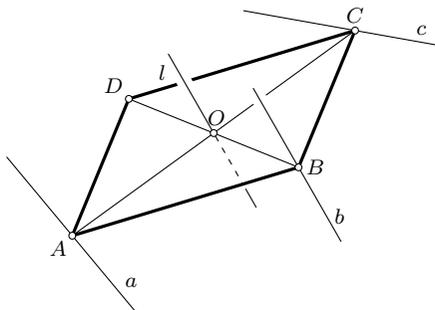


Рис. 66

с концами на прямых  $a$  и  $c$ . Множество точек, удовлетворяющих только первому из этих свойств, есть прямая  $l \parallel b$ . Прямая  $l$  строится как образ прямой  $b$  при гомотетии с центром  $D$  и коэффициентом  $1/2$ . Множество точек, обладающих только вторым свойством, есть срединная плоскость  $\gamma$  скрещивающихся прямых  $a$  и  $c$  (п. 2.1). Прямая  $l$  не параллельна плоскости  $\gamma$ , так как иначе прямые  $a, b, c$  были бы параллельны  $\gamma$ , что исключено условием задачи. Итак, центр  $O$  искомого параллелограмма — это точка пересечения прямой  $l$  и плоскости  $\gamma$ , которые строятся известными способами.

В условии задачи не оговорено требование, чтобы непременно  $B \in b$ . Возможно также  $B \in a$  или  $B \in c$ . Следовательно, существуют три плоскости (три параллелограмма), удовлетворяющих условиям задачи.

**Задача 2.** Постройте сферу, делящую пополам данную сферу  $(O, r)$  и содержащую три данные неколлинеарные точки  $A, B, C$ .

**Решение.** Задача сводится к построению центра  $S$  искомой сферы, которая пересекает данную сферу  $(O, r)$  по большой окружности (радиуса  $r$ ). Если  $M$  — произвольная точка этой окружности, то  $SM^2 - SO^2 = r^2$  и  $SM = SA = SB = SC$ , т. е.  $SA^2 - SO^2 = r^2$ . Это значит, что искомый центр  $S$  принадлежит двум ГМТ: 1) ГМТ, разность квадратов расстояний каждой из которых до известных точек  $A$  и  $O$  равна квадрату данного отрезка  $r$  (п. 3.2) — плоскости, перпендикулярной прямой  $OA$  и 2) оси окружности  $ABC$  (ГМТ IX). Этим положение точки  $S$  определено. Определен и радиус  $R$  искомой сферы:  $R = SA = SB = SC$ .

В этом построении центра  $S$  вместо точки  $A$  может быть использована точка  $B$  или точка  $C$ . Поэтому три ГМТ первого вида имеют общую точку  $S$ .

## Задачи к главе 4

**4.1.** Найдите ГМТ пространства, симметричных данной точке  $M$  относительно всех плоскостей, проходящих а) через данную прямую  $l$ ; б) через данную точку  $A$ .

**4.2.** Найдите ГМТ пространства, симметричных данной точке  $M$  относительно всех прямых, проходящих через данную точку  $O$ .

**4.3.** Найдите ГМТ пространства, симметричных данной точке  $M$  относительно всех точек данной плоскости, не проходящей через точку  $M$ .

**4.4.** Найдите геометрическое место средин хорд данной сферы, имеющих заданную длину.

**4.5.** Найдите геометрическое место середин хорд данной сферы, содержащих данную точку  $P$  этой сферы.

**4.6.** Найдите геометрическое место центров сфер данного радиуса  $r$ , проходящих через две данные точки  $A$  и  $B$ .

**4.7.** Найдите геометрическое место центров сфер, проходящих через три данные точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

**4.8.** Найдите ГМТ пространства, каждая из которых равноудалена от трех прямых, содержащих стороны данного треугольника.

**4.9.** Найдите геометрическое место центров сфер данного радиуса  $R$ , пересекающих данную плоскость  $\alpha$  по окружностям радиуса  $r$ .

**4.10.** Найдите ГМТ пространства, делящих отрезки, соединяющие данную точку  $A$  с точками данной плоскости, в отношении  $m : n$ , где  $m$  и  $n$  — данные отрезки.

**4.11.** Найдите ГМТ поверхности данного куба, каждая из которых равноудалена от концов его заданной диагонали.

**4.12.** Найдите ГМТ пространства, из которых данный отрезок виден под углом заданной величины  $\varphi$ .

**4.13.** Найдите геометрическое место середин отрезков, параллельных данной плоскости, концы которых лежат на двух данных скрещивающихся прямых.

**4.14.** Найдите геометрическое место середин отрезков данной длины  $d$ , концы которых лежат на двух данных скрещивающихся перпендикулярных прямых.

**4.15.** Найдите геометрическое место центров сфер, касающихся двух данных параллельных прямых.

**4.16.** Найдите ГМТ пространства, для каждой из которых отношение расстояний до двух данных параллельных прямых равно  $m : n$ , где  $m$  и  $n$  — данные отрезки.

**4.17.** Найдите ГМТ пространства, для каждой из которых разность расстояний до двух данных непараллельных плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  равна длине данного отрезка.

**4.18.** Найдите ГМТ пространства, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных непараллельных плоскостей равна длине данного отрезка.

**4.19.** Даны две скрещивающиеся прямые и на одной из них точка  $A$ . Через них проведены две перпендикулярные плоскости, которые являются переменными. Найдите геометрическое место ортогональных проекций точки  $A$  на прямые пересечения каждой пары этих плоскостей.

**4.20.** Даны прямая  $a$  и точка  $A$ . Через точку  $A$  проводится произвольная прямая  $l$ , скрещивающаяся с прямой  $a$ . Пусть  $PQ$  — общий

перпендикуляр прямым  $a$  и  $l$ ,  $Q \in l$ . Найдите геометрическое место точек  $Q$ .

**4.21.** Точки  $A$  и  $B$  лежат в одном полупространстве от плоскости  $\alpha$ . Прямая  $AB$  не параллельна плоскости  $\alpha$ . Найдите геометрическое место центров сфер, содержащих точки  $A$  и  $B$  и касающихся этой плоскости.

**4.22.** Дан тетраэдр  $ABCD$ . Постройте плоскости, каждая из которых равноудалена от его вершин.

**4.23.** Постройте сферу, содержащую данную точку  $A$  и касающуюся данной сферы в ее данной точке  $T$ .

**4.24.** Даны три попарно скрещивающиеся прямые. Постройте прямую, пересекающую их соответственно в точках  $A, B, C$  так, что  $AB = BC$ .

**4.25.** Даны две окружности, не лежащие в одной плоскости и имеющие две общие точки. Докажите, что существует единственная сфера, которой принадлежат эти окружности.

**4.26.** Постройте сферу, касающуюся данной сферы  $(O, R)$  и данной плоскости  $\alpha$  в ее данной точке  $A$ .

**4.27.** Постройте сферу, содержащую три данные точки, если известно, что ее центр находится на расстоянии  $d$  от данной точки  $M$ .

**4.28.** Постройте сферу, если дана принадлежащая ей окружность и касательная плоскость в одной из точек этой окружности.

**4.29.** Дан тетраэдр  $ABCD$ . Постройте точки, каждая из которых равноудалена от плоскостей  $ABC$  и  $ABD$ , и разность квадратов расстояний от точек  $C$  и  $D$  равна  $m^2$ , где  $m$  — данный отрезок.

**4.30.** Постройте сферу, содержащую три данные точки  $A, B, C$  и делящуюся пополам данной сферой  $(O, R)$ .

**4.31.** Дан остроугольный треугольник  $ABC$ . Постройте тетраэдр  $ABCD$ , имеющий прямые плоские углы при вершине  $D$ .

# Векторное и смешанное произведения векторов

## §1. Определения векторного и смешанного произведений, их геометрический смысл

### 1.1. Ориентация упорядоченной тройки некопланарных векторов.

Пусть даны некопланарные векторы  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$ ,  $\overline{OC}$ , взятые в указанном *порядке*. Возможны два и только два принципиально различных случая расположения этих векторов в пространстве. Если наблюдатель смотрит внутрь трехгранного угла  $OABC$ , т. е. из того полупространства относительно плоскости  $ABC$ , которое не содержит точку  $O$ , то переход от точки  $A$  к точке  $B$  и затем от  $B$  к  $C$  совершается либо против часовой стрелки, либо наоборот — по часовой стрелке (рис. 67). В пер-

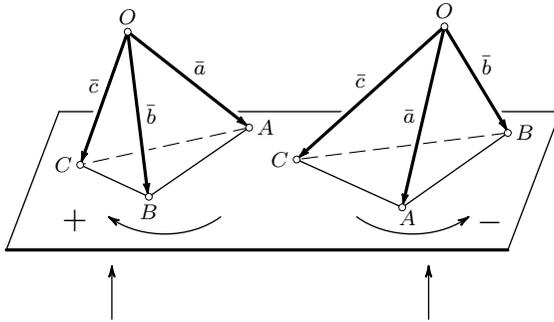


Рис. 67

вом случае упорядоченная тройка  $(\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC})$  называется *положительно* ориентированной, или *правой*, а во втором случае эта тройка называется *отрицательно* ориентированной, или *левой*. Такие названия соответствуют расположению трех пальцев — большого, указательного и среднего — правой руки или левой руки.

Если наблюдатель смотрит с конца  $C$  третьего вектора к его началу  $O$ , то поворот от первого вектора  $\overline{OA}$  второму  $\overline{OB}$  в правой тройке происходит против часовой стрелки, а в левой тройке — по часовой

стрелке. Ориентация тройки векторов существенно зависит от порядка их записи.

Важны два свойства ориентации тройки векторов:

1. Ориентация упорядоченной тройки некопланарных векторов *не изменится*, если векторы переставлять в круговом порядке  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \rightarrow (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) \rightarrow (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$ .

2. Ориентация тройки векторов меняется на противоположную, если в ней поменять местами два вектора: тройки  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  и  $(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$  различной ориентации, тройки  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  и  $(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a})$  противоположно ориентированы, тройки  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  и  $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$  также ориентированы различно.

**1.2. Определение векторного произведения, его следствия.** Векторным произведением  $\vec{a} \times \vec{b}$  неколлинеарных векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{p}$ , который удовлетворяет условиям:

1) вектор  $\vec{p}$  ортогонален каждому из векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ,

2)  $|\vec{p}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ ,

3) упорядоченная тройка  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{p})$  векторов положительно ориентирована (правая) (рис. 68).

Если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны, то по определению принимается  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ .

Запись  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{p}$  означает выполнение этих трех условий, а не только  $|\vec{p}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$ . Требование 2 означает, что модуль векторного произведения равен площади параллелограмма  $OACB$ , построенного на векторах  $\vec{OA}$  и  $\vec{OB}$  как на сторонах.

Этимися тремя условиями вектор  $\vec{p} = \vec{a} \times \vec{b}$  однозначно определен: он перпендикулярен плоскости параллелограмма, имеет указанную длину и направлен в то полупространство от этой плоскости, чтобы при наблюдении от его конца в сторону плоскости поворот от  $\vec{a}$  к  $\vec{b}$  на наименьший угол совершался против часовой стрелки.

Согласно определению  $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ . Если  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{p}$ , то  $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{p}$ , так как упорядоченные тройки  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{p})$  и  $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{p})$  ориентированы противоположно, а  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{b} \times \vec{a}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ , т. е.

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}). \quad (5.1)$$

Говорят, что векторное произведение антикоммумутативно: при изменении порядка сомножителей оно меняет знак на противоположный.

Поскольку  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$  и  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ , то

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = a^2 b^2. \quad (5.2)$$

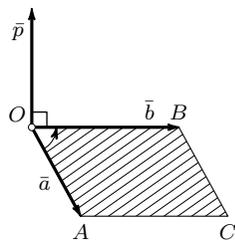


Рис. 68

Следовательно, площадь  $S$  параллелограмма  $OACB$  может быть вычислена по формуле:

$$S = \sqrt{\bar{a}^2 \bar{b}^2 - (\bar{a}\bar{b})^2}. \quad (5.3)$$

**1.3. Смешанное произведение трех векторов, геометрический смысл его знака и модуля.** Смешанным (тройным) произведением  $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$  векторов  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  называется число, равное скалярному произведению  $(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c}$  векторного произведения  $\bar{a} \times \bar{b}$  на третий вектор  $\bar{c}$ :

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b})\bar{c}. \quad (5.4)$$

Из этого определения можно сделать следующие выводы.

1. Если векторы некопланарны и тройка  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$  векторов правая, то смешанное произведение  $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$  положительно, и  $\bar{a}\bar{b}\bar{c} < 0$ , если эта тройка левая, и обратно. В самом деле, пусть  $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{p}$  и тройка  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$  правая (рис. 69). Так как обе тройки  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$  и  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{p})$  правые, то при одном начале  $O$  всех векторов концы векторов  $\bar{c}$  и  $\bar{p}$  будут в од-

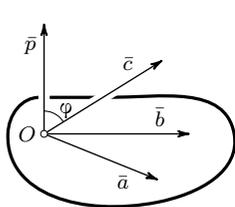


Рис. 69

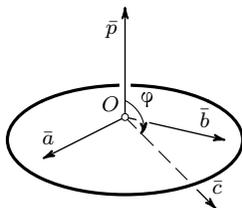


Рис. 70

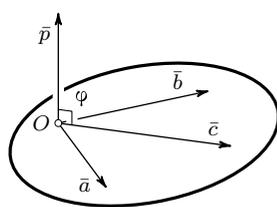


Рис. 71

ном полупространстве от плоскости  $(O\bar{a}\bar{b})$ . Поэтому угол  $\varphi = (\widehat{\bar{p}, \bar{c}}) < \frac{\pi}{2}$  и  $\bar{p}\bar{c} > 0$ , т. е.  $(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{b}\bar{c} > 0$ . Если  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$  — левая тройка, то  $\varphi > \frac{\pi}{2}$  (рис. 70). Поэтому  $\bar{p}\bar{c} < 0$  и  $\bar{a}\bar{b}\bar{c} < 0$ .

Обратное утверждение вытекает из этих же соображений.

2.  $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$  тогда и только тогда, когда векторы  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  компланарны (рис. 71). В этом случае  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , векторы  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  ортогональны одному и тому же вектору  $\bar{p}$ .

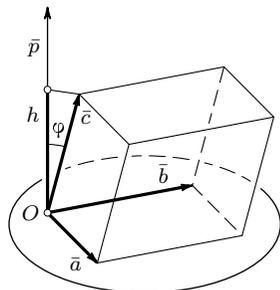


Рис. 72

3. Модуль смешанного произведения  $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$  некопланарных векторов равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах как на ребрах (рис. 72). В самом деле, по формуле ортогональной (скаляр-

ной) проекции вектора  $|Pr_{\bar{p}}\bar{c}| = |\bar{c}|\cos\varphi = |\bar{c}|\frac{|\bar{p}\bar{c}|}{|\bar{p}||\bar{c}|} = \frac{|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|}{|\bar{p}|}$ . Но  $|Pr_{\bar{p}}\bar{c}| = h$  — высота параллелепипеда, а  $|\bar{p}| = S$  — площадь соответствующей грани. Поэтому  $|\bar{a}\bar{b}\bar{c}| = Sh = V$  — объем этого параллелепипеда.

## §2. Алгебраические свойства смешанного и векторного произведений

**2.1. Алгебраические свойства смешанного произведения.** Смешанное произведение компланарных векторов не изменяется при любой перестановке его сомножителей, поскольку оно равно нулю.

Пусть векторы  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  некопланарны. Параллелепипед, построенный на них как на ребрах, при изменении порядка векторов остается без изменения. Следовательно, модуль смешанного произведения векторов не изменяется при любой их перестановке. Знак же смешанного произведения заменяется на противоположный, если меняется ориентация тройки векторов. Поэтому

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{b}\bar{c}\bar{a} = \bar{c}\bar{a}\bar{b}, \quad \bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{a}\bar{c}\bar{b} = -\bar{c}\bar{b}\bar{a} = -\bar{b}\bar{a}\bar{c},$$

откуда

$$\bar{a}\bar{c}\bar{b} = \bar{c}\bar{b}\bar{a} = \bar{b}\bar{a}\bar{c}.$$

Таким образом, смешанное произведение векторов не изменяется при круговой перестановке сомножителей и изменяет знак на противоположный при перестановке двух сомножителей, сохраняя при этом свой модуль.

Так как  $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{b}\bar{c}\bar{a} = \bar{c}\bar{a}\bar{b}$ , то согласно определению смешанного произведения  $(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = (\bar{b} \times \bar{c})\bar{a} = (\bar{c} \times \bar{a})\bar{b}$ . В силу коммутативности скалярного произведения

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = \bar{a}(\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{c} \times \bar{a})\bar{b}.$$

Следовательно, знак  $\times$  векторного умножения внутри смешанного произведения может быть поставлен между любыми двумя его сомножителями.

Пусть  $\bar{c} = \bar{c}_1 + \bar{c}_2$ . В силу дистрибутивности скалярного умножения имеем:  $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b})(\bar{c}_1 + \bar{c}_2) = (\bar{a} \times \bar{b})\bar{c}_1 + (\bar{a} \times \bar{b})\bar{c}_2 = \bar{a}\bar{b}\bar{c}_1 + \bar{a}\bar{b}\bar{c}_2$ , т. е. смешанное произведение дистрибутивно относительно сомножителя  $\bar{c}$ . Используя предыдущее свойство, аналогично убеждаемся, что смешанное произведение дистрибутивно относительно любого его сомножителя.

Аналогично доказывается *ассоциативное свойство*:

$$(\lambda \bar{a}) \bar{b} \bar{c} = \bar{a} (\lambda \bar{b}) \bar{c} = \bar{a} \bar{b} (\lambda \bar{c}) = \lambda (\bar{a} \bar{b} \bar{c}),$$

где  $\lambda$  — любое действительное число.

## 2.2. Алгебраические свойства векторного произведения.

**Лемма.** Если  $\bar{a} \bar{r} = \bar{b} \bar{r}$  для данных векторов  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  и любого (переменного) вектора  $\bar{r}$ , то  $\bar{a} = \bar{b}$ .

*Доказательство.* Равенство  $\bar{a} \bar{r} = \bar{b} \bar{r}$  эквивалентно  $(\bar{a} - \bar{b}) \bar{r} = 0$ . Постоянный вектор  $\bar{a} - \bar{b}$  ортогонален переменному вектору  $\bar{r}$  тогда и только тогда, когда вектор  $\bar{a} - \bar{b}$  нулевой, т. е. при  $\bar{a} = \bar{b}$ .  $\square$

Докажем *ассоциативное свойство* векторного произведения:

$$(\lambda \bar{a}) \times \bar{b} = \lambda (\bar{a} \times \bar{b}).$$

Для этого воспользуемся ассоциативностью смешанного произведения:

$$(\lambda \bar{a}) \bar{b} \bar{r} = \lambda (\bar{a} \bar{b} \bar{r}),$$

где  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  — заданные векторы,  $\bar{r}$  — произвольный (переменный) вектор. На основании ассоциативного свойства скалярного умножения векторов

$$(\lambda \bar{a} \times \bar{b}) \bar{r} = \lambda ((\bar{a} \times \bar{b}) \bar{r}) = (\lambda (\bar{a} \times \bar{b})) \bar{r}.$$

Тогда по предыдущей лемме имеем:  $\lambda \bar{a} \times \bar{b} = \lambda (\bar{a} \times \bar{b})$ .

Для доказательства *дистрибутивного свойства*

$$(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = (\bar{a} \times \bar{c}) + (\bar{b} \times \bar{c}) \tag{5.5}$$

воспользуемся *дистрибутивным свойством* смешанного произведения

$$(\bar{a} + \bar{b}) \bar{c} \bar{r} = \bar{a} \bar{c} \bar{r} + \bar{b} \bar{c} \bar{r},$$

где  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  — данные векторы,  $\bar{r}$  — переменный вектор. Отсюда на основании *дистрибутивного свойства* скалярного умножения имеем:

$$((\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c}) \bar{r} = (\bar{a} \times \bar{c}) \bar{r} + (\bar{b} \times \bar{c}) \bar{r} = ((\bar{a} \times \bar{c}) + (\bar{b} \times \bar{c})) \bar{r}.$$

Так как равенство этих скалярных произведений выполняется для любого вектора  $\bar{r}$ , то на основании леммы получаем равенство (5.5).

В качестве полезного примера докажем следующий факт.

**З а д а ч а.** Сумма векторов  $\bar{n}_1$ ,  $\bar{n}_2$ ,  $\bar{n}_3$ ,  $\bar{n}_4$ , перпендикулярных соответственно граням  $BCD$ ,  $CDA$ ,  $DAB$ ,  $ABC$  тетраэдра  $ABCD$ , направленных в его внешнюю область и имеющих модули, численно равные площадям соответственных граней, равна нуль-вектору.

Решение. Рассмотрим векторы  $\overline{DA} = \bar{a}$ ,  $\overline{DB} = \bar{b}$ ,  $\overline{DC} = \bar{c}$ ,  $\overline{AB} = \bar{b} - \bar{a}$ ,  $\overline{AC} = \bar{c} - \bar{a}$ . Пусть  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$  — правая тройка. Тогда  $2\bar{n}_1 = \bar{c} \times \bar{b}$ ,  $2\bar{n}_2 = \bar{a} \times \bar{c}$ ,  $2\bar{n}_3 = \bar{b} \times \bar{a}$ ,  $2\bar{n}_4 = (\bar{b} - \bar{a}) \times (\bar{c} - \bar{a}) = (\bar{b} \times \bar{c}) - (\bar{b} \times \bar{a}) - (\bar{a} \times \bar{c}) + (\bar{a} \times \bar{a}) = -\bar{c} \times \bar{b} - \bar{b} \times \bar{a} - \bar{a} \times \bar{c}$ . Теперь уже ясно, что  $2(\bar{n}_1 + \bar{n}_2 + \bar{n}_3 + \bar{n}_4) = \bar{0}$ .

### §3. Векторное и смешанное произведения в прямоугольных декартовых координатах

**3.1. Координатная формула векторного произведения.** Пусть  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  — базисные векторы прямоугольной декартовой системы координат:  $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$  и  $\bar{i}\bar{j} = \bar{j}\bar{k} = \bar{i}\bar{k} = 0$ . Если тройка  $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$  — правая, то по определению векторного произведения

$$\begin{aligned} \bar{i} \times \bar{i} = \bar{0}, \quad \bar{j} \times \bar{j} = \bar{0}, \quad \bar{k} \times \bar{k} = \bar{0}, \\ |\bar{i} \times \bar{j}| = |\bar{j} \times \bar{k}| = |\bar{k} \times \bar{i}| = 1, \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}, \quad \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}, \quad \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}, \\ \bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k}, \quad \bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i}, \quad \bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Пусть даны векторы  $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$  и  $\bar{b} = b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}$ . Пользуясь дистрибутивным и ассоциативным свойствами векторного умножения и формулами (5.6) и (5.7), получаем:

$$\begin{aligned} \bar{a} \times \bar{b} &= (a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}) \times (b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}) = \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\bar{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\bar{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\bar{k}. \end{aligned}$$

Коэффициенты при  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  суть координаты векторного произведения  $\bar{a} \times \bar{b}$ . Они являются определителями второго порядка:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \bar{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \bar{k}. \quad (5.8)$$

**3.2. Координатное представление смешанного произведения.** Пусть векторы  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  заданы своими декартовыми координатами:  $\bar{a}(a_1, a_2, a_3)$ ,  $\bar{b}(b_1, b_2, b_3)$ ,  $\bar{c}(c_1, c_2, c_3)$ . На основании формулы (5.8) и координатной формулы скалярного произведения имеем:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3.$$

Правая часть представляет собой разложение определителя третьего порядка:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (5.9)$$

Это и есть искомая формула.

## §4. Сложные произведения векторов

**4.1. Двойное векторное произведение.** Вектор  $\bar{a} \times \bar{b}$  можно снова умножить векторно на некоторый вектор  $\bar{c}$ :  $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}$ . Это произведение называется *двойным векторным произведением*. Докажем тождество:

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{b}(\bar{a}\bar{c}) - \bar{a}(\bar{b}\bar{c}), \quad (5.10)$$

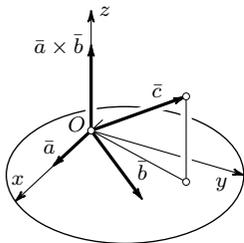


Рис. 73

предполагая пока, что векторы  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  неколлинеарны. Зададим прямоугольную декартову систему координат: ось  $Ox$  в направлении вектора  $\bar{a}$ , ось  $Oy$  в плоскости  $(O\bar{a}\bar{b})$ . Тогда ось  $Oz$  будет параллельна вектору  $\bar{a} \times \bar{b}$  (рис. 73). Пусть векторы  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  имеют координаты:  $\bar{a}(a, 0, 0)$ ,  $\bar{b}(b_1, b_2, 0)$ ,  $\bar{c}(c_1, c_2, c_3)$ . Докажем формулу (5.10). Руководствуясь формулой (5.8), получаем:

$$\begin{aligned} \bar{a} \times \bar{b} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b_2 & 0 \end{vmatrix} \bar{i} + \begin{vmatrix} 0 & a \\ 0 & b_1 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \bar{k} = ab_2 \bar{k}, \\ (\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} &= \begin{vmatrix} 0 & ab_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \bar{i} + \begin{vmatrix} ab_2 & 0 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \bar{k} = -ab_2 c_2 \bar{i} + ab_2 c_1 \bar{j}. \end{aligned}$$

Далее найдем координаты правой части (5.10). Так как  $\bar{a}\bar{c} = ac_1$  и  $\bar{b}\bar{c} = b_1 c_1 + b_2 c_2$ , то  $\bar{b}(\bar{a}\bar{c}) - \bar{a}(\bar{b}\bar{c}) = (b_1 \bar{i} + b_2 \bar{j})ac_1 - a\bar{i}(b_1 c_1 + b_2 c_2) = -ab_2 c_2 \bar{i} + ab_2 c_1 \bar{j}$ . Следовательно, равенство (5.10) истинно для  $\bar{a} \nparallel \bar{b}$ . Если  $\bar{a} \parallel \bar{b}$ , то  $\bar{b} = \lambda \bar{a}$  и оно проверяется без использования координат:  $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{0} \times \bar{c} = \bar{0}$ , чему равна и его правая часть.

Скобки в двойном векторном произведении могут быть поставлены иначе:  $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$ . Тогда  $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = -(\bar{b} \times \bar{c}) \times \bar{a}$  и по формуле (5.10) получаем:

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = -(\bar{c}(\bar{a}\bar{b}) - \bar{b}(\bar{a}\bar{c})) = \bar{b}(\bar{a}\bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}\bar{b}),$$

что не совпадает с (5.10). Итак,

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b}(\bar{a}\bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}\bar{b}). \quad (5.11)$$

Формулам (5.10) и (5.11) можно дать общую формулировку: *двойное векторное произведение равно разности среднего вектора, умноженного на скалярное произведение двух крайних, и другого вектора скобки, умноженного на скалярное произведение двух оставшихся.*

**4.2. Скалярное произведение двух векторных произведений.** Произведение  $(\bar{a} \times \bar{b})(\bar{p} \times \bar{q})$  есть смешанное произведение  $(\bar{a} \times \bar{b})\bar{r}$ , где  $\bar{r} = \bar{p} \times \bar{q}$ . Поэтому

$$\begin{aligned} (\bar{a} \times \bar{b})(\bar{p} \times \bar{q}) &= (\bar{a} \times \bar{b})\bar{r} = \bar{a}(\bar{b} \times \bar{r}) = \bar{a}(\bar{b} \times (\bar{p} \times \bar{q})) = \\ &= \bar{a}(\bar{p}(\bar{b}\bar{q}) - \bar{q}(\bar{b}\bar{p})) = (\bar{a}\bar{p})(\bar{b}\bar{q}) - (\bar{a}\bar{q})(\bar{b}\bar{p}). \end{aligned}$$

Это выражение лучше представить так:

$$(\bar{a} \times \bar{b})(\bar{p} \times \bar{q}) = \begin{vmatrix} \bar{a}\bar{p} & \bar{a}\bar{q} \\ \bar{b}\bar{p} & \bar{b}\bar{q} \end{vmatrix}, \quad (5.12)$$

что легко запоминается.

В частности,

$$(\bar{a} \times \bar{b})^2 = \bar{a}^2\bar{b}^2 - (\bar{a}\bar{b})^2.$$

Это совпадает с (5.2).

**4.3. Векторное произведение двух векторных произведений.** Произведение  $(\bar{a} \times \bar{b}) \times (\bar{p} \times \bar{q})$  выразим, пользуясь формулой (5.10):

$$\begin{aligned} (\bar{a} \times \bar{b}) \times (\bar{p} \times \bar{q}) &= \bar{b}(\bar{a}(\bar{p} \times \bar{q})) - \bar{a}(\bar{b}(\bar{p} \times \bar{q})) = \\ &= \bar{b}(\bar{a}\bar{p}\bar{q}) - \bar{a}(\bar{b}\bar{p}\bar{q}). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Можно также применить и формулу (5.11):

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times (\bar{p} \times \bar{q}) = \bar{p}(\bar{a}\bar{b}\bar{q}) - \bar{q}(\bar{a}\bar{b}\bar{p}). \quad (5.14)$$

**4.4. Квадрат смешанного произведения.** Используя (5.10) и тождество  $(\bar{a}\bar{b})^2 = \bar{a}^2\bar{b}^2 - (\bar{a} \times \bar{b})^2$ , получаем последовательно:

$$\begin{aligned} (\bar{a}\bar{b}\bar{c})^2 &= ((\bar{a} \times \bar{b})\bar{c})^2 = (\bar{a} \times \bar{b})^2\bar{c}^2 - ((\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c})^2 = \\ &= (\bar{a}^2\bar{b}^2 - (\bar{a}\bar{b})^2)\bar{c}^2 - (\bar{b}(\bar{a}\bar{c}) - \bar{a}(\bar{b}\bar{c}))^2 = \\ &= \bar{a}^2\bar{b}^2\bar{c}^2 - \bar{c}^2(\bar{a}\bar{b})^2 - \bar{b}^2(\bar{a}\bar{c})^2 - \bar{a}^2(\bar{b}\bar{c})^2 + 2(\bar{a}\bar{b})(\bar{b}\bar{c})(\bar{a}\bar{c}). \end{aligned}$$

Это выражение есть определитель третьего порядка:

$$(\bar{a}\bar{b}\bar{c})^2 = \begin{vmatrix} \bar{a}^2 & \bar{a}\bar{b} & \bar{a}\bar{c} \\ \bar{a}\bar{b} & \bar{b}^2 & \bar{b}\bar{c} \\ \bar{a}\bar{c} & \bar{b}\bar{c} & \bar{c}^2 \end{vmatrix}. \quad (5.15)$$

## §5. Некоторые геометрические приложения произведений векторов

**5.1. Тригонометрия триэдра.** Возвратимся к триэдру (гл. 2). Пусть  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  — единичные векторы ребер триэдра  $Oabc$  и тройка  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$  правая. По определению скалярного произведения

$$\cos \alpha = \bar{b}\bar{c}, \quad \cos \beta = \bar{c}\bar{a}, \quad \cos \gamma = \bar{a}\bar{b}, \quad (5.16)$$

а по определению векторного произведения

$$\sin \alpha = |\bar{b} \times \bar{c}|, \quad \sin \beta = |\bar{c} \times \bar{a}|, \quad \sin \gamma = |\bar{a} \times \bar{b}|. \quad (5.17)$$

Угол  $\hat{A}$  между плоскостями  $Oab$  и  $Oac$  равен углу между перпендикулярными к ним векторами  $\bar{a} \times \bar{b}$  и  $\bar{a} \times \bar{c}$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \cos \hat{A} &= \frac{(\bar{a} \times \bar{b})(\bar{a} \times \bar{c})}{|\bar{a} \times \bar{b}||\bar{a} \times \bar{c}|}, \\ \sin \hat{A} &= \frac{|(\bar{a} \times \bar{b}) \times (\bar{a} \times \bar{c})|}{|\bar{a} \times \bar{b}||\bar{a} \times \bar{c}|} = \frac{\bar{b}(\bar{a}\bar{a}\bar{c}) - \bar{a}(\bar{b}\bar{a}\bar{c})}{|\bar{a} \times \bar{b}||\bar{a} \times \bar{c}|} = \frac{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{|\bar{a} \times \bar{b}||\bar{a} \times \bar{c}|}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

так как  $\bar{a}\bar{a}\bar{c} = 0$  и  $|\bar{a}| = 1$ . Аналогичные формулы для углов  $\hat{B}$  и  $\hat{C}$  получаются из (5.18) круговой перестановкой букв  $a, b, c$ .

С учетом (5.17) последнюю формулу можно представить в виде:

$$\sin \hat{A} \sin \beta \sin \gamma = \bar{a}\bar{b}\bar{c}. \quad (5.19)$$

Произведение трех синусов в левой части есть по определению синус Штаудта  $\Delta(O)$  триэдра (п. 3.3, гл. 2). Из первой формулы (5.18)

$$\cos \hat{A} \cdot |\bar{a} \times \bar{b}||\bar{a} \times \bar{c}| = (\bar{a} \times \bar{b})(\bar{a} \times \bar{c}).$$

Привлекая формулу (5.12), получаем:

$$\cos \hat{A} \sin \beta \sin \gamma = (\bar{a}\bar{a})(\bar{b}\bar{c}) - (\bar{a}\bar{b})(\bar{a}\bar{c}).$$

Поскольку  $\bar{a}\bar{a} = 1$ , то имеем:

$$\cos \hat{A} \sin \beta \sin \gamma = \cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma. \quad (5.20)$$

Это — уже известная первая теорема косинусов для триэдра (§3 гл. 2).

**5.2. Теорема Менелая для триэдра.** Предварительно докажем такую лемму: *если  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  — произвольные некопланарные векторы, то для того чтобы векторы  $\bar{a} + \lambda\bar{b}$ ,  $\bar{b} + \mu\bar{c}$ ,  $\bar{c} + \nu\bar{a}$  были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы  $\lambda\mu\nu = -1$ .*

**Доказательство.** Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равняется нулю:

$$(\bar{a} + \lambda\bar{b})(\bar{b} + \mu\bar{c})(\bar{c} + \nu\bar{a}) = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \lambda\mu\nu(\bar{b}\bar{c}\bar{a}) = 0.$$

Остальные смешанные произведения обратились в нуль по причине компланарности векторов, входящих в каждое из них. Так как  $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{b}\bar{c}\bar{a} \neq 0$ , то из последнего равенства получаем критерий  $1 + \lambda\mu\nu = 0$  компланарности векторов  $\bar{a} + \lambda\bar{b}$ ,  $\bar{b} + \mu\bar{c}$ ,  $\bar{c} + \nu\bar{a}$ .  $\square$

Переходим к доказательству *теоремы Менелая* для триэдра.

**Теорема.** Пусть в плоскостях граней  $BOC$ ,  $COA$ ,  $AOB$  триэдра  $O(ABC)$  проведены прямые  $OA_1$ ,  $OB_1$ ,  $OC_1$  через его вершину. Для того чтобы эти прямые лежали в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\sin \widehat{AOB_1}}{\sin \widehat{B_1OC}} \cdot \frac{\sin \widehat{COA_1}}{\sin \widehat{A_1OB}} \cdot \frac{\sin \widehat{BOC_1}}{\sin \widehat{C_1OA}} = -1, \quad (5.21)$$

где углы считаются ориентированными соответственно в гранях.

**Доказательство.** Пусть векторы  $\bar{a}_1 = \bar{b} + \lambda\bar{c}$ ,  $\bar{b}_1 = \bar{c} + \mu\bar{a}$ ,  $\bar{c}_1 = \bar{a} + \nu\bar{b}$  коллинеарны указанным прямым. Согласно предыдущей лемме для их компланарности необходимо и достаточно, чтобы  $\lambda\mu\nu = -1$ . Умножая эти равенства векторно соответственно на  $\bar{a}_1$ ,  $\bar{b}_1$ ,  $\bar{c}_1$ , находим:

$$\lambda = -\frac{\bar{b} \times \bar{a}_1}{\bar{c} \times \bar{a}_1}, \quad \mu = -\frac{\bar{c} \times \bar{b}_1}{\bar{a} \times \bar{b}_1}, \quad \nu = -\frac{\bar{a} \times \bar{c}_1}{\bar{b} \times \bar{c}_1}. \quad (5.22)$$

После подстановок и последующих очевидных видоизменений получаем:

$$\frac{\bar{a} \times \bar{b}_1}{\bar{b}_1 \times \bar{c}} \cdot \frac{\bar{c} \times \bar{a}_1}{\bar{a}_1 \times \bar{b}} \cdot \frac{\bar{b} \times \bar{c}_1}{\bar{c}_1 \times \bar{a}} = -1. \quad (5.23)$$

А это равносильно (5.21).  $\square$

**5.3. Теорема Чевы для триэдра.** Пусть в плоскостях граней  $BOC$ ,  $COA$ ,  $AOB$  триэдра  $O(ABC)$  проведены соответственно прямые  $OA_1$ ,  $OB_1$ ,  $OC_1$  через его вершину. Для того чтобы плоскости  $AOA_1$ ,  $BOB_1$ ,  $COC_1$  имели общую прямую, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\sin \widehat{AOB_1}}{\sin \widehat{B_1OC}} \cdot \frac{\sin \widehat{COA_1}}{\sin \widehat{A_1OB}} \cdot \frac{\sin \widehat{BOC_1}}{\sin \widehat{C_1OA}} = 1, \quad (5.24)$$

где углы рассматриваются ориентированными в соответственных им гранях.

**Доказательство.** Пусть по-прежнему указанные прямые коллинеарны векторам  $\bar{a}_1 = \bar{b} + \lambda\bar{c}$ ,  $\bar{b}_1 = \bar{c} + \mu\bar{a}$ ,  $\bar{c}_1 = \bar{a} + \nu\bar{b}$ . Для того чтобы

рассматриваемые плоскости проходили через одну прямую, необходимо и достаточно, чтобы перпендикулярные к ним векторы  $\bar{a} \times \bar{a}_1$ ,  $\bar{b} \times \bar{b}_1$ ,  $\bar{c} \times \bar{c}_1$  были компланарны. Но так как

$$\begin{aligned}\bar{a} \times \bar{a}_1 &= \bar{a} \times \bar{b} - \lambda(\bar{c} \times \bar{a}), \\ \bar{b} \times \bar{b}_1 &= \bar{b} \times \bar{c} - \mu(\bar{a} \times \bar{b}), \\ \bar{c} \times \bar{c}_1 &= \bar{c} \times \bar{a} - \nu(\bar{b} \times \bar{c}),\end{aligned}$$

то согласно лемме должно быть  $(-\lambda)(-\mu)(-\nu) = -1$  или  $\lambda\mu\nu = 1$ , где  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  имеют те же значения, что и в (5.22). Отсюда получаем:

$$\frac{\bar{a} \times \bar{b}_1}{\bar{b}_1 \times \bar{c}} \cdot \frac{\bar{c} \times \bar{a}_1}{\bar{a}_1 \times \bar{b}} \cdot \frac{\bar{b} \times \bar{c}_1}{\bar{c}_1 \times \bar{a}} = 1,$$

что равносильно доказываемому равенству (5.24).  $\square$

**5.4. Выражение косинуса угла между противоположными ребрами тетраэдра через косинусы и синусы его двугранных углов.** Дан тетраэдр  $ABCD$ . Пусть  $\bar{n}_1$ ,  $\bar{n}_2$ ,  $\bar{n}_3$ ,  $\bar{n}_4$  — единичные векторы, перпендикулярные соответственно его граням  $BCD$ ,  $CDA$ ,  $ABD$ ,  $ABC$  и направленные в его внешнюю область. Тогда вектор  $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$  коллинеарен  $\overline{DC}$ , а вектор  $\bar{n}_3 \times \bar{n}_4$  коллинеарен  $\overline{AB}$ . Поэтому

$$\cos(\widehat{AB, DC}) = \frac{|(\bar{n}_1 \times \bar{n}_2)(\bar{n}_3 \times \bar{n}_4)|}{|\bar{n}_1 \times \bar{n}_2||\bar{n}_3 \times \bar{n}_4|} = \frac{|(\bar{n}_1 \bar{n}_3)(\bar{n}_2 \bar{n}_4) - (\bar{n}_2 \bar{n}_3)(\bar{n}_1 \bar{n}_4)|}{|\bar{n}_1 \times \bar{n}_2||\bar{n}_3 \times \bar{n}_4|}.$$

Поскольку  $\bar{n}_1 \bar{n}_3 = -\cos(DB)$ ,  $\bar{n}_2 \bar{n}_4 = -\cos(AC)$ , ... и  $|\bar{n}_1 \bar{n}_2| = \sin(DC)$ ,  $|\bar{n}_3 \bar{n}_4| = \sin(AB)$ , то предыдущая формула дает требуемое выражение:

$$\cos(\widehat{AB, DC}) = \frac{|\cos(BD)\cos(AC) - \cos(AD)\cos(BC)|}{\sin(DC)\sin(AB)}. \quad (5.25)$$

## Задачи к главе 5

**5.1.** Какому условию должны удовлетворять векторы  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ , чтобы векторы  $\bar{a} + \bar{b}$  и  $\bar{a} - \bar{b}$  были коллинеарны?

**5.2.** Вычислите площадь треугольника  $ABC$ , если его вершины имеют координаты:  $A(1, 2, 0)$ ,  $B(3, 0, -3)$ ,  $C(5, 2, 6)$ .

**5.3.** Вычислите расстояние от точки  $M(5, -6, 2)$  до прямой  $AB$ , если  $A(1, -1, 2)$ ,  $B(1, 3, -1)$ .

**5.4.** Измерения прямоугольного параллелепипеда равны  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Найдите площадь сечения его плоскостью, проходящей через середины трех ребер, имеющих общую вершину.

**5.5.** Докажите, что точки  $A(1, 2, -1)$ ,  $B(0, 1, 5)$ ,  $C(-1, 2, 1)$ ,  $D(2, 1, 3)$  лежат в одной плоскости, и вычислите площадь четырехугольника  $ABCD$ .

**5.6.** На трех диагоналях граней параллелепипеда, выходящих из одной его вершины, построен как на ребрах новый параллелепипед. Докажите, что его объем вдвое больше объема первоначального параллелепипеда.

**5.7.** Вершина параллелепипеда и центры трех не содержащих ее граней являются вершинами некоторого тетраэдра. Найдите отношение его объема к объему данного параллелепипеда.

**5.8.** В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$  точки  $M$  и  $N$  являются серединами ребер  $SC$  и  $SD$ . Построена треугольная призма с основанием  $AMN$  и боковым ребром  $AS$ . Найдите отношение объема пирамиды к объему этой призмы.

**5.9.** Докажите, что если  $(\bar{a} \times \bar{b}) + (\bar{b} \times \bar{c}) + (\bar{c} \times \bar{a}) = \bar{0}$ , то векторы  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  компланарны.

**5.10.** Докажите, что если векторы  $\bar{a} \times \bar{b}$ ,  $\bar{b} \times \bar{c}$ ,  $\bar{c} \times \bar{a}$  компланарны, то они коллинеарны.

**5.11.** Докажите, что для любого тетраэдра  $ABCD$  имеет место равенство:

$$S_1^2 \overline{AA_1} + S_2^2 \overline{BB_1} + S_3^2 \overline{CC_1} + S_4^2 \overline{DD_1} = \bar{0},$$

где  $\overline{AA_1}$ ,  $\overline{BB_1}$ ,  $\overline{CC_1}$ ,  $\overline{DD_1}$  — векторы его высот,  $S_i$  — площади соответственных им граней.

**5.12.** Вершины тетраэдра  $ABCD$  имеют координаты:  $A(2, -4, 5)$ ,  $B(-1, -3, 4)$ ,  $C(5, 5, -1)$ ,  $D(1, -2, 2)$ . Найдите длину высоты  $AH$ .

**5.13.** Даны точки  $A(2, 3, 1)$ ,  $B(4, 1, -2)$ ,  $C(6, 3, 7)$ ,  $D(-5, -4, 8)$ . Вычислите расстояние от точки  $D$  до плоскости  $ABC$ .

**5.14.** Параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  задан координатами его вершин  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(9, 6, 4)$ ,  $D(3, 0, 4)$ ,  $A_1(5, 2, 6)$ . Найдите угол между диагональю  $AC_1$  и плоскостью  $ABC$ .

**5.15.** Тетраэдр  $ABCD$  задан координатами векторов  $\overline{AB}(0, 1, -1)$ ,  $\overline{AC}(2, -1, 4)$ ,  $\overline{AD}(3, 2, 0)$ . Вычислите угол между плоскостями  $ABC$  и  $ABD$ .

**5.16.** Даны векторы  $\bar{a}(2, -3, 1)$ ,  $\bar{b}(-3, 1, 2)$ ,  $\bar{c}(1, 2, 3)$ . Найдите координаты векторов  $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}$  и  $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$ .

**5.17.** Докажите тождество Якоби:

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) + \bar{b} \times (\bar{c} \times \bar{a}) + \bar{c} \times (\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{0}.$$

**5.18.** Решите задачу 1 пункта 5.2 гл. 2, используя тождество Якоби.

**5.19.** Докажите равенства 2.13, используя свойства смешанного и векторного произведений векторов.

**5.20.** Точки  $A_1, B_1, C_1$  делят стороны  $BC, CA, AB$  треугольника  $ABC$  в отношениях  $\alpha, \beta, \gamma$  соответственно. Найдите отношение площадей треугольников  $A_1B_1C_1$  и  $ABC$ . При каком условии точки  $A_1, B_1, C_1$  лежат на одной прямой?

**5.21.** Если в триэдр вписана некоторая сфера, то три плоскости, каждая из которых проходит через ребро и точку касания этой сферы с противоположной гранью, имеют общую прямую. Докажите.

**5.22.** Докажите тождество:

$$(\bar{a}\bar{b}\bar{c})(\bar{p}\bar{q}\bar{r}) = \begin{vmatrix} \bar{a}\bar{p} & \bar{a}\bar{q} & \bar{a}\bar{r} \\ \bar{b}\bar{p} & \bar{b}\bar{q} & \bar{b}\bar{r} \\ \bar{c}\bar{p} & \bar{c}\bar{q} & \bar{c}\bar{r} \end{vmatrix}.$$

**5.23.** Докажите теорему об ортооси триэдра (п. 4.4, гл. 2), пользуясь теоремой Чебы для триэдра.

§1. Медианы и бимедианы тетраэдра. Центроид

**1.1. Бимедианы (средние линии) тетраэдра.** Простейшим многогранником является *тетраэдр* — *четырёхгранник*. Он обладает многими замечательными свойствами, совокупность которых принято называть *геометрией тетраэдра*. В этой главе излагаются ее начала.

Отрезки, каждый из которых соединяет середины противоположных (скрещивающихся) ребер тетраэдра, называются его *бимедианами* (средними линиями).

**Теорема 1.** *Бимедианы тетраэдра пересекаются в одной точке, которая делит пополам каждую из них.*

**Доказательство 1.** Пусть  $MN$ ,  $EF$  и  $PQ$  — бимедианы тетраэдра  $ABCD$ , соответствующие парам ребер  $AB$  и  $CD$ ,  $AC$  и  $BD$ ,  $BC$  и  $AD$  (рис. 74). Так как отрезки  $ME$  и  $FN$  параллельны  $BC$  и равны

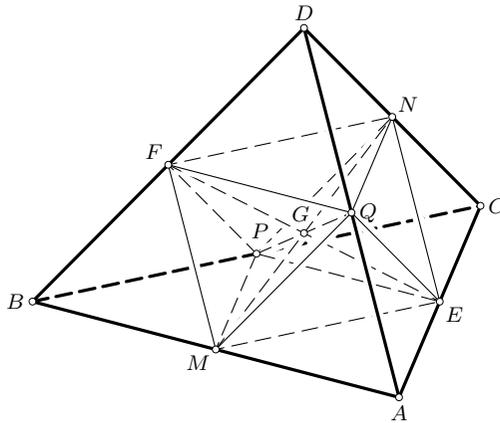


Рис. 74

половине  $BC$ , то четырехугольник  $EMFN$  — параллелограмм. Точка  $G$  пересечения его диагоналей  $MN$  и  $EF$  делит их пополам. Из параллелограмма  $EPFQ$  следует, что середины бимедиан  $EF$  и  $PQ$  совпадают с точкой  $G$ . □

**Доказательство 2.** Для произвольной точки  $O$  векторы  $\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})$  и  $\overline{ON} = \frac{1}{2}(\overline{OC} + \overline{OD})$ . Поэтому  $\frac{1}{2}(\overline{OM} + \overline{ON}) = \frac{1}{4}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD})$ . Следовательно, вектор  $\overline{OG}$  середины  $G$  отрезка  $MN$  имеет выражение

$$\overline{OG} = \frac{1}{4}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}), \quad (6.1)$$

в которое векторы вершин тетраэдра входят равноправно (симметрично). Это значит, что векторы середин отрезков  $EF$  и  $PQ$  также равны  $\overline{OG}$ , т.е. середины бимедиан  $MN$ ,  $EF$  и  $PQ$  совпадают.  $\square$

Точка  $G$  пересечения бимедиан тетраэдра называется его *центроидом*. Для произвольной точки  $O$  вектор  $\overline{OG}$  центроида тетраэдра имеет выражение (6.1).

**1.2. Медианы тетраэдра.** Отрезки, каждый из которых соединяет вершину тетраэдра с центроидом противоположной грани, называются *медианами тетраэдра*.

**Теорема 2.** *Медианы тетраэдра пересекаются в его центроиде и делятся им в отношении 3 : 1, считая от вершин.*

**Доказательство 1.** Пусть  $G_1$  и  $G_2$  — центроиды граней  $BCD$  и  $ACD$  тетраэдра  $ABCD$  (рис. 75). Они принадлежат медианам  $BN$  и  $AN$  этих граней. По свойству центроида треугольника  $AG_2 : G_2N = 2$  и  $BG_1 : G_1N = 2$ . По обратной теореме Фалеса  $G_1G_2 \parallel AB$ . На основании свойства трапеции прямые  $AG_1$ ,  $BG_2$  и  $MN$  пересекаются в одной точке  $K$ . По теореме Менелая для треугольника  $AMN$  и прямой  $BG_2$  имеем:

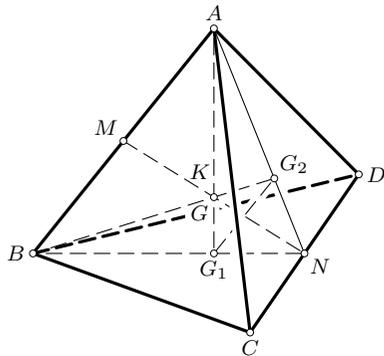


Рис. 75

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BM}} \cdot \frac{\overline{MK}}{\overline{KN}} \cdot \frac{\overline{NG_2}}{\overline{G_2A}} = -1,$$

откуда  $-2 \frac{\overline{MK}}{\overline{KN}} \cdot \frac{1}{2} = -1$  и  $MK : KN = 1$ , т.е. точка  $K$  является серединой бимедианы  $MN$  и потому совпадает с центроидом  $G$  тетраэдра. Итак, две медианы  $AG_1$  и  $BG_2$  пересекаются в центроиде  $G$ . Значит, все четыре медианы имеют общую точку  $G$ . По теореме Менелая для треугольника  $ABG_1$  и прямой  $MN$

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BN}}{\overline{NG_1}} \cdot \frac{\overline{G_1G}}{\overline{GA}} = -1,$$

или  $1 \cdot (-3) \cdot \frac{\overline{G_1G}}{\overline{GA}} = -1$ , откуда  $G_1G : GA = \frac{1}{3}$ . Ясно, что это отношение не зависит от выбора медианы.  $\square$

**Доказательство 2.** Возьмем одну медиану  $AG_1$  и разделим ее в отношении 3 : 1 некоторой точкой  $P$ :

$$\overline{OP} = \frac{\overline{OA} + 3\overline{OG_1}}{1 + 3}, \quad \text{где} \quad \overline{OG_1} = \frac{1}{3}(\overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}).$$

Тогда  $\overline{OP} = \frac{1}{4}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}) = \overline{OG}$  и точка  $P$  совпадает с  $G$ . Следовательно, все четыре медианы тетраэдра содержат его центроид и делятся им в отношении 3 : 1, считая от вершин.  $\square$

**1.3. Свойства центроида тетраэдра.** Для того чтобы точка  $G$  была центроидом тетраэдра  $ABCD$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} + \overline{GD} = \vec{0}. \quad (6.2)$$

**Доказательство.** Если  $G$  — центроид тетраэдра  $ABCD$ , то имеет место равенство (6.1) для произвольной точки  $O$ . Когда точка  $O$  совпадает с  $G$ , то  $\overline{OG} = \vec{0}$  и (6.1) принимает вид (6.2). Обратно, пусть для некоторой точки  $G$  имеет место равенство (6.2), из которого  $\overline{GA} + \overline{GB} = -(\overline{GC} + \overline{GD})$ , или  $\frac{1}{2}(\overline{GA} + \overline{GB}) = -\frac{1}{2}(\overline{GC} + \overline{GD})$ , или  $\overline{GM} = -\overline{GN}$ , где  $M$  и  $N$  — середины ребер  $AB$  и  $CD$ . Следовательно, точка  $G$  является серединой бимедианы  $MN$ , т.е. центроидом тетраэдра.  $\square$

Другое свойство центроида тетраэдра связано с объемами: *тетраэдры  $GBCD$ ,  $GCDA$ ,  $GDAB$ ,  $GABC$  равновелики.*

Действительно, отношение высот  $AH$  и  $GH_1$  тетраэдров  $ABCD$  и  $GBCD$  равно отношению  $AG_1 : GG_1 = \frac{1}{4}$  (рис. 75). Эти тетраэдры имеют общее основание  $BCD$ . Значит,  $V_{GBCD} = \frac{1}{4}V_{ABCD}$ . Объем каждого из четырех указанных тетраэдров равен четверти объема данного тетраэдра.

В силу этого свойства центроид тетраэдра называют еще *центром тяжести* этого тетраэдра.

**Теорема 3** (Лейбница). *Сумма квадратов расстояний от произвольной точки  $P$  до вершин тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$  равна сумме квадратов расстояний от его центроида  $G$  до вершин, сложенной с учетверенным квадратом расстояния от точки  $P$  до центроида  $G$ :*

$$\sum_{i=1}^4 PA_i^2 = \sum_{i=1}^4 GA_i^2 + 4PG^2. \quad (6.3)$$

Действительно,  $\overline{PA_i} = \overline{GA_i} - \overline{GP}$ , откуда

$$\overline{PA_i}^2 = \overline{GA_i}^2 - 2\overline{GA_i} \cdot \overline{GP} + \overline{GP}^2$$

и поэтому

$$\sum_{i=1}^4 \overline{PA_i}^2 = \sum_{i=1}^4 \overline{GA_i}^2 - 2\overline{GP} \sum_{i=1}^4 \overline{GA_i} + 4\overline{GP}^2.$$

Так как  $\sum_{i=1}^4 \overline{GA_i} = \bar{0}$ , то равенство (6.3) доказано.

Из теоремы Лейбница следует *экстремальное свойство* центроида тетраэдра: *сумма квадратов расстояний от точки до вершин тетраэдра минимальна для его центроида*. Оно является *характеристическим* свойством центроида тетраэдра.

**Задача.** Выразите длину бимедианы тетраэдра через длины его ребер.

**Решение.** Обозначим  $\overline{DA} = \bar{a}$ ,  $\overline{DB} = \bar{b}$ ,  $\overline{DC} = \bar{c}$ . Тогда

$$\overline{NM} = \frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}), \quad \text{и} \quad \overline{NM}^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + 2\bar{a}\bar{b} - 2\bar{a}\bar{c} - 2\bar{b}\bar{c}).$$

Пусть  $|\overline{AB}| = c_1$ ,  $|\overline{AC}| = b_1$ ,  $|\overline{BC}| = a_1$ . Так как  $2\bar{a}\bar{b} = a^2 + b^2 - c_1^2$ ,  $2\bar{a}\bar{c} = a^2 + c^2 - b_1^2$ ,  $2\bar{b}\bar{c} = b^2 + c^2 - a_1^2$ , то проведя подстановки, получим:

$$MN^2 = \frac{1}{4}(a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2). \quad (6.4)$$

Аналогично

$$EF^2 = \frac{1}{4}(a^2 + a_1^2 + c^2 + c_1^2 - b^2 - b_1^2), \quad PQ^2 = \frac{1}{4}(b^2 + b_1^2 + c^2 + c_1^2 - a^2 - a_1^2).$$

Отсюда следует:

$$MN^2 + EF^2 + PQ^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2). \quad (6.5)$$

## §2. Площади граней тетраэдра

**2.1. Теорема косинусов для тетраэдра.** *Квадрат площади любой грани тетраэдра равен сумме квадратов площадей трех остальных его граней без удвоенных произведений площадей этих граней, взятых попарно, и косинусов двугранных углов между ними.*

**Доказательство 1.** Воспользуемся формулой (3.3) ортогональной проекции трех граней на плоскость четвертой грани, применяя ее

для каждой грани тетраэдра  $ABCD$ :

$$\begin{aligned} S_1 &= S_2 \cos(CD) + S_3 \cos(BD) + S_4 \cos(BC), \\ S_2 &= S_1 \cos(CD) + S_3 \cos(AD) + S_4 \cos(AC), \\ S_3 &= S_1 \cos(BD) + S_2 \cos(AD) + S_4 \cos(AB), \\ S_4 &= S_1 \cos(BC) + S_2 \cos(AC) + S_3 \cos(AB). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Умножим эти равенства соответственно на  $S_1, S_2, S_3, S_4$  и затем найдем:

$$S_4^2 - S_1^2 - S_2^2 - S_3^2 = -2S_1S_2 \cos(CD) - 2S_2S_3 \cos(AD) - 2S_1S_3 \cos(BD),$$

или

$$S_4^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - 2S_1S_2 \cos(CD) - 2S_2S_3 \cos(AD) - 2S_1S_3 \cos(BD), \quad (6.7)$$

что и утверждает теорема косинусов.

В частности, если двугранные углы при ребрах  $AD, BD, CD$  прямые, то

$$S_4^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2. \quad (6.8)$$

Соотношение (6.8) представляет собой *стереометрический аналог теоремы Пифагора*.  $\square$

**Доказательство 2.** Привлечем векторы  $\vec{n}_i$ , рассмотренные при решении задачи §2 гл. 5. Сумма их равна нуль-вектору. Равенство  $-\vec{n}_4 = \vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3$  возведем скалярно в квадрат:

$$\vec{n}_4^2 = \vec{n}_1^2 + \vec{n}_2^2 + \vec{n}_3^2 + 2\vec{n}_1\vec{n}_2 + 2\vec{n}_2\vec{n}_3 + 2\vec{n}_1\vec{n}_3.$$

Косинус угла между гранями тетраэдра отличается лишь знаком от косинуса угла между перпендикулярными к ним векторами  $\vec{n}_i$ , а  $|\vec{n}_i| = S_i$ . Тогда снова приходим к зависимости (6.7).  $\square$

**2.2. Сумма квадратов площадей граней тетраэдра равна сумме квадратов площадей трех непараллельных граней описанного около него параллелепипеда.**

**Доказательство 1.** Определение описанного параллелепипеда дано в п. 3.2 гл. 1. Воспользуемся результатом задачи п. 1.4 гл. 3, согласно которому

$$S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2 \cos(CD) = \frac{1}{4} (AB \cdot CD \sin(\widehat{AB, CD}))^2 = F_1^2.$$

Правая часть этого равенства представляет собой квадрат площади  $F$  соответствующей грани описанного параллелепипеда. Аналогично

$$\begin{aligned} S_1^2 + S_3^2 - 2S_1S_3 \cos(BD) &= F_2^2, \\ S_1^2 + S_4^2 - 2S_1S_4 \cos(BC) &= F_3^2. \end{aligned}$$

Складывая эти три равенства, получим:

$$\begin{aligned}
 F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 &= \\
 &= S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 - 2S_1(S_2 \cos(CD) + S_3 \cos(BD) + S_4 \cos(BC)) + 3S_1^2 = \\
 &= S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 - 2S_1S_1 + 3S_1^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2. \quad \square
 \end{aligned}$$

**Доказательство 2.** Используем принятые обозначения. По определению векторного произведения

$$\begin{aligned}
 (2S_1)^2 &= (\bar{b} \times \bar{c})^2, & (2S_2)^2 &= (\bar{c} \times \bar{a})^2, & (2S_3)^2 &= (\bar{a} \times \bar{b})^2, \\
 (2S_4)^2 &= ((\bar{a} - \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{c}))^2, & (2F_1)^2 &= (\bar{c} \times (\bar{b} - \bar{a}))^2, \\
 (2F_2)^2 &= (\bar{b} \times (\bar{a} - \bar{c}))^2, & (2F_3)^2 &= (\bar{a} \times (\bar{b} - \bar{c}))^2.
 \end{aligned}$$

Тогда доказываемое равенство принимает вид:

$$\begin{aligned}
 (\bar{a} \times \bar{b})^2 + (\bar{b} \times \bar{c})^2 + (\bar{c} \times \bar{a})^2 + ((\bar{a} - \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{c}))^2 &= \\
 &= (\bar{a} \times (\bar{b} - \bar{c}))^2 + (\bar{b} \times (\bar{a} - \bar{c}))^2 + (\bar{c} \times (\bar{b} - \bar{a}))^2.
 \end{aligned}$$

Оно верно, так как обе части легко преобразуются к одному и тому же выражению

$$\begin{aligned}
 2((\bar{a} \times \bar{b})^2 + (\bar{b} \times \bar{c})^2 + (\bar{c} \times \bar{a})^2 + \\
 + (\bar{a} \times \bar{b})(\bar{b} \times \bar{c}) + (\bar{b} \times \bar{c})(\bar{c} \times \bar{a}) + (\bar{c} \times \bar{a})(\bar{a} \times \bar{b})). \quad \square
 \end{aligned}$$

### 2.3. Зависимость между косинусами двугранных углов тетраэдра.

Запишем систему (6.6) так:

$$\begin{cases}
 -S_1 & + S_2 \cos(CD) + S_3 \cos(BD) + S_4 \cos(BC) = 0, \\
 S_1 \cos(CD) - S_2 & + S_3 \cos(AD) + S_4 \cos(AC) = 0, \\
 S_1 \cos(BD) + S_2 \cos(AD) - S_3 & + S_4 \cos(AB) = 0, \\
 S_1 \cos(BC) + S_2 \cos(AC) + S_3 \cos(AB) - S_4 & = 0.
 \end{cases}$$

Она является линейной однородной системой относительно  $S_1, S_2, S_3, S_4$ .

Так как она заведомо имеет ненулевое решение, то ее определитель необходимо равен нулю:

$$\begin{vmatrix}
 -1 & \cos(CD) & \cos(BD) & \cos(BC) \\
 \cos(CD) & -1 & \cos(AD) & \cos(AC) \\
 \cos(BD) & \cos(AD) & -1 & \cos(AB) \\
 \cos(BC) & \cos(AC) & \cos(AB) & -1
 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.9)$$

### §3. Объем тетраэдра и объем клина

**3.1. Первая формула Штаудта.** За исходные формулы объема тетраэдра возьмем две известные формулы:

$$V = \frac{1}{3}Sh \quad \text{и} \quad V = \frac{1}{6}|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|, \quad (6.10)$$

где  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  — векторы трех ребер тетраэдра с общим началом в его вершине. Выведем другие формулы объема тетраэдра.

Пусть  $AH$  — высота тетраэдра  $ABCD$ ,  $AP$  — высота его грани  $ACD$  (рис. 76). Тогда  $AH = AP \sin(CD) = a \sin \widehat{ADC} \sin(CD)$ . Поэтому

$$V = \frac{1}{3}S_{BCD} \cdot AH = \frac{1}{6}abc \sin \widehat{ADC} \sin \widehat{BDC} \sin(CD).$$

Произведение  $\sin \widehat{ADC} \sin \widehat{BDC} \sin(CD)$  есть синус Штаудта  $\Delta(D)$  трехгранного угла  $D(ABC)$ . Итак,

$$V = \frac{1}{6}abc\Delta(D). \quad (6.11)$$

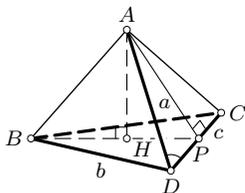


Рис. 76

Эта формула известна под именем немецкого геометра Карла Штаудта (1798–1867), профессора Эрлангенского университета. Без использования обозначений ее можно высказать так: *объем тетраэдра равен шестой части произведения длин трех ребер с общей вершиной и синуса Штаудта его триэдра с этой вершиной.*

Формула  $V = \frac{1}{6}|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|$  следует из геометрического смысла модуля смешанного произведения векторов (п. 1.3, гл. 5). Из нее сразу же получается формула (6.11), если принять во внимание выражение (5.19) синуса Штаудта через смешанное произведение единичных векторов ребер триэдра:

$$V = \frac{1}{6}|\bar{a}\bar{b}\bar{c}| = \frac{1}{6}abc \frac{|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|}{abc} = \frac{1}{6}abc\Delta(D),$$

так как  $\left| \frac{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{abc} \right| = \Delta(D)$ .

**3.2. Формулы Достора.** По формуле Штаудта

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6}abc \sin \widehat{ADC} \sin \widehat{BDC} \sin(CD) = \\ &= \frac{1}{6}(bc \sin \widehat{ADC})(ac \sin \widehat{BDC}) \frac{\sin(CD)}{c} = \frac{1}{6} \cdot 2S_1 2S_2 \frac{\sin(CD)}{CD}. \end{aligned}$$

Итак,

$$V = \frac{2}{3}S_1 S_2 \frac{\sin(CD)}{CD}. \quad (6.12)$$

Аналогично

$$V = \frac{2}{3} S_3 S_4 \frac{\sin(AB)}{AB} = \frac{2}{3} S_1 S_3 \frac{\sin(BD)}{BD} = \dots$$

**Следствие.** Умножим почленно два из этих равенств:

$$V^2 = \frac{4}{9} (S_1 S_2) (S_1 S_3) \frac{\sin(CD) \sin(BD)}{CD \cdot BD} \cdot \frac{\sin \widehat{BDC}}{\sin \widehat{BDC}}.$$

Произведение  $\sin(CD) \sin(BD) \sin \widehat{BDC}$  есть синус второго рода  $\Delta'(D)$  триэдра  $D(ABC)$  (п. 3.3, гл. 2), а  $CD \cdot BD \sin \widehat{BDC} = 2S_1$ . Следовательно,

$$V^2 = \frac{2}{9} S_1 S_2 S_3 \cdot \Delta'(D). \quad (6.13)$$

**3.3. Формула Сервуа.** Используем параллелепипед, описанный около данного тетраэдра  $ABCD$ . Четыре тетраэдра, дополняющие данный тетраэдр до этого параллелепипеда, равновелики. Объем каждого из них равен  $1/6$  объема  $V$  параллелепипеда. Поэтому

$$V_{ABCD} = V - 4 \cdot \frac{1}{6} V = \frac{1}{3} V.$$

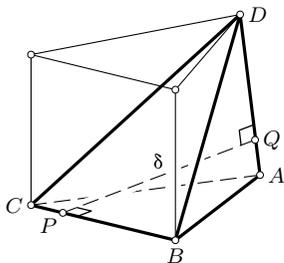


Рис. 77

*Объем тетраэдра составляет треть объема описанного около него параллелепипеда.*

Высота параллелепипеда равна расстоянию  $\delta$  между противоположными ребрами тетраэдра, а площадь основания равна половине произведения длин этих ребер и синуса угла  $\varphi$  между ними. Таким образом,

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} a a_1 \delta \sin \varphi. \quad (6.14)$$

Приведем еще два доказательства формулы Сервуа (6.14).

Дополним тетраэдр  $ABCD$  до треугольной призмы (рис. 77), объем которой вдвое больше объема данного тетраэдра и равен половине площади  $aa_1 \sin \varphi$  боковой грани, умноженной на расстояние  $\delta$  от ребра  $DA$  до этой грани. В результате получается формула (6.14).

Векторное доказательство ее таково. Пусть  $PQ$  — общий перпендикуляр ребер  $BC$  и  $DA$ . Тогда  $\overline{DC} = \overline{DQ} + \overline{QP} + \overline{PC}$  и поэтому получаем:

$$\begin{aligned} 6V &= \overline{DA} \overline{DB} \overline{DC} = \overline{DA} (\overline{DC} + \overline{CB}) \overline{DC} = \overline{DA} \overline{CB} \overline{DC} = \\ &= \overline{DA} \overline{CB} (\overline{DQ} + \overline{QP} + \overline{PC}) = \overline{DA} \overline{CB} \overline{QP} = (\overline{DA} \times \overline{CB}) \overline{QP}. \end{aligned}$$

Векторы  $\overline{DA} \times \overline{CB}$  и  $\overline{QP}$  коллинеарны, поэтому их скалярное произведение равно произведению их модулей. А поскольку  $|\overline{DA} \times \overline{CB}| = aa_1 \times \sin \varphi$  и  $|\overline{QP}| = \delta$ , то  $6V = aa_1 \delta \sin \varphi$ . Здесь учтено, что первоначальная тройка векторов правая.

Из формулы Сервуа следует **теорема Штейнера**: *объем тетраэдра не изменяется, если его противоположные ребра перемещать без изменения длины по прямым, содержащим эти ребра.*

**3.4. Теоремы синусов для тетраэдра.** Из приведенных формул объема тетраэдра в качестве следствий получаются соотношения, очень похожие на теоремы синусов для треугольника и триэдра.

По формуле Штаудта

$$6V = abc\Delta(D) = a_1b_1c\Delta(C) = a_1bc_1\Delta(B) = ab_1c_1\Delta(A).$$

Разделим эти равенства почленно на произведение  $abca_1b_1c_1$ :

$$\frac{\Delta(A)}{a_1bc} = \frac{\Delta(B)}{ab_1c} = \frac{\Delta(C)}{abc_1} = \frac{\Delta(D)}{abc} = \frac{6V}{abca_1b_1c_1}. \quad (6.15)$$

*Синусы Штаудта трехгранных углов тетраэдра пропорциональны произведениям длин трех ребер граней, противоположащих этим углам (первая теорема синусов).*

Пользуясь формулой (6.13), аналогичным путем получаем:

$$\frac{\Delta'(A)}{S_1} = \frac{\Delta'(B)}{S_2} = \frac{\Delta'(C)}{S_3} = \frac{\Delta'(D)}{S_4} = \frac{9V^2}{2S_1S_2S_3S_4}. \quad (6.16)$$

*Синусы второго рода трехгранных углов тетраэдра пропорциональны площадям противоположащих им граней (вторая теорема синусов).*

Далее, перемножим два равенства из (6.12):

$$V^2 = \frac{4}{9}S_1S_2S_3S_4 \frac{\sin(AB)\sin(CD)}{AB \cdot CD}.$$

Из этого соотношения и двух ему аналогичных следует:

$$\frac{AB \cdot CD}{\sin(AB)\sin(CD)} = \frac{BC \cdot AD}{\sin(BC)\sin(AD)} = \frac{AC \cdot BD}{\sin(AC)\sin(BD)} = \frac{4S_1S_2S_3S_4}{9V^2}. \quad (6.17)$$

*Произведения длин противоположных ребер тетраэдра пропорциональны произведениям синусов соответствующих двугранных углов (третья теорема синусов).*

**3.5. Выражение объема тетраэдра через длины его ребер (формула Юнгиуса).** Применим формулу (5.15) квадрата смешанного произведения:

$$(6V)^2 = (\bar{a}\bar{b}\bar{c})^2 = \begin{vmatrix} \bar{a}^2 & \bar{a}\bar{b} & \bar{a}\bar{c} \\ \bar{a}\bar{b} & \bar{b}^2 & \bar{b}\bar{c} \\ \bar{a}\bar{c} & \bar{b}\bar{c} & \bar{c}^2 \end{vmatrix}.$$

Умножим каждую строку этого определителя на 2 и все удвоенные скалярные произведения заменим по теореме косинусов для треугольника:

$$36V^2 = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 2\bar{a}^2 & a^2 + b^2 - c_1^2 & a^2 + c^2 - b_1^2 \\ \bar{a}^2 + b^2 - c_1^2 & 2b^2 & b^2 + c^2 - a_1^2 \\ a^2 + c^2 - b_1^2 & b^2 + c^2 - a_1^2 & 2c^2 \end{vmatrix}.$$

Представим полученный определитель в раскрытом виде. После надлежащих преобразований имеем окончательно:

$$144V^2 = a^2 a_1^2 (b^2 + b_1^2 + c^2 + c_1^2 - a^2 - a_1^2) + b^2 b_1^2 (c^2 + c_1^2 + a^2 + a_1^2 - b^2 - b_1^2) + c^2 c_1^2 (a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2) - (bca_1)^2 - (cab_1)^2 - (abc_1)^2 - (a_1 b_1 c_1)^2. \quad (6.18)$$

Эта формула впервые была найдена другим путем немецким ученым И. Юнгиусом (1587–1657) и называется его именем.

**3.6. Вторая формула Штаудта.** Сообщим пока без доказательства еще одну формулу К. Штаудта:

$$6VR = Q, \quad (6.19)$$

где  $R$  — радиус описанной около тетраэдра сферы и

$$16Q^2 = (aa_1 + bb_1 + cc_1)(bb_1 + cc_1 - aa_1)(cc_1 + aa_1 - bb_1)(aa_1 + bb_1 - cc_1).$$

Доказательство будет дано в §4 гл. 8.

Важное значение соотношения (6.19) состоит еще и в том, что оно позволяет получить выражение диаметра описанной около тетраэдра сферы через длины его ребер, если привлечь формулу (6.18):

$$(2R)^2 = \frac{16Q^2}{144V^2}.$$

**3.7. Объем клина.** *Клином (кососеченной призмой)* называется пятигранник  $ABCA_1B_1C_1$ , три боковые грани которого — трапеции, а основания  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  — треугольники (рис. 78). Боковые ребра  $AA_1, BB_1, CC_1$  клина попарно параллельны. Обозначим их длины соответственно  $a, b, c$ .

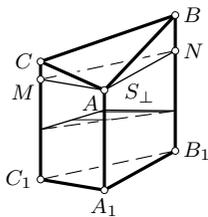


Рис. 78

Клин имеет простую формулу объема:

$$V = \frac{1}{3} S_{\perp} (a + b + c), \quad (6.20)$$

где  $S_{\perp}$  — площадь сечения клина плоскостью, перпендикулярной боковым ребрам.

Для доказательства этой формулы проведем сечение  $AMN$  клина плоскостью через его вершину  $A$  параллельно основанию  $A_1B_1C_1$ , считая, что ребро  $AA_1$  является меньшим из боковых ребер. Этой плоскостью клин разбивается на четырехугольную пирамиду  $AMNBC$  и треугольную призму  $AMNA_1B_1C_1$ . Объемы этой призмы и пирамиды соответственно равны  $S_{\perp}a$  и  $S_{MNBC} \cdot AH$ , где  $AH$  — высота пирамиды. Но  $S_{MNBC} = \frac{1}{2}((b-a) + (c-a))h$  ( $h$  — высота трапеции  $MNBC$ ). Тогда объем  $V$  клина равен

$$V = S_{\perp}a + \frac{1}{3} \frac{AH \cdot h}{2} (b - a + c - a), \quad \text{где} \quad \frac{1}{2} AH \cdot h = S_{\perp}.$$

Поэтому  $V = \frac{1}{3} S_{\perp} (3a + b + c - 2a) = \frac{1}{3} S_{\perp} (a + b + c)$ .

Другой, более экономный вывод формулы объема клина основан на таком способе вычисления объема произвольной пирамиды: *объем пирамиды равен  $\frac{1}{3}$  произведения длины одного ее бокового ребра и площади ортогональной проекции основания на плоскость, перпендикулярную взятому ребру*. Это сразу следует из известной формулы объема призмы: он равен произведению длины бокового ребра на площадь перпендикулярного сечения призмы. Дополняя пирамиду до призмы, боковые ребра которой параллельны и равны какому-либо боковому ребру пирамиды, получаем сформулированный выше результат.

Теперь разобьем данный клин  $ABCA_1B_1C_1$  плоскостями  $ABC_1$  и  $AB_1C_1$  на три тетраэдра:  $AA_1B_1C_1$ ,  $ABCC_1$  и  $ABB_1C_1$  (сделайте рисунок). Ортогональные проекции треугольников  $ABC$ ,  $A_1B_1C_1$  и  $AB_1C_1$  на плоскость, перпендикулярную боковым ребрам клина, совпадают и имеют площадь  $S_{\perp}$ . Тогда согласно указанной формуле объема пирамиды объем  $V$  клина будет равен:

$$V = \frac{1}{3} a S_{\perp} + \frac{1}{3} c S_{\perp} + \frac{1}{3} b S_{\perp} = \frac{1}{3} S_{\perp} (a + b + c).$$

**Задача.** Параллелограмм  $ABCD$  является основанием пирамиды  $SABCD$ . В каком отношении делит объем пирамиды плоскость, проходящая через ребро  $AB$  и среднюю линию грани  $SCD$ ?

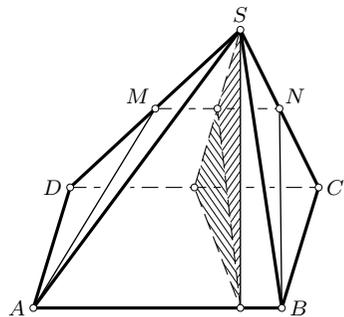


Рис. 79

**Решение.** Секущая плоскость делит пирамиду (рис. 79) на клин  $AMDBNC$  и пирамиду  $SABNM$ , которая также есть клин с боковыми

ребрами  $AB$ ,  $MN$  и  $SS$  (нулевое ребро). Их перпендикулярные сечения (заштрихованы) имеют равные площади  $S_{\perp}$ . Пусть  $MN = 1$ , тогда  $AB = DC = 2$ . Согласно формуле (6.20) отношение объемов двух этих многогранников равно

$$\frac{\frac{1}{3}S_{\perp}(2+2+1)}{\frac{1}{3}S_{\perp}(2+1+0)} = \frac{5}{3}.$$

#### §4. Бариецентрические координаты точки

**4.1. Определение.** Пусть для данного тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$  и данной точки  $P$  вектор  $\overline{A_4P} = x\overline{A_4A_1} + y\overline{A_4A_2} + z\overline{A_4A_3}$ . При произвольном выборе точки  $O$  пространства

$$\overline{A_4P} = \overline{OP} - \overline{OA_4} = x(\overline{OA_1} - \overline{OA_4}) + y(\overline{OA_2} - \overline{OA_4}) + z(\overline{OA_3} - \overline{OA_4}),$$

откуда

$$\overline{OP} = x\overline{OA_1} + y\overline{OA_2} + z\overline{OA_3} + (1-x-y-z)\overline{OA_4}.$$

Обозначим  $\lambda_1 = x$ ,  $\lambda_2 = y$ ,  $\lambda_3 = z$ ,  $\lambda_4 = 1-x-y-z$ . Тогда

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1.$$

Таким образом, для заданного тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$  и любых точек  $O$  и  $P$  имеют место равенства:

$$\begin{cases} \overline{OP} = \lambda_1\overline{OA_1} + \lambda_2\overline{OA_2} + \lambda_3\overline{OA_3} + \lambda_4\overline{OA_4}, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1. \end{cases} \quad (6.21)$$

Важно, что коэффициенты  $\lambda_i$  не зависят от выбора точки  $O$  при заданной точке  $P$ . В самом деле, при этих же числах  $\lambda_i$ , заменив точку  $O$  другой точкой  $O_1$ , получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \lambda_i \overline{O_1A_i} &= \sum_{i=1}^4 \lambda_i (\overline{OA_i} - \overline{OO_1}) = \sum_{i=1}^4 \lambda_i \overline{OA_i} - \overline{OO_1} \sum_{i=1}^4 \lambda_i = \\ &= \overline{OP} - \overline{OO_1} = \overline{O_1P}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\overline{O_1P} = \lambda_1 \overline{O_1A_1} + \lambda_2 \overline{O_1A_2} + \lambda_3 \overline{O_1A_3} + \lambda_4 \overline{O_1A_4}, \quad \text{где } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1.$$

**Определение.** Если имеют место равенства (6.21), то числа  $\lambda_i$  называются *бариецентрическими координатами точки  $P$  относительно тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$* .

## 4.2. Аффинный и метрический смысл барицентрических координат.

Так как равенства (6.21) не зависят от точки  $O$ , то в качестве такой точки можно взять точку  $A_4$ :

$$\overline{A_4P} = \lambda_1 \overline{A_4A_1} + \lambda_2 \overline{A_4A_2} + \lambda_3 \overline{A_4A_3}.$$

Умножим это равенство скалярно на вектор  $\overline{A_4A_2} \times \overline{A_4A_3}$ :

$$\overline{A_4P} \overline{A_4A_2} \overline{A_4A_3} = \lambda_1 \overline{A_4A_1} \overline{A_4A_2} \overline{A_4A_3},$$

откуда

$$\lambda_1 = \frac{V_{PA_2A_3A_4}}{V_{A_1A_2A_3A_4}},$$

где тетраэдры  $A_1A_2A_3A_4$  и  $PA_2A_3A_4$  считаются *ориентированными* соответственно указанным тройкам векторов (§ 1 гл. 5). Аналогично получаем:

$$\lambda_2 = \frac{V_{A_1PA_3A_4}}{V_{A_1A_2A_3A_4}}, \lambda_3 = \frac{V_{A_1A_2PA_4}}{V_{A_1A_2A_3A_4}}, \lambda_4 = \frac{V_{A_1A_2A_3P}}{V_{A_1A_2A_3A_4}}.$$

Итак, *барицентрические координаты  $\lambda_i$  точки  $P$  равны отношениям объемов двух ориентированных тетраэдров: объема тетраэдра, полученного заменой соответствующей вершины базисного тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$  точкой  $P$ , к объему тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$ .*

Пусть  $x_i$  — ориентированные расстояния точки  $P$  до плоскостей граней тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$ , причем за положительное направление принято направление соответствующей высоты  $h_i$  этого тетраэдра от вершины к противоположной грани. Тогда отношения объемов указанных тетраэдров равны  $\frac{x_i}{h_i}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Следовательно,

$$\lambda_i = \frac{x_i}{h_i} \quad \text{и} \quad \frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} + \frac{x_4}{h_4} = 1. \quad (6.22)$$

Умножив последнее равенств на  $3V_{A_1A_2A_3A_4}$ , будем иметь:

$$x_1S_1 + x_2S_2 + x_3S_3 + x_4S_4 = 3V. \quad (6.23)$$

Числа  $x_i$  называются *нормальными координатами точки  $P$  относительно данного тетраэдра*. При этом  $x_i = \lambda_i h_i$ .

**4.3. Расстояние между двумя точками, заданными относительно тетраэдра.** Поставим задачу найти расстояние между точками  $P$  и  $M$ , если известны барицентрические координаты  $\lambda_i$  точки  $P$  и расстояния  $\rho_i$  от точки  $M$  до вершин  $A_i$  данного тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$ . Согласно равенствам (6.21)

$$\overline{MP} = \lambda_1 \overline{\rho_1} + \lambda_2 \overline{\rho_2} + \lambda_3 \overline{\rho_3} + \lambda_4 \overline{\rho_4}, \quad \text{где} \quad \overline{\rho_i} = \overline{MA_i}.$$

Вычислим скалярный квадрат вектора  $\overline{MP}$ :

$$\overline{MP}^2 = \left( \sum_{i=1}^4 \lambda_i \bar{\rho}_i \right)^2 = \sum_{i=1}^4 \lambda_i^2 \bar{\rho}_i^2 + 2 \sum_{i,j=1; i < j}^4 \lambda_i \lambda_j \bar{\rho}_i \bar{\rho}_j.$$

Так как  $2\bar{\rho}_i \bar{\rho}_j = \rho_i^2 + \rho_j^2 - a_{ij}^2$ , где  $a_{ij} = A_i A_j$ , то

$$MP^2 = \sum_{i=1}^4 \lambda_i^2 \rho_i^2 + \sum_{i,j=1; i < j}^4 \lambda_i \lambda_j (\rho_i^2 + \rho_j^2 - a_{ij}^2).$$

После несложных преобразований находим, что

$$MP^2 = \sum_{j=1}^4 \lambda_j \sum_{i=1}^4 \lambda_i \rho_i^2 - \sum_{i,j=1; i < j}^4 \lambda_i \lambda_j a_{ij}^2,$$

и окончательно

$$MP^2 = \sum_{i=1}^4 \lambda_i \rho_i^2 - \sum_{i,j=1; i < j}^4 \lambda_i \lambda_j a_{ij}^2. \quad (6.24)$$

Применим полученную формулу (6.24) для определения расстояний между некоторыми точками тетраэдра.

1. Пусть точка  $M$  совпадает с центром  $O$  описанной около тетраэдра сферы. Если  $R$  — радиус этой сферы, то все  $\rho_i = R$ . Точку  $P$  поместим в центроиде  $G$  тетраэдра. Для нее все  $\lambda_i = \frac{1}{4}$ . Согласно (6.24) будем иметь:

$$OG^2 = R^2 - \frac{1}{16} \sum_{i,j=1; i < j}^4 a_{ij}^2. \quad (6.25)$$

Этот результат можно получить и непосредственно, используя выражение (6.1) для вектора центроида.

2. Если обе точки  $M$  и  $P$  совпадают с центроидом  $G$  тетраэдра, то  $MP = 0$  и  $\lambda_i = \frac{1}{4}$ ,  $\rho_i = GA_i$ . На основании формулы (6.24) получаем:

$$\sum_{i=1}^4 GA_i^2 = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1; i < j}^4 a_{ij}^2. \quad (6.26)$$

Поскольку  $GA_i = \frac{3}{4}G_i A_i$ , где  $G_i$  — центроид грани  $\alpha_i$ , то отсюда следует:

$$\sum_{i=1}^4 G_i A_i^2 = \frac{4}{9} \sum_{i,j=1; i < j}^4 a_{ij}^2. \quad (6.27)$$

## §5. Сферы, касающиеся плоскостей граней тетраэдра

**5.1. Условия существования и число сфер, касающихся плоскостей граней тетраэдра.** На плоскости всегда существуют четыре окружности, касающиеся прямых, содержащих стороны треугольника. В этом параграфе будет доказано, что количество сфер, касающихся четырех плоскостей граней тетраэдра, зависит от вида тетраэдра: их существует не менее пяти, но не более восьми.

Пусть дан тетраэдр  $A_1A_2A_3A_4$ . Плоскости  $A_2A_3A_4$ ,  $A_1A_3A_4$ ,  $A_1A_2A_4$ ,  $A_1A_2A_3$  обозначим соответственно  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\alpha_4$ . Пусть  $x_i$  — нормальные координаты точки  $M$  пространства относительно данного тетраэдра (п. 4.2). Плоскости  $\alpha_i$  делят пространство на пятнадцать областей, каждая из которых может быть охарактеризована знаками нормальных координат своих точек, а именно:

- 1) одну область I, внутреннюю относительно тетраэдра, для точек которой все  $x_i > 0$ ;
- 2) четыре области II (рис. 80) четырех внутренних трехгранных углов тетраэдра без точек области I; для точек каждой из этих областей соответствующая нормальная координата  $x_i$  отрицательна, а остальные три положительны;

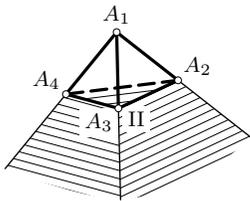


Рис. 80

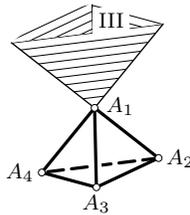


Рис. 81

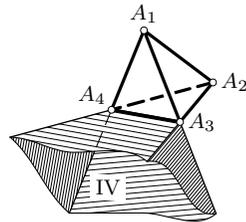


Рис. 82

- 3) четыре области III четырех трехгранных углов, вертикальных внутренним трехгранным углам тетраэдра (рис. 81); точки этих областей имеют три отрицательных и одну положительную нормальную координату, а именно ту, которая соответствует вершине трехгранного угла;

- 4) шесть областей IV типа «крыш» (рис. 82), соответствующих ребрам  $A_iA_j$  тетраэдра; точки этих областей имеют две положительные ( $x_i$  и  $x_j$ ) и две отрицательные нормальные координаты.

Будем пользоваться тождеством (6.23):

$$x_1 S_1 + x_2 S_2 + x_3 S_3 + x_4 S_4 = 3V.$$

Его можно проверить и непосредственно, выбрав поочередно точку  $M$  в областях каждого из четырех указанных типов и соединив ее с вершинами тетраэдра.

Можно составить всего 16 комбинаций знаков нормальных координат  $x_i$  точек, но одна из них в действительности не существует: из этого тождества видно, что числа  $x_i$  не могут быть одновременно все отрицательными. Остальные 15 комбинаций соответствуют указанным 15 областям пространства.

Если дан тетраэдр и числа  $x_i$ , удовлетворяющие рассматриваемому тождеству, то существует одна и только одна точка, имеющая эти числа своими нормальными координатами относительно данного тетраэдра. Она является точкой пересечения трех плоскостей, соответственно параллельных, например трем плоскостям  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , удаленных от них соответственно на расстояния  $|x_1|, |x_2|, |x_3|$  и расположенных в соответствующих знакам чисел  $x_1, x_2, x_3$  полупространствах относительно плоскостей  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . Так как числа  $x_i$  связаны указанным тождеством, то аналогичная четвертая плоскость  $\alpha_4$  проходит через ту же точку.

Для того чтобы некоторая точка была центром касательной к плоскостям граней тетраэдра сферы, необходимо и достаточно, чтобы она была равноудалена от этих плоскостей. В этом случае модули всех чисел  $x_i$  равны и находятся из равенства (6.23), а по ним указанным способом строится искомый центр. Поэтому в силу этого равенства для существования касательной сферы необходимо и достаточно, чтобы

$$\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2 + \varepsilon_3 S_3 + \varepsilon_4 S_4 > 0, \quad (6.28)$$

где  $\varepsilon_i = \pm 1$  в зависимости от знаков нормальных координат точек указанных 15 областей. Отсюда можно сделать следующие выводы.

1. Во внутренней области тетраэдра (все  $\varepsilon_i = 1$ ) всегда существует точка  $J$ , равноудаленная от граней, являющаяся центром вписанной сферы.

2. Так как площадь каждой грани тетраэдра меньше суммы площадей трех остальных граней (п. 1.3, гл. 3), при одной отрицательной и трех положительных единицах из  $\varepsilon_i$  неравенство (6.28) всегда выполняется. Это значит, что в каждой из областей типа II всегда существует точка  $J_i$ , равноудаленная от плоскостей  $\alpha_j$ . Точки  $J_i$  являются центрами четырех сфер, касающихся внешним образом соответствующей грани  $\alpha_i$  и внутренним образом трех остальных граней. Касание сферы с гранью

называется внутренним или внешним, если эта сфера и противоположная данной грани вершина тетраэдра лежат соответственно в одном или в разных полупространствах относительно плоскости этой грани. Указанные четыре сферы называются *вневписанными сферами первого рода* данного тетраэдра.

3. Для точек областей типа III три из  $\varepsilon_i$  отрицательны и одна положительна, поэтому неравенство (6.28) не выполняется. Следовательно, ни в одной из этих четырех областей не существует точки, равноудаленной от плоскостей  $\alpha_i$ , и значит, касательной к ним сферы.

4. Если  $S_i + S_j > S_k + S_u$  и  $\varepsilon_i = \varepsilon_j = 1$ ,  $\varepsilon_k = \varepsilon_u = -1$ , то неравенство (6.28) удовлетворяется в области IV типа «крыши», относящейся к ребру  $A_i A_j$ , тетраэдра. В этой области существует точка  $J_{ij}$ , равноудаленная от плоскостей  $\alpha$ . Из того же неравенства видно, что в этом случае не может существовать такой точки в «крыше», относящейся к противоположному ребру. Точки  $J_{ij}$  суть центры сфер, называемых *вневписанными сферами второго рода* данного тетраэдра.

Однако при условии  $S_i + S_j = S_k + S_u$  неравенство (6.28) для этих двух областей последнего типа не удовлетворяется и точка  $J_{ij}$  не существует. Таким образом, если сумма площадей двух граней равна сумме площадей двух других граней, то не существует одной вневписанной сферы второго рода. В случае равновеликости всех четырех граней не существует ни одной из вневписанных сфер второго рода.

Итак, *существует самое большее восемь и самое меньшее пять сфер, касающихся плоскостей граней тетраэдра.*

Центрами этих сфер являются точки пересечения биссекторных плоскостей внутренних и внешних двугранных углов тетраэдра, поскольку биссекторная плоскость двугранного угла есть геометрическое место точек, каждая из которых равноудалена от его граней.

**5.2. Зависимость между радиусами вписанной и вневписанных сфер и высотами тетраэдра.** Радиусы сфер  $(J)$ ,  $(J_i)$ ,  $(J_{ij})$  будем обозначать соответственно  $r$ ,  $r_i$ ,  $r_{ij}$ . При  $x_i = r$  из тождества (6.23) получаем:

$$r = \frac{3V}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}, \quad (6.29)$$

откуда

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}. \quad (6.30)$$

Для центра  $J_i$  вневписанной сферы первого рода  $x_i = -r_i$ ,  $x_j = x_k = x_u = r_i$  и поэтому

$$r_i = \frac{3V}{S_j + S_k + S_u - S_i}, \quad (6.31)$$

откуда

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{h_j} + \frac{1}{h_k} + \frac{1}{h_u} - \frac{1}{h_i}. \quad (6.32)$$

Для центра  $J_{ij}$  вневписанной сферы второго рода  $x_i = x_j = r_{ij}$ ,  $x_k = x_u = -r_{ij}$ . Значит,

$$r_{ij} = \frac{3V}{S_i + S_j - S_k - S_u}, \quad (6.33)$$

откуда

$$\frac{1}{r_{ij}} = \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_j} - \frac{1}{h_k} - \frac{1}{h_u}. \quad (6.34)$$

Из равенств (6.30), (6.32) и (6.34) вытекают еще такие соотношения:

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}, \quad (6.35)$$

$$\frac{2}{r_{ij}} = -\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_j} + \frac{1}{r_k} + \frac{1}{r_u}, \quad (6.36)$$

а также

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_i} = \frac{2}{h_i}, \quad \frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_{ij}} = \frac{2}{h_j},$$

$$\frac{4}{h_i} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_{ij}} + \frac{1}{r_{ik}} + \frac{1}{r_{iu}},$$

которые нетрудно проверить.

## §6. Ортоцентрический тетраэдр

**6.1. Высоты тетраэдра. Определение и критерий ортоцентрического тетраэдра.** В отличие от высот треугольника высоты тетраэдра общего

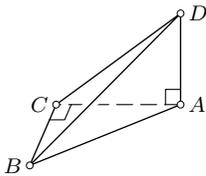


Рис. 83

вида не имеют общей точки. Построим пример такого тетраэдра. Возьмем прямоугольный треугольник  $ABC$  и построим перпендикуляр  $AD$  к его плоскости (рис. 83). В полученном тетраэдре  $ABCD$  отрезки  $BC$  и  $DA$  являются его высотами, которые скрещиваются. Следовательно, четыре высоты этого тетраэдра заведомо не пересекаются в одной точке.

Если высоты тетраэдра попарно скрещиваются, то и в этом случае они обладают замечательным свойством: они образуют так называемую *гиперболическую четверку прямых*. Вообще говоря, существует не более двух прямых, каждая из которых пересекает каждую из четырех данных попарно скрещивающихся прямых. Но для четверки высот тетраэдра таких секущих прямых существует

бесконечное множество. Четверка попарно скрещивающихся прямых, обладающая таким свойством, что каждая прямая, пересекающая три из них, пересекает и четвертую или ей параллельна, называется *гиперболической четверкой прямых*.

Существуют тетраэдры частного вида, в которых высоты пересекаются в одной точке. К ним относятся, например, правильная треугольная пирамида (равнобедренный тетраэдр), а также прямоугольный тетраэдр, в котором три ребра с общей вершиной попарно перпендикулярны.

**О п р е д е л е н и е.** Тетраэдр, в котором четыре высоты пересекаются в одной точке, называется *ортоцентрическим тетраэдром*, а точка  $H$  пересечения высот называется его *ортоцентром*.

Множество ортоцентрических тетраэдров не исчерпывается приведенными выше примерами.

**Теорема.** *Для того чтобы тетраэдр был ортоцентрическим, необходимо достаточно, чтобы перпендикуляры к граням этого тетраэдра в их центроидах пересекались в одной точке.*

**Доказательство.** Если  $G$  — центроид тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$ ,  $G_i$  — центроиды его граней, то тетраэдр  $G_1G_2G_3G_4$  гомотетичен данному тетраэдру с центром гомотетии  $G$  и коэффициентом  $k = -\frac{1}{3}$ . При этой гомотетии указанные перпендикуляры соответствуют высотам тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$ . Поэтому его высоты пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда эти перпендикуляры пересекаются в одной точке.  $\square$

**6.2. Вектор ортоцентра.** Если  $H$  — ортоцентр тетраэдра  $ABCD$  и  $O$  — центр его описанной сферы, то

$$\overline{OH} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}) \quad (6.37)$$

и

$$\overline{HO} = \frac{1}{2}(\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} + \overline{HD}). \quad (6.38)$$

Докажем сначала соотношение (6.38). Пусть  $\frac{1}{2}(\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} + \overline{HD}) = \overline{HX}$ . Тогда  $\overline{AX} = \overline{HX} - \overline{HA} = \frac{1}{2}(\overline{HB} + \overline{HC} + \overline{HD} - \overline{HA})$  и  $\overline{AX}^2 = \frac{1}{4}(\overline{HA}^2 + \overline{HB}^2 + \overline{HC}^2 + \overline{HD}^2 + 2\overline{HB}(\overline{HC} - \overline{HA}) + 2\overline{HC}(\overline{HD} - \overline{HA}) + 2\overline{HD}(\overline{HB} - \overline{HA}))$ . Поскольку  $\overline{HB} \perp \overline{AC}$ ,  $\overline{HC} \perp \overline{AD}$  и  $\overline{HD} \perp \overline{AB}$ , то  $\overline{HB}(\overline{HC} - \overline{HA}) = \overline{HB} \cdot \overline{AC} = 0$ ,  $\overline{HC}(\overline{HD} - \overline{HA}) = 0$ , и  $\overline{HD}(\overline{HB} - \overline{HA}) = 0$ . Следовательно,

$$\overline{AX}^2 = \frac{1}{4}(\overline{HA}^2 + \overline{HB}^2 + \overline{HC}^2 + \overline{HD}^2).$$

Это выражение симметрично относительно букв  $A, B, C, D$ . Поэтому  $AX^2 = BX^2 = CX^2 = DX^2$ . Значит, точка  $X$  совпадает с точкой  $O$ . Этим равенство (6.38) доказано. А из него следует равенство (6.37):

$$\overline{HO} = \frac{1}{2}((\overline{HO} + \overline{OA}) + (\overline{HO} + \overline{OB}) + (\overline{HO} + \overline{OC}) + (\overline{HO} + \overline{OD})),$$

откуда  $\overline{OH} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD})$ .

**Следствие 1.** В ортоцентрическом тетраэдре точки  $O, G, H$  лежат на одной прямой (прямой Эйлера ортоцентрического тетраэдра) и  $G$  — середина  $OH$ .

Действительно, из равенств (6.1) и (6.37) следует  $\overline{OG} = \frac{1}{2}\overline{OH}$ .

### 6.3. Характеристические свойства ортоцентрического тетраэдра.

В ортоцентрическом и только в ортоцентрическом тетраэдре противоположные ребра перпендикулярны в каждой из трех пар.

Пусть высоты тетраэдра пересекаются в точке  $H$ . Рассмотрим две его высоты  $CC_1$  и  $DD_1$  (рис. 84). Грани  $ABC$  и  $ABD$  перпендикулярны плоскости  $CDH$ , поэтому их общее ребро  $AB$  перпендикулярно этой плоскости и, значит,  $AB \perp CD$ . С равным правом  $BC \perp AD$  и  $AC \perp BD$ .

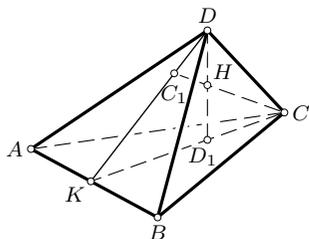


Рис. 84

Обратно, если  $AB \perp CD$ , то существует единственная плоскость, содержащая ребро  $CD$  и перпендикулярная  $AB$ . В этой плоскости лежат высоты  $CC_1$  и  $DD_1$  тетраэдра, которые поэтому пересекаются. Если  $BC \perp AD$  и  $AC \perp BD$ , то по аналогичной причине будут пересекаться любые две вы-

соты данного тетраэдра. Так как они не лежат в одной плоскости, то они необходимо пересекаются в одной точке (задача 1.6).

На основании доказанного свойства ортоцентрический тетраэдр называется также *ортогональным тетраэдром*.

**Следствие 2.** В ортоцентрическом тетраэдре и только в таком тетраэдре основания высот являются ортоцентрами его граней.

Характеристическое свойство ортогональности противоположных ребер ортоцентрического тетраэдра позволяет его построить следующим способом. Пусть даны две скрещивающиеся перпендикулярные прямые  $a$  и  $a_1$ .

Построим произвольную пересекающую их прямую  $b$ , но не перпендикулярную им, затем некоторую плоскость  $\gamma$ , перпендикулярную прямой  $b$ , но не содержащую точки  $B = b \cap a_1$  и  $D = b \cap a$  (рис. 85). Она

пересекает прямые  $a$  и  $a_1$  соответственно в точках  $A$  и  $C$ . Тогда тетраэдр  $ABCD$  является ортоцентрическим в силу ортогональности его противоположных ребер. В самом деле,  $DA \perp BC$  по выбору прямых  $a$  и  $a_1$ ,  $BD \perp AC$ , так как  $\gamma \perp b$  и  $(AC) \subset \gamma$ . Кроме того,  $AB \perp DC$  на основании векторного тождества

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CA} \cdot \overline{BD} = 0,$$

истинность которого легко проверяется подстановками  $\overline{AB} = \overline{DB} - \overline{DA}$ ,  $\overline{BC} = \overline{DC} - \overline{DB}$ ,  $\overline{CA} = \overline{DA} - \overline{DC}$ .

Далее излагаются еще три критерия ортоцентрического тетраэдра.

*Для того чтобы тетраэдр был ортоцентрическим, необходимо и достаточно, чтобы суммы квадратов длин его противоположных ребер были равны:*

$$a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2. \quad (6.39)$$

По предыдущему критерию для ортоцентрического тетраэдра необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{BC} \cdot \overline{DA} = \overline{CA} \cdot \overline{DB} = 0.$$

Вспользуемся известной формулой

$$2\overline{AB} \cdot \overline{CD} = AD^2 + BC^2 - AC^2 - BD^2.$$

На основании ее получаем эквивалентные предыдущим равенства:

$$\begin{aligned} AD^2 + BC^2 - AC^2 - BD^2 &= \\ &= AB^2 + CD^2 - BD^2 - AC^2 = BC^2 + AD^2 - CD^2 - AB^2, \end{aligned}$$

которые равносильны доказываемым равенствам:

$$AD^2 + BC^2 = CD^2 + AB^2 = BD^2 + AC^2.$$

*В ортоцентрическом и только в ортоцентрическом тетраэдре произведения косинусов противоположных двугранных углов равны:*

$$\cos(AB) \cos(CD) = \cos(BC) \cos(AD) = \cos(AC) \cos(BD). \quad (6.40)$$

Это следует из формулы (5.25) и ортогональности противоположных ребер тетраэдра.

*Для того чтобы тетраэдр был ортоцентрическим, необходимо и достаточно, чтобы его бимедианы были равны.*

Для доказательства достаточно привлечь формулы (6.4) длин бимедиан и критерий (6.39).

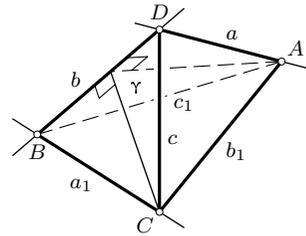


Рис. 85

## §7. Равногранный тетраэдр

**7.1. Определение и характеристическое свойство равногранного тетраэдра.** Тетраэдр называется *равногранным*, если все его грани — равные треугольники.

*Существование* равногранного тетраэдра можно доказать следующим простым построением. Возьмем остроугольный треугольник  $D_1D_2D_3$  и проведем в нем средние линии  $BC, CA, AB$  (рис. 86). Перегнем этот треугольник по средним линиям так, чтобы вершины  $D_1, D_2, D_3$  совместились. В результате получим тетраэдр  $ABCD$  с равными гранями (по трем сторонам) (рис. 87).

**Теорема.** Для того чтобы тетраэдр был равногранным, необходимо и достаточно, чтобы его противоположные ребра были равны:  $a = a_1, b = b_1, c = c_1$ .

*Доказательство.* Достаточность этого условия очевидна. Докажем необходимость. Пусть все грани тетраэдра  $ABCD$  равны. Из равенства треугольников  $DBC$  и  $ACD$  следует: либо  $a = a_1$  и  $b = b_1$ , либо  $a = b$  и  $a_1 = b_1$ . Тогда в обоих случаях из равенства треугольников  $ABC$  и  $ACD$  будет  $c = c_1$ . Во втором случае треугольники  $ABC$  и  $ABD$  равнобедренные, а из их равенства  $a = b = a_1 = b_1$ . Итак, в обоих случаях  $a = a_1, b = b_1, c = c_1$ .  $\square$

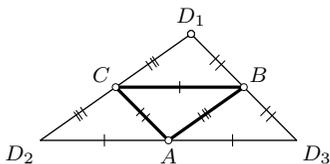


Рис. 86

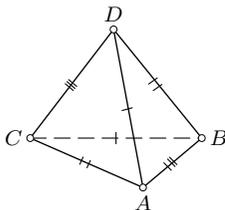


Рис. 87

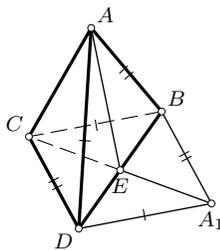


Рис. 88

**7.2. Свойства углов равногранного тетраэдра.** Сначала докажем, что все плоские углы равногранного тетраэдра острые. Допустим, что  $\widehat{DCB} \geq 90^\circ$ . В плоскости  $BCD$  построим треугольник  $BDA_1$ , равный треугольнику  $ABD$  (рис. 88):  $DA_1 = DA = BC, BA_1 = AB = DC$ . Тогда полученный четырехугольник  $A_1BCD$  — параллелограмм, в котором  $DB \geq CA_1 = CE + EA_1 = CE + EA > AC$ . Получили, что  $DB > AC$ , что противоречит необходимому условию  $DB = AC$  равногранного тетраэдра. Итак, предположение, что плоский угол равногранного тетраэдра не меньше прямого, опровергнуто.

Из определения равногранного тетраэдра и полученных его свойств вытекают следующие *следствия* для его углов:

1. *Трехгранные углы равногранного тетраэдра равны* (по равенству их соответственных плоских углов).
2. *Сумма плоских углов каждого триэдра равна сумме плоских углов грани, т. е. равна  $180^\circ$ .*
3. *Противоположные двугранные углы равны* (по первой теореме косинусов для триэдра).
4. *Сумма косинусов трех двугранных углов при ребрах каждой грани равна единице* (на основании формулы проекций (3.3)).

**7.3. Критерии равногранного тетраэдра.** Кроме критерия, приведенного в п. 7.1, имеются и другие критерии равногранного тетраэдра, из которых рассмотрим следующие три.

1. *Для того чтобы тетраэдр был равногранным, необходимо и достаточно, чтобы его бимедианы были общими перпендикулярами (бивысотами) соответствующих пар противоположных ребер.*

*Доказательство.* Пусть тетраэдр  $ABCD$  равногранный:  $a = a_1$ ,  $b = b_1$ ,  $c = c_1$  и  $MN$  — его бимедиана ( $M$  — середина  $AB$ ,  $N$  — середина  $DC$ ). Тогда  $2\overline{MN} = \overline{AD} + \overline{BC}$  и  $2\overline{MN} \cdot \overline{DC} = \overline{AD} \cdot \overline{DC} + \overline{BC} \cdot \overline{DC}$ . Поэтому  $4\overline{MN} \cdot \overline{DC} = -2\overline{DA} \cdot \overline{DC} + 2\overline{CB} \cdot \overline{CD} = (-a^2 - c^2 + b_1^2) + (a_1^2 + c^2 - b^2) = 0$ . Аналогично  $\overline{MN} \cdot \overline{AB} = 0$ . Следовательно,  $MN$  — бивысота.

Обратно, если бимедиана  $MN$  тетраэдра  $ABCD$  является его бивысотой, то она является осью его симметрии и поэтому  $AD = BC$ . Аналогично  $AB = DC$  и  $AC = BD$ . Следовательно, тетраэдр равногранный.  $\square$

**Следствие.** *Описанный параллелепипед равногранного тетраэдра является прямоугольным, так как его высоты являются бивысотами тетраэдра.*

2. *Для того чтобы тетраэдр был равногранным, необходимо и достаточно, чтобы его грани имели равные площади.*

Необходимость очевидна. Достаточность докажем двумя способами.

*Доказательство 1.* Пусть  $BB_1$  и  $DD_1$  — высоты граней  $ABC$  и  $ADC$  (рис. 89). По условию эти треугольники равновелики, поэтому  $BB_1 = DD_1$ . Из середины  $N$  ребра  $BD$  опустим перпендикуляр  $NN_1$  на прямую  $AC$ . Тогда из равенства  $BN = ND$  следует равенство  $B_1N_1 = N_1D_1$  (свойство ортогонального проектирования). Из равенства прямо-

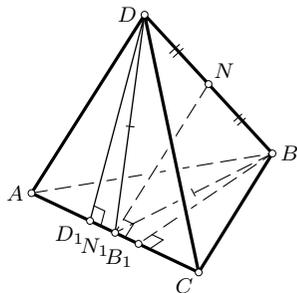


Рис. 89

угольных треугольников  $BB_1N_1$  и  $DD_1N_1$  следует, что  $BN_1 = DN_1$ . Медиана  $N_1N$  равностороннего треугольника  $BDN_1$  перпендикулярна его основанию  $BD$ . Если из середины ребра  $AC$  опустить перпендикуляр на  $BD$ , то по доказанному он будет перпендикулярен и к  $AC$ , т. е. совпадет с  $NN_1$ . В результате бимедианы тетраэдра совпадают с его бивысотами и по предыдущему критерию этот тетраэдр равногранный.  $\square$

**Доказательство 2.** Построим данный тетраэдр  $ABCD$  до треугольной призмы  $AB_1C_1DBC$  (рис. 90). Из равновеликости граней данного тетраэдра следует равновеликость боковых граней пристроенной четырехугольной пирамиды  $ABB_1C_1C$  с вершиной  $A$ . Спроектируем ортогонально ее вершину  $A$  на плоскость ее основания. Пусть  $Q$  — полученная проекция точки  $A$ . Высоты  $AM$  и  $AN$  равновеликих треугольников  $ABB_1$  и  $ACC_1$  равны, поэтому равны их проекции  $QM$  и  $QN$ . Аналогично доказывается, что точка  $Q$  равноудалена от сторон  $BC$  и  $B_1C_1$  параллелограмма  $BB_1C_1C$ , т. е.  $Q$  — центр этого параллелограмма. Тогда  $QC = QB_1$ , откуда  $AC = AB_1 = BD$ . По аналогичной причине  $AB = CD$  и  $BC = AD$ . Следовательно, тетраэдр равногранный.  $\square$

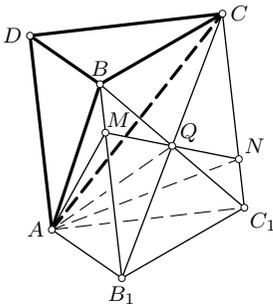


Рис. 90

3. Для того чтобы тетраэдр был равногранным, необходимо и достаточно, чтобы центр  $O$  его описанной сферы совпадал с его центроидом  $G$ .

**Необходимость.** Центр  $O$  описанной сферы принадлежит плоскостям симметрии вершин тетраэдра, взятым попарно. Для равногранного тетраэдра эти плоскости симметрии содержат соответственно его бивысоты, совпадающие с соответственными бимедианами, которые всегда пересекаются в центроиде  $G$ . Следовательно, точки  $O$  и  $G$  совпадают.

**Достаточность.** Пусть точки  $O$  и  $G$  совпадают. Тогда по свойству центроида  $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = \vec{0}$ , а по определению описанной сферы  $OA = OB = OC = OD$ . Из первого равенства имеем:  $(\overline{OA} + \overline{OB})^2 = (\overline{OC} + \overline{OD})^2$ , откуда с учетом равенства модулей векторов  $2\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 2\overline{OC} \cdot \overline{OD}$  и поэтому  $OA^2 + OB^2 - AB^2 = OC^2 + OD^2 - CD^2$ . Следовательно,  $AB = CD$  и аналогично  $BC = AD$  и  $AC = BD$ , т. е. тетраэдр равногранный.

**7.4. Формулы для равногранного тетраэдра.** Так как в равногранном тетраэдре  $a = a_1$ ,  $b = b_1$ ,  $c = c_1$ , то по формулам (6.4) его бимедианы (они

же бивысоты) имеют выражения:

$$\begin{aligned}\delta_1^2 &= PQ^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2), \\ \delta_2^2 &= EF^2 = \frac{1}{2}(c^2 + a^2 - b^2), \\ \delta_3^2 &= MN^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2).\end{aligned}\tag{6.41}$$

Поскольку описанный параллелепипед прямоугольный, то его объем  $V = \delta_1\delta_2\delta_3$ . Следовательно, объем равногранного тетраэдра равен  $V = \frac{1}{3}\delta_1\delta_2\delta_3$  и поэтому

$$72V^2 = (b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2).\tag{6.42}$$

Так как в равногранном тетраэдре совпадают точки  $O$  и  $G$ , то из равенства (6.25) получаем:

$$R^2 = \frac{1}{8}(a^2 + b^2 + c^2).\tag{6.43}$$

## Задачи к главе 6

**6.1.** Если в тетраэдре противоположные ребра перпендикулярны в каждой из двух пар, то и противоположные ребра третьей пары также перпендикулярны. Докажите.

**6.2.** Если  $O$  и  $G$  — центр описанной сферы и центроид тетраэдра  $ABCD$  и прямая  $OG$  пересекает ребра  $DA$  и  $BC$ , то  $DB = AC$  и  $DC = AB$ . Докажите.

**6.3.** Найдите геометрическое место точек пространства, для которых сумма квадратов расстояний до вершин данного тетраэдра постоянна.

**6.4.** Докажите, что бимедианы прямоугольного тетраэдра равны радиусу описанной около него сферы.

**6.5.** Докажите, что если две высоты тетраэдра пересекаются, то и две другие также пересекаются.

**6.6.** Докажите, что для площади  $S$  сечения тетраэдра  $ABCD$  плоскостью, проходящей через его ребро  $CD$  и центроид, имеет место зависимость:

$$4S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2 \cos(CD).$$

**6.7.** Сумма квадратов площадей шести сечений тетраэдра плоскостями, каждая из которых проходит через ребро и середину противоположного ребра, равна сумме квадратов площадей всех его граней. Докажите.

**6.8.** В прямоугольном тетраэдре сумма квадратов площадей сечений, проведенных через ребра-катеты и центроид, равна половине квадрата площади грани-гипотенузы. Докажите.

**6.9.** Сумма квадратов площадей сечений прямоугольного тетраэдра, проведенных через ребра наибольшей грани и его центроид, равна квадрату площади наибольшей грани. Докажите.

**6.10.** В прямоугольном тетраэдре площади граней-катетов равны  $S_1, S_2, S_3$ . Найдите его объем.

**6.11.** В прямоугольный тетраэдр  $ABCD$  вписан куб так, что одна его вершина совпадает с вершиной  $D$  прямого триэдра, а противоположная ей вершина лежит в грани  $ABC$ . Найдите длину ребра куба, если  $DA = a, DB = b, DC = c$ .

**6.12.** В правильной треугольной пирамиде длина бокового ребра равна  $l$ . Плоскость, проходящая через сторону основания и середину противоположного ребра, наклонена к плоскости основания под углом  $\alpha$ . Найдите объем пирамиды.

**6.13.** В правильной треугольной пирамиде угол при вершине равен  $\alpha$ , расстояние между противоположными ребрами равно  $d$ . Найдите объем пирамиды.

**6.14.** Дан тетраэдр. Докажите, что объем тетраэдра, вершинами которого являются центроид данного тетраэдра и три середины его ребер, не лежащие в одной плоскости с центроидом, равен  $1/16$  объема данного тетраэдра. (Теорема Монжа.)

**6.15.** Найдите объем прямоугольного тетраэдра с равными ребрами-катетами, если высота, проведенная к грани-гипотенузе, имеет длину  $h$ .

**6.16.** Докажите, что объем любой пирамиды равен  $1/3$  произведения длины ее бокового ребра и площади ортогональной проекции основания на плоскость, перпендикулярную взятому ребру.

**6.17.** Дан клин  $ABCA_1B_1C_1$ . Докажите, что тетраэдры  $ABCC_1$  и  $A_1B_1C_1C$  равновелики.

**6.18.** Докажите, что объем клина  $ABCA_1B_1C_1$  равен сумме объемов тетраэдров  $ABCA_1, ABCB_1, ABCC_1$ . Получите отсюда формулу (6.20) объема клина.

**6.19.** Найдите отношение объемов тел, на которые делит правильную четырехугольную пирамиду плоскость, перпендикулярная стороне основания и делящая эту сторону в отношении  $1 : 3$ .

**6.20.** Плоскость, параллельная двум противоположным ребрам тетраэдра, делит расстояние между ними в отношении  $k$ . В каком отношении эта плоскость делит объем тетраэдра?

**6.21.** Докажите, что плоскость, содержащая бимедиану тетраэдра, делит его на две равновеликие части.

**6.22.** Плоскость, проходящая через сторону основания правильной четырехугольной пирамиды, делит противоположную грань на две равновеликие части. В каком отношении делит эта плоскость объем пирамиды?

**6.23.** Плоскость, проходящая через сторону основания правильной четырехугольной пирамиды, делит ее объем пополам. В каком отношении эта плоскость делит площадь противоположной боковой грани?

**6.24.** Дан тетраэдр  $ABCD$ . Найдите геометрическое место точек  $M$  пространства, для каждой из которых тетраэдры  $MACD$  и  $MBCD$  равновелики.

**6.25.** Дан тетраэдр  $ABCD$ . Найдите геометрическое место точек  $M$  пространства, для каждой из которых тетраэдры  $MBCD$ ,  $MACD$ ,  $MABD$  равновелики.

**6.26.** Дан тетраэдр  $ABCD$ . Найдите геометрическое место точек  $M$  пространства, для каждой из которых тетраэдры  $MBCD$ ,  $MACD$ ,  $MABD$ ,  $MABC$  равновелики.

**6.27.** Докажите, что три отрезка, каждый из которых соединяет основания высот граней, принадлежащие скрещивающимся ребрам ортоцентрического тетраэдра, пересекаются в его ортоцентре.

**6.28.** Докажите, что все ребра параллелепипеда, описанного около ортоцентрического тетраэдра, равны между собой.

**6.29.** Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре сумма квадратов произведений длин противоположных ребер равна учетверенной сумме квадратов площадей граней:

$$(aa_1)^2 + (bb_1)^2 + (cc_1)^2 = 4(S_1 + S_2 + S_3 + S_4).$$

**6.30.** Докажите, что сумма квадратов расстояний от ортоцентра до вершин ортоцентрического тетраэдра равна квадрату диаметра его описанной сферы.

**6.31.** Найдите на высоте  $DD_1$  ортоцентрического тетраэдра  $ABCD$  такую точку  $M$ , чтобы прямые  $MA$ ,  $MB$ ,  $MC$  были попарно ортогональными.

**6.32.** Докажите, что если ортоцентр тетраэдра совпадает с его центроидом, то тетраэдр является правильным.

**6.33.** Середины ребер, шесть оснований высот граней и 12 точек, делящих пополам отрезки этих высот от ортоцентров граней до вершин ортоцентрического тетраэдра, лежат на одной сфере (первая сфера Эйлера ортоцентрического тетраэдра). Докажите.

**6.34.** Центроиды и ортоцентры граней ортоцентрического тетраэдра, а также точки, делящие отрезки высот тетраэдра от его ортоцентра до вершин в отношении  $1 : 2$ , лежат на одной сфере, которая гомотетич-

на описанной сфере при гомотетии с центром в центроиде  $G$  и коэффициентом  $-1/3$  (вторая сфера Эйлера ортоцентрического тетраэдра). Докажите.

**6.35.** Докажите, что если все грани тетраэдра имеют равные периметры, то тетраэдр равногранный.

**6.36.** Докажите, что в равногранном и только в равногранном тетраэдре бимедианы попарно перпендикулярны.

**6.37.** Докажите, что в равногранном тетраэдре и только в равногранном тетраэдре центр вписанной сферы совпадает с его центроидом.

**6.38.** Докажите, что диаметр вписанной сферы равногранного тетраэдра равен радиусу его невписанной сферы (первого рода).

**6.39.** Докажите, что квадрат диаметра сферы, описанной около равногранного тетраэдра, равен сумме квадратов его бимедиан.

**6.40.** Докажите, что сумма квадратов расстояний точки сферы, вписанной в равногранный тетраэдр, до его вершин не зависит от положения точки на этой сфере.

**6.41.** Докажите, что вписанная в равногранный тетраэдр сфера касается его граней в центрах окружностей, описанных около граней.

**6.42.** Докажите, что сфера, вписанная в равногранный тетраэдр, касается всех граней восьмигранника, вершинами которого являются середины ребер данного тетраэдра.

**6.43.** Докажите, что объем равногранного тетраэдра выражается формулой:

$$V = \frac{1}{3}abc\sqrt{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},$$

где  $a, b, c$  — длины ребер с общей вершиной,  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы между ними.

## Вычисление объемов тел

§1. Формула Ньютона–Симпсона  
и ее применение

**1.1. Вывод формулы Ньютона–Симпсона.** Наиболее краткий вывод этой формулы основан на интегральной формуле вычисления объемов ([2], с. 157):

$$V = \int_a^b S(x)dx, \quad (7.1)$$

где  $S(x)$  — площадь сечения тела произвольной плоскостью, перпендикулярной оси  $Ox$ . Функция  $S(x)$  непрерывна на числовом промежутке  $[a, b]$ .

**Теорема.** Если площади  $S(x)$  параллельных сечений тела удовлетворяют условию:

$$S(x) = ax^2 + bx + c, \quad 0 \leq x \leq h,$$

где  $x$  — расстояние секущей плоскости до некоторой постоянной (начальной) плоскости и  $a, b, c$  — постоянные числа, то объем  $V$  тела равен:

$$V = \frac{h}{6}(S_1 + S_2 + 4S), \quad (7.2)$$

где  $S_1 = S(0)$ ,  $S_2 = S(h)$ ,  $S = S\left(\frac{1}{2}h\right)$ .

**Доказательство.** По формуле (7.1)

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h (ax^2 + bx + c)dx.$$

Вычислив этот интеграл, получаем:

$$V = \frac{1}{3}ah^3 + \frac{1}{2}bh^2 + ch = \frac{h}{6}(2ah^2 + 3bh + 6c).$$

Так как  $S_1 = S(0) = c$ ,  $S_2 = S(h) = ah^2 + bh + c$ ,  $S = S\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{4}ah^2 + \frac{1}{2}bh + c$ ,  $4S = ah^2 + 2bh + 4c$ , то

$$S_1 + S_2 + 4S = 2ah^2 + 3bh + 6c.$$

Следовательно,

$$V = \frac{h}{6}(S_1 + S_2 + 4S). \quad \square$$

Эта замечательная формула носит имена двух английских математиков: великого Исаака Ньютона (1643–1727) и Томаса Симпсона (1710–1761). Обязательным условием ее применения является квадратичность функции  $S(x)$  площади параллельных сечений тела.

**1.2. Объем пирамиды и усеченной пирамиды.** Пусть  $S$  — площадь основания пирамиды,  $S(x)$  — площадь ее сечения плоскостью, параллельной основанию и удаленной от вершины на расстояние  $x$ ,  $h$  — высота пирамиды. Тогда, как известно,

$$\frac{S(x)}{S} = \frac{x^2}{h^2}, \quad \text{откуда} \quad S(x) = \frac{S}{h^2}x^2.$$

Поскольку  $S(x)$  — квадратичная функция и  $S_1 = 0$ ,  $S_2 = S$  и  $S\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{4}S$ , то согласно формуле Ньютона–Симпсона объем  $V$  пирамиды равен

$$V = \frac{h}{6}\left(0 + S + 4 \cdot \frac{1}{4}S\right) = \frac{1}{3}Sh.$$

Для объема конуса этот вывод остается без изменения.

Рассмотрим усеченную пирамиду с площадями  $S_1$  и  $S_2$  ее верхнего и нижнего оснований. Пусть  $h$  — высота этой пирамиды,  $x$  — высота пирамиды, дополняющей данную пирамиду до полной пирамиды. Ясно, что как и в предыдущем случае, площадь произвольного сечения, параллельного основаниям, есть квадратичная функция его расстояния до вершины. Поэтому формула (7.2) применима. Пусть  $S$  — площадь среднего сечения данной пирамиды. Тогда

$$\frac{S_1}{S} = \frac{x^2}{\left(x + \frac{1}{2}h\right)^2} = \frac{4x^2}{(2x + h)^2},$$

откуда  $4S = \frac{(2x + h)^2}{x^2}S_1$ . Аналогично,  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{x^2}{(x + h)^2}$ , откуда  $\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}} = \frac{x + h}{x}$

и  $\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}} + 1 = \frac{2x + h}{x}$ . Следовательно,

$$4S = \left(\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}} + 1\right)^2 S_1 = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$$

и поэтому

$$V = \frac{h}{6}(S_1 + S_2 + (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2),$$

$$V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}).$$

Для *усеченного конуса* имеем тот же результат. Для него  $S_1 = \pi r_1^2$ ,  $S_2 = \pi r_2^2$ ,  $\sqrt{S_1 S_2} = \pi r_1 r_2$  и, следовательно,

$$V = \frac{1}{3} \pi h (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2).$$

Получим *формулу Сервуа* (6.14) для объема тетраэдра, пользуясь формулой Ньютона–Симпсона. Проведем две параллельные плоскости через скрещивающиеся ребра тетраэдра (рис. 91). Пусть  $a$  и  $a_1$  — длины этих ребер,  $\varphi$  — угол между ними,  $\delta$  — кратчайшее расстояние. Сечением тетраэдра плоскостью, параллельной этим ребрам, является параллелограмм. Если  $x$  — расстояние секущей плоскости от ребра длины  $a$ , то стороны этого параллелограмма имеют длины  $\frac{bx}{\delta}$  и  $\frac{a(\delta-x)}{\delta}$ , поэтому его площадь равна  $S(x) = \frac{bx}{\delta} \cdot \frac{a(\delta-x)}{\delta} \cdot \sin \varphi = \frac{ab}{\delta^2} x(\delta-x) \times \sin \varphi$ . Как видим,  $S(x)$  — квадратичная функция, для которой  $S(0) = 0$ ,  $S(\delta) = 0$ ,  $4S\left(\frac{\delta}{2}\right) = ab \sin \varphi$ . Согласно формуле (7.2) объем  $V$  тетраэдра равен

$$V = \frac{1}{2} \delta ab \sin \varphi.$$

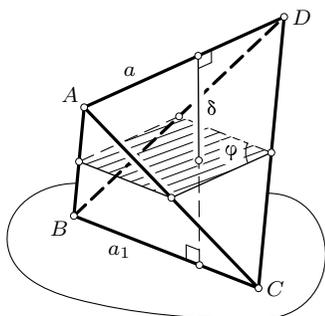


Рис. 91

**1.3. Объем клина.** Формула (6.20) объема клина была получена в п. 3.7 гл. 6. Рассмотрим другое ее доказательство, опуская проверку условия применимости формулы Ньютона–Симпсона. Поставим клин  $ABCA_1B_1C_1$  на боковую грань  $AA_1B_1B$  с параллельными ребрами  $a$  и  $b$  (рис. 92). Пусть  $d$  — длина высоты трапеции  $AA_1B_1B$ .

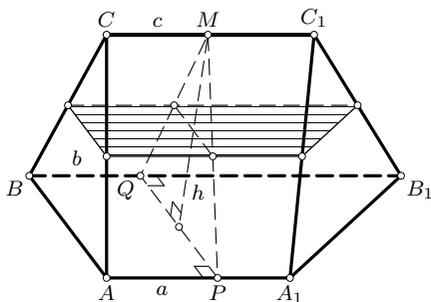


Рис. 92

Тогда ее площадь  $S_1 = \frac{1}{2}(a + b)d$ . Площадь  $S$  среднего сечения клина, которое является трапецией с основаниями  $\frac{1}{2}(a + c)$  и  $\frac{1}{2}(b + c)$  и высотой  $\frac{1}{2}d$ , равна  $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(a + c) + \frac{1}{2}(b + c)\right)\frac{1}{2}d = \frac{1}{8}(a + b + 2c)d$ . Если  $h$  — расстояние от ребра  $CC_1$  до плоскости грани  $AA_1B_1B$ , то по формуле Ньютона–Симпсона объем  $V$  клина равен

$$V = \left(0 + \frac{1}{2}(a + b)d + 4 \cdot \frac{1}{8}(a + b + 2c)d\right) = \frac{h}{6} \cdot \frac{d}{2} \cdot 2(a + b + c).$$

Заметим, что  $\frac{1}{2}hd$  есть площадь  $S_{\perp}$  перпендикулярного сечения  $MPQ$  клина. В результате имеем:

$$V = \frac{1}{3}S_{\perp}(a + b + c). \quad \square$$

Опущенная часть этого доказательства — выражение площади произвольного сечения, параллельного плоскости грани  $AA_1B_1B$ ,

$$S(x) = \frac{S_1 - dc}{h^2}x^2 + \frac{dc}{h}x$$

— может быть самостоятельно восполнена читателем.

**Задача.** Оси двух круговых цилиндров равных радиусов  $R$  пересекаются под прямым углом. Требуется найти объем тела, являющегося пересечением этих цилиндров (рис. 93).

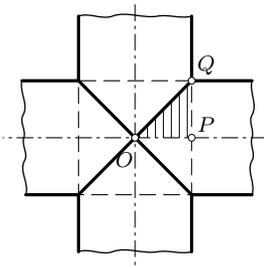


Рис. 93

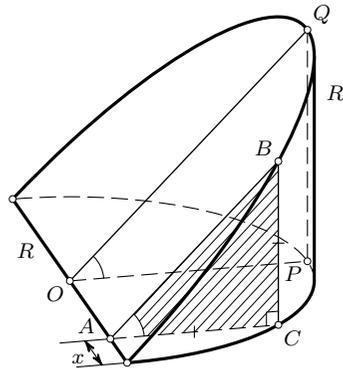


Рис. 94

**Решение.** Пересечением данных цилиндров является тело, состоящее из четырех равных частей, каждую из которых можно разбить пополам. Одна из полученных восьми долек представлена на рис. 94.

Ее параллельными сечениями плоскостями, параллельными плоскости симметрии  $OPQ$ , служат равнобедренные прямоугольные треугольники. Если  $x$  — расстояние секущей плоскости от конца диаметра цилиндра, то площадь  $S(x)$  сечения  $ABC$  равна  $\frac{1}{2}AC^2 = \frac{1}{2}x(2R - x)$ , следовательно, является квадратичной функцией. По формуле Ньютона–Симпсона при  $h = 2R$ ,  $0 \leq x \leq 2R$ ,  $S = \frac{1}{2}R^2$  искомый объем пересечения цилиндров будет равен:

$$V = 8 \cdot \frac{2R}{6} \left( 0 + 0 + 4 \cdot \frac{1}{2}R^2 \right) = \frac{16}{3}R^3.$$

## §2. Объем шара и его частей

**2.1. Объем шара и шарового сегмента.** Вычислим объем  $V$  шара радиуса  $R$  по формуле Ньютона–Симпсона, что чрезвычайно просто: площади его «крайних» сечений равны нулю, а площадь среднего сечения равна  $\pi R^2$ . Тогда

$$V = \frac{2R}{6} (0 + 0 + 4\pi R^2) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Однако прежде нужно было убедиться в том, что площадь  $S(x)$  его произвольного сечения — квадратичная функция. А это так:

$$S(x) = \pi r^2 = \pi x(2R - x) = -\pi x^2 + 2\pi R x,$$

где  $r$  — радиус сечения,  $x$  — расстояние от плоскости сечения до параллельной ей касательной плоскости к шару.

*Шаровым сегментом* называется часть шара, отсеченная от него некоторой секущей плоскостью (рис. 95). Круг, являющийся сече-

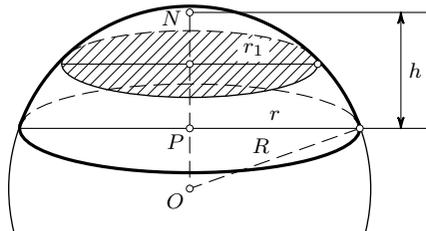


Рис. 95

ем шара этой плоскостью, называется *основанием шарового сегмента*. Плоскость, пересекающая шар, делит его на два шаровых сегмента с общим основанием. Если провести касательную плоскость к шаровому

сегменту, параллельную его основанию, то расстояние  $h$  между этой плоскостью и плоскостью основания называется *высотой сегмента*.

Радиус  $r$  основания, радиус  $R$  шара и высота  $h$  сегмента связаны зависимостью:

$$r^2 = h(2R - h). \quad (7.3)$$

По этой же формуле для радиуса  $r_1$  среднего сечения шарового сегмента имеем:  $r_1^2 = \frac{h}{2} \left( 2R - \frac{h}{2} \right)$ . Тогда по формуле Ньютона–Симпсона объем  $V$  шарового сегмента с высотой  $h$  будет равен:

$$\begin{aligned} V &= \frac{h}{6} (0 + \pi r^2 + 4\pi r_1^2) = \frac{h}{6} \left( \pi h(2R - h) + 2\pi h \left( 2R - \frac{h}{2} \right) \right) = \\ &= \frac{2\pi h^2}{6} \left( R - \frac{h}{2} + 2R - \frac{h}{2} \right) = \frac{1}{3} \pi h^2 (3R - h). \end{aligned}$$

Итак,

$$V = \frac{1}{3} \pi h^2 (3R - h). \quad (7.4)$$

Из (7.3)  $R = \frac{1}{2h} (r^2 + h^2)$ . Поэтому из (7.4) получаем еще другую формулу для объема шарового сегмента:

$$V = \frac{1}{6} \pi h (3r^2 + h^2). \quad (7.5)$$

**2.2. Объем шарового сектора.** *Шаровым сектором* называется тело вращения кругового сектора около его граничного радиуса. Пусть центральный угол кругового сектора равен  $\alpha$ . Возможны три случая:  $\alpha < 90^\circ$ ,  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  и  $\alpha = 90^\circ$ . Для первых двух случаев соответствующие шаровые сектора изображены на рис. 96 и рис. 97. При  $\alpha < 90^\circ$  шаровой сектор состоит из шарового сегмента и конуса. Во втором слу-

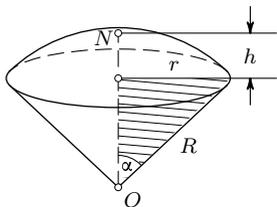


Рис. 96

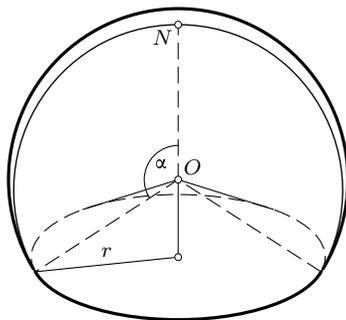


Рис. 97

чае шаровой сектор представляет собой разность шарового сегмента и конуса. Случай  $\alpha = 90^\circ$  исключается из рассмотрения, поскольку тогда шаровой сектор есть полушар. Высоту  $h$  шарового сегмента, соответствующего данному шаровому сектору, называют также и высотой этого сектора.

В случае  $\alpha < 90^\circ$  объем  $V$  шарового сектора находится как сумма объемов сегмента и конуса:  $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h) + \frac{1}{3}\pi r^2(R - h)$ , где  $R$  — радиус шара,  $r$  — радиус основания сегмента и конуса. После подстановки (7.3) и упрощения полученного выражения имеем окончательно:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h. \quad (7.6)$$

При  $\alpha > 90^\circ$  высота конуса будет равна  $h - R$ , но тогда вместо суммы объемов имеем их разность. В результате получается тот же результат (7.6).

**2.3. Объем шарового слоя и шарового кольца.** *Шаровым слоем* называется часть шара, заключенная между двумя его секущими параллельными плоскостями. Расстояние между этими плоскостями называется высотой шарового слоя.

Шаровой слой представляет собой разность двух шаровых сегментов. Если  $h_1$  и  $h_2$  — высоты этих сегментов,  $r_1$  и  $r_2$  — радиусы их оснований (рис. 98), то объем  $V$  шарового слоя равен:

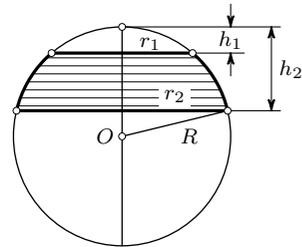


Рис. 98

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi h_2^2(3R - h_2) - \frac{1}{3}\pi h_1^2(3R - h_1) = \\ &= \frac{1}{3}\pi(3R(h_2^2 - h_1^2) - (h_2^3 - h_1^3)) = \\ &= \frac{1}{3}\pi(h_2 - h_1)(3R(h_2 + h_1) - (h_1^2 + h_2^2 + h_1 h_2)). \end{aligned}$$

Согласно (7.3)  $2Rh_i = r_i^2 + h_i^2$ , ( $i = 1, 2$ ). Поэтому

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6}\pi(h_2 - h_1)(3(r_2^2 + h_2^2 + r_1^2 + h_1^2) - 2(h_1^2 + h_2^2 + h_1 h_2)) = \\ &= \frac{1}{6}\pi(h_2 - h_1)(3r_1^2 + 3r_2^2 + (h_2 - h_1)^2). \end{aligned}$$

Так как  $h_2 - h_1 = h$  — высота шарового слоя, то получаем окончательно:

$$V = \frac{1}{6}\pi h(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2). \quad (7.7)$$

*Шаровым кольцом* называется тело вращения кругового сегмента около диаметра этого круга, если этот диаметр не имеет общих внутренних точек с хордой кругового сегмента (рис. 99).

Очевидно объем шарового кольца равен разности объемов шарового слоя и усеченного конуса:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6}\pi h(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2) - \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2) = \\ &= \frac{1}{6}\pi h(r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 + h^2) = \frac{1}{6}\pi h((r_2 - r_1)^2 + h^2). \end{aligned}$$

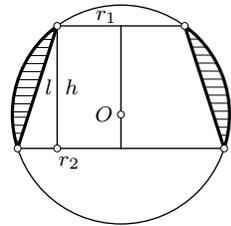


Рис. 99

Из соответствующего прямоугольного треугольника  $(r_2 - r_1)^2 + h^2 = l^2$ , где  $l$  - длина хорды вращающегося кругового сегмента. Объем шарового кольца, следовательно, выражается простой формулой:

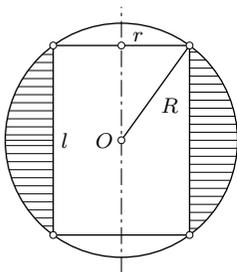


Рис. 100

$$V = \frac{1}{6}\pi l^2 h. \quad (7.8)$$

Примечательно, что этот объем не зависит от радиуса шара.

**Задача.** В шаре радиуса  $R$  просверлено вдоль его диаметра цилиндрическое отверстие радиуса  $r$ . Найдите объем оставшейся части шара.

**Решение.** Оставшаяся часть шара есть шаровое кольцо (рис. 100) у которого  $l = h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ . Поэтому ее объем равен

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 = \frac{4}{3}\pi(R^2 - r^2)^{3/2}.$$

### §3. Принцип Кавальери

**3.1. Сущность принципа Кавальери.** Итальянский математик Бонавентура Кавальери (1598–1647), ученик Галилея, сформулировал свой принцип для нахождения объемов тел в своей книге, вышедшей в 1635 году. Содержание этого принципа таково.

*Если при пересечении двух тел  $F$  и  $F_1$  плоскостями, параллельными некоторой постоянной плоскости  $\alpha$ , в сечениях этих тел получаются фигуры, площади которых находятся в постоянном отношении  $\lambda$ :  $S = \lambda S_1$ , то объемы этих тел находятся в том же отношении:  $V(F) = \lambda V(F_1)$ .*

Кавальери высказал этот факт без доказательства как постулат — «принцип». Потом стало ясно, что он является простым следствием

формулы (7.1). Но интегральное исчисление появилось позже примерно лет на 25 в работах И. Ньютона и Г. Лейбница благодаря, в частности, и исследованиям Б. Кавальери.

На основании принципа Кавальери пирамиды с равными высотами и равновеликими основаниями равновелики. Отсюда путем разбиения треугольной призмы диагоналями боковых граней на три равновеликие треугольные пирамиды из формулы объема призмы получается основная формула объема тетраэдра  $V = \frac{1}{3}Sh$ .

Рассмотрим другие примеры применения принципа Кавальери.

**3.2. Объем шара и шарового сегмента.** Рассмотрим полушар с центром  $O$  радиуса  $R$ . Поместим на плоскость  $\alpha$  его граничного круга куб с ребром длины  $R$  (рис. 101). Отсечем от куба  $ABCA_1B_1C_1D_1$

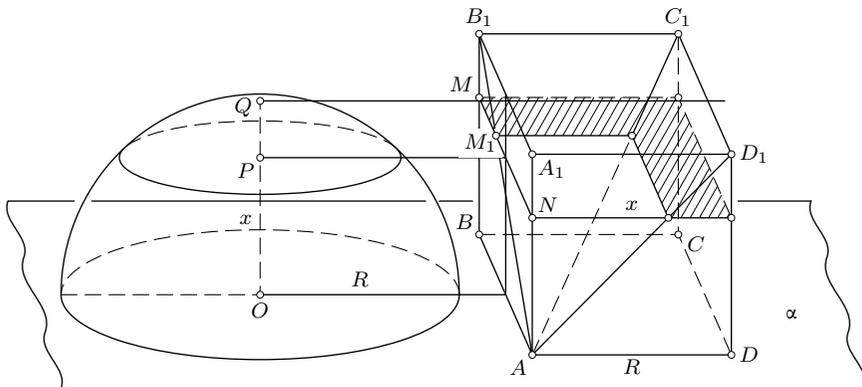


Рис. 101

четыреугольную пирамиду  $AA_1B_1C_1D_1$ . Сравним объем полученного многогранника  $F_1$  с объемом полушара. Пересечем этот многогранник и полушар некоторой плоскостью  $\beta$ , параллельной  $\alpha$  и отстоящей от нее на расстоянии  $OP = x$ . В сечении полушара получим круг, площадь которого равна  $\pi(R^2 - x^2)$ . Сечением многогранника  $F_1$  является шестиугольник, площадь которого равна разности  $R^2 - x^2$  площади грани куба и квадрата со стороной  $x$ , так как  $AN = NM_1 = x$ . Следовательно, условия принципа Кавальери выполнены: отношение площадей сечений данных тел постоянно (равно  $\pi$ ). Тогда по этому принципу объем полушара равен

$$\pi V(F_1) = \pi(V_{\text{куба}} - V_{AA_1B_1C_1D_1}) = \pi \left( R^3 - \frac{1}{3}R^3 \right) = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Пользуясь выполненными построениями, найдем объем шарового сегмента с высотой  $h = PQ$ , отсеченного от полушара секущей плоскостью  $\beta$ . Этому шаровому сегменту соответствует многогранник, полученный путем изъятия из прямоугольного параллелепипеда  $NC_1$  (верхней части куба  $AC_1$ ) усеченной пирамиды, одним основанием которой служит квадрат  $A_1B_1C_1D_1$  (с ребром  $R$ ), а другим — квадрат с ребром  $x$ . К этим телам также применим принцип Кавальери (с аналогичной секущей плоскостью):

$$V_{\text{шар.сегм.}} = \pi \left( R^2 h - \left( \frac{1}{3} R^3 - \frac{1}{3} (R - h)^3 \right) \right) = \pi h^2 \left( R - \frac{h}{3} \right).$$

Объем усеченной пирамиды подсчитан как разность объемов двух полных пирамид с общей вершиной  $A$ .

Полученный результат совпадает с (7.4).

**3.3. Объем тора.** *Тором* называется тело, полученное вращением круга около прямой, лежащей в плоскости этого круга и не пересекающей его. Форму тора имеет, например, обыкновенная баранка или же накачанная автомобильная шина.

Для получения формулы объема тора положим его на некоторую плоскость  $\alpha$ . Пусть  $R$  — радиус вращающегося круга,  $a$  — расстояние от центра  $O_1$  этого круга до оси вращения. Положим на плоскость  $\alpha$  также прямой круговой цилиндр радиуса  $R$  с длиной  $a$  образующей так, чтобы он касался плоскости  $\alpha$  по образующей (рис. 102). Пересечем эти два тела плоскостью  $\gamma$ , параллельной плоскости  $\alpha$  и удаленной от центров оснований цилиндра на расстояние  $x$ . Эта плоскость пересекает тор по круговому кольцу, а цилиндр — по прямоугольнику (на рис. 102 они заштрихованы). Нетрудно подсчитать, что площадь кольца равна

$$\pi(a + \sqrt{R^2 - x^2})^2 - \pi(a - \sqrt{R^2 - x^2})^2 = 4\pi a \sqrt{R^2 - x^2},$$

а площадь прямоугольника —  $2a\sqrt{R^2 - x^2}$ . Их отношение  $\lambda = 2\pi$  не зависит от  $x$ . Согласно принципу Кавальери объем тора равен объему цилиндра, умноженному на  $2\pi$ :

$$V_{\text{тора}} = 2\pi \cdot \pi R^2 a = 2\pi^2 a R^2. \quad (7.9)$$

Так как формулу (7.9) объема тора можно записать в виде  $\pi R^2 \cdot 2\pi a$ , то результат можно сформулировать так.

*Объем тора равен произведению площади образующего его круга и длины окружности, радиус которой равен расстоянию от центра этого круга до оси вращения.*

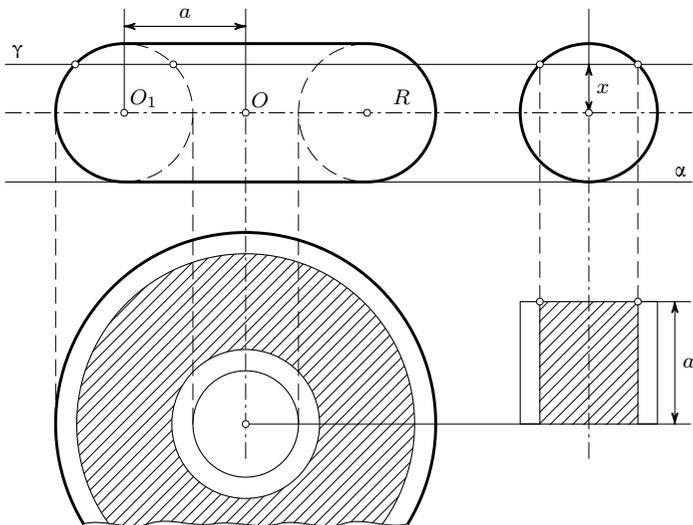


Рис. 102

## §4. Объем тела вращения

**4.1. Лемма о площади поверхности, образованной вращением отрезка.** *Площадь  $S$  поверхности вращения отрезка, который не имеет общих внутренних точек с осью вращения, лежащей в одной плоскости с отрезком, равна произведению длины  $l$  этого отрезка и длины окружности, радиус которой равен расстоянию  $\rho$  от середины отрезка до оси вращения:*

$$S = l \cdot 2\pi\rho \quad (7.10)$$

(теорема Гюльдена для отрезка).

**Доказательство.** Возможные случаи взаимного расположения отрезка  $AB$  и оси  $x$  вращения представлены на рис. 103. В случае *a*), когда  $AB \parallel x$ , поверхность вращения — боковая поверхность цилиндра. Тогда  $S = 2\pi\rho l$ . При условии *б*) получается боковая поверхность конуса с образующей  $l$  и радиусом  $2\rho$  основания. Поэтому  $S = 2\pi l\rho$ . В случае *в*) площадь боковой поверхности усеченного конуса равна  $S = \pi(r_1 + r_2)l = 2\pi l\rho$ . Когда  $AB \perp x$ , получаем либо круг радиуса  $l = 2\rho$ , либо круговое кольцо с площадью  $S = \pi(OA^2 - OB^2) = \pi(OA + OB)(OA - OB) = \pi \cdot 2\rho \cdot l$ .  $\square$

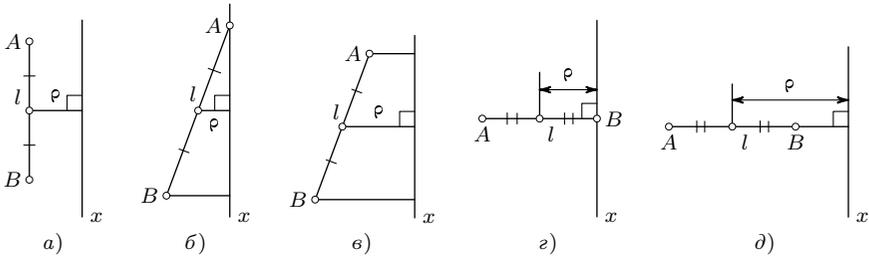


Рис. 103

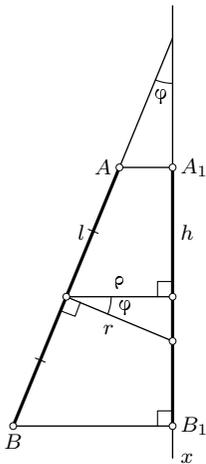


Рис. 104

Пусть  $r$  — длина срединного перпендикуляра к отрезку  $AB$  от середины отрезка до оси вращения и  $h$  — ортогональная проекция отрезка (рис. 104) на ось вращения. Тогда  $h = l \cos \varphi$  и  $\rho = r \cos \varphi$ , где  $\varphi$  — угол наклона отрезка к оси вращения, откуда  $\rho l = hr$ . Поэтому формуле (7.10) можно придать вид:

$$S = 2\pi r h. \quad (7.11)$$

Следовательно, доказанную лемму можно сформулировать так.

**Следствие.** *Площадь поверхности, образованной вращением отрезка около оси, лежащей с ним в одной плоскости и не пересекающей его во внутренних точках, равна произведению ортогональной проекции отрезка на ось и длины окружности, радиус которой равен длине срединного перпендикуляра к отрезку от его середины до оси вращения.*

**4.2. Объем тела вращения треугольника.** Имеет место такая теорема.

**Теорема.** *Объем тела, образованного вращением треугольника около прямой, лежащей в его плоскости, проходящей через его вершину и не содержащей внутренних точек треугольника, равен произведению площади поверхности, полученной вращением противоположной этой вершине стороны, на треть соответствующей ей высоты.*

**Доказательство.** Пусть дан треугольник  $ABC$  и ось  $x$  вращения, удовлетворяющая указанным условиям. Рассмотрим возможные случаи.

1. Сторона  $AB$  принадлежит оси вращения (рис. 105). Тогда тело  $T$  вращения треугольника представляет собой сумму (или разность) двух конусов с общим основанием радиуса  $CE$ :  $V(T) = \frac{1}{3}\pi \cdot CE^2 \cdot AE + \frac{1}{3}\pi \times$

$\times CE^2 \cdot BE = \frac{1}{3}\pi \cdot CE^2 \cdot AB$ . Так как  $CE \cdot AB = BC \cdot AH$ , то

$$V(T) = \frac{1}{3}\pi \cdot CE(BC \cdot AH) = S_{BC} \cdot \frac{1}{3}AH.$$

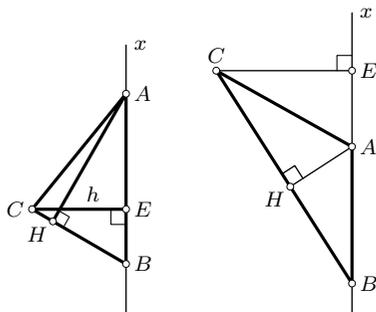


Рис. 105

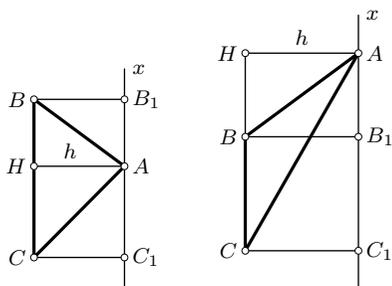


Рис. 106

2. Сторона  $BC$  параллельна оси вращения (рис. 106). Если основание  $H$  высоты  $AH$  принадлежит отрезку  $BC$ , то получаем тот же результат. Если  $H$  лежит вне отрезка  $BC$ , то объем  $V(T)$  равен сумме объема цилиндра с высотой  $BC$  и радиусом  $AH$  и объема конуса с высотой  $AB_1 = BH$  и радиусом  $BB_1 = AH$  без объема конуса с высотой  $AC_1 = CH$  и радиусом  $CC_1 = AH$ :

$$\begin{aligned} V(T) &= \pi h^2 \cdot BC + \frac{1}{3}\pi h^2 \cdot BH - \frac{1}{3}\pi h^2 \cdot CH = \\ &= \pi h^2 \left( BC + \frac{1}{3}BH - \frac{1}{3}CH \right) = \pi h^2 \left( BC - \frac{1}{3}BC \right) = \\ &= \frac{2}{3}\pi h^2 \cdot BC = \frac{1}{3}h \cdot 2BC \cdot \pi h = S_{BC} \cdot \frac{1}{3}h. \end{aligned}$$

3. Прямая  $BC$  пересекает ось  $x$  вращения в точке  $M$  (рис. 107). Тогда объем  $V(T)$  равен разности объемов тел вращения треугольников  $ABM$  и  $ACM$ :

$$V(T) = \frac{1}{3}S_{BM} \cdot h - \frac{1}{3}S_{CM}h = \frac{1}{3}h(S_{BM} - S_{CM}) = \frac{1}{3}h \cdot S_{BC}. \quad \square$$

Доказанный результат можно представить иначе. Пусть  $BC = a$ . По формуле (7.10)  $S_{BC} = a \cdot 2\rho$ , где  $\rho$  — расстояние от середины  $E$  стороны  $BC$  до оси вращения (рис. 108). Тогда  $V(T) = \frac{1}{3}ah \cdot 2\rho$ .

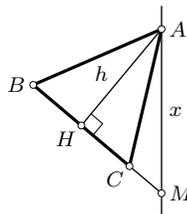


Рис. 107

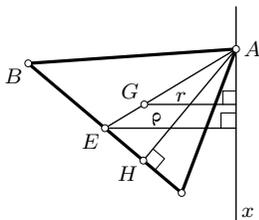


Рис. 108

Расстояние  $r$  от центроида  $G$  треугольника  $ABC$  до оси  $x$  вращения равно  $\frac{2}{3}r$ ,  $ah = 2S_{ABC}$ . Поэтому

$$V(T) = S_{ABC} \cdot 2\pi r. \quad (7.12)$$

Итак, *объем тела вращения треугольника около оси, лежащей в плоскости треугольника, содержащей его вершину и не имеющей внутренних точек треугольника, равен произведению площади треугольника и длины окружности, радиус которой равен расстоянию от центроида треугольника до оси вращения* (теорема Гюльдена для треугольника).

**Задача.** Найдите объем тела, образованного вращением треугольника  $ABC$  около прямой, проходящей через вершину  $C$  в его плоскости перпендикулярно медиане  $CM$ , если  $CA = b$ ,  $CB = a$ ,  $\widehat{ACB} = \gamma$ .

**Решение.**  $\overline{CM} = \frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{CB})$ ,  $CM = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \gamma}$ . Центроид треугольника удален от оси вращения на расстояние  $r = \frac{2}{3}CM = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \gamma}$ . По формуле (7.12)

$$\begin{aligned} V(T) &= \frac{1}{2}ab \sin \gamma \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \gamma} = \\ &= \frac{1}{3}\pi ab \sin \gamma \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \gamma}. \end{aligned}$$

**4.3. Объем тела вращения центрально-симметричной фигуры.** В своей общей формулировке теорема Гюльдена связана с понятием центра массы площади («центра тяжести») плоской фигуры. Введение этого понятия и доказательство теоремы Гюльдена в общем содержании далеко не элементарны и рассматриваются в высшей школе. Однако для плоской фигуры, имеющей площадь и центр симметрии, центр массы совпадает с центром симметрии. Для этого частного, но часто встречающегося случая теорема Гюльдена имеет такую формулировку.

*Объем тела вращения плоской центрально-симметричной фигуры около прямой, не имеющей с этой фигурой общих ее внутренних точек, равен произведению площади  $S$  фигуры и длины окружности, радиус  $r$  которой равен расстоянию от центра симметрии фигуры до оси вращения:*

$$V = S \cdot 2\pi r.$$

Например, если вращающаяся фигура является кругом радиуса  $R$  и ось вращения удалена от его центра на расстояние  $a$ , то объем  $V$

полученного тора равен

$$V = \pi R^2 \cdot 2\pi a = 2\pi^2 a R^2,$$

что совпадает с формулой (7.9), полученной по принципу Кавальери. Если вместо круга будем вращать эллипс с длинами  $a$  и  $b$  его полуосей около прямой, удаленной от его центра на расстояние  $m > a$ , то по теореме Гюльдена объем полученного «тора» будет равен:

$$V = \pi ab \cdot 2\pi m = 2\pi^2 abm,$$

В силу равенства площадей треугольников, на которые разбивается данный треугольник соединением его вершин с центроидом, центр массы однородной треугольной пластинки совпадает с ее центроидом. Поэтому при использовании формулы (7.12) для объема тела вращения треугольника условие, чтобы ось вращения содержала вершину данного треугольника, не является обязательным. Осью вращения может служить любая прямая, не пересекающая треугольник при той же формуле (7.12) объема полученного тела вращения.

**4.4. Эквивалентная замена вращающейся фигуры.** В предыдущем изложении необходимым условием была принадлежность оси вращения плоскости вращающейся фигуры. Если это условие не выполнено, то можно заменить вращающуюся фигуру другой фигурой так, чтобы ее плоскость содержала данную ось, а объем полученного тела вращения остался без изменения.

**Теорема.** Пусть ось  $x$  вращения является линией пересечения двух перпендикулярных плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  и плоскость  $\gamma$  данной фигуры  $F$  перпендикулярна плоскости  $\beta$ , а  $F_1$  — ортогональная проекция фигуры  $F$  на плоскость  $\alpha$ . Тогда объем тела вращения фигуры  $F$  около оси  $x$  равен объему тела вращения фигуры  $F_1$  около оси  $x$ .

**Доказательство.** Пусть некоторая плоскость  $\delta$ , перпендикулярная оси  $x$ , пересекает фигуру  $F$  по отрезку  $AB$ , а фигуру  $F_1$  — по отрезку  $A_1B_1$  (рис. 109). Так как  $AB \parallel \alpha$ , то  $A_1B_1 = AB$ . Тело  $T$ , образованное вращением фигуры  $F$  около оси  $x$ , пересекается с плоскостью  $\delta$  по кольцу  $K$ , которое получается при вращении отрезка  $AB$ . Пусть  $(AB) \cap \beta = C$  и  $(A_1B_1) \cap x = C_1$ . Тогда  $AC_1^2 - AC^2 = BC_1^2 - BC^2 = CC_1^2$ . Поэтому площадь кольца  $K$  равна  $\pi(AC_1^2 - BC_1^2) = \pi(AC^2 - BC^2)$ . Аналогично тело  $T_1$ , образованное вращением фигуры  $F_1$  около оси  $x$ , пересекается с плоскостью  $\delta$  по кольцу  $K_1$ , площадь которого равна  $\pi(A_1C_1^2 - B_1C_1^2) = \pi(AC^2 - BC^2)$ , т. е. равна площади кольца  $K$ . Согласно принципу Кавальери объемы тел  $T$  и  $T_1$  равны.  $\square$

Следовательно, фигуру  $F$  можно заменить ее ортогональной проекцией  $F_1$  так, что  $x \subset \alpha$  и  $V(T_1) = V(T)$ . Кроме того, фигуру  $F$  мож-

но, очевидно, заменить ее образом при переносе параллельно плоскости  $\beta$ .

**Задача.** Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , ребро которого имеет длину  $a$ . Вычислите объем тела вращения треугольника  $AA_1 C_1$  около прямой  $AB$  (рис. 110).

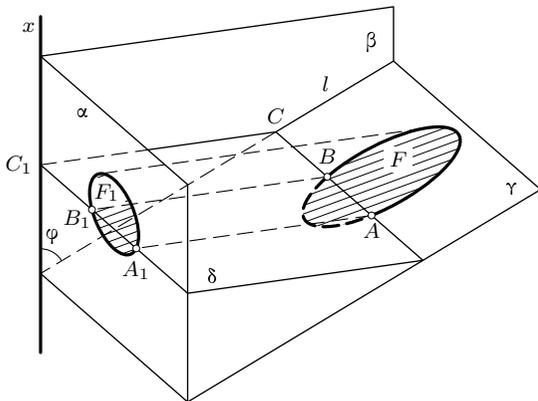


Рис. 109

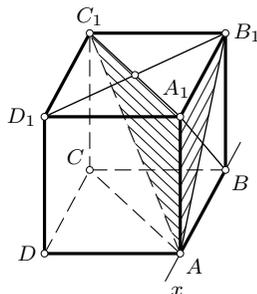


Рис. 110

**Решение.** Условия теоремы выполняются для плоскостей  $\alpha = (AB_1 A_1)$ ,  $\beta = (ABC)$  и  $\gamma = (AA_1 C_1)$ . Согласно этой теореме объем тела вращения треугольника  $AA_1 C_1$  около прямой  $AB$  равен объему тела вращения треугольника  $AA_1 B_1$  около прямой  $AB$ . А последний вычисляется непосредственно как разность объемов цилиндра и конуса:

$$V = \pi a^2 \cdot a - \frac{1}{3} \pi a^2 \cdot a = \frac{2}{3} \pi a^3.$$

**4.5. Замена оси вращения.** Объем  $V(T_x)$  тела, полученного вращением фигуры  $F$  около оси  $x$ , не лежащей в ее плоскости, равен объему  $V(T_l)$  тела, полученного вращением этой фигуры около ортогональной проекции  $l$  оси  $x$  на плоскость фигуры  $F$ , умноженному на  $\cos \varphi$ , где  $\varphi$  — угол наклона оси  $x$  к плоскости фигуры  $F$ .

**Доказательство.** При построениях, выполненных для доказательства предыдущей теоремы (п. 4.4, рис. 109) прямая  $l$  пересечения плоскостей  $\beta$  и  $\gamma$  является ортогональной проекцией оси  $x$  на плоскость  $\gamma$  фигуры  $F$ . Если  $Q$  — центр симметрии (или центр массы) фигуры  $F$ , то его ортогональная проекция  $Q_1$  на плоскость  $\alpha$  есть центр симметрии (центр массы) фигуры  $F_1$ . Точки  $Q$  и  $Q_1$  равноудалены от плоскости  $\beta$  на расстояние  $\rho$ . Тогда по теореме Гюльдена  $V(T_l) = S(F) \cdot 2\pi\rho$

и  $V(T_1) = S(F_1) \cdot 2\pi\rho$ , где  $T_1$  — тело вращения фигуры  $F_1$  около оси  $x$ . Но  $S(F_1) = S(F) \cos \varphi$ , так как угол  $\varphi$  есть угол между плоскостями  $\gamma$  и  $\alpha$ . Тогда  $V(T_1) = S(F)2\pi\rho \cdot \cos \varphi = V(T_i) \cos \varphi$ . Согласно предыдущей теореме  $V(T_1) = V(T_x)$ . Следовательно,

$$V(T_x) = V(T_i) \cos \varphi,$$

что и необходимо было доказать.  $\square$

**Задача 1.** Ребро куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  имеет длину  $a$ . Найдите объем тела  $T$ , полученного вращением треугольника  $A_1 B_1 C_1$  около диагонали  $AC_1$  куба (рис. 110).

**Решение.** На основании предыдущей теоремы искомый объем  $V(T)$  равен объему тела вращения треугольника  $A_1 B_1 C_1$  около прямой  $A_1 C_1$ , умноженному на  $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ , где  $\varphi = \widehat{AC_1 A_1}$ . Но этот последний объем равен удвоенному объему конуса с высотой  $A_1 O_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$  и радиусом  $B_1 O_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$  основания. Следовательно,

$$V(T) = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi \left( \frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9} \pi a^3.$$

Замена оси вращения может играть еще и другую роль — роль средства для нахождения центра массы плоской фигуры с использованием теоремы Гюльдена об объеме тела вращения: *объем тела вращения плоской фигуры около непересекающей ее прямой, лежащей в плоскости данной фигуры, равен произведению площади фигуры и длины окружности, радиус которой равен расстоянию от центра массы фигуры до оси вращения.*

В этой книге элементарного характера не даем математического определения понятия центра массы фигуры. Ограничимся лишь его физической иллюстрацией. Если данную фигуру представить как тонкую материальную пластинку однородной массы, то центром ее массы является такая точка, при подстановке в которую снизу точечной опоры эта фигура остается в равновесии. В частности, если данная фигура имеет ось симметрии, то центр ее массы принадлежит этой оси симметрии.

Разумеется, центр массы фигуры не связан с ее вращением и поэтому не может зависеть от оси вращения. Если ось вращения выбрать так, что полученное тело вращения имеет известный объем, то теорема Гюльдена позволит вычислить расстояние от оси вращения до центра массы. Тогда по этой же теореме можно найти объем тела вращения данной фигуры относительно другой оси. Вот пример.

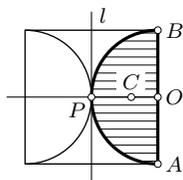


Рис. 111

**Задача 2.** Вычислите объем тела вращения полукруга радиуса  $R$  около касательной к нему, параллельной его граничному диаметру (рис. 111).

**Решение.** Полукруг не имеет центра симметрии, но имеет ось симметрии — серединный перпендикуляр к его граничному диаметру  $AB$ . Центр  $C$  массы полукруга находится на этом перпендикуляре. Если вращать полукруг около диаметра  $AB$ , то получим шар.

Тогда искомое расстояние  $r = OC$  находим из равенства

$$\frac{1}{2}\pi R^2 \cdot 2\pi r = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

откуда  $r = \frac{4R}{3\pi}$ . По той же теореме, но уже для другой оси  $l$  вращения, указанной в условии задачи, искомый объем  $V$  равен

$$V = \frac{1}{2}\pi R^2 \cdot 2\pi(R - r) = \pi^2 R^2 \left( R - \frac{4R}{3\pi} \right) = \frac{1}{3}\pi R^3(3\pi - 4).$$

### Задачи к главе 7

**7.1.** В шар вписан конус. Площадь осевого сечения конуса равна  $S$ , а угол между высотой и образующей равен  $\alpha$ . Найдите объем шара.

**7.2.** Если в шаровом секторе площадь осевого сечения равна третьей части площади большого круга, то его объем равен четверти объема шара. Докажите.

**7.3.** Сфера с центром в вершине конуса касается его основания и делит конус на две равновеликие части. Найдите угол между образующей конуса и его высотой.

**7.4.** Плоскость, перпендикулярная диаметру шара, делит его на части 6 см и 12 см. Найдите объемы частей шара.

**7.5.** Плоскость делит перпендикулярный ей диаметр шара в отношении  $\lambda$ . В каком отношении эта плоскость делит объем шара?

**7.6.** Сфера касается четырех ребер куба, принадлежащих одной его грани, и касается противоположной грани. Найдите отношение объема куба к объему шара, ограниченного данной сферой.

**7.7.** Шар касается всех ребер куба. Найдите объем части шара, заключенной внутри куба, если его ребро имеет длину  $2a$ .

**7.8.** Найдите отношение объема шарового сегмента к объему шара, если дуга осевого сечения сегмента соответствует центральному углу  $\alpha$ .

**7.9.** Вычислите объем пересечения двух равных шаров радиуса  $R$ , расстояние между центрами которых равно  $2a$ .

**7.10.** Сегмент круга, вмещающий угол  $135^\circ$ , вращается около диаметра, проходящего через конец хорды этого сегмента. Найдите объем тела вращения, если длина хорды равна  $a$ .

**7.11.** В шаровой сектор вписан шар. Найдите отношение их объемов, если центральный угол сектора равен  $\alpha$ .

**7.12.** Конус и полушар имеют общее основание и лежат в одном полупространстве от его плоскости. Радиус полушара равен  $R$ , а образующая конуса равна диаметру основания. Вычислите объем пересечения конуса и полушара.

**7.13.** Вычислите отношение объемов тел вращения треугольника около его стороны и около прямой, проходящей через его вершину параллельно данной стороне.

**7.14.** Докажите, что отношение объемов тел вращения параллелограмма около его смежных сторон обратно отношению длин этих сторон.

**7.15.** Касательная к окружности в точке  $C$  пересекает прямую, содержащую диаметр  $AB$ , в точке  $D$ . Определите объем тела вращения треугольника  $ACD$  около прямой  $AB$ , если радиус окружности равен  $R$ , а дуга  $BC$  содержит  $60^\circ$ .

**7.16.** Площадь поверхности вращения центрально-симметричного многоугольника около непересекающей его прямой, лежащей в плоскости этого многоугольника, равна произведению его периметра и длины окружности, радиус которой равен расстоянию от центра симметрии многоугольника до оси вращения (теорема Гюльдена). Докажите.

**7.17.** Правильный шестиугольник вращается около прямой, лежащей в его плоскости, параллельной его стороне и удаленной от нее на длину апофемы. Вычислите площадь поверхности и объем тела вращения, если длина стороны шестиугольника равна  $a$ .

**7.18.** Прямоугольник вращается около прямой, проходящей через его вершину параллельно диагонали. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения, если длина диагонали равна  $d$ , а угол между ними равен  $\varphi$ .

**7.19.** Квадрат  $ABCD$  со стороной  $a$  вращается около прямой, удаленной от ближайшей его вершины  $A$  на расстояние  $b$  и составляющей угол  $\alpha$  со стороной  $AB$ . Найдите площадь поверхности и объем тела вращения.

**7.20.** Ромб со стороной  $a$  и острым углом  $\alpha$  вращается около прямой, лежащей в плоскости ромба, параллельной его стороне и удаленной от нее на расстояние  $\frac{a}{4}$ . Вычислите объем и площадь поверхности тела вращения.

**7.21.** *Параболоидом вращения* называется тело вращения параболы  $y = kx^2$  около оси  $Oy$ . Пользуясь формулой Ньютона–Симпсона, найдите объем сегмента параболоида вращения при  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq h$ .

**7.22.** Докажите формулу объема параболоида вращения, полученную в предыдущей задаче, по принципу Кавальери, сравнив его с прямой треугольной призмой высотой  $h$ , основанием которой является прямоугольный равнобедренный треугольник с катетом  $a$ .

**7.23.** Найдите объем тела, полученного вращением круга радиуса  $R$  около оси, наклоненной к его плоскости под углом  $\varphi$ , если ортогональная проекция оси на его плоскость удалена от центра круга на расстояние  $m > R$ .

**7.24.** Найдите объем тела, полученного вращением куба с ребром  $a$  около его диагонали.

**7.25.** Плоскость  $\alpha$  параллельна плоскости основания цилиндра, имеющего радиус  $R$  и высоту  $2R$ , и удалена на  $2R$  от центра цилиндра. Прямая  $l$  лежит в плоскости  $\alpha$  и находится на расстоянии  $2R$  от проекции центра цилиндра на плоскость  $\alpha$ . Найдите объем тела, полученного вращением цилиндра около оси  $l$ .

**7.26.** Четверть круга радиуса  $R$  вращается около касательной к его дуге в середине этой дуги. Вычислите объем полученного тела вращения.

## §1. Касательные плоскости и прямые. Малые окружности сферы

**1.1. Касательные плоскости к сфере.** Плоскость, имеющая со сферой единственную общую точку, называется *касательной плоскостью* к этой сфере. Она перпендикулярна радиусу сферы, проведенному в точку касания, и обратно.

**Теорема 1.** Если прямая и сфера не имеют общих точек, то существуют две и только две плоскости, касательные к этой сфере и содержащие данную прямую.

**Доказательство.** Пусть даны сфера  $F$  и не пересекающая ее прямая  $m$ . Проведем через центр  $O$  сферы плоскость  $\sigma$ , перпендикулярную прямой  $m$  и пересекающую ее в точке  $P$  (рис. 112). Плоскость  $\sigma$  пересекает сферу по большой окружности  $\omega$ . В этой плоскости имеются две и только две касательные  $a$  и  $b$  к окружности  $\omega$ , содержащие точку  $P$ . Плоскости  $\alpha = (m, a)$  и  $\beta = (m, b)$  — касательные плоскости к сфере  $F$ . Действительно, так как  $m \perp \sigma$ , то  $m \perp OA$  и  $m \perp OB$ . Кроме того,  $OA \perp a$  и  $OB \perp b$  по свойству касательных к окружности. Поскольку  $OA \perp m$  и  $OA \perp a$ , то  $OA \perp \alpha$ . Аналогично  $OB \perp \beta$ . Следовательно, плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  касаются сферы  $F$  в точках  $A$  и  $B$  и содержат заданную прямую  $m$ . Всякая иная плоскость, содержащая прямую  $m$ , проходит в одной из пар вертикальных двугранных углов с ребром  $m$  и граничными полуплоскостями плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  и поэтому либо не имеет общих точек со сферой, либо пересекает ее.  $\square$

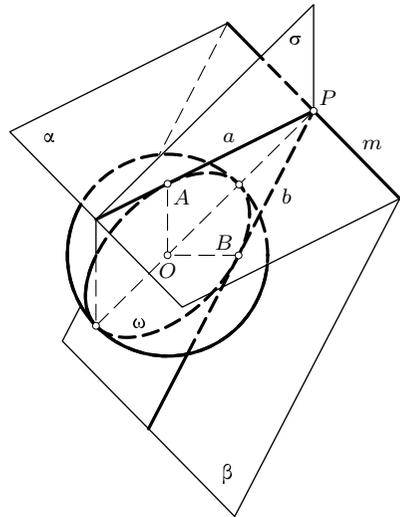


Рис. 112

**1.2. Малые окружности сферы.** Плоскость  $\alpha$ , не содержащая центр данной сферы и пересекающая ее, пересекает сферу по окружности, называемой *малой окружностью* сферы. Пусть  $PP_1$  — диаметр сферы, перпендикулярный плоскости  $\alpha$  малой окружности  $\gamma$ ,  $(PP_1) \cap \alpha = Q$  (рис. 113). Точка  $Q$  есть центр окружности  $\gamma$  (в плоскости  $\alpha$ ). Кроме того, малая окружность  $\gamma$  имеет еще два *сферических центра* — точки  $P$  и  $P_1$ , так как все дуги  $PN$  для любой точки  $N \in \gamma$  равны и все дуги  $P_1N$  также равны. Меньшая из этих дуг (ее радианная мера меньше  $\frac{\pi}{2}$ ) называется *сферическим радиусом* малой окружности  $\gamma$ .

*Через всякие три точки сферы, не лежащие на большой окружности, проходит единственная малая окружность сферы.*

В самом деле, через три данные точки сферы проходит единственная плоскость, которая пересекает сферу по малой окружности, т. к. по условию они не лежат на большой окружности.

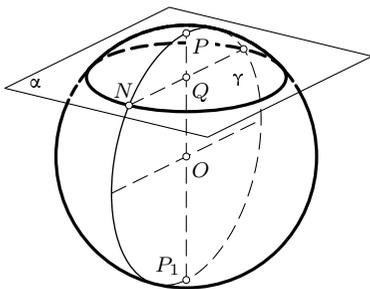


Рис. 113

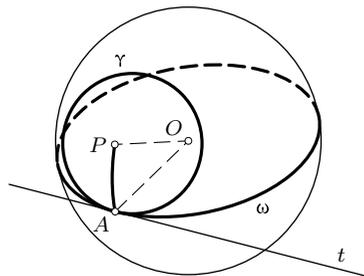


Рис. 114

**Теорема 2.** *Для каждой точки  $A$  малой окружности сферы существует единственная ее большая окружность, касающаяся данной малой окружности в точке  $A$  и перпендикулярная ее сферическому радиусу, проведенному в точку касания (рис. 114).*

*Доказательство.* Две окружности сферы называются касательными друг другу, если они имеют единственную общую точку. В точке касания они имеют общую касательную прямую — линию пересечения плоскостей данных окружностей.

Пусть дана малая окружность  $\gamma$  сферы и на ней точка  $A$ . Проведем к окружности  $\gamma$  в точке  $A$  касательную  $t$ . Она принадлежит плоскости этой окружности. Центр  $O$  сферы и прямая  $t$  определяют плоскость искомой большой окружности  $\omega$ , касающейся  $\gamma$  в точке  $A$ . Очевидно, эта окружность  $\omega$  единственная. Если  $P$  — сферический центр окружно-

сти  $\gamma$ , то  $OP \perp t$  и поэтому прямая  $t$  перпендикулярна плоскости  $OPA$ . Следовательно, окружность  $\omega$  ортогональна дуге  $PA$ .  $\square$

**1.3. Касательные прямые к сфере.** Прямая называется касательной к сфере, если она имеет с ней единственную общую точку. Прямая называется касательной к окружности пространства, если она лежит в плоскости этой окружности и имеет с ней единственную общую точку.

Из этих двух определений следует: если прямая касается окружности, лежащей на сфере, то она касается также этой сферы. Обратное утверждение неверно. Касательная прямая к сфере не обязана касаться окружности этой сферы, даже если она и имеет с ней единственную общую точку.

Если прямая  $t$  касается сферы, то существует единственная большая окружность  $\omega$  этой сферы, касающаяся данной прямой. По свойству касательной к окружности прямая  $t$  перпендикулярна радиусу  $OA$  сферы, проведенному в точку касания. Следовательно, *объединение всех касательных прямых к сфере в данной ее точке  $A$  есть касательная плоскость к сфере в этой точке*, поскольку каждая из касательных прямых перпендикулярна одному радиусу  $OA$ .

**Теорема 3.** *Объединение всех касательных прямых к сфере, проходящих через данную ее внешнюю точку  $A$ , есть конус вращения. Множество всех точек касания есть малая окружность сферы.*

Доказательство. Пусть дана сфера  $(O, R)$ . Произвольная плоскость  $\sigma$ , проходящая через прямую  $OA$ , пересекает сферу по большой окружности  $\omega$ . Проведем к этой окружности касательную  $AT$  и будем вращать плоскость  $\sigma$  около прямой  $OA$  (рис. 115). Тогда окружность  $\omega$

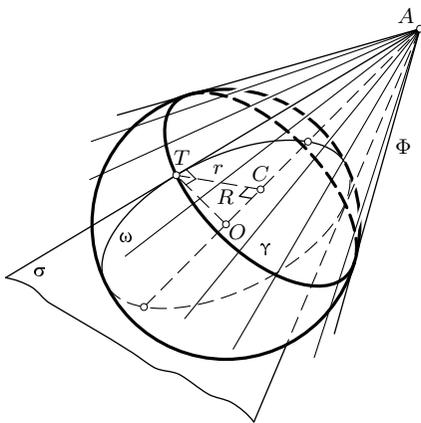


Рис. 115

описет данную сферу, а касательная  $AT$  — конус  $\Phi$  с вершиной  $A$ , при этом точка  $T$  касания описет малую окружность  $\gamma$  сферы — окружность касания конуса  $\Phi$  со сферой.  $\square$

Конус  $\Phi$  называется *конусом касательных* к сфере, содержащих заданную ее внешнюю точку  $A$ . Радиус  $r$  окружности касания равен

$$r = TC = \frac{OT \cdot AT}{OA} = \frac{R\sqrt{OA^2 - R^2}}{OA}.$$

**1.4. Пересечение двух сфер.** Пусть даны сферы  $(O_1, R_1)$  и  $(O_2, R_2)$ . Если  $|R_1 - R_2| < O_1O_2 < R_1 + R_2$ , то эти сферы имеют общую окружность.

В самом деле, проведем произвольную плоскость  $\alpha$  через линию  $O_1O_2$  центров этих сфер. Она пересекает сферы, по большему окружностям  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Из планиметрии известно, что при указанных неравенствах окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в двух точках  $A$  и  $B$  (рис. 116). При вращении плоскости  $\alpha$  около прямой  $O_1O_2$  окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  опишут данные сферы, а точки  $A$  и  $B$  — окружность, принадлежащую каждой из этих сфер.

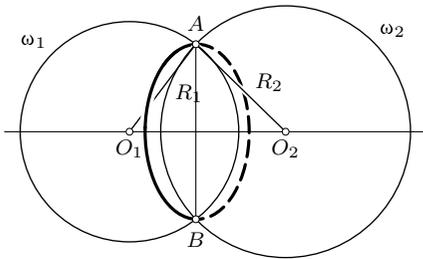


Рис. 116

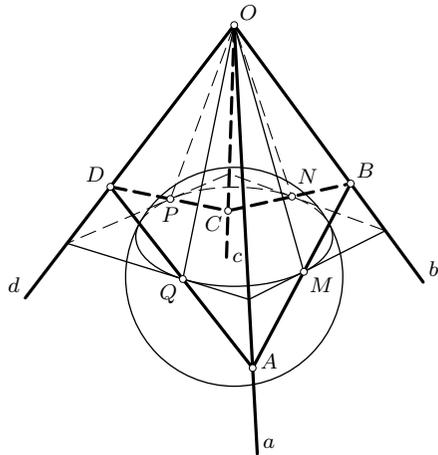


Рис. 117

**Задача.** В четырехгранный угол  $Oabcd$  вписана сфера, касающаяся его граней  $Oab$ ,  $Obc$ ,  $Ocd$ ,  $Oda$  соответственно в точках  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $Q$ . Касательная прямая к сфере из точки  $A$  ребра  $a$  пересекает ребро  $b$  в точке  $B$ . Касательная к сфере из точки  $B$  пересекает ребро  $c$  в точке  $C$ . Касательная из точки  $C$  пересекает ребро  $d$  в точке  $D$ . Докажите, что точки  $D$ ,  $Q$ ,  $A$  коллинеарны (рис. 117).

Решение. Прямые  $OM, ON, OP, OQ$  касаются сферы и поэтому эти отрезки равны. Точки касания лежат в одной плоскости (на малой окружности сферы). Имеем четыре пары соответственно равных треугольников (по трем сторонам):  $OAM$  и  $OAQ, OBM$  и  $OBN, ONC$  и  $OPC, ODP$  и  $ODQ$ . Из этих равенств вытекают равенства углов:  $\widehat{AMO} = \widehat{AQO} = \alpha, \widehat{OMB} = \widehat{ONB} = \beta, \widehat{ONC} = \widehat{OPC} = \gamma, \widehat{OPD} = \widehat{OQD} = \delta$ , причем  $\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta = \pi$ . Отсюда  $\alpha = \gamma$  и  $\beta = \delta$  и поэтому  $\alpha + \delta = \pi$ . Из равенства  $\widehat{AQO} + \widehat{OQD} = \pi$  следует коллинеарность точек  $A, Q, D$ .

## §2. Площадь сферы и ее частей

**2.1. Площадь сферы.** Пусть  $V$  — объем шара, ограниченного заданной сферой  $(O, R)$ . Дадим радиусу шара некоторое приращение  $\varepsilon$ , вследствие чего объем  $V$  получит соответствующее приращение  $\Delta V$ .

Определение. *Площадью  $S$  сферы  $(O, R)$  называется предел отношения  $\frac{\Delta V}{\varepsilon}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

Выведем формулу площади сферы. По формуле объема шара

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{4}{3}\pi(R + \varepsilon)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(R^3 + 3R^2\varepsilon + 3R\varepsilon^2 + \varepsilon^3 - R^3) = \\ &= \frac{4}{3}\pi\varepsilon(3R^2 + 3R\varepsilon + \varepsilon^2). \end{aligned}$$

Отсюда  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{4}{3}\pi(3R^2 + 3R\varepsilon + \varepsilon^2) = 4\pi R^2$ . Итак,

$$S = 4\pi R^2. \quad (8.1)$$

Согласно определению производной функции и определению площади сферы  $S = V'_R$ , т. е. *площадь сферы есть производная объема шара, ограниченного этой сферой, по его радиусу.*

**2.2. Площадь сферического сегмента.** Плоскость, пересекающая сферу, делит ее на две части, называемые *сферическими сегментами*. Каждому сферическому сегменту соответствует шаровой сегмент и шаровой сектор, границы которых содержат данный сферический сегмент.

Определение. За *площадь сферического сегмента* по определению принимается предел отношения приращения объема соответствующего шарового сектора к приращению радиуса, когда приращение радиуса стремится к нулю.

Найдем формулу площади сферического сегмента, пользуясь формулой (7.6) объема шарового сектора:  $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$ . Чтобы получить функцию одного переменного  $R$ , выразим высоту  $h$  через радиус  $R$  и

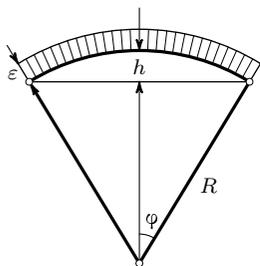


Рис. 118

половину  $\varphi$  центрального угла сектора:  $h = R - R \cos \varphi$ , где  $\varphi$  не зависит от приращения  $\varepsilon$  радиуса (рис. 118). Тогда

$$V = \frac{2}{3}\pi R^3(1 - \cos \varphi).$$

Согласно определению площади  $S$  сферического сегмента

$$S = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\varepsilon} = V'_R = 2R^2\pi(1 - \cos \varphi) = 2R \cdot \pi R(1 - \cos \varphi) = 2\pi Rh.$$

Таким образом, площадь сферического сегмента с высотой  $h$  радиуса  $R$  вычисляется по формуле

$$S = 2\pi Rh. \tag{8.2}$$

Можно не пользоваться операцией дифференцирования, а найти предел  $\frac{\Delta V}{\varepsilon}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  непосредственно:

$$\Delta V = \frac{2}{3}\pi(1 - \cos \varphi)((R + \varepsilon)^3 - R^3) = \frac{2\pi}{3}(1 - \cos \varphi)\varepsilon(3R^2 + 3R\varepsilon + \varepsilon^2),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\varepsilon} = \frac{2\pi}{3}(1 - \cos \varphi)3R^2 = 2\pi R^2(1 - \cos \varphi).$$

**2.3. Площадь сферического пояса.** *Сферическим поясом* называется часть сферы, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями. Расстояние  $h$  между этими секущими плоскостями называется высотой сферического пояса.

Площадь сферического пояса, очевидно, равна разности площадей двух сферических сегментов:

$$S = 2\pi Rh_1 - 2\pi Rh_2 = 2\pi R(h_1 - h_2) = 2\pi Rh.$$

Таким образом, площадь сферического пояса вычисляется по той же формуле (8.2), что и площадь сферического сегмента.

**2.4. Площадь сферы, сферического сегмента и сферического пояса как поверхностей вращения.** Впишем в полуокружность радиуса  $R$  правильную ломаную линию  $ABCDEF$  (рис. 119). За площадь сферы, образованной вращением полуокружности около ее диаметра  $AF$ , принимается предел, к которому стремится площадь  $S_n$  поверхности, образованной вращением около того же диаметра правильной ломаной линии, вписанной в эту полуокружность, когда ее стороны неограниченно убывают (число сторон неограниченно возрастает).

По следствию леммы о площади поверхности вращения отрезка (§ 4 гл. 7)

$$S_n = AB_1 \cdot 2\pi r + B_1C_1 \cdot 2\pi r + \dots + E_1F \cdot 2\pi r = 2R \cdot 2\pi r,$$

где  $r$  — длина срединного перпендикуляра каждого звена ломаной от его середины до оси вращения. Согласно предыдущему определению площади сферы

$$S_{\text{сферы}} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 4\pi Rr.$$

Поскольку при  $n \rightarrow \infty$  расстояние  $r$  стремится к радиусу  $R$ , то

$$S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2.$$

Если взять не всю полуокружность, а некоторую ее дугу с вписанной в нее правильной ломаной линией, то этим же путем получим формулы площади сферического сегмента и сферического пояса.

**2.5. Площадь сферического двуугольника и сферического треугольника.** Пересечение двух полусфер называется *сферическим двуугольником* (рис. 33). Его стороны — две большие полуокружности, а вершины — две диаметрально противоположные точки сферы.

Величина площади двуугольника характеризуется радиусом  $r$  сферы и его углом  $\alpha < \pi$ . Отношение площади  $S$  двуугольника к площади  $4\pi r^2$  сферы равно  $\alpha : 2\pi$ . Поэтому

$$S = 2\alpha r^2. \tag{8.3}$$

Пользуясь этой формулой площади двуугольника, выведем формулу площади сферического треугольника. Пусть  $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$  — величины углов сферического треугольника  $ABC$ , являющегося пересечением трех полусфер (рис. 120). Взятые попарно, они образуют своим пересечением три пары сферических двуугольников, покрывающих всю сферу. При этом треугольник  $ABC$  и симметричный ему треугольник  $A_1B_1C_1$  относительно центра  $O$  сферы входят в эти двуугольники по три раза каждый. Остальная часть сферы покрывается двуугольниками без наложений. Так как площади треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны, то площадь сферы меньше суммы площа-

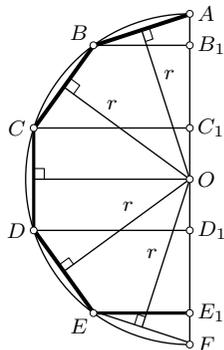


Рис. 119

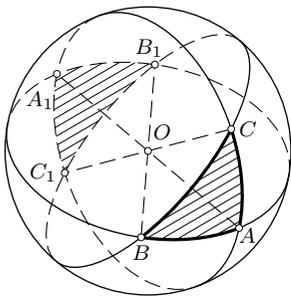


Рис. 120

дей всех шести двугульников на  $4S$ , где  $S$  — искомая площадь треугольника  $ABC$ :

$$4\pi r^2 = 2(2r^2\widehat{A} + 2r^2\widehat{B} + 2r^2\widehat{C}) - 4S,$$

откуда

$$S = r^2(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi). \quad (8.4)$$

Существенно, что разность  $\delta = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi > 0$  в силу неравенства (2.3). Она называется *угловым избытком* сферического треугольника. Итак, *площадь сферического треугольника пропорциональна его угловому избытку*:

$$S = r^2\delta. \quad (8.5)$$

### §3. Радикальная плоскость, радикальная ось и радикальный центр сферы

**3.1. Степень точки относительно сферы.** Прямая, имеющая со сферой две общие точки, называется секущей к этой сфере.

**Теорема.** *Если через точку, не принадлежащую данной сфере, проведена к ней произвольная секущая, то произведение отрезков секущей, соединяющих данную точку с точками пересечения ее со сферой, не зависит от выбора секущей.*

**Доказательство.** Пусть через данную точку  $M$  проведены какие-нибудь две секущие  $AB$  и  $CD$  к данной сфере ( $O, R$ ) (рис. 121). Их плоскость пересекает сферу по окружности. По соответствующей теореме планиметрии ([8], § 2)  $MA \cdot MB = MC \cdot MD$ . Это равенство сохранится, если одну секущую фиксируем, а другую будем менять.

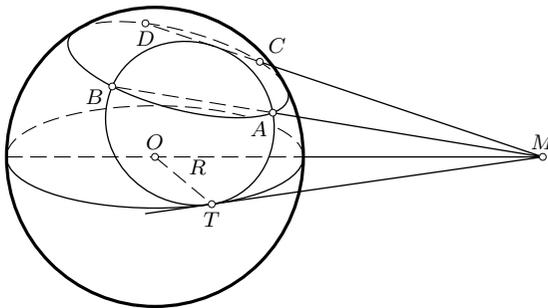


Рис. 121

Следовательно, произведение указанных отрезков зависит только от сферы и от данной точки  $M$ .  $\square$

Если точка  $M$  лежит вне данной сферы и  $MT$  — произвольная касательная к сфере, то она будет касательной также к окружности  $ABT$  сферы и к определенной большой окружности. Тогда ([8], § 16)

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = MT^2 = OM^2 - R^2.$$

Если точка  $M$  находится внутри сферы, то проведем через нее плоскость, перпендикулярную  $OM$  (рис. 122). Тогда

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = -MA^2 = -(R^2 - OM^2) = OM^2 - R^2.$$

В случае, когда точка  $M$  принадлежит сфере, то  $OM^2 - R^2 = 0$ .

Таким образом, величина  $OM^2 - R^2$  при заданной сфере зависит только от положения точки  $M$ . Эта величина называется *степенью точки относительно сферы* ( $O, R$ ).

Степени точек, лежащих вне сферы, положительны. Степени точек, лежащих внутри сферы, отрицательны, а лежащих на сфере, — равны нулю.

**3.2. Радикальная плоскость двух сфер.** Найдем множество  $\Phi$  точек пространства, каждая из которых имеет равные степени относительно двух данных неконцентрических сфер ( $O, R$ ) и ( $O_1, R_1$ ). Рассмотрим произвольную плоскость  $\alpha$ , содержащую линию центров этих сфер. Она пересекает сферы по большим окружностям  $\omega$  и  $\omega_1$ . Подмножество точек искомого множества  $\Phi$ , принадлежащих плоскости  $\alpha$ , есть радикальная ось  $l$  окружностей  $\omega$  и  $\omega_1$  ([8], § 16). Если плоскость  $\alpha$  вращать около линии центров, то окружности  $\omega$  и  $\omega_1$  опишут данные сферы, а прямая  $l$  — плоскость  $\gamma$ , являющуюся искомым множеством  $\Phi$ . Для концентрических сфер равенство  $OM^2 - R^2 = OM_1^2 - R_1^2$  невыполнимо, т. е. множество  $\Phi$  пусто.

Итак, *если две данные сферы неконцентрические, то геометрическим местом точек пространства, каждая из которых имеет равные степени относительно этих сфер, есть плоскость  $\gamma$ , перпендикулярная линии центров этих сфер.* Плоскость  $\gamma$  называется *радикальной плоскостью* данных сфер.

Радикальная ось  $l$  двух больших окружностей  $\omega$  и  $\omega_1$ , лежащих в секущей плоскости  $\alpha$ , определяет положение радикальной плоскости этих сфер. Построение прямой  $l$  известно из планиметрии. В частности, если

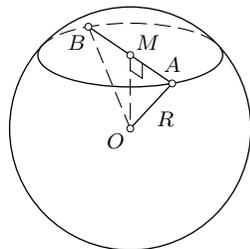


Рис. 122

данные сферы имеют общую окружность, то их радикальная плоскость совпадает с плоскостью этой окружности.

**Теорема.** *Радикальная ось трех сфер и радикальный центр четырех сфер — плоскости этих сфер, взятых попарно, имеют общую прямую. Эта прямая называется радикальной осью этих трех сфер.*

**Доказательство.** Пусть даны сферы  $S_1, S_2, S_3$ . Так как их центры не лежат на одной прямой, то радикальная плоскость  $\gamma_{12}$  сфер  $S_1$  и  $S_2$  пересекает радикальную плоскость  $\gamma_{23}$  сфер  $S_2$  и  $S_3$  по некоторой прямой  $d$ , которая является геометрическим местом точек, каждая из которых имеет равные степени относительно всех трех сфер. Следовательно, прямая  $d$  лежит в радикальной плоскости  $\gamma_{13}$  сфер  $S_1$  и  $S_3$ .  $\square$

Радикальная ось  $d$  трех сфер совпадает с перпендикуляром к плоскости центров этих сфер и содержит радикальный центр трех больших окружностей, по которым эта плоскость пересекает данные сферы.

**Теорема.** *Если центры данных четырех сфер некопланарны, то шесть радикальных плоскостей этих сфер, взятых попарно, имеют общую точку, которая называется радикальным центром данных четырех сфер.*

**Доказательство.** Так как центры  $S_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) сфер некопланарны, то три радикальные плоскости сфер  $S_1$  и  $S_2$ ,  $S_2$  и  $S_3$ ,  $S_3$  и  $S_4$  имеют единственную общую точку  $C$ , которая имеет равные степени относительно всех сфер  $S_i$  и поэтому лежит в остальных трех радикальных плоскостях.  $\square$

Радикальный центр  $C$  четырех сфер является точкой пересечения четырех радикальных осей этих сфер, взятых по три.

**3.4. Ортогональные сферы.** Две сферы называются *ортогональными*, если центр каждой из них лежит в касательной плоскости к другой в общей точке данных сфер.

Согласно этому определению необходимым и достаточным условием ортогональности сфер  $(O_1, R_1)$  и  $(O_2, R_2)$  является соотношение

$$R_1^2 + R_2^2 = O_1O_2^2.$$

Оно означает, что *квадрат радиуса каждой из двух ортогональных сфер равен степени ее центра относительно другой сферы.*

По аналогии с соответствующими планиметрическими свойствами точек радикальной оси двух окружностей доказываются следующие свойства.

1. Внешние относительно каждой из двух сфер точки их радикальной плоскости являются центрами сфер, каждая из которых ортогональна обоим данным сферам. Обратное, если сфера  $S$  ортогональна

сферам  $S_1$  и  $S_2$ , то центр сферы  $S$  лежит в радикальной плоскости сфер  $S_1$  и  $S_2$ .

2. Внешняя относительно каждой из трех сфер точка их радикальной оси является центром сферы, ортогональной каждой из трех данных сфер. Обратное, если сфера  $S$  ортогональна каждой из трех сфер  $S_1, S_2, S_3$ , то ее центр принадлежит радикальной оси этих трех сфер.

3. Если радикальный центр  $C$  четырех сфер лежит вне каждой из этих сфер, то он является центром единственной сферы, ортогональной каждой из четырех данных сфер.

## §4. Инверсия пространства относительно сферы

**4.1. Определение инверсии и его следствия.** *Инверсией пространства* относительно данной сферы  $(O, R)$  называется такое преобразование пространства, при котором каждая точка  $M$ , отличная от точки  $O$ , отображается на точку  $M'$ , лежащую на луче  $OM$  и удовлетворяющую условию:

$$OM \cdot OM' = R^2. \quad (8.6)$$

Сфера  $(O, R)$  называется сферой инверсии, а ее центр  $O$  и радиус  $R$  — центром инверсии и радиусом инверсии.

В этом определении точки  $M$  и  $M'$  равноправны (взаимно инверсны): если  $M \rightarrow M'$ , то и  $M' \rightarrow M$  при одной и той же инверсии, т. е. преобразование, обратное заданной инверсии относительно сферы  $\omega$ , совпадает с этой инверсией. Поэтому инверсия является *инволюционным преобразованием* (инволюцией) пространства.

*Каждая точка сферы  $\omega$  инверсии неподвижна при этой инверсии.*

Любая плоскость, содержащая прямую  $OM$ , пересекает сферу  $\omega$  по большой окружности. Следовательно, построение образа  $M'$  точки  $M$  при инверсии относительно сферы сводится к построению образа точки  $M$  при инверсии плоскости относительно этой окружности ([8], с. 254) (рис. 123).

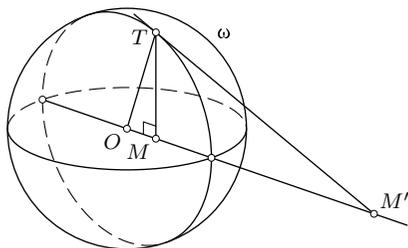


Рис. 123

Аналогично инверсии плоскости выводятся координатные формулы инверсии пространства относительно сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ . Если точка  $M'(x', y', z')$  — образ точки  $M(x, y, z)$ , то

$$x' = \frac{R^2 x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad y' = \frac{R^2 y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad z' = \frac{R^2 z}{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (8.7)$$

Как и при инверсии плоскости, расстояние  $A'B'$  между образами точек  $A$  и  $B$  связано с расстоянием  $AB$  соотношением:

$$A'B' = AB \cdot \frac{R^2}{OA \cdot OB}. \quad (8.8)$$

**4.2. Образы плоскостей и сфер, прямых и окружностей при инверсии.** Достаточно ограничиться лишь формулировками результатов, так как они получаются непосредственно из планиметрических свойств.

Плоскость (прямая) без точки  $O$ , проходящая через центр  $O$  инверсии, отображается на себя.

1. Образом сферы  $S$ , содержащей центр инверсии, является плоскость, перпендикулярная линии центров этой сферы и сферы инверсии и удаленная от центра инверсии на расстояние  $\frac{R^2}{2r}$  ( $r$  — радиус сферы  $S$ ). Образом плоскости, не содержащей центр инверсии, является сфера, проходящая через центр инверсии. Ее диаметром является отрезок  $OA$ , где  $A$  — образ ортогональной проекции центра  $O$  на данную плоскость.

2. Образом сферы  $\gamma$ , не содержащей центр инверсии, является сфера  $\gamma'$ , также не содержащая центр инверсии. Центры сфер  $\omega$ ,  $\gamma$ ,  $\gamma'$  коллинеарны. (Центры сфер  $\gamma$  и  $\gamma'$  не соответствуют друг другу при инверсии относительно сферы  $\omega$ .)

Так как прямая и окружность суть линии пересечения плоскостей и сфер, то имеем:

3. Образом окружности является прямая, если эта окружность содержит центр инверсии, и является окружность в противном случае.

4. Если сфера  $\gamma$  ортогональна сфере  $\omega$  инверсии, то сфера  $\gamma$  отображается этой инверсией на себя (инвариантна при инверсии).

5. Если сфера  $\gamma$  содержит две взаимно инверсные точки при инверсии относительно сферы  $\omega$ , то сферы  $\gamma$  и  $\omega$  ортогональны.

**Теорема.** *Две взаимно инверсные окружности принадлежат одной сфере или одной плоскости.*

**Доказательство.** Если окружности  $\alpha$  и  $\alpha'$  лежат в одной плоскости, то доказывать нечего. Пусть точки  $A$  и  $B$  окружности  $\alpha$  неколли-

неарны с центром  $O$  инверсии. Их образы  $A'$  и  $B'$  принадлежат окружности  $\alpha'$  (рис. 124). Точки  $A, B, A', B'$  лежат на одной окружности  $\sigma$  (планиметрическое свойство). Окружности  $\alpha$  и  $\sigma$  имеют две общие точки  $A$  и  $B$ , поэтому задают определенную сферу  $S$  (задача 4.25). Эта сфера совпадает со своим образом при инверсии, так как ортогональна сфере  $\omega$  инверсии: степень  $OA \cdot OA' = R^2$  центра  $O$  сферы  $\omega$  относительно сферы  $S$  равна квадрату радиуса сферы  $\omega$ . Следовательно, сфера  $S$ , содержащая окружность  $\alpha$ , содержит и ее образ  $\alpha'$ .  $\square$

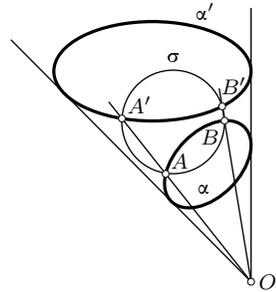


Рис. 124

#### 4.3. Инвариантность величины угла между кривыми при инверсии.

Как и при инверсии плоскости относительно окружности, *величина угла между двумя кривыми сохраняется при инверсии пространства относительно сферы*. Этот факт непосредственно вытекает из следующей леммы.

**Лемма.** *Если  $\gamma'$  — образ кривой  $\gamma$  при инверсии пространства, то касательные  $t$  и  $t'$  соответственно к кривым  $\gamma$  и  $\gamma'$  в соответственных точках  $A$  и  $A'$  симметричны относительно плоскости  $\sigma$  симметрии этих точек (рис. 125).*

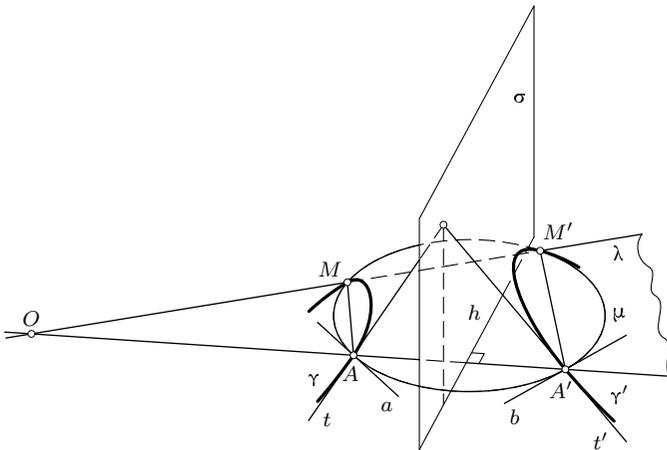


Рис. 125

**Доказательство.** Пусть  $M$  и  $M'$  — соответственные точки кривых  $\gamma$  и  $\gamma'$  при заданной инверсии. Тогда точки  $A, A', M, M'$  лежат на окружности  $\mu$ . Касательные  $a$  и  $b$  к ней в точках  $A$  и  $A'$  симметричны от-

носителем серединного перпендикуляра  $h$  к отрезку  $AA'$  (в плоскости  $\lambda$  окружности  $\mu$ ). Если точка  $M$  приближается к точке  $A$  по кривой  $\gamma$ , то точка  $M'$  приближается к точке  $A'$  по кривой  $\gamma'$ . Получаем множество окружностей  $\mu$  с общей хордой  $AA'$  в плоскостях  $\lambda$ . При этом все перпендикуляры  $h$  к хорде  $AA'$  (в каждой плоскости  $\lambda$ ) принадлежат плоскости  $\sigma$  симметрии точек  $A$  и  $A'$ . Переменные касательные  $a$  и  $b$  к переменной окружности  $\mu$  симметричны относительно  $\sigma$ . По определению касательной к кривой касательная  $t$  к кривой  $\gamma$  в точке  $A$  есть предельное положение секущей  $AM$  при  $M \rightarrow A$ , при этом  $a \rightarrow t$  и  $b \rightarrow t'$  (так как  $M' \rightarrow A'$ ). Поскольку при любом положении точки  $M \in \gamma$  прямые  $a$  и  $b$  симметричны относительно плоскости  $\sigma$ , то в предельном положении касательные  $t$  и  $t'$  будут симметричны относительно  $\sigma$ .  $\square$

Из доказанной леммы сразу следует инвариантность величины угла между кривыми при инверсии. Действительно, пусть даны кривые  $\alpha$  и  $\beta$ , имеющие общую точку  $A$ . Их образы  $\alpha'$  и  $\beta'$  при инверсии пересекаются в соответственной точке  $A'$ . Угол между касательными в точке  $A$  к кривым  $\alpha$  и  $\beta$  равен углу между касательными в точке  $A'$  к кривым  $\alpha'$  и  $\beta'$  в силу симметричности этих углов относительно плоскости симметрии точек  $A$  и  $A'$ .

**4.4. Вывод второй формулы Штаудта для объема тетраэдра.** Пусть дан тетраэдр  $ABCD$  и  $DA = a$ ,  $DB = b$ ,  $DC = c$ ,  $BC = a_1$ ,  $CA = b_1$ ,  $AB = c_1$ ,  $R$  — радиус описанной около него сферы. Надо доказать, что

$$6VR = Q, \tag{8.9}$$

где  $16Q^2 = (aa_1 + bb_1 + cc_1)(bb_1 + cc_1 - aa_1)(cc_1 + aa_1 - bb_1)(aa_1 + bb_1 - cc_1)$ .

Зададим инверсию с центром  $D$  произвольного радиуса  $r$ . Описанная сфера  $(O, R)$  отображается этой инверсией на плоскость, содержащую образы  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  вершин  $A$ ,  $B$ ,  $C$  данного тетраэдра (рис. 126). Тогда  $2R = \frac{r^2}{DH}$ , где  $DH$  — высота тетраэдра  $A'B'C'D$  (п. 4.2, свойство 2). Согласно формуле (6.11)

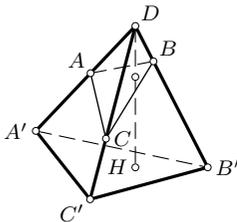


Рис. 126

или

$$\frac{V_{A'B'C'D}}{V_{ABCD}} = \frac{DA' \cdot DB' \cdot DC'}{DA \cdot DB \cdot DC},$$

$$\frac{S_{A'B'C'} \cdot DH}{3V} = \frac{DA' \cdot DB' \cdot DC'}{DA \cdot DB \cdot DC}. \tag{8.10}$$

По свойствам инверсии  $DA' = \frac{r^2}{a}$ ,  $DB' = \frac{r^2}{b}$ ,  $DC' = \frac{r^2}{c}$  и

$$B'C' = \frac{r^2 \cdot BC}{DB \cdot DC} = \frac{r^2 a_1}{bc} = \frac{r^2 a a_1}{abc}, \quad C'A' = \frac{r^2 b b_1}{abc}, \quad A'B' = \frac{r^2 c c_1}{abc}.$$

Следовательно, стороны треугольника  $A'B'C'$  пропорциональны соответственно числам  $aa_1$ ,  $bb_1$ ,  $cc_1$  с коэффициентом пропорциональности  $k = \frac{r^2}{abc}$ . Поэтому имеем:

$$S_{A'B'C'} = k^2 Q, \quad k^2 = \frac{r^4}{(abc)^2}.$$

Заменим в равенстве (8.10) входящие в него величины найденными выражениями:

$$\frac{k^2 Q}{2R \cdot 3V} = \frac{r^6}{abc \cdot abc}, \quad \text{откуда} \quad 6VR = Q,$$

где  $Q$  — площадь треугольника с длинами его сторон  $aa_1$ ,  $bb_1$ ,  $cc_1$ .

**4.5. Стереометрическое обобщение тождества Бретшнайдера.** Рассмотрим другой хороший пример применения инверсии — обобщение известного соотношения Бретшнайдера для плоского четырехугольника ([8], с. 85) на тетраэдр и косой (пространственный) четырехугольник.

Зададим инверсию с центром в вершине  $D$  данного тетраэдра  $ABCD$  произвольного радиуса  $r$ . Описанная около него сфера отобразится этой инверсией на плоскость  $A'B'C'$ . По теореме косинусов для треугольника  $A'B'C'$  имеем:

$$A'C'^2 = A'B'^2 + B'C'^2 - 2A'B' \cdot B'C' \cos \widehat{A'B'C'}.$$

По формуле (8.8)

$$A'C' = AC \cdot \frac{r^2}{DA \cdot DC}, \quad A'B' = AB \cdot \frac{r^2}{DA \cdot DB}, \quad B'C' = BC \cdot \frac{r^2}{DB \cdot DC}.$$

Так как прямые  $A'B'$  и  $B'C'$  являются образами окружностей  $DAB$  и  $DBC$ , то они параллельны соответственно касательным к этим окружностям в центре  $D$  инверсии. Поэтому угол  $A'B'C'$  равен углу между этими касательными, т. е. углу  $\varphi$  между окружностями  $DAB$  и  $DBC$ . Выполнив подстановки, получаем:

$$\begin{aligned} AC^2 \cdot \frac{r^4}{DA^2 \cdot DC^2} &= \\ &= AB^2 \cdot \frac{r^4}{DA^2 \cdot DB^2} + BC^2 \cdot \frac{r^4}{DB^2 \cdot DC^2} - \frac{2r^4 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \varphi}{DA \cdot DB^2 \cdot DC}, \end{aligned}$$

что после очевидных упрощений дает:

$$(AC \cdot BD)^2 = (AB \cdot CD)^2 + (BC \cdot DA)^2 - 2AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA \cos \varphi, \quad (8.11)$$

где  $\varphi$  — величина угла между окружностями  $DAB$  и  $DBC$ .

По внешнему виду тождество (8.11) в точности совпадает с тождеством Бретшнайдера для плоского четырехугольника  $ABCD$ , в котором  $\varphi$  — также угол между окружностями  $DAB$  и  $DBC$ , равный сумме углов  $\widehat{A}$  и  $\widehat{C}$  этого четырехугольника.

**Следствие.** *Окружности, описанные около двух граней тетраэдра, пересекаются под тем же углом, что и окружности, описанные около двух других его граней.*

В самом деле, соотношение (8.11) для косоугольного четырехугольника  $ABCD$  симметрично относительно его диагоналей  $AC$  и  $BD$ . Угол между окружностями  $DAB$  и  $DBC$  можно заменить углом между окружностями  $DAC$  и  $BAC$ , сохранив при этом остальные элементы этого соотношения.

## §5. Стереографическая проекция

**5.1. Определение и свойства стереографической проекции.** *Стереографической проекцией* называется центральная проекция сферы  $(O, R)$  из ее точки  $S$  на плоскость  $\pi$ , касающуюся этой сферы в диаметрально противоположной точке  $N$  (рис. 127). Иногда в качестве плоскости  $\pi$  проекций принимают параллельную ей экваториальную плоскость сферы.

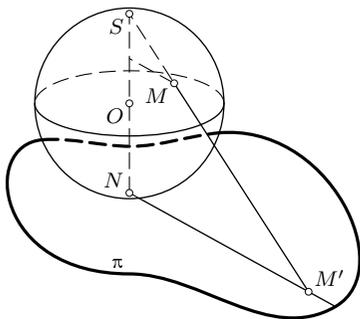


Рис. 127

Если задать инверсию пространства относительно сферы  $(S, 2R)$ , то эта инверсия отобразит первоначальную сферу  $(O, R)$  на ту же самую плоскость  $\pi$ , причем инверсными точками  $M$  и  $M'$  будут те же точки, которые являются соответственными при ранее заданной стереографической проекции.

Таким образом, *стереографическая проекция сферы  $(O, R)$  на множество точек этой сферы совпадает с инверсией пространства относительно сферы  $(S, 2R)$* . В этом смысле можно сказать, что *стереографическая проекция есть частный случай инверсии*.

Из этой простой связи инверсии и стереографической проекции из свойств инверсии сразу следуют свойства стереографической проекции.

1. Окружности сферы, содержащие центр  $S$  проекции, проектируются на плоскость  $\pi$  в прямые, а окружности, не содержащие точку  $S$ , в окружности.

2. Обратное, прямые и окружности плоскости  $\pi$  проектируются на сферу в окружности, соответственно проходящие или не проходящие через центр проектирования.

3. Стереографическая проекция сохраняет величины углов между кривыми, лежащими на данной сфере.

Пусть окружность  $\omega$  сферы стереографически проектируется на окружность  $\omega'$  плоскости  $\pi$ . Найдем способ построения центра окружности  $\omega'$  по заданной окружности  $\omega$ . Заметим для этого, что центром любой окружности является точка пересечения прямых, пересекающих эту окружность ортогонально. Прямые плоскости проекций служат проекциями окружностей сферы, содержащих центр  $S$  проектирования и пересекающих ортогонально окружность  $\omega$ . Поэтому плоскости этих окружностей проходят через вершину  $K$  конуса касательных к сфере, для которого данная окружность  $\omega$  является окружностью касания (рис. 128). Сами окружности указанного множества проходят через

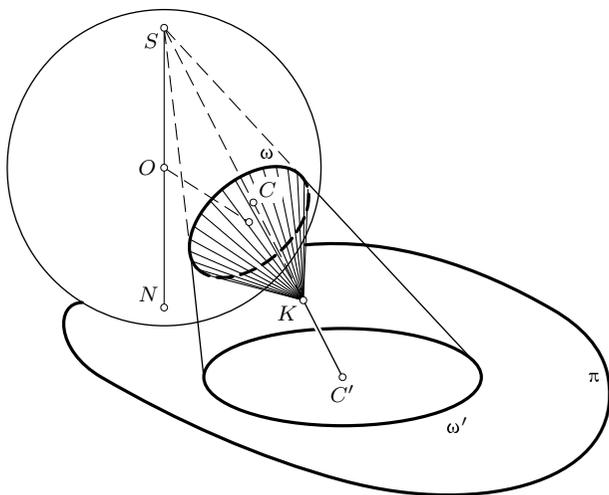


Рис. 128

точку  $C$  пересечения сферы с прямой  $SK$ . Следовательно, центром окружности  $\omega'$  будет точка  $C'$  пересечения прямой  $SK$  с плоскостью проекций.

**5.2. Координатные формулы стереографической проекции.** Зададим прямоугольную декартову систему координат так, чтобы плоскость  $Oxy$  совпадала с плоскостью проекций, а ось  $Oz$  содержала центр  $S$  проектирования. В этой системе координат сфера имеет уравнение

$$x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2.$$

Пусть точка  $M(x, y, z)$  сферы проектируется в точку  $M'(x', y', 0)$ . Надо выразить координаты  $x'$  и  $y'$  через  $x, y, z$ . Так как векторы  $\overline{SM}$  и  $\overline{SM}'$  коллинеарны, то  $\overline{SM}' = k\overline{SM}$ . Точка  $S$  имеет координаты  $(0, 0, 2R)$ . Поэтому это векторное равенство эквивалентно трем координатным:  $x' = kx, y' = ky, 2R = k(2R - z)$ . Исключим из этих уравнений параметр  $k$ . В результате получаем искомые формулы стереографической проекции:

$$\begin{cases} x' = \frac{2Rx}{2R - z}, \\ y' = \frac{2Ry}{2R - z}, \\ z' = 0. \end{cases} \quad (8.12)$$

Полезно иметь также формулы обратного отображения. Так как  $x = \frac{x'}{k}, y = \frac{y'}{k}, z = 2R\left(1 - \frac{1}{k}\right)$  и точка  $M(x, y, z)$  принадлежит сфере, то

$$\left(\frac{x'}{k}\right)^2 + \left(\frac{y'}{k}\right)^2 + \left(2R\left(1 - \frac{1}{k}\right) - R\right)^2 = R^2,$$

откуда

$$k = \frac{1}{4R^2}(x'^2 + y'^2 + 4R^2).$$

После замены параметра  $k$  этим выражением получаем формулы обратного отображения:

$$\begin{cases} x = \frac{4R^2 x'}{x'^2 + y'^2 + 4R^2}, \\ y = \frac{4R^2 y'}{x'^2 + y'^2 + 4R^2}, \\ z = \frac{2R(x'^2 + y'^2)}{x'^2 + y'^2 + 4R^2}. \end{cases} \quad (8.13)$$

## Задачи к главе 8

**8.1.** Три попарно перпендикулярные хорды сферы радиуса 8 пересекаются в точке  $M$ , удаленной от центра сферы на расстояние  $\sqrt{41}$ . Длины двух хорд равны 12 и 14. Найдите расстояние от центра сферы до третьей хорды.

**8.2.** Сфера вписана в усеченный конус, радиусы оснований которого равны  $R$  и  $r$ . Найдите отношение площади сферы к площади боковой поверхности конуса.

**8.3.** Около шара описан усеченный конус. Докажите, что отношение площадей их поверхностей равно отношению объемов.

**8.4.** Сфера делит каждое из ребер куба на три равные части. Найдите площадь сферы, если ребро куба имеет длину  $a$ .

**8.5.** Вершина конуса находится в центре сферы, основание конуса касается этой сферы. Площадь полной поверхности конуса равна площади сферы. Найдите угол между образующей конуса и его высотой.

**8.6.** Три окружности не лежат в одной плоскости и попарно касаются. Докажите, что эти окружности принадлежат одной сфере.

**8.7.** На плоскости лежат три сферы, каждая из которых касается двух других. Расстояния между точками касания сфер с плоскостью равны соответственно  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Вычислите радиусы сфер.

**8.8.** В куб с ребром  $a$  вписана сфера. Другая сфера касается трех граней куба и первой сферы. Определите ее радиус.

**8.9.** В конус вписаны две сферы радиусов  $R$  и  $r$ , касающиеся друг друга и боковой поверхности конуса, причем большая сфера касается основания конуса. Определите площадь боковой поверхности усеченного конуса, отсеченного от данного конуса плоскостями окружностей касания сфер с данным конусом.

**8.10.** Каждое ребро правильной четырехугольной пирамиды имеет длину  $a$ . Высота пирамиды является диаметром сферы. Найдите длину кривой пересечения поверхности пирамиды и сферы.

**8.11.** Основание правильной четырехугольной пирамиды вписано в большую окружность сферы радиуса  $R$ , а угол при вершине равен  $30^\circ$ . Найдите длину кривой пересечения этих поверхностей.

**8.12.** Выразите площадь сферического сегмента через его высоту  $h$  и радиус  $r$  основания.

**8.13.** Через центр  $O$  сферы радиуса  $r$  проведена произвольная сфера  $\omega$ . Докажите, что площадь сферического сегмента сферы  $\omega$ , отсеченного сферой  $(O, r)$ , не зависит от выбора сферы  $\omega$ .

**8.14.** Найдите площади частей, на которые плоскости граней куба с ребром  $a$  разбивают описанную около него сферу.

**8.15.** Ребро правильного тетраэдра  $ABCD$  имеет длину  $a$ . Сфера касается ребер  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$  в точках  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . Найдите площадь части сферы, лежащей внутри тетраэдра.

**8.16.** Объем шарового сегмента равен  $V$ . Цилиндр с тем же основанием и той же высотой имеет объем  $Q$ . Найдите высоту сегмента.

**8.17.** Для того чтобы существовала сфера, касающаяся всех ребер тетраэдра, необходимо и достаточно, чтобы суммы длин его противоположных ребер были равны. Докажите.

**8.18.** Найдите радиус сферы, касающейся всех ребер правильной треугольной пирамиды, если ребро ее основания имеет длину  $a$ , а длина бокового ребра равна  $b$ .

**8.19.** Докажите, что если две малых окружности сферы касаются, то их сферические центры и точка касания лежат на большой окружности.

**8.20.** На сфере даны три малых окружности. Постройте окружность сферы, делящую пополам каждую из данных окружностей.

**8.21.** На сфере радиуса  $r$  лежат три окружности радиуса  $\frac{r}{2}$ , касающиеся друг друга. Определите радиус окружности сферы, которая касается трех данных окружностей.

**8.22.** Докажите, что отрезок общей касательной двух сфер, заключенный между точками касания, делится пополам радикальной плоскостью этих сфер.

**8.23.** К двум сферам проведены две общие касательные  $AB$  и  $CD$ . ( $A, B, C, D$  — точки касания). Докажите, что проекции отрезков  $AC$  и  $BD$  на линию центров сфер равны.

**8.24.** Три плоскости имеют общую точку  $P$ . Найдите образ этой фигуры при инверсии, центр которой не совпадает с точкой  $P$ .

**8.25.** Даны три сферы, имеющие две общие точки  $A$  и  $B$ . Постройте сферу, содержащую данную точку  $M$  и касающуюся трех данных сфер.

**8.26.** На сфере даны точки  $A$  и  $B$  и окружность  $\gamma$ . Постройте окружность сферы, проходящую через данные точки  $A$  и  $B$  и касающуюся окружности  $\gamma$ .

**8.27.** Шар касается всех ребер правильного тетраэдра, длина ребра которого равна  $2a$ . Найдите объем пересечения шара и тетраэдра.

# Стереометрические неравенства и экстремумы

## §1. Классические алгебраические неравенства, используемые для доказательства геометрических неравенств

Доказательство геометрических неравенств — большое искусство, требующее знания специальных технических приемов, набор которых достаточно широк и овладение всеми весьма сложно. Основные из этих приемов были изложены в планиметрии [8]. Существенно используются известные алгебраические неравенства. Рассмотрим некоторые из них.

**1.1. Неравенство Коши.** Классическое неравенство Коши для среднего геометрического и среднего арифметического неотрицательных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \geq 2$ ) — это неравенство:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n), \quad (9.1)$$

в котором равенство достигается лишь при равенстве этих чисел.

Сравнительно простое доказательство этого неравенства получено В. В. Прасоловым в 1999 г. методом полной математической индукции. Приводим его.

Для  $n = 2$  неравенство (9.1) следует из очевидного неравенства  $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$ . Предположим, что оно истинно для  $n - 1$  положительных чисел и докажем, что оно выполняется для  $n$  чисел, которые расположим в неубывающем порядке:  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ . Если  $a_1 = a_n$ , то имеем равенство 9.1. Далее будем полагать, что  $a_1 < a_n$ . Обозначим  $\frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n) = A_n$ . Тогда  $a_1 < A_n < a_n$  и поэтому

$$(a_1 - A_n)(A_n - a_n) = A_n(a_1 + a_n - A_n) - a_1 a_n > 0,$$

откуда  $A_n(a_1 + a_n - A_n) > a_1 a_n$ ,  $a_1 + a_n - A_n > 0$ . На основании индуктивного предположения применим неравенство Коши к  $n - 1$  числам

$a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_1 + a_n - A_n$ :

$$\left(\frac{1}{n-1}(a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_1 + a_n - A_n)\right)^{n-1} \geq \\ \geq a_2 a_3 \dots a_{n-1} (a_1 + a_n - A_n).$$

Легко проверить, что основание степени в левой части полученного неравенства равно  $A_n$ . Поэтому, умножив это неравенство на  $A_n$ , получим:

$$A_n^n \geq a_2 a_3 \dots a_{n-1} A_n (a_1 + a_n - A_n) > a_1 a_2 \dots a_n,$$

так как  $A_n(a_1 + a_n - A_n) > a_1 a_n$ .

Итак, из предположения, что неравенство Коши истинно для  $n-1$  положительных чисел, доказано, что оно истинно для  $n$  чисел. Согласно методу индукции неравенство Коши будет истинно для любого натурального числа  $n$ , причем равенство имеет место лишь при равенстве чисел  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .  $\square$

**Следствие.** Для любых положительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2. \quad (9.2)$$

**Доказательство.** Согласно (9.1)  $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ , а также  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq n \sqrt[n]{\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n}}$ . Перемножив эти равенства почленно, получим (9.2). Равенство имеет место лишь при  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .  $\square$

**1.2. Сравнение квадрата суммы и суммы квадратов действительных чисел.** Докажем, что для любых действительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2). \quad (9.3)$$

Для этого напомним тождественное равенство:

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2.$$

Поскольку  $a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1 a_2$ ,  $a_1^2 + a_3^2 \geq 2a_1 a_3$ ,  $\dots$ ,  $a_{n-1}^2 + a_n^2 \geq 2a_{n-1} a_n$ , то, сложив эти равенства с предыдущим тождеством, получим (9.3).

**1.3. Тождество Лагранжа и неравенство Коши–Буняковского.** Для любых двух векторов имеем место тождество (п. 4.3 гл. 5):

$$(\bar{a} \times \bar{b})^2 = \bar{a}^2 \bar{b}^2 - (\bar{a} \bar{b})^2.$$

Если  $(a_1, a_2, a_3)$  и  $(b_1, b_2, b_3)$  — ортонормированные координаты векторов  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ , то предыдущее тождество на основании формулы (5.8) эквивалентно следующему:

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{array} \right|^2 = \\ = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3). \end{aligned} \quad (9.4)$$

Это тождество называется именем французского математика Ж. Лагранжа (1736–1813).

Так как левая часть этого тождества неотрицательна, то из него следует такое неравенство:

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2, \quad (9.5)$$

причем равенство имеет место при  $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$ , т. е. тогда и только тогда, когда векторы  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  коллинеарны (числа  $a_1, a_2, a_3$  соответственно пропорциональны числам  $b_1, b_2, b_3$ ).

Неравенство (9.5) называется неравенством Коши–Буняковского.

## §2. Получение неравенств из тождественных равенств

Если определенные величины некоторого тождества всегда неотрицательны или всегда неположительны, то из этого тождества может быть получено неравенство. Примером этому является предыдущее неравенство Коши–Буняковского. Кроме того, в имеющемся тождестве некоторые величины могут быть заменены большими (или меньшими) величинами.

Рассмотрим некоторые примеры.

**Пример 1.** Докажите, что сумма квадратов расстояний произвольной точки  $P$  пространства до вершин тетраэдра  $ABCD$  не меньше четверти суммы квадратов длин его ребер. Равенство имеет место для центроида  $G$  тетраэдра.

**Доказательство.** Рассмотрим скалярный квадрат вектора  $\overline{PG} = \frac{1}{4}(\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD})$ :

$$\begin{aligned} 16PG^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 + \\ + 2(\overline{PA} \cdot \overline{PB} + \overline{PA} \cdot \overline{PC} + \overline{PA} \cdot \overline{PD} + \overline{PB} \cdot \overline{PC} + \overline{PB} \cdot \overline{PD} + \overline{PC} \cdot \overline{PD}). \end{aligned}$$

Заменим удвоенные скалярные произведения по теореме косинусов:

$$16PG^2 = 4(PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2) - (AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2).$$

Так как  $16PG^2 \geq 0$ , то из полученного тождества имеем неравенство:

$$4(PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2) \geq AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2. \quad (9.6)$$

Равенство выполняется лишь при совпадении точек  $P$  и  $G$ .  $\square$

В частности, если точка  $P$  совпадает с центром  $O$  описанной около тетраэдра сферы, то левая часть этого неравенства равна  $16R^2$  и тогда

$$AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 \leq 16R^2. \quad (9.7)$$

Равенство имеет место при совпадении точек  $O$  и  $G$ , т.е. для равногранного тетраэдра.

**Пример 2.** Докажите, что медиана тетраэдра меньше среднего арифметического его ребер, выходящих из той же вершины.

**Доказательство.** Если  $M$  — центроид грани  $ABC$  тетраэдра  $ABCD$ , то

$$\overline{DM} = \frac{1}{3}(\overline{DA} + \overline{DB} + \overline{DC}).$$

По свойству модуля суммы векторов

$$|\overline{DM}| < \frac{1}{3}(DA + DB + DC). \quad \square$$

**Пример 3.** Докажите, что в параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$

$$AA_1^2 < \frac{1}{4}(AB_1^2 + BC_1^2 + CD_1^2 + DA_1^2). \quad (9.8)$$

**Доказательство.** Пусть  $AB = x$ ,  $AD = y$ ,  $AA_1 = z$ . По свойству диагоналей параллелепипеда  $AB_1^2 + CD_1^2 = 2x^2 + 2z^2$  и  $BC_1^2 + DA_1^2 = 2y^2 + 2z^2$ . Следовательно,  $AB_1^2 + BC_1^2 + CD_1^2 + DA_1^2 = 4z^2 + 2(x^2 + y^2)$ . Так как  $x^2 + y^2 > 0$ , то  $AB_1^2 + BC_1^2 + CD_1^2 + DA_1^2 > 4z^2$ .  $\square$

Тождественные равенства часто используются при получении (доказательстве) неравенств из известных уже неравенств.

**Пример 4.** Привлечем равенство (6.30) для произвольного тетраэдра:

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4} = \frac{1}{r}.$$

На основании неравенства (9.2)

$$(h_1 + h_2 + h_3 + h_4) \left( \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4} \right) \geq 4^2.$$

Следовательно,  $(h_1 + h_2 + h_3 + h_4) \cdot \frac{1}{r} \geq 16$ , откуда

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 \geq 16r. \quad (9.9)$$

Равенство имеет место при  $h_1 = h_2 = h_3 = h_4$ , т. е. для *равногранного* тетраэдра.

**Пример 5.** Докажите, что для любого тетраэдра

$$h_1 h_2 h_3 h_4 \geq 256r^4. \quad (9.10)$$

**Доказательство.** Согласно неравенству Коши

$$\frac{1}{4} \left( \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4} \right) \geq \sqrt[4]{\frac{1}{h_1 h_2 h_3 h_4}},$$

откуда

$$\frac{1}{4r} \geq \frac{1}{\sqrt[4]{h_1 h_2 h_3 h_4}}$$

и

$$\frac{1}{(4r)^4} \geq \frac{1}{h_1 h_2 h_3 h_4},$$

что эквивалентно доказываемому неравенству (9.10). □

**Пример 6.** Докажите, что для любого тетраэдра

$$4(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2) \leq (aa_1)^2 + (bb_1)^2 + (cc_1)^2. \quad (9.11)$$

**Доказательство.** По теореме пункта 2.2 гл. 6

$$4(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2) = (AB \cdot CD \sin(\widehat{AB, CD}))^2 + \\ + (BC \cdot AD \sin(\widehat{BC, AD}))^2 + (AC \cdot BD \sin(\widehat{AC, BD}))^2.$$

В силу ограниченности функции синуса правая часть этого равенства не больше  $(aa_1)^2 + (bb_1)^2 + (cc_1)^2$ . Отсюда и следует доказываемое неравенство. Равенство выполняется тогда и только тогда, когда каждый из трех синусов равен единице, т. е. когда противоположные ребра тетраэдра перпендикулярны (тетраэдр ортоцентрический). □

### §3. Некоторые избранные неравенства

#### 3.1. Неравенства для углов триэдра, тетраэдра и косого четырехугольника.

*Сумма углов наклона ребер триэдра к плоскостям противоположных им граней заключена между суммой плоских углов этого триэдра и половиной этой суммы.*

*Доказательство.* Пусть  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  — величины указанных углов наклона и  $\alpha, \beta, \gamma$  — величины плоских углов триэдра  $O(ABC)$ . По свойству угла между прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость  $\alpha_1 < \beta, \beta_1 < \gamma, \gamma_1 < \alpha$ . Поэтому  $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 < \alpha + \beta + \gamma$ . Пусть ортогональная проекция  $OA_1$  ребра  $OA$  образует с ребрами  $OB$  и  $OC$  соответственно углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . По свойству плоских углов для триэдров  $O(ABA_1)$  и  $O(ACA_1)$  имеем соответственно:  $\alpha_1 > |\gamma - \varphi_1|$  и  $\alpha_1 > |\beta - \varphi_2|$ . Отсюда  $2\alpha_1 > |\gamma - \varphi_1| + |\beta - \varphi_2| > |\beta + \gamma - (\varphi_1 + \varphi_2)| = \beta + \gamma - \alpha$ . Аналогично  $2\beta_1 > \gamma + \alpha - \beta$  и  $2\gamma_1 > \alpha + \beta - \gamma$ . Сложив последние три неравенства, получаем:  $2(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) > \alpha + \beta + \gamma$ . Таким образом,

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) < \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 < \alpha + \beta + \gamma. \quad (9.12)$$

Неравенство доказано.  $\square$

*Сумма внутренних углов косого четырехугольника  $ABCD$  меньше  $2\pi$ .*

*Доказательство.* На основании неравенства для плоских углов триэдра имеем:

$$\begin{aligned} \widehat{ABC} &< \widehat{ABD} + \widehat{CBD}, \\ \widehat{BCD} &< \widehat{ACD} + \widehat{ACB}, \\ \widehat{ADC} &< \widehat{ADB} + \widehat{BDC}, \\ \widehat{BAD} &< \widehat{CAD} + \widehat{BAC}. \end{aligned}$$

Сумма  $\sigma = \widehat{BAD} + \widehat{ABC} + \widehat{BCD} + \widehat{ADC}$  внутренних углов косого четырехугольника  $ABCD$  меньше суммы углов треугольников  $ABC, ABD, ACD, BCD$ , уменьшенной на  $\sigma$ :  $\sigma < 4\pi - \sigma$ . Значит,  $\sigma < 2\pi$ .  $\square$

*Сумма косинусов всех двугранных углов тетраэдра не превосходит 2, а их произведение не больше  $1/729$ .*

*Доказательство.* Пусть  $\bar{n}_i$  — единичные векторы, ортогональные граням данного тетраэдра, направленные соответственно во внешнюю область относительно тетраэдра. Тогда  $(\bar{n}_1 + \bar{n}_2 + \bar{n}_3 + \bar{n}_4)^2 \geq 0$ ,

$|\bar{n}_i| = 1$ . Это неравенство эквивалентно неравенству:

$$4 + 2 \sum_{i,j=1; i < j}^4 \bar{n}_i \bar{n}_j \geq 0.$$

Если  $\alpha_{ij}$  — меры двугранных углов тетраэдра, то  $\bar{n}_i \bar{n}_j = -\cos \alpha_{ij}$  и из последнего неравенства получаем:

$$\sum_{i,j=1; i < j}^4 \cos \alpha_{ij} \leq 2. \quad (9.13)$$

Знак равенства имеет место только для равногранного тетраэдра. В самом деле, рассмотрим векторы, введенные в задаче § 2 гл. 5. Эти векторы имеют равные модули в случае равногранного тетраэдра. Так как сумма их равна нуль-вектору, то и для единичных векторов  $\bar{n}_i$ , участвующих в доказательство неравенства (9.13), сумма равна нулевому вектору. Поэтому для равногранного тетраэдра в этом неравенстве имеет место равенство.

Далее, на основании неравенства Коши

$$\frac{1}{6} \sum_{i,j=1; i < j}^4 \cos \alpha_{ij} \geq \sqrt[6]{\prod_{i,j=1; i < j}^4 \cos \alpha_{ij}}.$$

Учитывая неравенство (9.13), отсюда получаем:

$$\prod_{i,j=1; i < j}^4 \cos \alpha_{ij} \leq \frac{1}{3^6} = \frac{1}{729}. \quad (9.14)$$

Доказательство окончено.  $\square$

**3.2. Неравенства для прямоугольного тетраэдра.** В таком тетраэдре  $OABC$  ребра  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  попарно перпендикулярны. Примем следующие обозначения:  $OA = a$ ,  $OB = b$ ,  $OC = c$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S$  — площади граней  $OBC$ ,  $OCA$ ,  $OAB$ ,  $ABC$  соответственно,  $h$  — высота тетраэдра, проведенная к грани  $ABC$ ,  $R$  и  $r$  — радиусы описанной и вписанной сфер,  $V$  — объем.

На основании неравенства (9.3)

$$(S_1 + S_2 + S_3)^2 \leq 3(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2).$$

Поскольку  $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S^2$ , то

$$S < S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \leq \sqrt{3}S. \quad (9.15)$$

Левое из этих неравенств совпадает с неравенством п. 1.3 гл. 3 для тетраэдра общего вида. Так как  $S = \frac{3V}{h}$ ,  $S_1 = \frac{3V}{a}$ ,  $S_2 = \frac{3V}{b}$ ,  $S_3 = \frac{3V}{c}$ , то неравенство (9.15) равносильно такому:

$$\frac{1}{h} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{\sqrt{3}}{h}. \quad (9.16)$$

Принимая во внимание, что  $V = \frac{1}{6}abc$ , на основании неравенства Коши получаем:

$$S_1 + S_2 + S_3 = \frac{1}{2}(ab + bc + ca) \geq \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{ab \cdot bc \cdot ca}.$$

Таким образом,

$$S_1 + S_2 + S_3 \geq \frac{3}{2}\sqrt{36V^2}. \quad (9.17)$$

Разделим равенство  $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S^2$  на  $(3V)^2$ . В результате будем иметь соотношение:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}. \quad (9.18)$$

Используя неравенство Коши, получаем:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 3\sqrt{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{c^2}},$$

откуда

$$V \geq \frac{\sqrt{3}}{2}h^3 \quad (9.19)$$

и поэтому

$$S \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}h^2. \quad (9.20)$$

Достроим тетраэдр  $OABC$  до прямоугольного параллелепипеда. Учитывая, что радиус  $R$  описанной сферы равен половине диагонали этого параллелепипеда, а медиана  $OM$  тетраэдра — трети диагонали. Так как высота  $h$  не больше медианы  $OM$ , то  $h \leq \frac{2R}{3}$ , т.е.

$$2R \geq 3h. \quad (9.21)$$

Поскольку согласно (6.30)  $\frac{1}{r} = \frac{1}{h} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ , то

$$2R \cdot \frac{1}{r} \geq 3 \left( 1 + h \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \right).$$

На основании (9.16)  $h \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \leq \sqrt{3}$ . Следовательно,

$$\frac{2R}{r} \geq 3(1 + \sqrt{3}). \quad (9.22)$$

Во всех полученных неравенствах знак равенства имеет место лишь при  $a = b = c$ .

**3.3. Неравенства для произвольного тетраэдра.** *Во всяком тетраэдре произведение длин двух противоположных ребер меньше суммы произведений других противоположных ребер:*

$$aa_1 < bb_1 + cc_1. \quad (9.23)$$

*Доказательство.* По доказанному в п. 4.4 гл. 8 существует треугольник, длины сторон которого пропорциональны числам  $aa_1, bb_1, cc_1$ . Поэтому для него выполняется неравенство (9.23) на основании неравенства треугольника.  $\square$

*Для любого тетраэдра радиус  $R$  описанной сферы не меньше утроенного радиуса вписанной сферы:*

$$R \geq 3r, \quad (9.24)$$

*причем  $R = 3r$  только для правильного тетраэдра.*

*Доказательство.* Пусть  $A_1, B_1, C_1, D_1$  — центроиды граней тетраэдра  $ABCD$ . По свойству центроида тетраэдр  $A_1B_1C_1D_1$  гомотетичен тетраэдру  $ABCD$  относительно его центроида  $G$  с коэффициентом  $-1/3$ . Поэтому радиус  $\rho$  сферы  $A_1B_1C_1D_1$  равен  $\frac{1}{3}R$ . Но сфера  $A_1B_1C_1D_1$  не меньше сферы, вписанной в тетраэдр  $ABCD$ , так как вписанная сфера вся лежит *внутри* тетраэдра  $ABCD$  кроме точек касания, а сфера  $A_1B_1C_1D_1$  может и *пересекать* его грани. Следовательно,  $r \leq \rho = \frac{1}{3}R$ .

Равенство  $r = \frac{1}{3}R$  будет выполняться лишь в случае совпадения сферы  $A_1B_1C_1D_1$  с вписанной в тетраэдр  $ABCD$  сферой, т. е. тогда и только тогда, когда его центроид совпадает с центром вписанной сферы. В этом случае его медианы  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$  совпадают с высотами. Следовательно, тетраэдр является ортоцентрическим и имеет равные высоты (каждая из них равна  $4r$ ). Поэтому тетраэдр  $ABCD$  равногранный. Из равенств  $a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2$  и  $a = a_1, b = b_1, c = c_1$  следует равенство всех ребер. Значит, тетраэдр является правильным.  $\square$

Докажем, что

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \leq \frac{8\sqrt{3}}{3}R^2. \quad (9.25)$$

*Доказательство.* На основании неравенства (13.11) из планиметрии ([8], с. 142) имеем:

$$\begin{aligned} 4\sqrt{3}S_1 &\leq a_1^2 + b^2 + c^2, & 4\sqrt{3}S_3 &\leq a^2 + b^2 + c_1^2, \\ 4\sqrt{3}S_2 &\leq a^2 + b_1^2 + c^2, & 4\sqrt{3}S_4 &\leq a_1^2 + b_1^2 + c_1^2. \end{aligned}$$

Сложив эти равенства почленно, получаем:

$$4\sqrt{3}(S_1 + S_2 + S_3 + S_4) \leq 2(a^2 + b^2 + c^2 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) \leq 2 \cdot 16R^2.$$

Здесь использовано неравенство (9.7). Из полученного неравенства следует неравенство (9.25). Равенство выполняется лишь для правильного тетраэдра.  $\square$

Из неравенств (9.24) и (9.25) следует:

$$V \leq \frac{8\sqrt{3}}{27}R^3. \quad (9.26)$$

В самом деле,  $V = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)r \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3}R^2 \cdot \frac{R}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{27}R^3$ .

## §4. Стереометрические экстремумы

**4.1. Экстремумы как следствия нестрогих неравенств.** Если имеется неравенство  $x \geq a$  ( $x \leq a$ ), где величина  $a$  постоянна, а величина  $x$  переменна, то  $a$  является *минимальным* (*максимальным*) значением величины  $x$ .

Для примера рассмотрим неравенство (9.25), в котором  $R$  постоянно и равенство выполняется только для правильного тетраэдра. Рассмотрим множество всех тетраэдров, вписанных в сферу радиуса  $R$ . Из неравенства (9.25) следует, что максимальная площадь их поверхностей будет равна  $\frac{8\sqrt{3}}{3}R^2$ , ее имеет правильный тетраэдр, вписанный в данную сферу.

Итак, *из всех тетраэдров, вписанных в данную сферу, наибольшую площадь поверхности имеет правильный тетраэдр.*

Аналогично, из неравенства (9.26) следует, что *из всех тетраэдров, вписанных в данную сферу, наибольший объем имеет правильный тетраэдр.*

Рассмотрим множество всех прямоугольных параллелепипедов с данной диагональю  $d$ . Требуется найти тот из них, который имеет наибольшую площадь  $S$  его полной поверхности.

Пусть  $a, b, c$  — измерения параллелепипеда. Тогда

$$S = 2(ab + bc + ca) \leq 2(a^2 + b^2 + c^2) = 2d^2,$$

при этом равенство имеет место лишь при  $a = b = c$ , т. е. тогда и только тогда, когда параллелепипед является *кубом*.

**4.2. Экстремумы суммы и произведения положительных чисел.** Обратимся снова к неравенству (9.1) Коши, в котором равенство достигается только при равенстве чисел  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ . Из него можно сделать следующие выводы.

1. Если сумма  $n$  положительных чисел постоянна, то их произведение максимально тогда и только тогда, когда эти числа равны.

2. Если произведение  $n$  положительных чисел постоянно, то их сумма минимальна тогда и только тогда, когда эти числа равны.

**Задача 1.** Из множества всех прямоугольных параллелепипедов с заданной суммой ребер найдите параллелепипед максимального объема.

**Решение.** Пусть  $a, b, c$  — измерения прямоугольного параллелепипеда и сумма  $a + b + c$  постоянна. Тогда  $abc$  максимально при  $a = b = c$ . Геометрически это означает, что *из всех прямоугольных параллелепипедов с одной и той же суммой ребер наибольший объем имеет куб.*

**Задача 2.** В сферу радиуса  $R$  вписана правильная четырехугольная пирамида. Найдите наибольшую площадь ее боковой поверхности.

**Решение.** Пусть  $h$  — высота,  $l$  — апофема,  $x$  — половина стороны основания пирамиды. Тогда площадь  $S$  ее боковой поверхности равна  $S = 4 \cdot \frac{1}{2} l \cdot 2x = 4lx$ . Так как  $l^2 = h^2 + x^2$  и  $(x\sqrt{2})^2 = h(2R - h)$  (половина диагонали основания есть средняя геометрическая величина между высотой  $h$  и ее дополнением  $2R - h$  до диаметра сферы), то

$$S = 4lx = 2h\sqrt{4R^2 - h^2}.$$

Площадь  $S$  максимальна тогда и только тогда, когда максимальна величина  $S^2 = 4h^2(4R^2 - h^2)$ . Рассмотрим произведение  $h^2(4R^2 - h^2)$ . Сумма  $h^2 + (4R^2 - h^2) = 4R^2$  его сомножителей постоянна. Поэтому оно принимает наибольшее значение только при условии равенства сомножителей  $h^2 = 4R^2 - h^2$ , т. е. при  $h = R\sqrt{2}$ .

Следовательно, максимальная площадь  $S$  боковой поверхности пирамиды равна  $2R\sqrt{2}\sqrt{4R^2 - 2R^2} = 4R^2$ .

**Задача 3.** В сферу вписан конус. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса, при котором конус имеет наибольшую площадь  $S$  боковой поверхности.

**Решение.** Пусть  $R$  — радиус сферы,  $r$  — радиус основания конуса,  $l$  — образующая конуса,  $2\alpha$  — искомый угол при вершине его осевого сечения. Тогда  $r = l \sin \alpha$ ,  $l = 2R \cos \alpha$  и поэтому

$$S = \pi r l = 4\pi R^2 \sin \alpha \cos^2 \alpha.$$

Требуется найти значение  $\alpha$ , при котором площадь  $S$  максимальна. Оно

совпадает с тем его значением, при котором  $S^2$  максимальна. Представим  $\sin^2 \alpha \cos^4 \alpha = 4(1 - \cos^2 \alpha) \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{2}$ . Сумма  $(1 - \cos^2 \alpha) + \frac{\cos^2 \alpha}{2} + \frac{\cos^2 \alpha}{2} = 1$  постоянна (не зависит от  $\alpha$ ). Следовательно, произведение  $\sin^2 \alpha \cos^4 \alpha$ , а значит, и произведение  $\sin \alpha \cos^2 \alpha$  максимально при условии  $(1 - \cos^2 \alpha) = \frac{\cos^2 \alpha}{2}$ , откуда  $\cos^2 \alpha = \frac{2}{3}$  и  $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$ .

**Задача 4.** Из всех конусов данного объема  $V$  найдите конус с наименьшей образующей.

**Решение.** Пусть  $l, h, r$  — образующая, высота и радиус основания конуса. Тогда  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ,  $V^2 = \frac{1}{9}\pi^2 r^4 h^2 = \frac{4\pi^2}{9} \cdot \frac{r^2}{2} \cdot \frac{r^2}{2} \cdot h^2$  и  $l^2 = r^2 + h^2 = \frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2} + h^2$ . Так как произведение  $\frac{r^2}{2} \cdot \frac{r^2}{2} \cdot h^2$  по условию постоянно, то сумма  $\frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2} + h^2$  минимальна при  $\frac{r^2}{2} = h^2$ . А тогда  $V = \frac{2}{3}\pi h^3$  и поэтому  $h^3 = \frac{3V}{2\pi}$ ,  $l^2 = r^2 + h^2 = 3h^2$ ,  $l = h\sqrt{3} = \sqrt{3} \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}$ .

**Задача 5.** Через данную внутри трехгранного угла точку  $M$  проведите плоскость, отсекающую от него тетраэдр наименьшего объема.

**Решение.** Пусть искомая плоскость  $\alpha$  пересекает ребра данного триэдра в точках  $A, B, C$  и точка  $M \in \alpha$ . Зададим аффинную систему координат  $Oxyz$ , координатные оси которой содержат ребра  $OA, OB, OC$  триэдра. Пусть точки  $A, B, C, M$  имеют координаты:  $A(a, 0, 0)$ ,  $B(0, b, 0)$ ,  $C(0, 0, c)$ ,  $M(x_0, y_0, z_0)$ . Тогда плоскость  $\alpha$  будет иметь уравнение  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  и поэтому для координат точки  $M$  выполняется равенство:  $\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} + \frac{z_0}{c} = 1$ . При заданном триэдре объем тетраэдра  $OABC$  согласно формуле (6.11) Штаудта зависит только от произведения  $abc$ , так как его плоские углы при вершине  $O$  постоянны. Поскольку сумма  $\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} + \frac{z_0}{c}$  постоянна, то произведение  $\frac{x_0 y_0 z_0}{abc}$  *максимально* при условии  $\frac{x_0}{a} = \frac{y_0}{b} = \frac{z_0}{c} = \frac{1}{3}$ . Но произведение  $x_0 y_0 z_0$  постоянно, поэтому необходимо и достаточно, чтобы число  $abc$  было минимальным, а следовательно, был минимальным и объем тетраэдра  $OABC$ . Таким образом, равенства  $a = 3x_0$ ,  $b = 3y_0$ ,  $c = 3z_0$  представляют решение поставленной задачи. А они показывают, что точка  $M(x_0, y_0, z_0)$  является центроидом треугольника  $ABC$  что и позволяет построить этот треугольник (рис. 129):  $OM_1 = x_0$ ,  $OM_2 = y_0$ ,  $OM_3 = z_0$ ,  $OA = 3x_0$ ,  $OB = 3y_0$ ,  $OC = 3z_0$ .

**4.3. Сведение задачи к планиметрической** часто используется при решении стереометрических задач, в частности, и при нахождении экстремумов. Рассмотрим несколько примеров.

**Задача 1.** Даны точки  $A, B$  и прямая  $m$ , не лежащие в одной плоскости. Требуется найти на прямой  $m$  такую точку  $X$ , чтобы 1) сумма  $AH + BH$  была наименьшей, 2) разность  $|AH - BH|$  была наибольшей.

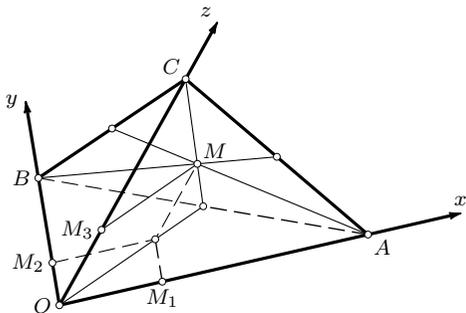


Рис. 129

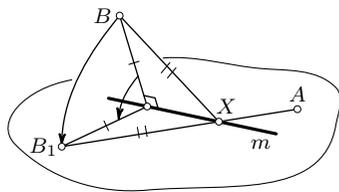


Рис. 130

**Решение.** Если точки  $A$  и  $B$  лежат в одной плоскости с прямой  $m$  (по разные стороны от нее), то решение задачи общеизвестно: искомая точка  $X$  есть точка пересечения прямых  $AB$  и  $m$ . При заданных условиях выполним поворот плоскости  $(m, B)$  около прямой  $m$  до совмещения ее с плоскостью  $(m, A)$  в том направлении, чтобы образ  $B_1$  точки  $B$  при этом повороте оказался по другую сторону от прямой  $m$ , нежели точка  $A$  (рис. 130). Тогда искомой точкой  $X$  будет точка пересечения прямых  $m$  и  $AB_1$ , так как  $AH + BH = AH + BH_1 = AB_1$ , а расстояние  $AB_1$  наименьшее.

Аналогично решается и вторая часть задачи о максимуме разности  $|AH - BH|$  с той лишь разницей, что поворот нужно выполнять в другом направлении, чем в первой части задачи.

**Задача 2.** В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна  $a$ . Какой наименьший периметр может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через апофему, если высота пирамиды относится к боковому ребру как  $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ ?

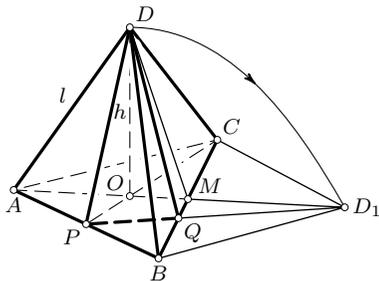


Рис. 131

**Решение.** Пусть  $ABCD$  — данная пирамида,  $DO$  — ее высота,  $DP$  — апофема,  $P \in (AB)$  (рис. 131). Пусть треугольник  $DPQ$  — сечение пирамиды,  $Q \in (BC)$ . Так как сторона  $DP$  постоянна, то сумма  $PQ + DQ$

по условию должна быть минимальной. На основании решения предыдущей задачи точка  $Q$  является точкой пересечения прямой  $BC$  с прямой  $PD_1$ , где  $D_1$  — образ вершины  $D$  при повороте треугольника  $BCD$  во внешнюю сторону пирамиды до совмещения с плоскостью  $ABC$ .

Теперь нетрудно подсчитать минимальный периметр сечения  $DPQ$ :  $DP + PQ + QD = DP + PD_1$ . Если  $l$  — длина бокового ребра пирамиды, то  $l^2 = h^2 + AO^2$ . По условию  $h^2 = \frac{2}{3}l^2$ . Так как  $AO = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ , то  $l^2 = \frac{2}{3}l^2 + \frac{1}{3}a^2$ , откуда  $l = a$ . Тогда по теореме косинусов из треугольника  $PBD_1$  имеем:

$$PD_1^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot a \cos 120^\circ = \frac{7}{4}a^2.$$

Поэтому минимальный периметр сечения  $DPQ$  равен  $\frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a\sqrt{7}}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{7})$ .

## §5. Точка Люилье тетраэдра

**5.1. Задача Люилье.** Найдите точку, для которой сумма квадратов расстояний до плоскостей граней данного тетраэдра минимальна.

**Решение.** Пусть  $d_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) — нормальные координаты (п. 4.2, гл. 6) искомой точки  $L$  относительно данного тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$ . Согласно тождеству (9.4) Лагранжа

$$\begin{aligned} (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2)(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2) = \\ = (d_1S_1 + d_2S_2 + d_3S_3 + d_4S_4) + \sum_{i,j=1; i \neq j}^4 (d_iS_j - d_jS_i)^2, \end{aligned} \quad (9.27)$$

где  $S_i$  — площади граней тетраэдра. Величина  $\sum (d_iS_j - d_jS_i)^2$  неотрицательна и обращается в нуль тогда и только тогда, когда все  $d_iS_j - d_jS_i = 0$ , т. е. при условии

$$\frac{d_1}{S_1} = \frac{d_2}{S_2} = \frac{d_3}{S_3} = \frac{d_4}{S_4}. \quad (9.28)$$

В этом и только в этом случае правая часть тождества (9.27) минимальна, а следовательно, минимальна и сумма  $\sigma = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$ , поскольку сумма  $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2$  и сумма  $d_1S_1 + d_2S_2 + d_3S_3 + d_4S_4 = 3V$  постоянны. Тогда из того же тождества (9.27)

$$\min \sigma = \frac{9V^2}{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2},$$

откуда

$$\frac{1}{\min \sigma} = \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2} + \frac{1}{h_4^2}.$$

Таким образом, решением поставленной задачи является единственная точка  $L$ , расстояния которой до плоскостей граней тетраэдра соответственно пропорциональны площадям этих граней. Это свойство обнаружил швейцарский математик Симон Люилье (1750–1840), чье имя и носит точка  $L$ .

Отметим без доказательства, что в точке Люилье тетраэдра пересекаются три плоскости, каждая из которых проходит через одну из бимедиан и середину соответствующего общего перпендикуляра двух скрещивающихся ребер тетраэдра. Она лежит также в плоскости, содержащей середины общих перпендикуляров скрещивающихся ребер.

**5.2. Бариецентрические координаты точки Люилье.** Выразим барицентрические координаты  $\lambda_i = \frac{d_i}{h_i}$  точки Люилье тетраэдра через площади его граней. Обозначим равные отношения (9.28) буквой  $t$ :  $t = \frac{d_i}{S_i} = \frac{d_i S_i}{S_i^2}$ . По свойству ряда равных отношений

$$t = \frac{d_1 S_1 + d_2 S_2 + d_3 S_3 + d_4 S_4}{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2} = \frac{3V}{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2}.$$

Тогда

$$\lambda_i = \frac{d_i}{h_i} = \frac{d_i S_i}{h_i S_i} = \frac{S_i^2 t}{3V}.$$

Итак,

$$\lambda_i = \frac{S_i^2}{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2}, \quad (9.29)$$

т. е. *бариецентрические координаты точки Люилье тетраэдра пропорциональны квадратам площадей соответственных граней.*

**5.3. Точка Люилье — центроид ее тетраэдра проекций.** Тетраэдр  $M_1 M_2 M_3 M_4$ , вершины которого являются ортогональными проекциями  $M_i$  точки  $M$  на плоскости граней тетраэдра  $A_1 A_2 A_3 A_4$  называется *тетраэдром проекций* точки  $M$  относительно тетраэдра  $A_1 A_2 A_3 A_4$ .

**Теорема.** *Точка  $L$  Люилье тетраэдра  $A_1 A_2 A_3 A_4$  является центроидом ее тетраэдра проекций  $L_1 L_2 L_3 L_4$  относительно тетраэдра  $A_1 A_2 A_3 A_4$ .*

**Доказательство 1.** Привлечем векторы  $\bar{n}_i$ , ортогональные граням тетраэдра  $A_1 A_2 A_3 A_4$ , модули которых численно равны площадям  $S_i$  соответственных граней. Согласно задаче § 2 гл. 5 их сумма

равна нуль-вектору. Положим  $\overline{LL}_i = \bar{d}_i$ . Тогда

$$\bar{d}_i = |\bar{d}_i| \cdot \frac{\bar{n}_i}{|\bar{n}_i|} = \frac{d_i}{S_i} \bar{n}_i$$

и поэтому

$$\bar{d}_1 + \bar{d}_2 + \bar{d}_3 + \bar{d}_4 = \frac{d_1}{S_1} \bar{n}_1 + \frac{d_2}{S_2} \bar{n}_2 + \frac{d_3}{S_3} \bar{n}_3 + \frac{d_4}{S_4} \bar{n}_4.$$

На основании (9.28)

$$\bar{d}_1 + \bar{d}_2 + \bar{d}_3 + \bar{d}_4 = \frac{d_i}{S_i} (\bar{n}_1 + \bar{n}_2 + \bar{n}_3 + \bar{n}_4) = \bar{0}.$$

По необходимому и достаточному признаку центроида (п. 1.3 гл. 6) точка  $L$  — центроид тетраэдра  $L_1L_2L_3L_4$ .  $\square$

*Доказательство 2.* Если  $M_i$  — ортогональные проекции точки  $M \neq L$  на плоскости граней тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$ , то по свойству точки  $L$  имеем:

$$LL_1^2 + LL_2^2 + LL_3^2 + LL_4^2 < MM_1^2 + MM_2^2 + MM_3^2 + MM_4^2.$$

Но так как  $MM_i^2 < ML_i^2$ , то

$$LL_1^2 + LL_2^2 + LL_3^2 + LL_4^2 < ML_1^2 + ML_2^2 + ML_3^2 + ML_4^2.$$

Таким образом, сумма квадратов расстояний точки  $L$  до вершин тетраэдра  $L_1L_2L_3L_4$  минимальна. На основании характеристического свойства центроида (следствие из теоремы Лейбница) точка  $L$  — центроид тетраэдра  $L_1L_2L_3L_4$ .  $\square$

## §6. Экстремальные свойства правильного тетраэдра

Было уже замечено (п. 4.1), что из всех тетраэдров, вписанных в данную сферу, наибольшую площадь поверхности и наибольший объем имеет правильный тетраэдр. Из тех же неравенств (9.25) и (9.26) вытекает, что *из всех тетраэдров с заданной площадью поверхности правильный тетраэдр имеет минимальную описанную сферу, из всех равновеликих тетраэдров правильный тетраэдр имеет минимальную описанную сферу.*

На основании неравенства (9.24) правильный тетраэдр имеет минимальное отношение  $R : r = 3$  радиусов описанной и вписанной сфер.

Ниже рассматриваются другие экстремальные свойства правильного тетраэдра.

**6.1. Тетраэдр минимальной площади поверхности с данным основанием и данной высотой.** С целью получения экстремальных свойств правильного тетраэдра, решим подготовительную, но важную задачу. Даны треугольник  $ABC$  и отрезок  $h$ . Найти тетраэдр  $ABCD$  с заданной высотой  $h$ , который имел бы минимальную площадь поверхности.

Очевидно, для этого достаточно найти положение проекции  $H$  искомой вершины  $D$  на плоскость  $ABC$ . Пусть  $x, y, z$  ориентированные расстояния точки  $H$  до сторон треугольника  $ABC$  (нормальные координаты точки  $H$  относительно треугольника  $ABC$ ). Известно, что

$$ax + by + cz = 2S, \quad (9.30)$$

где  $a, b, c$  — длины сторон треугольника,  $S$  — его площадь. Следовательно, нам нужно найти минимум суммы площадей трех других граней искомого тетраэдра, или минимум выражения:

$$a\sqrt{h^2 + x^2} + b\sqrt{h^2 + y^2} + c\sqrt{h^2 + z^2}.$$

Временно фиксируем  $z$ , т. е. проекцию  $H$  будем искать на прямой, параллельной стороне  $AB$ . Тогда в силу (9.30)  $ax + by = \text{const}$  и мы ищем точку  $H$  такую, чтобы величина

$$\sigma = a\sqrt{h^2 + x^2} + b\sqrt{h^2 + y^2}$$

была минимальной, а значит, была минимальной и величина

$$\sigma^2 = (ax + by)^2 + a^2h^2 + b^2h^2 + 2ab(\sqrt{h^4 + h^2(x^2 + y^2)} + x^2y^2 - xy).$$

Но так как  $(ax + by)^2$ ,  $a^2h^2$ ,  $b^2h^2$ ,  $2ab$  постоянны, то достаточно найти минимум величины

$$\mu = \sqrt{h^4 + h^2(x^2 + y^2)} + x^2y^2 - xy.$$

Разложим  $(\mu + xy)^2 = h^4 + h^2(x^2 + y^2) + x^2y^2$  по степеням  $y$ :

$$h^2y^2 - 2\mu xy + h^4 + h^2x^2 - \mu^2 = 0. \quad (*)$$

Чтобы  $y$  было действительным, необходимо, чтобы дискриминант этого трехчлена был неотрицательным:

$$\mu^2x^2 - h^2(h^4 + h^2x^2 - \mu^2) \geq 0,$$

или

$$\mu^2(x^2 + h^2) - h^4(x^2 + h^2) \geq 0,$$

откуда  $\mu^2 \geq h^4$ . Минимальным значением  $\mu$  является  $h^2$ . Подстановкой  $\mu = h^2$  в (\*) получаем:  $h^2(x - y)^2 = 0$ , откуда  $x = y$ . Значит, точка  $H$ , для которой при фиксированном  $z$  минимальна площадь поверхности тетраэдра, лежит на биссектрисе угла  $ACB$ .

Отсюда следует, что основанием  $H$  высоты искомого тетраэдра является, центр окружности, вписанной в данный треугольник  $ABC$  (рис. 132).

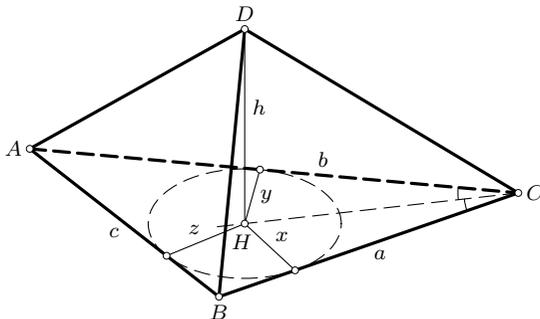


Рис. 132

### 6.2. Правильный тетраэдр — объект с экстремальными свойствами.

*Среди всех равновеликих тетраэдров наименьшую площадь поверхности имеет правильный тетраэдр.*

*Доказательство.* По доказанному в предыдущем пункте в тетраэдре с минимальной площадью его поверхности при заданном объеме основаниями высот являются центры окружностей, вписанных в грани. Поэтому в нем будут равны каждые три двугранных угла с общей гранью, а следовательно, и равны все двугранные углы. Согласно второй теореме косинусов для триэдра равны все плоские углы тетраэдра. Так как все грани — правильные треугольники, то тетраэдр — правильный.  $\square$

Обратимся к равенству  $3V = Sr$ , где  $S$  — площадь поверхности тетраэдра,  $r$  — радиус его вписанной сферы. Если его объем  $V$  задан, то при минимальной площади  $S$  будет максимальным  $r$ . Следовательно, на основании предыдущего свойства *из всех равновеликих тетраэдров максимальную вписанную сферу имеет правильный тетраэдр.*

*Из всех тетраэдров, описанных около данной сферы, минимальный объем имеет правильный тетраэдр.*

В самом деле, отношение  $R:r$  минимально (равно 3) только для правильного тетраэдра. Следовательно, из всех тетраэдров, описанных около данной сферы, правильный тетраэдр имеет минимальную описанную

сферу. В неравенстве (9.26) равенство выполняется только для правильного тетраэдра. Но при минимальном  $R$  будет минимальным и  $V$ .

Обратимся еще раз к соотношениям  $3V = Sr$  и  $r \leq \frac{1}{3}R$ , из которых следует:

$$V \leq \frac{1}{9}SR, \quad (9.31)$$

где равенство достигается только для правильного тетраэдра. Тогда при заданной площади  $S$  его поверхности из (9.25) находится  $R^2 = \frac{\sqrt{3}}{8}S$ . Правая часть неравенства (9.31) оказалась постоянной. Следовательно, объем  $V$  тетраэдра максимален, когда этот тетраэдр правильный.

Итак, из всех тетраэдров с постоянной площадью поверхности максимальный объем имеет правильный тетраэдр.

**Следствие.** Для любого тетраэдра имеет место неравенство:

$$S \geq 6^2 \sqrt{\sqrt{3}V^2}. \quad (9.32)$$

Действительно, неравенство (9.31) выполняется для произвольного тетраэдра, а максимум  $V$  достигается при  $R^2 = \frac{\sqrt{3}}{8}S$  для правильного тетраэдра. Поэтому

$$V^2 \leq \frac{1}{81}S^2R^2 = \frac{\sqrt{3}}{81 \cdot 8}S^3,$$

откуда следует (9.32).

## Задачи к главе 9

В задачах 9.1–9.18 требуется доказать неравенства.

**9.1.** Сумма двух противоположных ребер тетраэдра меньше суммы остальных четырех ребер.

**9.2.** Сумма трех ребер тетраэдра, имеющих общую вершину, больше полусуммы трех других его ребер.

**9.3.** Бимедиана (средняя линия) тетраэдра меньше полусуммы двух его противоположных ребер, которые она не пересекает.

**9.4.** Сумма трех произведений длин противоположных ребер тетраэдра меньше удвоенной суммы произведений длин ребер при одной вершине, взятых попарно.

**9.5.** Сумма длин всех ребер тетраэдра не превышает  $4\sqrt{6}R$ .

**9.6.** Сумма длин всех ребер тетраэдра больше суммы расстояний его внутренней точки до вершин, но меньше утроенной этой суммы расстояний.

**9.7.** Если  $a, b, c$  — длины ребер параллелепипеда,  $d$  — длина одной из его диагоналей, то  $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}d^2$ .

**9.8.** Отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой противоположной грани и содержащий центр описанной сферы, не меньше отрезка, соединяющего ту же вершину с центром окружности, описанной около противоположной грани.

**9.9.** Сумма медиан любого тетраэдра удовлетворяет неравенствам:

$$16r \leq m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \leq \frac{16}{3}R,$$

в которых равенства достигаются для равногранного тетраэдра.

**9.10.** Для правильной четырехугольной пирамиды имеет место неравенство

$$R \geq (1 + \sqrt{2})r.$$

**9.11.** Радиус вписанной окружности любой грани тетраэдра больше радиуса его вписанной сферы.

**9.12.** В прямоугольном тетраэдре площадь  $S$  грани, лежащей против прямого триэдра, удовлетворяет неравенству

$$S\sqrt{3} \leq 2R^2,$$

а сумма площадей трех других граней не меньше  $\frac{9}{2}h^2$ .

**9.13.** Если каждое ребро четырехугольной пирамиды имеет длину  $a$ , то для ее объема  $V$  выполняется неравенство

$$V \leq \frac{4\sqrt{3}}{27}a^3.$$

**9.14.** Если плоскость наклонена к граням прямого триэдра под углами  $\alpha, \beta, \gamma$ , то

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \sqrt{3}.$$

**9.15.** Сумма углов, образованных диагональю прямоугольного параллелепипеда с его ребрами, меньше  $180^\circ$ .

**9.16.** Сумма углов, под которыми видны ребра тетраэдра из произвольной его внутренней точки, больше  $3\pi$ .

**9.17.** Сумма двугранных углов тетраэдра при четырех его ребрах, образующих косоугольный тетраэдр, меньше  $2\pi$ .

**9.18.** Сумма всех двугранных углов тетраэдра заключена между  $2\pi$  и  $3\pi$ .

**9.19.** Докажите, что из всех прямоугольных параллелепипедов с постоянной площадью  $S$  поверхности наибольший объем имеет куб. Вычислите этот наибольший объем.

**9.20.** Докажите, что из множества параллелепипедов, вписанных в данную сферу, наибольший объем имеет куб.

**9.21.** Из множества цилиндров, вписанных в сферу радиуса  $R$ , найдите объем того цилиндра, который имеет наибольшую площадь боковой поверхности.

**9.22.** Из всех конусов с данной образующей  $l$  найдите конус наибольшего объема.

**9.23.** Среди всех конусов, описанных около сферы радиуса  $r$ , найдите конус наименьшего объема. Вычислите этот объем.

**9.24.** В данную сферу вписан цилиндр наибольшего объема. Найдите отношение радиуса цилиндра к радиусу сферы.

**9.25.** Консервная банка данного объема  $V$  имеет форму цилиндра. При каком отношении ее высоты к диаметру на ее изготовление потребуется минимальное количество жести?

**9.26.** Площадь полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды равна  $S$ . При каком угле наклона бокового ребра к плоскости основания пирамида имеет наибольший объем?

**9.27.** Правильная четырехугольная пирамида с высотой  $h$  вписана в сферу радиуса  $R$ . При каком значении  $h$  площадь боковой поверхности пирамиды наибольшая?

**9.28.** В сферу радиуса  $R$  вписана правильная  $n$ -угольная пирамида. При какой высоте она имеет максимальный объем? Найдите его.

**9.29.** В сферу вписан конус. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса, при котором он имеет наибольшую площадь боковой поверхности.

**9.30.** Найдите размеры конической палатки (без дна) заданной вместимости, на изготовление которой требуется минимальное количество материала.

**9.31.** Длины двух противоположных ребер тетраэдра переменны и равны, а каждое из остальных ребер имеет длину 1. При какой длине переменных ребер тетраэдр имеет максимальный объем?

**9.32.** В сферу радиуса  $R$  вписана правильная шестиугольная призма, имеющая наибольшую площадь боковой поверхности. Вычислите эту наибольшую площадь.

**9.33.** В сферу радиуса  $R$  вписана правильная  $n$ -угольная призма, имеющая максимальный объем. Найдите ее высоту.

**9.34.** Рассматривается множество правильных треугольных призм данного объема  $V$ . Около каждой из них описан цилиндр. Найдите минимальную площадь поверхности цилиндра.

**9.35.** Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 2, 4, 8. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через его

диагональ и пересекающей ребро длины 4, которое скрещивается с этой диагональю, если сечение имеет наименьшую площадь. Вычислите площадь этого сечения.

**9.36.** В правильную четырехугольную пирамиду, диагональное сечение которой — правильный треугольник, вписан цилиндр максимального объема так, что его ось параллельна диагонали основания пирамиды. Найдите отношение объемов цилиндра и пирамиды.

**9.37.** Из квадратного листа жести со стороной  $a$  требуется вырезать развертку правильной четырехугольной пирамиды так, чтобы вершины квадрата склеивались в вершину пирамиды. Как это сделать, чтобы получить пирамиду наибольшего объема? Найдите объем этой пирамиды.

**9.38.** Объем тетраэдра равен  $V$ . Все вершины параллелепипеда лежат на поверхности тетраэдра, причем три грани параллелепипеда принадлежат трем граням тетраэдра. Найдите наибольший возможный объем такого параллелепипеда.

**9.39.** В конус с радиусом  $R$  основания и высотой  $h$  вписан цилиндр наибольшего объема. Найдите радиус основания и высоту цилиндра.

## Часть II

# Преобразования пространства



# Движения пространства

## §1. Перенос, центральная, осевая и зеркальная симметрии пространства

**1.1. Определения движения и равных фигур.** *Движением пространства* называется отображение пространства на себя, при котором сохраняются расстояния между точками: если  $A$  и  $B$  — любые две точки пространства, а  $A_1$  и  $B_1$  — их образы, то  $A_1B_1 = AB$ . Из этого условия следует, что образы двух различных точек различны, т. е. движение есть *обратимое* отображение пространства на себя и потому является *преобразованием* пространства.

Фигура  $F_1$  называется *равной* (*конгруэнтной*) фигуре  $F$ , если существует движение  $f$ , отображающее  $F$  на  $F_1$ :  $f(F) = F_1$ .

Ясно, что отношение равенства фигур рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. является отношением эквивалентности.

**1.2. Перенос.** Переносом  $T_{\vec{r}}$  пространства на вектор  $\vec{r}$  называется преобразование, при котором каждая точка  $M$  отображается на такую точку  $M_1$ , что  $\overline{MM_1} = \vec{r}$ , где  $\vec{r}$  — заданный вектор. Так как  $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$  для любых двух точек  $A$  и  $B$  и их образов  $A_1$  и  $B_1$ , то перенос  $T_{\vec{r}}$  есть движение пространства (рис. 133).

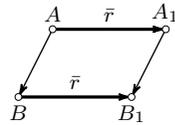


Рис. 133

**1.3. Центральная симметрия.** *Симметрией относительно точки  $O$  (центральной симметрией)  $Z_O$*  пространства называется преобразование пространства, которое точку  $O$  отображает на себя, а любую другую точку  $M$  отображает на такую точку  $M_1$ , что точка  $O$  является серединой отрезка  $MM_1$  (рис. 134). Легко видеть, что центральная симметрия пространства является движением:  $M_1N_1 = MN$  для любых двух точек  $M$  и  $N$  и их образов  $M_1$  и  $N_1$ ,  $\overline{M_1N_1} = -\overline{MN}$ .

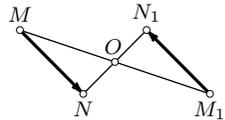


Рис. 134

**1.4. Осевая симметрия.** *Симметрией пространства относительно данной прямой  $l$  (осевой симметрией)  $S_l$*  называется преобразование, которое каждую точку прямой  $l$  отображает на себя, а любую другую точку  $M$  пространства отображает на такую точку  $M_1$ , что прямая  $l$

служит серединным перпендикуляром к отрезку  $MM_1$ . Прямая  $l$  называется *осью симметрии*.

Докажем, что *осевая симметрия пространства есть движение*. Пусть  $S_l(A) = A_1$  и  $S_l(B) = B_1$  (рис. 135) точки  $A_0, B_0$  — середины отрезков  $AA_1$  и  $BB_1$ . Тогда  $\overline{AB} = \overline{AA_0} + \overline{A_0B_0} + \overline{B_0B}$ ,  $\overline{A_1B_1} = \overline{A_1A_0} + \overline{A_0B_0} + \overline{B_0B_1} = -\overline{AA_0} + \overline{A_0B_0} - \overline{B_0B}$ . Так как  $\overline{AA_0} \cdot \overline{A_0B_0} = 0$  и  $\overline{B_0B} \cdot \overline{A_0B_0} = 0$ , то  $\overline{AB}^2 = \overline{AA_0}^2 + \overline{A_0B_0}^2 + \overline{B_0B}^2 + 2\overline{AA_0} \cdot \overline{B_0B} = \overline{A_1B_1}^2$ , и значит,  $A_1B_1 = AB$ .

**1.5. Зеркальная симметрия.** *Симметрией пространства относительно данной плоскости  $\alpha$  (зеркальной симметрией  $S_\alpha$ )* называется преобразование пространства, при котором каждая точка плоскости  $\alpha$  отображается на себя, а всякая другая точка  $M$  переходит в такую точку  $M_1$ , что плоскость  $\alpha$  перпендикулярна к отрезку  $MM_1$  и делит его пополам. Плоскость  $\alpha$  называется *плоскостью симметрии*.

*Зеркальная симметрия  $S_\alpha$  пространства есть движение*. В самом деле, пусть  $S_\alpha(A) = A_1$  и  $S_\alpha(B) = B_1$  (рис. 136). Рассмотрим плоскость  $\omega$ ,

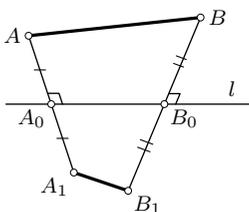


Рис. 135

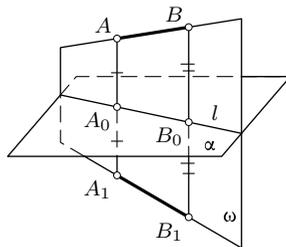


Рис. 136

содержащую прямые  $AA_1$  и  $BB_1$ . Она перпендикулярна плоскости  $\alpha$  симметрии и отображается этой симметрией на себя. На множестве точек плоскости  $\omega$  симметрия  $S_\alpha$  представляет собой *осевую симметрию* этой плоскости  $\omega$  относительно прямой  $l = \alpha \cap \omega$ , а она, как известно, есть движение, и поэтому  $AB = A_1B_1$ .

Говорят, что зеркальная симметрия  $S_\alpha$  *индуцирует* в неподвижной плоскости  $\omega$  ( $\omega \perp \alpha$ ) осевую симметрию с осью  $l = \alpha \cap \omega$ . Аналогичная терминология будет использоваться и далее: если при движении  $f$  пространства некоторая плоскость отображается на себя, то движение  $f$  *индуцирует* некоторое движение этой плоскости.

**1.6. Представление переноса композициями зеркальных и осевых симметрий.** Композиция зеркальных симметрий относительно двух параллельных плоскостей есть перенос пространства, вектор которого перпендикулярен этим плоскостям, направлен от плоскости первой

симметрии к плоскости второй симметрии и имеет модуль, равный удвоенному расстоянию между плоскостями. Обратное, всякий перенос пространства представим такой композицией, при этом одна из плоскостей симметрии может быть любой плоскостью, перпендикулярной вектору переноса.

Композиция осевых симметрий относительно двух параллельных прямых есть перенос пространства, вектор которого перпендикулярен этим прямым, направлен от оси первой симметрии к оси второй симметрии и имеет модуль, равный удвоенному расстоянию между осями. Обратное, всякий перенос пространства может быть представлен такой композицией, при этом одна из осей может быть любой прямой, перпендикулярной вектору переноса.

Доказательства этих утверждений полностью аналогичны планиметрическим ([8], с. 183–184).

## §2. Общие свойства движений пространства

**2.1. Два рода движений пространства.** Пусть дан тетраэдр  $ABCD$ . Возможны два и только два случая: упорядоченная тройка  $(\overline{DA}, \overline{DB}, \overline{DC})$  векторов является положительно ориентированной (правой) или же она является отрицательно ориентированной (левой). Говорят, что в первом случае тетраэдр  $ABCD$  *ориентирован положительно*, а во втором — он *ориентирован отрицательно*. Ориентация тетраэдра существенно зависит от порядка записи его вершин.

Можно доказать, что если при движении пространства некоторый тетраэдр и его образ имеют одинаковую ориентацию, то это свойство имеет место для любой пары соответственных при этом движении тетраэдров. В этом случае движение пространства называется движением *первого рода*. Если же движение отображает некоторый тетраэдр на тетраэдр противоположной ориентации, то этим свойством обладает любая пара соответственных при этом движения тетраэдров. Такое движение пространства называется движением *второго рода*.

Сравнением ориентации тетраэдра и его образа обнаруживаем, что перенос и осевая симметрия пространства являются движениями первого рода (хотя осевая симметрия плоскости — движение второго рода), а центральная и зеркальная симметрии пространства — движения второго рода (однако центральная симметрия плоскости — движение первого рода).

**2.2. Множества неподвижных точек движений пространства.** Из рассмотренных в §1 движений перенос не имеет неподвижных точек, при

центральной симметрии неподвижна единственная точка — центр симметрии, при осевой симметрии неподвижна каждая точка оси симметрии, зеркальная симметрия отображает на себя каждую точку плоскости симметрии. Эти движения не имеют других неподвижных точек, кроме указанных. Есть еще один случай: множеством неподвижных точек тождественного движения является все пространство.

Итак, в рассмотренных примерах множествами неподвижных точек являются пустое множество, одна точка, прямая, плоскость и все пространство. Покажем, что других случаев быть не может.

**Теорема 1.** *Если при движении неподвижны две точки  $A$  и  $B$ , то неподвижна каждая точка прямой  $AB$ .*

Действительно, пусть  $X$  — любая точка прямой  $AB$ , отличная от точек  $A$  и  $B$ . Прямая  $AB$  отображается на себя. Если  $X \rightarrow X_1$  и  $X_1 \neq X$ , то  $A$  — середина отрезка  $XX_1$ , так как  $X_1 \in (AB)$  и  $AX = AX_1$ . Но тогда  $BX \neq BX_1$ , что противоречит определению движения. Значит, точки  $X$  и  $X_1$  совпадают.  $\square$

**Теорема 2.** *Если при движении неподвижны три неколлинеарные точки  $A, B, C$ , то неподвижна каждая точка содержащей их плоскости.*

В самом деле, по предыдущей теореме неподвижна каждая точка прямых  $AB, BC, CA$ . Если  $X$  — произвольная точка плоскости  $ABC$ , не принадлежащая этим прямым, и  $(AX) \cap (BC) = K$ , то точка  $K$  неподвижна. По теореме 1 будет неподвижна каждая точка прямой  $AK$ , в том числе и точка  $X$ . При  $(AX) \parallel (BC)$  рассмотрим прямые  $BX$  или  $CX$ .  $\square$

**Теорема 3.** *Если при движении неподвижны четыре некопланарные точки, то неподвижна каждая точка пространства.*

Доказательство аналогично предыдущему.

**2.3. Инварианты движений пространства.** Для движений пространства сохраняет силу теорема об образе прямой при движениях плоскости вместе с ее доказательством: *движение отображает каждую прямую на прямую* ([8], с. 155).

**Теорема 1.** *Движение пространства отображает каждую плоскость на плоскость.*

Доказательство. Пусть плоскость  $\alpha$  задана неколлинеарными точками  $A, B, C$  и при движении  $f$   $A \rightarrow A_1, B \rightarrow B_1, C \rightarrow C_1$ . Точки  $A_1, B_1, C_1$  также неколлинеарны и определяют некоторую плоскость  $\alpha_1$ . Докажем, что  $f(\alpha) = \alpha_1$ . Пусть  $X$  — произвольная точка плоскости  $\alpha$  и  $f(X) = X_1$ . Тогда  $X_1$  принадлежит  $\alpha_1$ . В самом деле, образами прямых  $AB, BC, CA$  являются соответственно прямые  $A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1$ . Если  $(AX) \cap (BC) = K$ , то  $f(K) = K_1 \in (B_1C_1)$  и прямая  $A_1X_1$  принадлежит  $\alpha_1$ ,

поскольку  $A_1 \in \alpha_1$  и  $K_1 \in \alpha_1$ . Поэтому  $X_1 \in \alpha_1$ . Аналогично доказывается, что прообраз любой точки плоскости  $\alpha_1$  принадлежит плоскости  $\alpha$  (используется обратное движение  $f^{-1}$ ). Итак,  $f(\alpha) = \alpha_1$ .  $\square$

При любом преобразовании образом пересечения множеств является пересечение их образов. В частности, при движении пространства прямая пересечения плоскостей отображается на прямую пересечения их образов. При переносе и центральной симметрии плоскость отображается либо на параллельную ей плоскость, либо на себя, при этом на себя отображается каждая плоскость, параллельная вектору переноса и каждая плоскость, содержащая центр симметрии.

Осевая симметрия отображает на себя каждую плоскость, содержащую ее ось, и каждую плоскость, перпендикулярную оси. Зеркальная симметрия, кроме плоскости симметрии, отображает на себя каждую плоскость, перпендикулярную плоскости симметрии.

**Теорема 2.** *Движение пространства сохраняет параллельность прямых, параллельность плоскостей и параллельность прямой и плоскости.*

В самом деле, образы двух параллельных прямых лежат в одной плоскости и не могут пересекаться, так как иначе точка пересечения не имела бы своего прообраза. К этому же противоречию приходим при предположении пересечения образов двух параллельных плоскостей или образов параллельных прямой и плоскости.

Поскольку движение сохраняет отношение «лежать между» для трех точек прямой, т. е. сохраняет порядок точек на прямой, то имеет место теорема:

**Теорема 3.** *Движение пространства отображает отрезок на отрезок, луч на луч, полуплоскость на полуплоскость, полупространство на полупространство.*

Из определения движения и определения конгруэнтных фигур следует теорема:

**Теорема 4.** *Движение пространства сохраняет величину угла между прямыми, величину угла между плоскостями и величину угла между прямой и плоскостью.*

В самом деле, угол между образами двух пересекающихся прямых равен углу между этими прямыми по определению равных (конгруэнтных) фигур. Угол между скрещивающимися прямыми определяется через угол между пересекающимися прямыми и параллельность прямых, а потому также инвариантен при движениях. В частности, сохраняется перпендикулярность прямых. Отсюда следует инвариантность угла между плоскостями и угла между прямой и плоскостью. В частности, сохраняется перпендикулярность двух плоскостей, прямой и плоскости.

**2.4. Признак зеркальной симметрии.** В качестве примера применения инвариантов движения докажем такую теорему.

**Теорема.** Если множеством неподвижных точек движения пространства является плоскость, то это движение является зеркальной симметрией относительно этой плоскости.

**Доказательство.** Возьмем произвольную точку  $X$ , не принадлежащую плоскости  $\alpha$  неподвижных точек движения  $f$ , и проведем перпендикуляр  $XO$  к  $\alpha$ ,  $O \in \alpha$  (рис. 137). По условию  $f(O) = O$  и  $f(\alpha) = \alpha$ . В силу сохранения перпендикулярности прямой и плоскости при движении  $f$  и единственности перпендикуляра к  $\alpha$  в точке  $O$  прямая  $XO$  отображается на себя. Поскольку все неподвижные точки — это только точки плоскости  $\alpha$ , то  $f(X) = X_1 \neq X$ ,  $X_1 \in (XO)$ ,  $XO = X_1O$ . По определению зеркальной симметрии  $f = S_\alpha$ . □

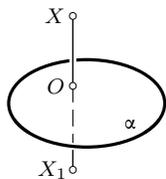


Рис. 137

### §3. Поворот пространства около оси

**3.1. Поворот как частный вид движения.** Не существует поворота пространства около точки по той причине, что нет разумного способа устанавливать направление такого поворота. Однако можно естественным образом ввести понятие поворота около ориентированной прямой (оси).

**Определение.** Поворотом  $R_l^\varphi$  пространства около оси  $l$  на заданный ориентированный угол  $\varphi$  называется такое преобразование пространства, при котором в каждой плоскости, перпендикулярной прямой  $l$ , индуцируется поворот на угол  $\varphi$  около точки ее пересечения с прямой  $l$  (рис. 138).

Осевая симметрия  $S_l$  представляет собой частный вид поворота — поворот на  $\pm 180^\circ$ :  $S_l = R_l^{\pm 180^\circ}$ .

Ориентация прямой  $l$  (оси поворота) позволяет однозначно ориентировать углы в каждой плоскости, перпендикулярной  $l$ .

**Теорема.** Поворот пространства около оси есть движение (первого рода).

**Доказательство.** Пусть  $R_l^\varphi(A) = A_1$  и  $R_l^\varphi(B) = B_1$  (рис. 139). Согласно определению поворота каждая плоскость, перпендикулярная оси поворота, отображается этим поворотом на себя. Рассмотрим плос-

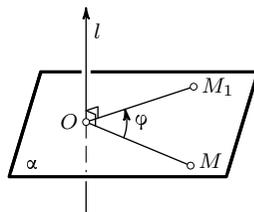


Рис. 138

кость  $\alpha$  (перпендикулярную  $l$ ), в которой лежат точки  $B$  и  $B_1$ . Пусть  $C$  и  $C_1$  — ортогональные проекции на  $\alpha$  точек  $A$  и  $A_1$ . Если  $l \cap \alpha = O$ , то

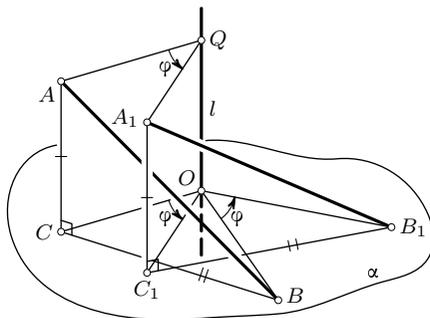


Рис. 139

в плоскости  $\alpha$  имеем поворот  $R_O^\varphi$  этой плоскости, который отображает  $B$  и  $C$  на  $B_1$  и  $C_1$  соответственно. Поскольку поворот плоскости есть движение, то  $BC = B_1C_1$ . Из равных прямоугольных треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  следует  $AB = A_1B_1$ , что и нужно было доказать. Два соответственных тетраэдра, например  $ABCO$  и  $A_1B_1C_1O$ , ориентированы одинаково, т. е. поворот — движение первого рода.  $\square$

**3.2. Признак поворота.** Если множеством неподвижных точек движения пространства является прямая, то оно является поворотом около этой прямой.

*Доказательство.* Пусть при движении  $f$  пространства неподвижна каждая точка прямой  $l$  и нет других неподвижных точек. Через произвольную точку  $M \notin l$  проведем плоскость  $\alpha$  перпендикулярно  $l$  (рис. 138). Если  $\alpha \cap l = O$ , то  $O$  — единственная неподвижная точка плоскости  $\alpha$ . В силу инвариантности при движении перпендикулярности прямой и плоскости  $f(\alpha) = \alpha$ . Поэтому движение  $f$  индуцирует в плоскости  $\alpha$  некоторый поворот  $R_O^\varphi$  (признак поворота плоскости). Угол  $\varphi$  не может зависеть от выбора плоскости  $\alpha$ , так как каждая плоскость, проходящая через прямую  $l$  отображается на плоскость, содержащую прямую  $l$ . По определению  $f = R_l^\varphi$ .  $\square$

**3.3. Представление поворота композициями симметрий.** Рассмотрим композицию  $f = S_\beta \circ S_\alpha$  двух зеркальных симметрий относительно пересекающихся плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ ,  $\alpha \cap \beta = l$ . Все точки прямой  $l$  неподвижны при  $f$  и только они. По теореме п. 3.2 эта композиция есть поворот  $R_l^\varphi$ . При рассмотрении образа  $M'$  произвольной точки  $M \notin l$  легко замечается, что угол  $\varphi$  равен удвоенному ориентированному углу между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ .

Обратно, если задан поворот  $R_l^\varphi$  пространства, то легко строится (неоднозначно) пара плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ , для которых  $S_\beta \circ S_\alpha = R_l^\varphi$ . Именно, за одну из них можно взять любую плоскость, содержащую ось  $l$  поворота, а другая удовлетворяет условиям:  $\alpha \cap \beta = l$ ,  $(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}\varphi$ .

Итак, композиция двух зеркальных симметрий относительно двух пересекающихся плоскостей есть поворот около прямой их пересечения на удвоенный ориентированный угол между плоскостями. Обратно, любой поворот пространства может быть представлен такой композицией (бесконечно многими способами).

В частности, осевая симметрия пространства есть коммутативная композиция двух зеркальных симметрий, плоскости которых перпендикулярны и содержат ось симметрии.

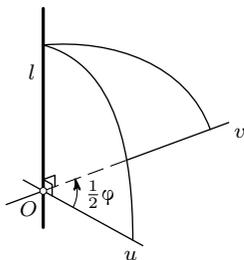


Рис. 140

Далее рассмотрим композицию  $f = S_v \circ S_u$  двух осевых симметрий, оси  $u$  и  $v$  которых пересекаются в точке  $O$  (рис. 140). Проведем перпендикуляр  $l$  к плоскости  $(uv)$  в точке  $O$ . Представим  $S_u$  и  $S_v$  композициями зеркальных симметрий:

$$S_u = S_{(uv)} \circ S_{(ul)}, \quad S_v = S_{(vl)} \circ S_{(uv)}.$$

Находим:  $S_v \circ S_u = S_{(vl)} \circ S_{(uv)} \circ S_{(uv)} \circ S_{(ul)} = S_{(vl)} \circ S_{(ul)} = R_l^\varphi$ , поскольку  $S_{(uv)} \circ S_{(uv)}$  — тождественное преобразование. Итак,

$$S_v \circ S_u = R_l^\varphi.$$

Таким образом, композиция двух осевых симметрий относительно пересекающихся прямых есть поворот пространства около перпендикулярной им прямой проходящей через точку их пересечения, на удвоенный ориентированный угол между осями данных симметрий.

Обратно, всякий поворот пространства можно представить (различными способами) композицией двух осевых симметрий. Их оси перпендикулярны оси поворота, пересекается на ней и образуют между собой (ориентированный) угол, равный половине угла поворота.

## §4. Переносная и поворотная симметрии, винтовое движение

**4.1. Переносная симметрия.** Композиция зеркальной симметрии  $S_\alpha$  и переноса  $T_{\vec{r}}$  ( $\vec{r} \parallel \alpha$ ) параллельно плоскости  $\alpha$  симметрии коммутативна (рис. 141):  $T_{\vec{r}} \circ S_\alpha = S_\alpha \circ T_{\vec{r}}$ . Ее называют *переносной (скользящей) симметрией*  $W_\alpha^{\vec{r}}$  пространства.

Отметим очевидные свойства переносной симметрии.

1. Переносная симметрия пространства является движением второго рода (как композиция движения второго рода и движения первого рода).

2. Переносная симметрия не имеет неподвижных точек.

3. Любой отрезок  $MM_1$ , соединяющий точку, не лежащую в плоскости  $\alpha$  симметрии, с ее образом, делится плоскостью симметрии пополам.

4. Каждая плоскость, параллельная вектору  $\vec{r}$  переносной симметрии и перпендикулярная плоскости  $\alpha$  симметрии, инвариантна (неподвижна). В ней индуцируется переносная симметрия  $W_l^{\vec{r}}$  плоскости, осью которой служит прямая  $l$  пересечения плоскостей.

Более глубокие свойства переносной симметрии содержатся в двух следующих теоремах.

**Теорема 1.** *Композиция осевой и зеркальной симметрий, у которых соответственно ось и плоскость параллельны, есть переносная симметрия пространства.*

*Доказательство.* Рассмотрим композицию  $S_\alpha \circ S_u$  при  $u \parallel \alpha$  (рис. 142). Через прямую  $u$  проведем плоскость  $\beta \parallel \alpha$  и плоскость  $\gamma \perp \alpha$ . Тогда (п. 3.3)  $S_u = S_\gamma \circ S_\beta = S_\beta \circ S_\gamma$ . Поэтому  $S_\alpha \circ S_u = S_\alpha \circ S_\beta \circ S_\gamma$ . Но  $S_\alpha \circ S_\beta = T_{\vec{r}}$  (п. 1.6),  $\vec{r} \perp \alpha$ ,  $r \parallel \gamma$ .

Таким образом,  $S_\alpha \circ S_u = T_{\vec{r}} \circ S_\gamma = W_\gamma^{\vec{r}}$ .

Кроме того,  $S_u \circ S_\alpha = S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha = S_\gamma \circ T_{-\vec{r}} = W_\gamma^{-\vec{r}}$ . □

**Теорема 2** (обратная). *Переносная симметрия пространства представима композицией осевой и зеркальной (зеркальной и осевой) симметрии, ось и плоскость которых параллельны.*

*Доказательство.* Пусть дана переносная симметрия  $W_\alpha^{\vec{r}} = T_{\vec{r}} \circ S_\alpha = S_\alpha \circ T_{\vec{r}}$  (рис. 143). Представим  $T_{\vec{r}} = S_\gamma \circ S_\beta$ , где  $\beta \parallel \gamma$  и обе плоскости перпендикулярны плоскости  $\alpha$ . Тогда  $W_\alpha^{\vec{r}} = S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha = S_\gamma \circ S_u$ , где  $u = \alpha \cap \beta$  и поэтому  $u \parallel \gamma$ . Кроме того,  $W_\alpha^{\vec{r}} = S_\alpha \circ S_\gamma \circ S_\beta = S_v \circ S_\beta$ , где  $v = \alpha \cap \gamma$  и  $v \parallel \beta$ . □

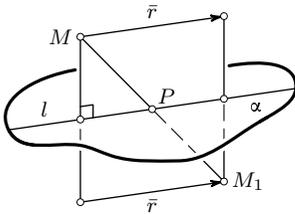


Рис. 141

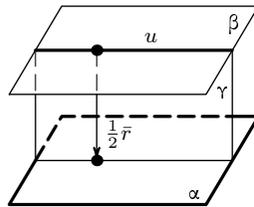


Рис. 142

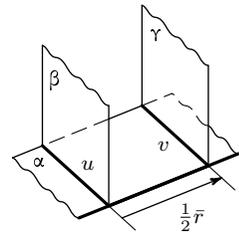


Рис. 143

**4.2. Поворотная симметрия.** Композиция зеркальной симметрии  $S_\alpha$  и поворота  $R_l^\varphi$  около оси, перпендикулярной плоскости симметрии, коммутативна (рис. 144):  $R_l^\varphi \circ S_\alpha = S_\alpha \circ R_l^\varphi$ ,  $l \perp \alpha$  ( $M \rightarrow M_1$ ). Эта композиция называется *поворотной симметрией* с осью  $l$  на угол  $\varphi$  относительно плоскости  $\alpha$ . Отрезок  $MM_1$ , соединяющий точку с ее образом при поворотной симметрии, делится плоскостью симметрии пополам.

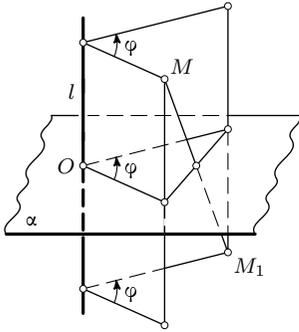


Рис. 144

Точка  $O = l \cap \alpha$  — единственная неподвижная точка поворотной симметрии. Она называется *центром поворотной симметрии*.

В частном случае, когда  $\varphi = \pm\pi$ , поворотная симметрия является центральной симметрией  $Z_O$  с центром  $O = l \cap \alpha$ . Тогда плоскость  $\alpha$  и ось  $l$  теряют свое значение: ими могут быть любая пара перпендикулярных

плоскости и прямой, содержащих центр.

Поворотная симметрия — движение второго рода.

**Теорема.** *Поворотная симметрия есть композиция центральной симметрии и поворота около оси, проходящей через ее центр, и обратно.*

**Доказательство.** Пусть дана поворотная симметрия  $R_l^\varphi \circ S_\alpha$  ( $l \perp \alpha$ ), которая точку  $M$  отображает на точку  $M_1$  (рис. 145). Рассмотрим точки  $M_0 = Z_O(M)$  и  $M_2 = S_\alpha(M)$ . При данной поворотной симметрии  $M \rightarrow M_1$  через  $M_2$ , а при композиции  $R_l^{\varphi-\pi} \circ Z_O$  через  $M_0$ . В силу произвольности точки  $M$  эти преобразования совпадают:

$$R_l^\varphi \circ S_\alpha = R_l^{\varphi-\pi} \circ Z_O.$$

Обратно, композиция  $R_l^\varphi \circ Z_O$  ( $O \in l$ ) есть поворотная симметрия  $R_l^{\varphi-\pi} \circ S_\alpha$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через точку  $O$  перпендикулярно прямой  $l$ .  $\square$

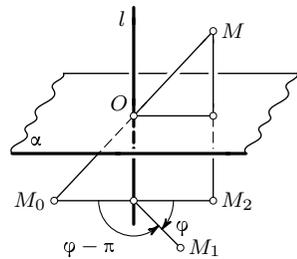


Рис. 145

**4.3. Винтовое движение.** Композиция поворота  $R_l^\varphi$  и переноса  $T_{\vec{r}}$  параллельно оси  $l$  поворота коммутативна (рис. 146):

$$T_{\vec{r}} \circ R_l^\varphi = R_l^\varphi \circ T_{\vec{r}}, \quad \vec{r} \parallel l.$$

Она называется *винтовым движением* с осью  $l$ , углом  $\varphi$  и вектором  $\vec{r}$ .

Поскольку поворот и перенос — движения первого рода, то винтовое движение является движением первого рода. Оно не имеет неподвижных точек.

**Теорема.** *Композиция двух осевых симметрий относительно скрещивающихся прямых есть винтовое движение, осью которого служит общий перпендикуляр этих прямых, угол равен удвоенному углу между ними, а вектор равен удвоенному вектору общего перпендикуляра.*

**Доказательство.** Найдем композицию  $S_v \circ S_u$ , где прямые  $u$  и  $v$  скрещиваются. Построим их общий перпендикуляр  $h$  (рис. 147), через

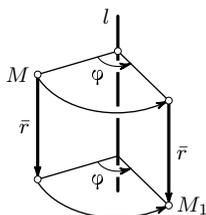


Рис. 146

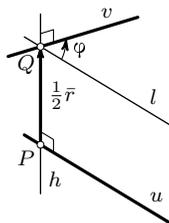


Рис. 147

точку  $Q$  его пересечения с  $v$  проведем прямую  $l \parallel u$ . Тогда  $S_v \circ S_l = R_h^{2\varphi}$ ,  $\varphi = \widehat{(l, v)}$  (п. 3.3) и  $S_l \circ S_u = T_{\bar{r}}$ ,  $\bar{r} = 2\overline{PQ}$ . Поэтому  $S_v \circ S_l \circ S_u = R_h^{2\varphi} \circ T_{\bar{r}}$ , откуда  $S_v \circ S_u = R_h^{2\varphi} \circ T_{\bar{r}}$  ( $\bar{r} \parallel h$ ).  $\square$

Выполненные построения легко обратимы (с большим произволом). Поэтому имеет место обратное утверждение: *винтовое движение представимо композицией двух осевых симметрий, оси которых перпендикулярны оси винтового движения и пересекают ее, причем одна из них произвольна, а другая удовлетворяет указанным в теореме условиям.*

## §5. Конструктивное задание движения пространства

**5.1. Теорема о задании движения.** *Если даны два тетраэдра  $ABCD$  и  $A'B'C'D'$  с соответственно равными ребрами, то существует одно и только одно движение пространства, отображающее точки  $A, B, C, D$  соответственно на точки  $A', B', C', D'$ .*

**Доказательство.** Пусть тетраэдры  $ABCD$  и  $A'B'C'D'$  таковы, что  $AB = A'B'$ ,  $BC = B'C'$ ,  $CD = C'D'$ ,  $BD = B'D'$ ,  $AD = A'D'$ ,  $AC = A'C'$ . Рассмотрим плоскость  $\alpha_1$  симметрии точек  $A$  и  $A'$ . Пусть зеркальная симметрия  $S_{\alpha_1}$  отображает тетраэдр  $ABCD$  на тетраэдр

$A'B_1C_1D_1$  (рис. 148). Далее возьмем плоскость  $\alpha_2$  симметрии точек  $B_1$  и  $B'$ . В ней лежит точка  $A'$ , так как  $A'B_1 = A'B' = AB$ . Симметрией  $S_{\alpha_2}$  тетраэдр  $A'B_1C_1D_1$  отображается на некоторый тетраэдр  $A'B'C_2D_2$ . Далее возьмем плоскость  $\alpha_3$  симметрии точек  $C_2$  и  $C'$ . Точки  $A', B'$  при-

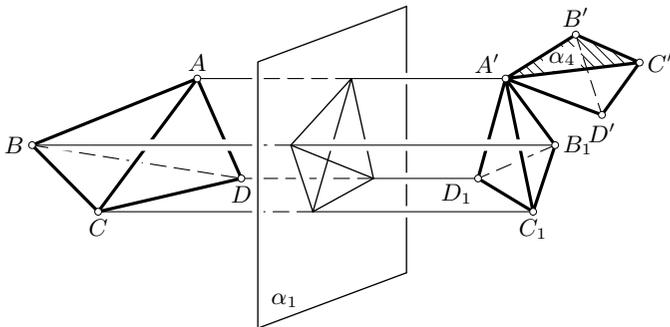


Рис. 148

надлежат  $\alpha_3$ , поскольку каждая из них равноудалена от точек  $C_2$  и  $C'$ . Симметрия  $S_{\alpha_3}$  отображает тетраэдр  $A'B'C_2D_2$  на некоторый тетраэдр  $A'B'C'D_3$ . Плоскость  $\alpha_4$  симметрии точек  $D_3$  и  $D'$  содержит точки  $A', B', C'$ , так как каждая из них равноудалена от  $D_3$  и  $D'$ , и поэтому зеркальная симметрия  $S_{\alpha_4}$  отображает тетраэдр  $A'B'C'D_3$  на заданный тетраэдр  $A'B'C'D'$ . Итак, композиция  $f = S_{\alpha_4} \circ S_{\alpha_3} \circ S_{\alpha_2} \circ S_{\alpha_1}$  есть искомое движение пространства. В частности, может случиться, что одна из вершин промежуточных тетраэдров совпадет с соответствующей вершиной тетраэдра  $A'B'C'D'$ . Тогда число симметрий композиции  $f$  уменьшится на единицу. Если же заданные тетраэдры симметричны относительно некоторой плоскости  $\alpha$ , то  $f = S_\alpha$ .

Докажем теперь *единственность* найденного движения  $f$ . Пусть, кроме  $f$ , существует движение  $g$ , которое также точки  $A, B, C, D$  отображает соответственно на точки  $A', B', C', D'$ . Тогда композиция  $g^{-1} \circ f$  оставляет неподвижными точки  $A, B, C, D$  и согласно теореме 3 пункта 2.2 будет тождественным преобразованием:  $g^{-1} \circ f = E$ , откуда следует  $g = f$ .  $\square$

Рассмотрим один из возможных способов построения образа  $M_1$  данной точки  $M$  при движении  $f$ , заданном четырьмя парами соответственных точек:  $A \rightarrow A_1, B \rightarrow B_1, C \rightarrow C_1, D \rightarrow D_1$ . Пусть  $(DM) \cap (ABC) = K$  и  $(AK) \cap (BC) = P$ . Используя равенство соответственных отрезков, строим последовательно точки  $f(P) = P_1 \in (B_1C_1)$ ,  $f(K) = K_1 \in (A_1P_1)$  и  $f(M) = M_1 \in (D_1K_1)$ .

**5.2. Следствия.** Доказательство теоремы о задании движения пространства замечательно тем, что оно позволяет попутно сделать много других выводов, важных для теории движений пространства.

1. Любое движение пространства есть либо зеркальная симметрия, либо композиция не более четырех зеркальных симметрий.

2. Любое движение *первого рода* есть композиция двух или четырех зеркальных симметрий.

3. Любое движение *второго рода* есть либо зеркальная симметрия, либо композиция трех зеркальных симметрий.

4. Движение первого рода, имеющее хотя бы одну неподвижную точку, представимо композицией двух зеркальных симметрий. Это, как уже известно (п. 3.3), — поворот или тождественное преобразование (когда плоскости симметрий совпадают). Этот факт известен под названием *теоремы Даламбера*.

5. Существуют ровно два движения пространства — одно первого рода, другое второго рода, — каждое из которых отображает данный неравносторонний треугольник  $ABC$  на равный ему наперед заданный треугольник  $A'B'C'$ .

В самом деле, выбрав произвольно точку  $D$  вне плоскости  $ABC$ , построим два и только два тетраэдра  $A'B'C'D$  и  $A'B'C'D_1$  (симметричных относительно плоскости  $A'B'C'$ ), каждый из которых равен тетраэдру  $ABCD$ .

6. Если нетождественное движение имеет три неколлинеарные неподвижные точки, то оно является зеркальной симметрией.

## §6. Классификация движений пространства

Выше рассмотрены следующие частные виды движений первого рода: перенос, поворот около оси (в частности, осевая симметрия), винтовое движение и частные виды движений второго рода: зеркальная симметрия, переносная симметрия, поворотная симметрия (ее частный случай — центральная симметрия). Естественный вопрос: существуют ли какие-либо другие виды движений пространства? Ответ отрицателен. Чтобы доказать это, разделим множество движений первого рода и множество движений второго рода каждое на два подмножества: движения, имеющие хотя бы одну неподвижную точку, и движения без неподвижных точек.

**6.1. Движения второго рода.** Эти движения нетрудно классифицировать, если отдельно рассмотреть указанные два их подмножества.

**Теорема 1.** Любое движение второго рода, имеющее хотя бы одну неподвижную точку, является зеркальной симметрией или же поворотной симметрией.

*Доказательство.* Если данное движение  $f$  — зеркальная симметрия, то доказывать нечего. Если  $f$  — композиция трех зеркальных симметрий (п. 5.2, следствие 3) и  $f(O) = O$ , то рассмотрим движение  $g = f \circ Z_O$  первого рода с неподвижной точкой  $O$ . По теореме Даламбера (следствие 4) оно является поворотом около прямой, содержащей точку  $O$ :  $g = R_l^\varphi$ . Равенство  $f \circ Z_O = R_l^\varphi$  эквивалентно  $f = R_l^\varphi \circ Z_O$ . А это — поворотная симметрия (теорема п. 4.2).  $\square$

**Теорема 2.** Любое движение второго рода, не имеющее неподвижных точек, есть переносная симметрия.

*Доказательство.* Дано движение  $f$  без неподвижных точек. Пусть  $f(A) = A_1$  и  $\alpha$  — плоскость симметрии точек  $A$  и  $A_1$ . Тогда движение  $g = f \circ S_\alpha$  первого рода имеет неподвижную точку  $A_1$ . По теореме Даламбера  $g = R_l^\varphi$  и поэтому  $f \circ S_\alpha = R_l^\varphi$ , откуда  $f = R_l^\varphi \circ S_\alpha$ , причем  $l \parallel \alpha$ , так как иначе движение  $f$  имело бы неподвижную точку  $l \cap \alpha$ , что исключено условием теоремы. Представим  $R_l^\varphi = S_\gamma \circ S_\beta$  при  $\beta \perp \alpha$  (п. 3.3). Тогда  $f = S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha$ . Поскольку  $\beta \perp \alpha$ , то  $S_\beta \circ S_\alpha = S_u$  — осевая симметрия с осью  $u = \alpha \cap \beta$ . Итак,  $f = S_\gamma \circ S_u$ , причем  $u \parallel \gamma$ , так как  $u \parallel l = \beta \cap \gamma$ . Следовательно,  $f$  — переносная симметрия (теорема п. 4.1).  $\square$

Таким образом, множество видов движений второго рода сводится к перечисленным в начале этого параграфа.

**6.2. Движения первого рода.** Как уже не раз отмечалось, движение первого рода, имеющее неподвижные точки, есть поворот.

**Теорема.** Любое движение первого рода, не имеющее неподвижных точек, является переносом или винтовым движением.

*Доказательство.* Возьмем опять пару  $A \rightarrow A_1$  соответственных точек при данном движении  $f$  и плоскость  $\omega$  их симметрии. Тогда движение  $g = S_\omega \circ f$  является движением второго рода с неподвижной точкой  $A$ . По теореме 1 движение  $g$  будет либо зеркальной симметрией, либо поворотной симметрией. Рассмотрим эти два случая.

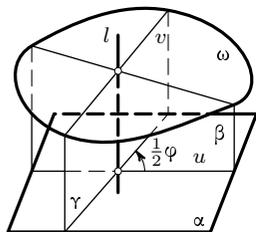


Рис. 149

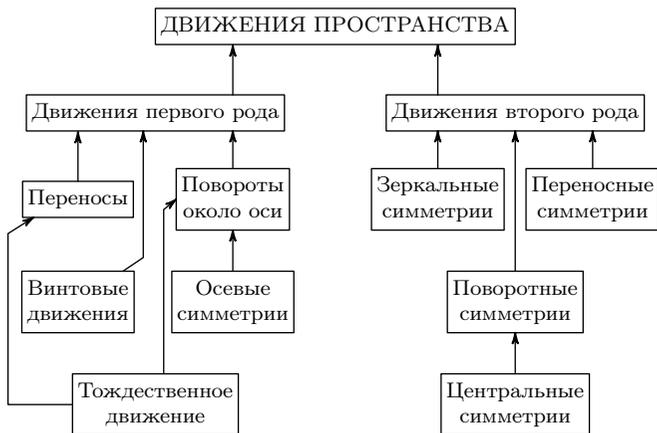
1. Пусть  $g = S_\omega \circ f = S_\alpha$ . Тогда  $f = S_\omega \circ S_\alpha$ , причем  $\alpha \parallel \omega$ , так как иначе движение  $f$  имело бы неподвижные точки. Значит,  $f$  — перенос.

2. Пусть  $g = S_\omega \circ f = R_l^\varphi \circ S_\alpha$  ( $l \perp \alpha$ ) — поворотная симметрия. Представим  $R_l^\varphi = S_\gamma \circ S_\beta$ ,  $\beta \cap \gamma = l$ . Пользуясь определенным произволом в выборе плоскостей  $\beta$  и  $\gamma$ , возьмем  $\gamma \perp \omega$ . Тогда  $S_\omega \circ f = S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha$  и  $f = S_\omega \circ S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha$ ,  $\beta \perp \alpha$  (рис. 149).

Если  $\alpha \cap \beta = u$  и  $\gamma \cap \omega = v$ , то  $f = S_v \circ S_u$ . Прямые  $u$  и  $v$  не пересекаются, так как иначе движение  $f$  имело бы неподвижной их общую точку. Тогда остаются только две возможности: если  $u \parallel v$ , то  $f$  — перенос, если же  $u$  и  $v$  скрещиваются, то  $f$  — винтовое движение (теорема п. 4.3).  $\square$

**Следствие.** *Всякое движение первого рода, отличное от осевой симметрии, представимо композицией двух осевых симметрий, причем одна из их осей может содержать наперед заданную точку.*

Результат полученной классификации движений пространства иллюстрируется такой схемой.



## §7. Координатные формулы движений пространства

**7.1. Вывод формул движений.** Даны тетраэдры  $OABC$  и  $O'A'B'C'$ , в которых все плоские углы при вершинах  $O$  и  $O'$  прямые и  $OA = O'A' = OB = O'B' = OC = O'C' = 1$ . Зададим движение  $f$  пространства парами точек  $O \rightarrow O'$ ,  $A \rightarrow A'$ ,  $B \rightarrow B'$ ,  $C \rightarrow C'$  (§5). Введем две прямоугольные декартовы системы координат  $(O\bar{i}\bar{j}\bar{k})$  и  $(O'\bar{i}'\bar{j}'\bar{k}')$ , где  $\bar{i} = \overline{OA}$ ,  $\bar{i}' = \overline{O'A'}$ ,  $\bar{j} = \overline{OB}$ ,  $\bar{j}' = \overline{O'B'}$ ,  $\bar{k} = \overline{OC}$ ,  $\bar{k}' = \overline{O'C'}$ . Пусть векторы  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$  и точка  $O'$  в системе  $(O\bar{i}\bar{j}\bar{k})$  имеют координаты:  $\bar{i}(a_1, a_2, a_3)$ ,  $\bar{j}(b_1, b_2, b_3)$ ,  $\bar{k}(c_1, c_2, c_3)$ ,  $O'(x_0, y_0, z_0)$ . Пусть произвольная точка  $M$  в системе  $(O\bar{i}\bar{j}\bar{k})$  имеет координаты  $x, y, z$  а ее образ  $M' = f(M)$  в той же системе имеет координаты  $x', y', z'$ . Требуется получить формулы, выражающие  $x', y', z'$  через  $x, y, z$ .

Сначала заметим такой очевидный факт: точка  $M'$  в системе  $(O' \bar{i}' \bar{j}' \bar{k}')$  имеет те же координаты  $x, y, z$ , что и точка  $M$  в первой системе. Ведь движение сохраняет расстояния и углы и, следовательно, скалярное произведение векторов. В частности,  $\overline{O'M'} \cdot \bar{i}' = \overline{OM} \cdot \bar{i} = x$  и аналогично  $\overline{O'M'} \cdot \bar{j}' = y, \overline{O'M'} \cdot \bar{k}' = z$ .

Представим равенство  $\overline{OM'} = \overline{OO'} + \overline{O'M'}$  в разложениях векторов по базисным векторам:

$$x' \bar{i}' + y' \bar{j}' + z' \bar{k}' = (x_0 \bar{i} + y_0 \bar{j} + z_0 \bar{k}) + (x \bar{i}' + y \bar{j}' + z \bar{k}').$$

Так как  $\bar{i}' = a_1 \bar{i} + a_2 \bar{j} + a_3 \bar{k}, \bar{j}' = b_1 \bar{i} + b_2 \bar{j} + b_3 \bar{k}, \bar{k}' = c_1 \bar{i} + c_2 \bar{j} + c_3 \bar{k}$ , то предыдущее векторное равенство дает три координатных:

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z + x_0, \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z + y_0, \\ z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z + z_0, \end{cases} \quad (10.1)$$

представляющие собой искомые формулы движения  $f$ .

Смешанное произведение векторов  $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$  равно  $+1$  или  $-1$  (ориентированный объем единичного куба) в зависимости от ориентации тройки  $(\bar{i}' \bar{j}' \bar{k}')$ . Поэтому

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \pm 1 \quad (10.2)$$

соответственно первому или второму роду движения.

## 7.2. Матрица движения

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},$$

кроме свойства (10.2), обладает и другими замечательными свойствами.

1. Так как  $|\bar{i}'| = |\bar{j}'| = |\bar{k}'| = 1$  и  $\bar{i}' \bar{j}' = \bar{i}' \bar{k}' = \bar{j}' \bar{k}' = 0$ , то имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 1, & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 &= 0, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 &= 1, & a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 &= 0, \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= 1, & b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 &= 0. \end{aligned} \quad (10.3)$$

2. Заметим, что  $a_1 = \bar{i} \bar{i}', b_1 = \bar{i} \bar{j}', c_1 = \bar{i} \bar{k}'$ . Эти равенства говорят о том, что числа  $a_1, b_1, c_1$  служат координатами вектора  $\bar{i}$  в базисе  $(\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}')$ :  $\bar{i}(a_1, b_1, c_1)$ . Аналогично  $\bar{j}(a_2, b_2, c_2), \bar{k}(a_3, b_3, c_3)$ . Поскольку

$|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$  и  $\bar{i}\bar{j} = \bar{i}\bar{k} = \bar{j}\bar{k} = 0$ , то имеем:

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= 1, & a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 &= 0, \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 &= 1, & \text{и } a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 &= 0, \\ a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 &= 1 & a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 &= 0. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Матрицы, обладающие свойствами (10.3) и (10.4), называются *ортогональными матрицами*.

3. Ортогональные матрицы обладают еще одним замечательным свойством: *матрица, полученная транспонированием ортогональной матрицы, является ее обратной матрицей*:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

что легко видеть с помощью равенств (10.3).

Итак, движения пространства записываются линейными формулами (10.1) с определителем  $\Delta = \pm 1$  и ортогональной матрицей коэффициентов при  $x, y, z$ .

Свойство (10.2) может быть положено в основу определения рода движения.

Обратно, если в прямоугольных декартовых координатах задано преобразование пространства формулами (10.1), в которых матрица коэффициентов является ортогональной, то это преобразование есть движение.

Действительно, пусть при преобразовании (10.1) точки  $A(x_1, y_1, z_1)$  и  $B(x_2, y_2, z_2)$  отображаются в точки  $A'(x'_1, y'_1, z'_1)$  и  $B'(x'_2, y'_2, z'_2)$ . Тогда

$$\begin{aligned} A'B'^2 &= (x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (z'_1 - z'_2)^2 = \\ &= (a_1(x_1 - x_2) + b_1(y_1 - y_2) + c_1(z_1 - z_2))^2 + \\ &\quad + (a_2(x_1 - x_2) + b_2(y_1 - y_2) + c_2(z_1 - z_2))^2 + \\ &\quad + (a_3(x_1 - x_2) + b_3(y_1 - y_2) + c_3(z_1 - z_2))^2 = \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(x_1 - x_2)^2 + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)(y_1 - y_2)^2 + \\ &\quad + (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)(z_1 - z_2)^2 + \\ &\quad + 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + \\ &\quad + 2(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)(x_1 - x_2)(z_1 - z_2) + \\ &\quad + 2(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)(y_1 - y_2)(z_1 - z_2). \end{aligned}$$

Так как по условию матрица коэффициентов преобразования (10.1) ортогональна, то выполняются равенства (10.3). Поэтому полученное вы-

ражение равно  $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = AB^2$ . Следовательно,  $A'B' = AB$  для любой пары  $(A, B)$  точек пространства, т. е. заданное преобразование (10.1) — движение.

Таким образом, движения и только движения пространства имеют в декартовых координатах формулы (10.1), матрица коэффициентов которых ортогональна.

**7.3. Формулы обратного движения.** Пользуясь свойством 3 ортогональных матриц, легко получить формулы обратного движения  $f^{-1}$ :

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + a_2y + a_3z + a_0, \\ y' &= b_1x + b_2y + b_3z + b_0, \\ z' &= c_1x + c_2y + c_3z + c_0. \end{aligned}$$

Так как при  $f^{-1}$  точка  $O'(x_0, y_0, z_0)$  переходит в точку  $O(0, 0, 0)$ , то

$$\begin{aligned} a_0 &= -(a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0), \\ b_0 &= -(b_1x_0 + b_2y_0 + b_3z_0), \\ c_0 &= -(c_1x_0 + c_2y_0 + c_3z_0). \end{aligned}$$

Поэтому формулы обратного движения  $f^{-1}$  для движения  $f$  с формулами (10.1) принимают вид:

$$\begin{aligned} x' &= a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0) + a_3(z - z_0), \\ y' &= b_1(x - x_0) + b_2(y - y_0) + b_3(z - z_0), \\ z' &= c_1(x - x_0) + c_2(y - y_0) + c_3(z - z_0). \end{aligned} \tag{10.5}$$

**7.4. О критериях частных видов движений.** В каждом конкретном случае формулами (10.1) задается один из существующих частных видов движений пространства. Его можно определить, найдя род движения (по определителю  $\Delta$ ) и множество неподвижных точек:

Движения I рода	Множество неподвижных точек	Движения II рода	Множество неподвижных точек
1. Перенос	$\emptyset$	1. Зеркальная симметрия	плоскость
2. Поворот	прямая	2. Переносная симметрия	$\emptyset$
3. Винтовое движение	$\emptyset$	3. Поворотная симметрия	одна точка
4. Тожественное движение	пространство		

Видим, что род и множество неподвижных точек одинаковы лишь для переноса и винтового движения. Однако перенос в любой системе координат имеет формулы:

$$x' = x + x_0, \quad y' = y + y_0, \quad z' = z + z_0 \quad (10.6)$$

и поэтому сразу выделяется.

Для неподвижной точки  $x' = x$ ,  $y' = y$ ,  $z' = z$ . Формулы (10.1) приводят к системе:

$$\begin{cases} (a_1 - 1)x + b_1y + c_1z = -x_0, \\ a_2x + (b_2 - 1)y + c_2z = -y_0, \\ a_3x + b_3y + (c_3 - 1)z = -z_0, \end{cases} \quad (10.7)$$

из которой и находится множество неподвижных точек движения в каждом конкретном случае.

**7.5. Формулы частных видов движений при специальном выборе прямоугольной декартовой системы координат.** Если удобно выбрать систему координат относительно объектов, характеризующих то или иное движение пространства, то формулы этого движения значительно упрощаются.

Независимо от выбора системы координат *перенос* имеет простые формулы (10.6).

*Центральная симметрия* относительно точки  $S(x_0, y_0, z_0)$  имеет формулы:

$$x' = -x + 2x_0, \quad y' = -y + 2y_0, \quad z' = -z + 2z_0. \quad (10.8)$$

Если плоскость  $Oxy$  системы координат совместить с плоскостью *зеркальной симметрии*, то получаем формулы:

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = -z. \quad (10.9)$$

Формулы *переносной симметрии* с той же плоскостью  $Oxy$  и вектором  $\vec{r}(\alpha, \beta, 0)$  имеют вид:

$$x' = x + \alpha, \quad y' = y + \beta, \quad z' = -z. \quad (10.10)$$

Формулы *поворота* около оси  $Oz$  на угол  $\varphi$  таковы:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi - y \sin \varphi, \\ y' &= x \sin \varphi + y \cos \varphi, \\ z' &= z. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Поворотная симметрия с осью  $Oz$ , плоскостью  $Oxy$  и углом  $\varphi$ :

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \varphi - y \sin \varphi, \\y' &= x \sin \varphi + y \cos \varphi, \\z' &= -z.\end{aligned}\tag{10.12}$$

Винтовое движение с осью  $Oz$ , углом  $\varphi$  и вектором  $\bar{r}(0, 0, \gamma)$ :

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \varphi - y \sin \varphi, \\y' &= x \sin \varphi + y \cos \varphi, \\z' &= z + \gamma.\end{aligned}\tag{10.13}$$

Осевая симметрия с осью  $Ox$ :

$$x' = x, \quad y' = -y, \quad z' = -z.\tag{10.14}$$

## §8. Композиции движений пространства

**8.1. Композиция поворота и переноса.** Найдем композицию поворота  $R_l^{\varphi}$  и переноса  $T_{\bar{r}}$  при  $\bar{r} \nparallel l$ . С этой целью представим оба эти движения композициями осевых симметрий:

$$R_l^{\varphi} = S_b \circ S_a, \quad \text{где } a \perp l, \quad b \perp l, \quad (\widehat{a, b}) = \frac{1}{2}\varphi, \quad a \cap b \cap l = O$$

и  $T_{\bar{r}} = S_v \circ S_u$ ,  $u \parallel l$ ,  $u \perp \bar{r}$ . Пользуясь имеющимся произволом в выборе осей симметрии, можно совместить оси  $u$  и  $b$  (рис. 150). Тогда  $T_{\bar{r}} \circ R_l^{\varphi} = S_v \circ S_u \circ S_u \circ S_a = S_v \circ S_a$ . Если вектор  $\bar{r}$  не ортогонален оси  $l$  поворота, то прямые  $a$  и  $v$  скрещиваются и угол между ними равен

углу между  $a$  и  $b$ , т.е. равен  $\frac{1}{2}\varphi$ . Композиция  $S_v \circ S_a$  есть винтовое движение с осью  $m$ , являющейся общим перпендикуляром прямых  $a$  и  $v$ , и вектором  $2PQ$ , где  $P = a \cap m$ ,  $Q = v \cap m$ ,  $m \parallel l$ . Итак,

$$T_{\bar{r}} \circ R_l^{\varphi} = T_{PQ} \circ R_m^{\varphi}, \quad m \parallel l.$$

В случае, когда  $\bar{r} \perp l$ , прямые  $a$  и  $v$  пересекаются, тогда  $PQ = \bar{0}$  и искомая композиция является поворотом  $R_m^{\varphi}$ . Если, кроме того,  $\varphi = \pi$ , то имеем:  $T_{\bar{r}} \circ S_l = S_m$ ,  $\bar{r} \perp l$ ,  $m \parallel l$ .

**8.2. Композиция зеркальной и осевой симметрий.** Пусть даны  $S_{\alpha}$  и  $S_l$  при  $l \nparallel \alpha$ . Представим  $S_l = S_{\gamma} \circ S_{\beta}$ , где  $\gamma \perp \alpha$ ,  $\beta \perp \gamma$  (рис. 151). Тогда  $S_l \circ S_{\alpha} = S_{\gamma} \circ (S_{\beta} \circ S_{\alpha}) = S_{\gamma} \circ R_u^{\varphi}$ , где  $u = \alpha \cap \beta$ ,  $u \perp \gamma$ ,  $u \perp l$ ,  $\varphi = 2(\widehat{\alpha, \beta}) = 2(\widehat{\alpha, l})$ .

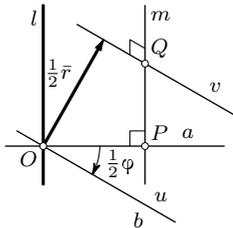


Рис. 150

Композиция  $S_\gamma \circ R_u^\varphi$  при  $u \perp \gamma$  есть *поворотная симметрия*. Когда  $l \perp \alpha$ , то  $S_l \circ S_\alpha = Z_O$ ,  $O = l \cap \alpha$ .

**8.3. Композиция двух поворотов.** Сначала найдем композицию  $R_b^\beta \circ R_a^\alpha$  двух поворотов, оси  $a$  и  $b$  которых *скрещиваются*. Построим общий перпендикуляр  $h$  прямых  $a$  и  $b$  и представим заданные повороты композициями осевых симметрий:

$$R_a^\alpha = S_h \circ S_u, \quad R_b^\beta = S_v \circ S_h, \quad u \perp a, \quad v \perp b,$$

$$u \cap h \cap a = A, \quad v \cap h \cap b = B, \quad (\widehat{u, h}) = \frac{\alpha}{2}, \quad (\widehat{h, v}) = \frac{\beta}{2}$$

(рис. 152). Тогда  $R_b^\beta \circ R_a^\alpha = S_v \circ S_h \circ S_h \circ S_u = S_v \circ S_u$ . Прямые  $u$  и  $v$  скрещиваются: если бы они принадлежали плоскости, то прямые  $a$  и  $b$ , перпендикулярные этой плоскости, были бы параллельны. На основании

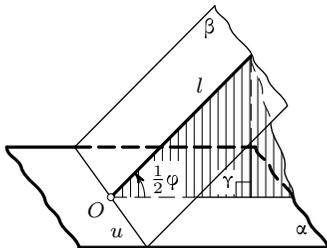


Рис. 151

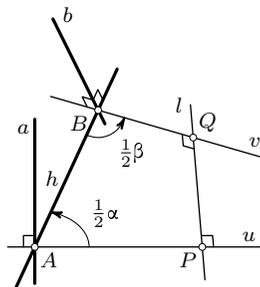


Рис. 152

теоремы п. 4.3 искомая композиция поворотов является *винтовым движением*, осью которого служит общий перпендикуляр  $l$  прямых  $u$  и  $v$ , угол  $\omega = 2(\widehat{u, v})$ , а вектор  $\vec{r} = 2\vec{PQ}$ , где  $P = u \cap l$ ,  $Q = v \cap l$ . Угол  $\omega$  может быть вычислен через углы  $\alpha$  и  $\beta$  данных поворотов и угол  $\gamma$  между осями  $a$  и  $b$ .

Если прямые  $a$  и  $b$  *пересекаются*, то прямые  $u$  и  $v$  будут пересекаться в той же точке. Тогда искомая композиция  $R_b^\beta \circ R_a^\alpha$  есть *поворот*  $R_l^\omega$ , ось  $l$  которого проходит через точку  $O = a \cap b = u \cap v$  перпендикулярно прямым  $u, v$ .

При  $a \parallel b$  и  $\alpha \neq \beta$  прямые  $u$  и  $v$  пересекаются в точке  $O$ . Композиция  $R_b^\beta \circ R_a^\alpha$  есть *поворот*  $R_l^{\alpha+\beta}$ , ось  $l$  которого проходит через точку  $O$  параллельно прямым  $a$  и  $b$ .

Наконец, при  $a \parallel b$  и  $\alpha = \beta$  или  $\alpha + \beta = 2\pi$  будет  $u \parallel v$ . В этом случае композиция поворотов является *переносом*.

**8.4. Композиция трех зеркальных симметрий.** Выделим сначала особый случай, когда композиция трех зеркальных симметрий является

зеркальной симметрией:  $S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha = S_\omega$ . Это равенство эквивалентно  $S_\beta \circ S_\alpha = S_\gamma \circ S_\omega$ . Если плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  имеют общую прямую  $l$ , то  $S_\beta \circ S_\alpha = R_l^\varphi$  и поэтому  $S_\gamma \circ S_\omega = R_l^\varphi$ . Следовательно, все четыре плоскости имеют общую прямую  $l$ . Если же  $\alpha \parallel \beta$ , то  $S_\beta \circ S_\alpha = T_{\vec{r}}$  и поэтому  $S_\gamma \circ S_\omega = T_{\vec{r}}$ . Следовательно, все четыре плоскости симметрии параллельны.

Истинно обратное утверждение: *если плоскости трех зеркальных симметрий пересекаются по одной прямой или параллельны, то композиция этих зеркальных симметрий является зеркальной симметрией, плоскость которой соответственно содержит прямую их пересечения или им параллельна*. Доказательство незатруднительно.

Пусть плоскости  $\alpha, \beta, \gamma$  симметрий имеют единственную общую точку  $O$ . Тогда она является единственной неподвижной точкой композиции этих симметрий. Предположение

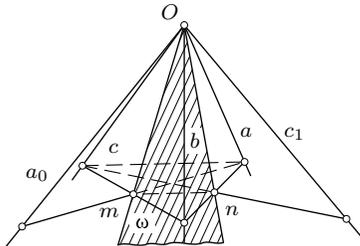


Рис. 153

о существовании другой неподвижной точки приводит к предыдущему случаю взаимного расположения плоскостей  $\alpha, \beta, \gamma$  (п. 7.4). Следовательно, композиция  $f = S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha$  есть *поворотная симметрия*. Найдем ее плоскость, ось и угол поворота. Пусть  $\beta \cap \gamma = a, \gamma \cap \alpha = b, \alpha \cap \beta = c$  (рис. 153). Если  $f(c) = c_1$ , то прямые  $c$  и  $c_1$  симметричны относительно  $\gamma$ . Пусть  $S_\alpha(a) = a_0$ , тогда  $f(a_0) = a$ . Так как искомая плос-

кость  $\omega$  поворотной симметрии  $f$  делит пополам каждый из отрезков, соединяющих соответственные точки, то ей принадлежат ортогональные проекции  $m$  и  $n$  прямых  $a$  и  $c$  соответственно на плоскости  $\alpha$  и  $\gamma$ . Итак,  $\omega = (m, n)$ . Ось  $l$  поворота есть перпендикуляр к  $\omega$  в точке  $O$ . Угол  $\varphi$  поворота равен углу между ортогональными проекциями прямых  $a_0$  и  $a$  (или  $c$  и  $c_1$ ) на плоскость  $\omega$ .

Если плоскости  $\alpha, \beta, \gamma$  попарно перпендикулярны, то  $f = Z_O$ .

Иначе эту задачу можно решить сведением к задаче п. 8.2 путем замены пары плоскостей  $\beta$  и  $\gamma$ .

Рассмотрим еще случай, когда плоскости  $\alpha, \beta, \gamma$  данных симметрий попарно пересекаются по трем параллельным прямым:  $a \parallel b \parallel c$ . Тогда в каждой плоскости  $\sigma$ , перпендикулярной этим прямым, композиция  $f = S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha$  индуцирует композицию осевых симметрий относительно прямых пересечения  $\sigma$  с  $\alpha, \beta, \gamma$ . А она является переносной симметрией плоскости  $\sigma$  с определенной осью  $l$  и вектором  $\vec{r}$ . Поэтому композиция  $f$  есть переносная симметрия пространства с вектором  $\vec{r}$  и плоскостью,

проходящей через прямую  $l$  параллельно прямым  $a, b, c$  (перпендикулярно  $\sigma$ ).

**8.5. Композиция симметрий относительно трех попарно скрещивающихся прямых.** Пусть требуется найти движение  $f = S_c \circ S_b \circ S_a$ , где прямые  $a, b, c$  попарно скрещиваются. Композиция  $S_b \circ S_a$  есть винтовое движение (п. 4.3), осью которого служит общий перпендикуляр  $h$  прямых  $a$  и  $b$ , а вектор  $\vec{r} = 2\overline{AB}$ , где  $A = a \cap h, B = b \cap h$  (рис. 154). Пару прямых  $a$  и  $b$  можно заменить любой другой парой скрещивающихся прямых  $a_1$  и  $b_1$  с тем же общим перпендикуляром  $h$ , сохраняя угол между прямыми  $a$  и  $b$  и кратчайшее расстояние ( $\overline{A_1B_1} = \overline{AB}$ ). Существует пара  $(a_1, b_1)$  такая, что  $b_1 \perp c, b_1 \cap c = O$  и  $S_b \circ S_a = S_{b_1} \circ S_{a_1}$ . Тогда искомая композиция  $f$  заменяется равноценной  $f = S_c \circ S_{b_1} \circ S_{a_1}$ . Поскольку  $S_c \circ S_{b_1} = S_l$ , где  $l$  — перпендикуляр к прямым  $b_1$  и  $c$  в их общей точке  $O$ , то  $f = S_l \circ S_{a_1}$ .

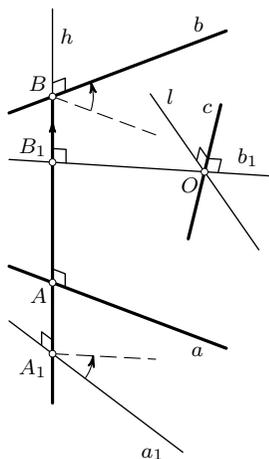


Рис. 154

Рассмотрим возможные случаи.

1. Если прямые  $a_1$  и  $l$  скрещиваются, то  $f$  — винтовое движение, определяемое осями  $a_1$  и  $l$ , которые строятся указанным способом. В частности, если данные прямые  $a, b, c$  параллельны одной плоскости, то  $l \parallel h$  и поэтому ось винтового движения  $f$  параллельна этой плоскости.

2. Если  $a_1$  и  $l$  пересекаются, то  $f$  — поворот.

3. В случае, когда скрещивающиеся прямые  $a, b, c$  попарно перпендикулярны, то  $l \parallel a_1$  и тогда  $f$  — перенос.

## §9. Группы самосовмещений правильного тетраэдра и куба

**9.1. Группа самосовмещений правильного тетраэдра.** Напомним определения. Движение, отображающее некоторую фигуру на себя, если такое существует, называется *самосовмещением* этой фигуры. Множество преобразований, содержащее для каждого преобразования обратное ему и композицию любых двух преобразований из данного множества, называется *группой преобразований*. Во всякой группе преобразований содержится тождественное.

Очевидно, множество всех самосовмещений фигуры является группой. Доказано, что любой правильный многогранник обладает группой самосовмещений, в которой число движений равно учетверенному числу ребер этого многогранника. Каждое из этих движений имеет хотя бы одну неподвижную точку, так как отображает на себя сферу, описанную около многогранника, и потому необходимо отображает на себя ее центр.

Рассмотрим подробнее группу самосовмещений правильного тетраэдра. Она содержит  $4 \cdot 6 = 24$  движения. В нее входят шесть зеркальных симметрий относительно плоскостей, каждая из которых содержит ребро правильного тетраэдра и середину противоположного ребра. Прямая, определяемая серединами двух противоположных ребер (бимедиана), перпендикулярна этим ребрам. Поэтому симметрия относительно нее отображает правильный тетраэдр на себя. Следовательно, группа включает в себя три осевые симметрии относительно трех бимедиан. Очевидно, самосовмещениями правильного тетраэдра будут восемь поворотов на  $\pm 120^\circ$  около его высот.

Далее обратим внимание на плоскость  $\alpha$ , содержащую середины четырех ребер тетраэдра, образующих неплоский (косой) четырехугольник. Из шести ребер тетраэдра исключается какая-либо пара противоположных ребер. Для наглядности опишем около правильного тетраэдра  $ABCD$  куб (рис. 155): через каждые два противоположных ребра проведем пару параллельных плоскостей. Прямая  $l$ , проходящая через середины двух ребер тетраэдра, которые не содержат стороны рассматриваемого косоугольного четырехугольника, перпендикулярна плоскости  $\alpha$ . Если плоскость  $\alpha$  содержит середины ребер  $AB, BC, CD, DA$ , то прямая  $l$  содержит середины ребер  $AC$  и  $BD$ . Композиция

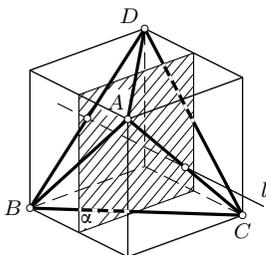


Рис. 155

$R_l^{\pm 90^\circ} \circ S_\alpha$  (поворотная симметрия) является самосовмещением правильного тетраэдра  $ABCD$ :  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ . Всего в группе имеется шесть поворотных симметрий.

Итак, обнаружены все 24 самосовмещения правильного тетраэдра: шесть зеркальных симметрий, три осевые симметрии, восемь поворотов, шесть поворотных симметрий и тождественное движение. Можно убедиться в том, что композиция любых двух движений из этого множества является движением из этого же множества. Это легко сделать, если с каждым из 24 самосовмещений правильного тетраэдра сопоставить (однозначно) *подстановку* его вершин:

— зеркальной симметрии относительно плоскости, проходящей через ребро  $AB$  и середину ребра  $CD$ , соответствует подстановка

$$\begin{pmatrix} ABCD \\ ABDC \end{pmatrix},$$

— осевой симметрии относительно бимедианы, содержащей середины ребер  $AB$  и  $CD$ , отвечает подстановка

$$\begin{pmatrix} ABCD \\ BADC \end{pmatrix},$$

— поворот на  $120^\circ$  около высоты, опущенной из вершины  $A$ , имеет подстановку

$$\begin{pmatrix} ABCD \\ ACDB \end{pmatrix},$$

— поворотная симметрия с плоскостью  $\alpha$ , осью  $l$  и углом  $90^\circ$  (рис. 155) представляется подстановкой

$$\begin{pmatrix} ABCD \\ BCDA \end{pmatrix}.$$

Композиции самосовмещений правильного тетраэдра ставится в соответствие произведение соответствующих подстановок. Например,

$$\begin{pmatrix} ABCD \\ ACDB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ABCD \\ BADC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ABCD \\ BCDA \end{pmatrix},$$

т. е. композиция поворота на  $120^\circ$  около высоты, содержащей вершину  $A$ , и зеркальной симметрии относительно плоскости симметрии точек  $A$  и  $B$  есть поворотная симметрия с плоскостью  $\alpha$ , ось  $l$  и углом  $120^\circ$  (рис. 155).

Говорят, что группа самосовмещений правильного тетраэдра изоморфна группе подстановок из четырех элементов. Каждой подстановке при канонической ее записи первой строки соответствует перестановка букв во второй строке. А число перестановок из четырех элементов как раз и равно  $4! = 24$ .

**9.2. Группа самосовмещений куба.** Перечислим движения пространства, образующие группу самосовмещений куба:

1) центральная симметрия относительно точки  $O$  пересечения диагоналей куба;

2) девять зеркальных симметрий, плоскости шести из которых являются диагональными плоскостями куба, а три другие проходят через центр  $O$  куба параллельно его граням;

3) девять осевых симметрий, оси  $l_i$  трех из которых проходят через центр  $O$  параллельно ребрам куба, а каждая из шести других содержит середины двух противоположных (симметричных относительно  $O$ ) ребер куба;

4) шесть поворотов около трех прямых  $l_i$  на  $\pm 90^\circ$ ;

5) восемь поворотов около четырех диагоналей куба на  $\pm 120^\circ$ ; например, диагональ  $AC_1$  перпендикулярна плоскостям  $A_1BD$  и  $B_1CD_1$ , пересекает их в центрах правильных треугольников  $A_1BD$  и  $B_1CD_1$  (рис. 156) (вид куба в направлении диагонали  $AC_1$  изображен на рис. 157);

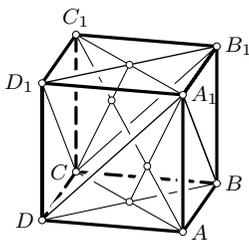


Рис. 156

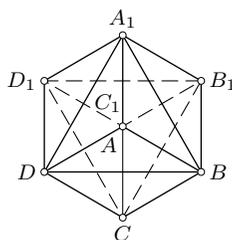


Рис. 157

6) шесть поворотных симметрий  $R_l^{\pm 90^\circ} \circ S_\alpha$ : плоскость  $\alpha$  проходит через центр  $O$  параллельно двум противоположным граням куба, а ось  $l \perp \alpha$ ,  $O \in l$ ;

7) восемь поворотных симметрий  $R_t^{\pm 60^\circ} \circ S_\beta$ : плоскость  $\beta$  проходит через центр  $O$  перпендикулярно диагонали  $t$  куба (сечением куба плоскостью  $\beta$  является правильный шестиугольник с вершинами в серединах шести ребер куба);

8) тождественное движение.

Итак, группа самосовмещений куба состоит из 48 перечисленных движений, что как раз вчетверо больше числа ребер куба.

## §10. Решение задач с использованием движений пространства

Как и в планиметрии, метод геометрических преобразований оказывается весьма эффективным в стереометрических задачах. Рассмотрим для примера решения нескольких задач.

**Задача 1.** Через середину каждого ребра тетраэдра проведена плоскость, перпендикулярная противоположному ребру. Докажите, что

шесть полученных плоскостей имеют общую точку. (Она называется *точкой Монжа* тетраэдра.)

**Решение.** Середины противоположных ребер тетраэдра симметричны относительно его центроида  $G$ . Шесть плоскостей, каждая из которых проходит через середину ребра перпендикулярно *этому* ребру, пересекаются в центре  $O$  описанной около тетраэдра сферы. Плоскость первой шестерки и плоскость второй шестерки, перпендикулярные одному ребру, параллельны и содержат точки, симметричные относительно центроида  $G$ . Поэтому эти плоскости симметричны относительно  $G$ . Следовательно, шесть плоскостей, указанных в условии задачи, пересекаются в одной точке, симметричной точке  $O$  относительно центроида  $G$  тетраэдра.

**Задача 2.** Дан тетраэдр  $T$ . Рассматриваются четыре тетраэдра  $T_i$ , в каждом из которых одна вершина совпадает с вершиной данного тетраэдра, а три остальные являются серединами трех ребер тетраэдра  $T$ , сходящихся в этой вершине. Точки  $O_1, O_2, O_3, O_4$  — центры сфер, описанных около четырех тетраэдров  $T_i$ , а  $J_1, J_2, J_3, J_4$  — центры вписанных в них сфер. Докажите, что тетраэдры  $O_1O_2O_3O_4$  и  $J_1J_2J_3J_4$  равны.

**Решение.** Тетраэдры  $T_i$ , равны, так как каждый из них отображается на другой очевидным переносом. Тогда векторы  $\overline{O_iJ_i}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) равны как соответственные при этих переносах. Поэтому тетраэдр  $O_1O_2O_3O_4$  отображается на тетраэдр  $J_1J_2J_3J_4$  переносом  $T_{\vec{r}}$ ,  $\vec{r} = \overline{O_iJ_i}$ , и следовательно, эти тетраэдры равны.

**Задача 3.** Плоскость, содержащая середины двух скрещивающихся ребер правильного тетраэдра, делит его на две равные части. Докажите.

**Решение.** Прямая  $l$ , проходящая через середины двух скрещивающихся ребер правильного тетраэдра, является осью его симметрии. Плоскостью, содержащей прямую  $l$ , правильный тетраэдр разбивается на две части, симметричные относительно прямой  $l$ . Поэтому они равны.

**Задача 4.** В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$  точки  $A_1, B_1, C_1, D_1$  — середины ребер  $SA, SB, SC, SD$  соответственно. Докажите, что прямые  $AC_1, BD_1, CA_1, DB_1$  пересекаются в одной точке.

**Решение.** Прямые  $AC_1$  и  $CA_1$  лежат в диагональной плоскости пирамиды и поэтому пересекаются (рис. 158). Точка  $P$  их пересечения лежит на высоте  $SO$

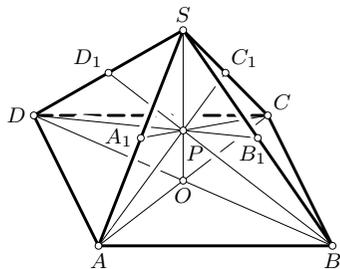


Рис. 158

пирамиды, так как в плоскости  $ASC$  прямые  $AC_1$  и  $CA_1$  симметричны относительно  $SO$ . При повороте около  $SO$  на  $90^\circ$  ( $AC_1$ )  $\rightarrow$  ( $BD_1$ ) и ( $CA_1$ )  $\rightarrow$  ( $DB_1$ ), так как  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$  и  $S \rightarrow S$ , поэтому и  $A_1 \rightarrow B_1 \rightarrow C_1 \rightarrow D_1 \rightarrow A_1$ . Точка  $P = (AC_1) \cap (CA_1)$  отображается на точку  $(BD_1) \cap (DB_1)$ . Поскольку точка  $P$  лежит на оси поворота, то она неподвижна и, значит,  $(BD_1) \cap (DB_1) = P$ . Итак, все четыре прямые  $AC_1, CA_1, BD_1, DB_1$  пересекается в точке  $P, PO = \frac{1}{3}SO$ .

**Задача 5.** Тетраэдры  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$  равны и противоположно ориентированы. Докажите, что середины отрезков  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$  лежат в одной плоскости или совпадают.

**Решение.** Парамы точек  $A \rightarrow A_1, B \rightarrow B_1, C \rightarrow C_1, D \rightarrow D_1$  задается движение второго рода, которое является одним из трех движений: зеркальной симметрией, переносной симметрией или же поворотной симметрией (§ 6). Но при каждом из них любой отрезок, соединяющий соответственные точки, делится плоскостью симметрии пополам. Следовательно, середины отрезков  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$  лежат в плоскости симметрии. В частности, при симметрии  $Z_O$  эти середины совпадают с точкой  $O$ .

**Задача 6.** Даны две перпендикулярные скрещивающиеся прямые  $a$  и  $b$ . Для произвольной точки  $X$  пространства построены точки  $X_1 = S_a(X)$  и  $X_2 = S_b(X)$ . Найдите множество середин  $M$  отрезков  $X_1X_2$ .

**Решение.** Из  $X_1 = S_a(X)$  следует  $X = S_a(X_1)$ . Поэтому  $X_2 = S_b(S_a(X_1))$ . Композиция  $S_b \circ S_a$  ( $a \perp b$ ) есть винтовое движение с осью, являющейся общим перпендикуляром  $h$  прямых  $a$  и  $b$  и углом  $180^\circ$ . Отсюда видно, что середина отрезка  $X_1X_2$  принадлежит общему перпендикуляру  $h$ . Обратно, пусть  $M$  — произвольная точка прямой  $h$ . Тогда, пользуясь представлением  $T_{\vec{r}} \circ S_h$  данного винтового движения, нетрудно построить две точки  $X_1$  и  $X_2$ , соответственные при этом движении, такие, что

точка  $M$  будет серединой отрезка  $X_1X_2$  (рис. 159): прямая  $X_1X_2$  произвольна, а вектор  $\vec{r}$  переноса известен. Итак, искомым множеством точек  $M$  является общий перпендикуляр данных прямых  $a$  и  $b$ .

**Задача 7.** Докажите, что биссектрисы двух плоских углов триэдра и биссектриса угла, смежного с его третьим плоским углом, лежат в одной плоскости.

**Решение.** Пусть  $m$  и  $n$  — биссектрисы плоских углов  $aOb$  и  $bOc$  триэдра  $Oabc$ ,  $p$  — биссектриса угла  $a_1Oc$  ( $a_1$  — луч, дополнительный

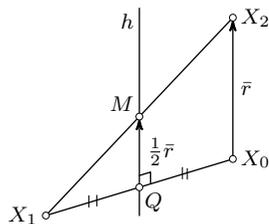


Рис. 159

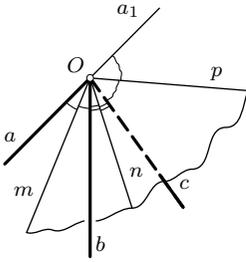


Рис. 160

к лучу  $a$ ) (рис. 160). Композиция  $S_p \circ S_n \circ S_m$  осевых симметрии есть поворот (п. 8.3), ось которого содержит вершину  $O$  триэдра. Эта композиция, очевидно, отображает луч  $a$  на луч  $a_1$  и поэтому задаваемый ею поворот является осевой симметрией  $S_l$ :

$$S_p \circ S_n \circ S_m = S_l,$$

откуда  $S_p \circ S_n = S_l \circ S_m$ . Из равенства двух полученных композиций осевых симметрии следует, что они представляют один и тот же поворот, а прямые  $m, l, n, p$  перпендикулярны его оси и поэтому лежат в одной плоскости.

**Задача 8.** Рассматривается множество всех поворотов пространства, каждый из которых отображает вершину  $A$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  на вершину  $B$ . Требуется найти множество образов точки  $C$  при этих поворотах и найти пересечение этого множества с поверхностью куба.

**Решение.** Множество осей  $l$  поворотов  $R_l^\varphi$  каждый из которых отображает точку  $A$  на точку  $B$ , совпадает с множеством прямых плоскости  $\alpha$  симметрии этих точек. Представим каждый поворот  $R_l^\varphi$  композицией  $S_\beta \circ S_\alpha$ , где  $\beta = R_l^{\frac{1}{2}\varphi}(\alpha)$ ,  $B \in \beta$ , причем из множества плоскостей  $\beta$ , проходящих через точку  $B$  исключается плоскость  $BCC_1 B_1$ . Так как  $S_\alpha(C) = D$  и  $S_\beta(D) = C'$ , то множеством образов  $C'$  точки  $C$  при рассматриваемых поворотах  $R_l^\varphi$  есть множество точек, каждая из которых симметрична точке  $D$  относительно некоторой плоскости  $\beta$ , т.е. сфера с центром  $B$  радиуса  $BD$  (без точки  $S_{BCC_1}(D)$ ). Ее пересечением с поверхностью куба являются три дуги окружностей с центрами  $A, B, C$ , радиусы которых равны ребру куба (рис. 161).

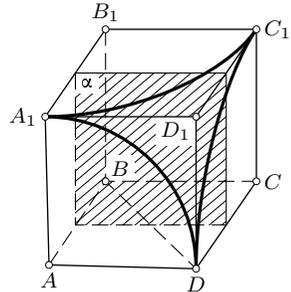


Рис. 161

## Задачи к главе 10

**10.1.** Через середину каждого из отрезков, соединяющих вершины тетраэдра с центроидами противоположные им грани, проведена плоскость параллельно соответствующей грани. Докажите, что тетраэдр, образованный пересечением этих плоскостей, равен данному тетраэдру.

**10.2.** Докажите, что плоскость, проходящая через точку пересечения диагоналей параллелепипеда, делит его на две равные части.

**10.3.** Докажите, что в правильной пятиугольной пирамиде перпендикуляры, проведенные из вершин основания на плоскости противоположащих этим вершинам боковых граней, пересекаются в одной точке.

**10.4.** Две сферы имеют общую окружность. Докажите, что линия центров этих сфер перпендикулярна плоскости этой окружности.

**10.5.** В прямой круговой конус вписана сфера. Докажите, что прямая, соединяющая вершину конуса с центром сферы, перпендикулярна плоскости окружности касания сферы и конуса.

**10.6.** Если в трехгранном угле равны два плоских угла, то равны противоположащие им двугранные углы, и обратно. Докажите.

**10.7.** Если две пересекающиеся плоскости симметричны относительно прямой  $l$ , то их линия пересечения пересекает ось  $l$  симметрии и перпендикулярна ей. Докажите.

**10.8.** Прямая  $l$  не лежит ни в одной из плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  и пересекает их линию пересечения. Постройте прямые  $a$  и  $b$ , лежащие соответственно в плоскостях  $\alpha$  и  $\beta$ , так, чтобы прямая  $l$  содержала биссектрису одного из углов между ними.

**10.9.** Постройте оси симметрии двух данных скрещивающихся прямых.

**10.10.** Найдите какой-либо поворот, отличный от осевой симметрии, который отображает одну из двух данных скрещивающихся прямых на другую.

**10.11.** Даны скрещивающиеся прямые  $a$  и  $b$  и на них соответственно точки  $A$  и  $B$ . Найдите поворот, отображающий  $a$  на  $b$  и  $A$  на  $B$ .

**10.12.** Дана ломаная  $ABCD A$ . Докажите, что если  $AB = CD$  и  $BC = DA$ , то она имеет ось симметрии. Истинно ли обратное утверждение?

**10.13.** В четырехгранном угле противоположные плоские углы равны в каждой из двух пар. Докажите, что он имеет ось симметрии.

**10.14.** Сумма двух плоских углов трехгранного угла равна  $180^\circ$ . Докажите, что биссектриса третьего плоского угла перпендикулярна общему ребру первых двух плоских углов. Докажите обратное утверждение.

**10.15.** Даны два равных отрезка, не лежащие в одной плоскости. Найдите движения пространства, каждое из которых отображает один из данных отрезков на другой.

**10.16.** Дан угол  $AOB$  и точка  $M$  вне его плоскости. Найдите на сторонах этого угла точки  $C$  и  $D$  такие, чтобы треугольник  $MCD$  имел наименьший периметр.

**10.17.** Фигура  $\Phi$  имеет две оси  $a$  и  $b$  симметрии. Докажите, что прямая  $c = S_b(a)$  также является осью симметрии фигуры  $\Phi$ .

**10.18.** Постройте правильный тетраэдр, две вершины которого лежат на данной прямой, третья вершина — на другой данной прямой, а четвертая — на данной плоскости.

**10.19.** Если тетраэдр имеет плоскость симметрии, то две его грани являются равнобедренными треугольниками, основаниями которых служит общее ребро этих граней. Докажите.

**10.20.** Даны два равных треугольника с общей вершиной, не лежащие в одной плоскости. Докажите, что один из них можно отобразить на другой некоторым поворотом около оси.

**10.21.** Даны два равных треугольника  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ , лежащих в различных плоскостях. Докажите, что если плоскости симметрии отрезков  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  имеют единственную общую точку  $O$ , то треугольник  $ABC$  отображается на треугольник  $A_1B_1C_1$  поворотной симметрией с центром  $O$ .

**10.22.** Постройте куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , ребро  $AA_1$  которого принадлежит данной прямой, а вершины  $B, D, B_1, D_1$  — данной сфере.

**10.23.** Разрежьте куб на три равные пирамиды.

**10.24.** Через данную прямую проведите плоскость, образующую с данной плоскостью угол заданной величины.

**10.25.** Через данную прямую проведите плоскость, образующую равные углы с двумя данными скрещивающимися прямыми.

**10.26.** Через каждое ребро тетраэдра проведена плоскость, параллельная отрезку, соединяющему данную точку  $S$  с серединой противоположного ребра. Докажите, что все шесть плоскостей пересекаются в одной точке.

**10.27.** Точки  $A$  и  $B$  лежат в одном полупространстве от плоскости  $\alpha$ . Найдите в плоскости  $\alpha$  такую точку  $M$ , чтобы сумма  $AM + MB$  была наименьшей.

**10.28.** Точка  $M$  лежит внутри меньшего двугранного угла между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ . Найдите в плоскостях  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно точки  $A$  и  $B$  такие, чтобы треугольник  $ABM$  имел наименьший периметр.

**10.29.** В тетраэдр  $ABCD$  вписана сфера с центром  $J$ , касающаяся грани  $ABC$  в точке  $P$ . Точки  $D_1, D_2, D_3$  симметричны точке  $D$  относительно плоскостей  $JBC, JCA, JAB$ . Докажите, что точка  $P$  есть центр окружности  $D_1 D_2 D_3$ .

**10.30.** Угол между данной прямой  $m$  и осью  $l$  поворота  $R_l^\alpha$  равен  $\varphi$ . Вычислите угол между прямой  $m$  и ее образом при этом повороте. В каком случае он равен углу поворота?

**10.31.** Прямая  $l$  наклонена к плоскости  $\gamma$  под углом  $\varphi$ . Вычислите угол между плоскостью  $\gamma$  и ее образом при повороте  $R_l^\alpha$ . В каком случае он равен углу поворота?

**10.32.** Прямая  $b$  является образом прямой  $a$  при поворотной симметрии  $R_l^\varphi \circ S_\alpha$  ( $l \perp \alpha$ ). Найдите угол между прямыми  $a$  и  $b$ , если прямая  $a$  наклонена к плоскости  $\alpha$  симметрии под углом  $\psi$ .

**10.33.** Найдите композицию

- а) двух центральных симметрий,
- б) центральной симметрии и переноса,
- в) трех центральных симметрий.

**10.34.** Найдите композицию  $Z_O \circ S_\alpha \circ S_l$ , если прямая  $l$  параллельна плоскости  $\alpha$  и точка  $O$  лежит в  $\alpha$ .

**10.35.** Найдите композицию центральных симметрий относительно последовательно взятых вершин параллелограмма.

**10.36.** Найдите композицию осевых симметрий, оси которых содержат последовательно взятые стороны параллелограмма.

**10.37.** Найдите композицию зеркальной и центральной симметрий, если плоскость первой не содержит центр второй.

**10.38.** Найдите композицию переноса  $T_{\vec{r}}$  и осевой симметрии  $S_l$  при условии, что  $\vec{r} \nparallel l$ .

**10.39.** Композиция трех осевых симметрий является осевой симметрией:  $S_c \circ S_b \circ S_a = S_l$ . Какое взаимное положение могут иметь прямые  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ? Постройте ось  $l$  этой композиции в каждом из возможных случаев.

**10.40.** Композиция трех осевых симметрий есть перенос. Каково взаимное положение их осей?

**10.41.** Если плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  являются плоскостями симметрии фигуры, то плоскость  $\gamma$ , симметричная плоскости  $\alpha$  относительно плоскости  $\beta$ , также является плоскостью симметрии этой фигуры. Докажите это утверждение. Будет ли верным аналогичное утверждение для осей симметрии фигуры? для центров симметрии?

**10.42.** Если движение не имеет неподвижных точек, но имеет три попарно параллельные неподвижные прямые, не лежащие в одной плоскости, то оно является переносом. Докажите.

**10.43.** Скрещивающиеся прямые  $a$  и  $b$  образуют с прямой  $l$  равные углы. Докажите, что существует поворот о осью  $l$ , отображающий прямую  $a$  на прямую  $a_1$ , параллельную прямой  $b$ .

**10.44.** Прямые  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  в пространстве имеют общую точку и угол между прямыми  $a$  и  $b$  равен углу между прямыми  $c$  и  $d$ . Найдите все движения пространства, каждое из которых отображает пару  $(a, b)$  на пару  $(c, d)$ .

**10.45.** В тетраэдре  $ABCD$  равны противоположные ребра в двух парах:  $AB = CD$  и  $BC = DA$ . Докажите, что его центроид, центр описанной сферы и центр вписанной сферы лежат на одной прямой.

**10.46.** Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Прямые  $AB_1, BC_1, CD_1, DA_1$  пересечены плоскостью, параллельной грани  $ABCD$ . Докажите, что точки пересечения являются вершинами квадрата.

**10.47.** Найдите композицию симметрий относительно прямых, содержащих стороны некоторого треугольника.

**10.48.** Найдите композицию симметрий относительно трех попарно параллельных прямых.

**10.49.** Найдите композицию зеркальной симметрии и переноса, вектор которого не параллелен плоскости симметрии.

**10.50.** Найдите композицию зеркальной симметрии и поворота, ось которого параллельна плоскости симметрии.

**10.51.** Найдите композицию зеркальной симметрии и поворота, ось которого не параллельна плоскости симметрии.

**10.52.** В сферу вписан параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины отрезков  $AC$  и  $CC_1$  соответственно. Докажите, что композицией симметрий с центрами  $A, M, N$  (взятых в этом порядке) данная сфера отображается на себя.

**10.53.** Если биссектрисы двух плоских углов трехгранного угла перпендикулярны, то биссектриса третьего плоского угла перпендикулярна каждой из них. Докажите.

**10.54.** Плоскости  $\alpha, \beta, \gamma$  содержат грани трехгранного угла  $OABC$ . Найдите неподвижные плоскости композиций зеркальных симметрий:

$$S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha, \quad S_\alpha \circ S_\gamma \circ S_\beta, \quad S_\beta \circ S_\alpha \circ S_\gamma.$$

**10.55.** Постройте трехгранный угол по биссектрисам трех его плоских углов.

**10.56.** Дан правильный тетраэдр  $ABCD$ . Рассматривается множество осевых симметрий пространства, каждая из которых отображает  $A$  на  $B$ . Найдите множество прямых, являющихся образами прямой  $AC$  при этих симметриях.

**10.57.** Даны три плоскости и точка  $A$ . Постройте плоскость, содержащую точку  $A$ , которая композицией трех зеркальных симметрий относительно данных плоскостей отображается на параллельную ей плоскость.

**10.58\*** Даны точки  $A$  и  $B$ . Докажите, что критерием параллельности прямой  $AB$  и прямой  $m$  является следующее равенство:

$$Z_A \circ S_m \circ Z_A = Z_B \circ S_m \circ Z_B.$$

**10.59\*** Даны точки  $A$  и  $B$ . Докажите, что критерием принадлежности середины  $M$  отрезка  $AB$  плоскости  $\alpha$  является равенство:

$$(Z_A \circ S_\alpha)^2 = (S_\alpha \circ Z_B)^2.$$

**10.60.** Куб с ребром длины  $a$  повернут около ребра на угол  $45^\circ$ . Найдите объем пересечения этого куба и его образа при этом повороте.

**10.61.** Куб с ребром длины  $a$  повернули около диагонали на  $60^\circ$ . Найдите объем пересечения куба и его образа.

**10.62.** Правильный тетраэдр, длина ребра которого равна  $a$ , повернут около ребра на угол, равный половине его двугранного угла. Найдите объем пересечения данного тетраэдра и его образа.

**10.63.** Правильный тетраэдр с ребром длины  $a$  повернут на  $90^\circ$  около общего перпендикуляра двух скрещивающихся ребер. Вычислите объем пересечения этого тетраэдра и его образа.

**10.64.** Даны три попарно перпендикулярные прямые, имеющие общую точку. Укажите все движения пространства, каждое из которых отображает на себя образованную ими фигуру.

**10.65.** Найдите группу движений пространства, каждое из которых отображает на себя данный квадрат.

**10.66.** Найдите группу самосовмещений правильного октаэдра.

В задачах 10.67–10.77 покажите, что данными формулами задано движение пространства, определите его вид и характеристические элементы:

**10.67.**

$$\begin{aligned}x' &= \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}, \\y' &= -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}, \\z' &= -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

**10.69.**

$$\begin{aligned}x' &= \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 1, \\y' &= \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 3, \\z' &= -z + 2.\end{aligned}$$

**10.71.**

$$\begin{aligned}x' &= \frac{11}{15}x + \frac{2}{15}y + \frac{10}{15}z + 7, \\y' &= \frac{2}{15}x + \frac{14}{15}y - \frac{5}{15}z + 4, \\z' &= -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + 6.\end{aligned}$$

**10.68.**

$$\begin{aligned}x' &= -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z, \\y' &= \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z, \\z' &= \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z.\end{aligned}$$

**10.70.**

$$\begin{aligned}x' &= \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 1, \\y' &= \frac{11}{15}x - \frac{10}{15}y - \frac{2}{15}z - 2, \\z' &= \frac{2}{15}x + \frac{5}{15}y - \frac{14}{15}z - 1.\end{aligned}$$

**10.72.**

$$\begin{aligned}x' &= \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 1, \\y' &= -\frac{11}{15}x + \frac{10}{15}y + \frac{2}{15}z + 2, \\z' &= \frac{2}{15}x + \frac{5}{15}y - \frac{14}{15}z + 3.\end{aligned}$$

**10.73.**

$$x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 1,$$

$$y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 2,$$

$$z' = z + 3.$$

**10.75.**

$$x' = -\frac{4}{9}x - \frac{1}{9}y - \frac{8}{9}z + 14,$$

$$y' = -\frac{7}{9}x - \frac{4}{9}y + \frac{4}{9}z + 2,$$

$$z' = \frac{4}{9}x - \frac{8}{9}y - \frac{1}{9}z - 5.$$

**10.77.**

$$x' = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - 10,$$

$$y' = -\frac{10}{15}x + \frac{11}{15}y - \frac{2}{15}z - 4,$$

$$z' = -\frac{5}{15}x - \frac{2}{15}y + \frac{14}{15}z - 2.$$

**10.78.** Найдите формулы симметрии относительно прямой  $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ .

**10.79.** Найдите формулы поворота на  $60^\circ$  около прямой  $\begin{cases} x = y, \\ z = 0. \end{cases}$

**10.80.** Найдите формулы симметрии относительно плоскости  $2x + 2y - z = 0$ .

**10.81.** Найдите формулы переносной симметрии с плоскостью  $2x - y - 5z + 15 = 0$  и вектором  $\vec{r}(4, 3, 1)$ .

**10.82.** Найдите формулы винтового движения с осью  $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-9}{1}$ , углом  $90^\circ$  и вектором  $\vec{r}(-6, -6, -3)$ .

**10.83.** Движение пространства задано формулами:

$$x' = a_1x + b_1y + c_1z + x_0,$$

$$y' = a_2x + b_2y + c_2z + y_0,$$

$$z' = a_3x + b_3y + c_3z + z_0.$$

Докажите, что образом вектора  $\vec{r}(x, y, z)$  при этом движении является вектор  $\vec{r}'(x_1, y_1, z_1)$ , для которого

$$x_1 = a_1x + b_1y + c_1z,$$

$$y_1 = a_2x + b_2y + c_2z,$$

$$z_1 = a_3x + b_3y + c_3z.$$

**10.84.** Даны векторы  $\bar{a}(8, 4, 1)$  и  $\bar{b}(6, -6, 3)$ . Найдите матрицу поворота пространства около оси, перпендикулярной этим векторам, который отображает вектор  $\bar{a}$  на вектор  $\bar{b}$ .

**10.85.** Докажите, что при симметрии относительно прямой с направляющим вектором  $\bar{p}$  образом вектора  $\bar{r}$  является вектор

$$\bar{r}' = -\bar{r} + \frac{2\bar{p}\bar{r}}{\bar{p}^2} \bar{p}.$$

**10.86.** Пусть  $\bar{n}$  — некоторый вектор, ортогональный плоскости переносной симметрии,  $\bar{r} = \overline{MM'}$  для произвольной пары  $M \rightarrow M'$  соответственных точек при этой симметрии. Докажите, что вектор  $\bar{p}$  переноса, входящего в ее состав, равен

$$\bar{p} = \bar{r} - \frac{\bar{n}\bar{r}}{\bar{n}^2} \bar{n}.$$

**10.87.** Пусть  $\bar{p}$  — некоторый направляющий вектор оси винтового движения,  $\bar{r} = \overline{MM'}$  для любой пары  $M \rightarrow M'$  соответственных точек при этом движении. Докажите, что вектор  $\bar{q}$  переноса, входящего в состав винтового движения, равен

$$\bar{q} = \frac{\bar{r}\bar{p}}{\bar{p}^2} \bar{p}.$$

**10.88.** Точка пересечения данных прямых  $a$  и  $b$  принадлежит данной плоскости  $\omega$ . Постройте плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ , содержащие соответственно эти прямые, так, чтобы они были равнонаклонены к плоскости  $\omega$  и пересекались по прямой, лежащей в  $\omega$ .

**10.89.** Постройте отрезок заданной длины, параллельный данной плоскости, с концами на двух данных скрещивающихся прямых.

## Подобия пространства

### §1. Гомотетия пространства

**1.1. Обзор теории.** На страницах 206–214 учебного пособия [8] подробно изложена гомотетия плоскости. По существу это изложение сохраняет силу и для гомотетии пространства. Именно, остаются без изменения определение гомотетии с поправкой на множество точек пространства, теорема об образе прямой, способы задания гомотетии и построения образа точки, теорема о композиции двух гомотетий. Дополнительно к этому необходима теорема об образе плоскости.

**Теорема 1.** *Плоскость, не содержащая центр гомотетии, отображается гомотетией на параллельную ей плоскость. Плоскость, содержащая центр гомотетии, отображается на себя.*

**Доказательство.** Пусть плоскость  $\alpha$  не содержит центр  $O$  гомотетии  $H_O^k$  пространства и  $A, B, C$  — три фиксированные неколлинеарные точки этой плоскости. Тогда для произвольной точки  $M$  плоскости  $\overline{AM} = x\overline{AB} + y\overline{AC}$ . Если  $A', B', C', M'$  — образы точек  $A, B, C, M$  при данной гомотетии, то  $\overline{A'M'} = k\overline{AM}$ ,  $\overline{A'B'} = k\overline{AB}$ ,  $\overline{A'C'} = k\overline{AC}$ . Поэтому  $\frac{1}{k}\overline{A'M'} = \frac{x}{k}\overline{A'B'} + \frac{y}{k}\overline{A'C'}$ , т. е.  $\overline{A'M'} = x\overline{A'B'} + y\overline{A'C'}$ . Следовательно, векторы  $\overline{A'M'}$ ,  $\overline{A'B'}$ ,  $\overline{A'C'}$  компланарны и точка  $M'$  лежит в плоскости  $A'B'C'$ . Аналогично доказывается, что прообразом любой точки плоскости  $A'B'C'$  является некоторая точка плоскости  $\alpha$ . Итак, образом данной плоскости  $\alpha$  при гомотетии является плоскость  $A'B'C'$ . Поскольку  $AB \parallel A'B'$  и  $AC \parallel A'C'$ , то эти плоскости параллельны.

Второе утверждение теоремы непосредственно следует из определения гомотетии, так как соответственные точки коллинеарны с центром  $O$  гомотетии.  $\square$

Существенным отличием гомотетии пространства от гомотетии плоскости является тот факт, что гомотетия пространства  $H_O^k$  при  $k > 0$  является преобразованием *первого рода*, а при  $k < 0$  — преобразованием *второго рода*, тогда как любая гомотетия плоскости есть преобразование первого рода.

В силу инвариантности величины угла между прямыми при гомотетии пространства будут инвариантны перпендикулярность прямой

и плоскости, величина угла между двумя плоскостями, в частности, перпендикулярность двух плоскостей.

Так как при гомотетии расстояния между точками умножаются на постоянное число  $|k|$ , то образом сферы является сфера, образом окружности — окружность (как пересечение сферы и плоскости).

**Теорема 2.** Любые две неравные сферы являются соответственными при двух гомотетиях (гомотетичны дважды).

Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы о гомотетичности двух окружностей плоскости.

Отсюда следует, что две неравные окружности пространства, лежащие в параллельных плоскостях или в одной плоскости, гомотетичны дважды.

**1.2. Композиция гомотетии и переноса.** Докажем, что композицией гомотетии и переноса  $T_{\bar{r}} \circ H_O^k$  является гомотетия с тем же коэффициентом  $k$  и новым центром  $S$ .

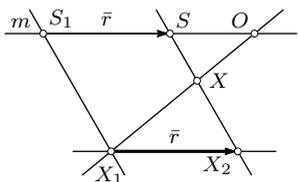


Рис. 162

Действительно, пусть  $H_O^k(X) = X_1$  ( $X \neq O$ ) и  $T_{\bar{r}}(X_1) = X_2$  (рис. 162). Проведем через центр  $O$  гомотетии прямую  $m \parallel \bar{r}$  и построим образ  $S_1$  точки  $S = m \cap (XX_2)$  при этой гомотетии  $H_O^k$ . Тогда  $\overline{S_1S} = \bar{r}$  и поэтому точка  $S$  неподвижна при заданной композиции и не зависит от выбора точки  $X$ . Так как, кроме того,  $\overline{SX_2} : \overline{SX} = \overline{OX_1} : \overline{OX} = k$ , то искомая композиция является гомотетией  $H_S^k$ .

**1.3. Гомотетия пространства в задачах.** Приемы использования гомотетии в решении стереометрических задач те же, что и в планиметрии. В качестве примера рассмотрим решения трех задач.

**Задача 1.** Дан произвольный тетраэдр  $ABCD$ . Постройте его сечение плоскостью, которое является ромбом.

**Решение.** Любое сечение тетраэдра плоскостью, параллельной двум его скрещивающимся ребрам, есть параллелограмм. Пусть параллелограмм  $MNPQ$  — некоторое сечение тетраэдра  $ABCD$  плоскостью, которая параллельна ребрам  $AC$  и  $BD$  (рис. 163). На луче  $MN$  отложим  $MK = MQ$  и построим ромб  $MKLQ$ . Пусть

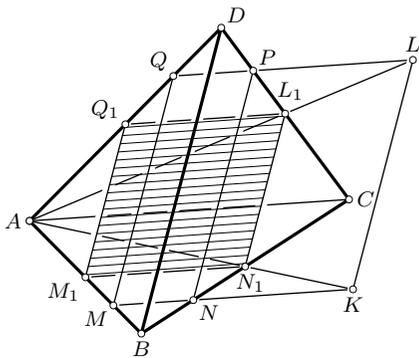


Рис. 163

$(AK) \cap (BC) = K_1$ . Гомотетия с центром  $A$ , при которой  $K \rightarrow K_1$ , отображает ромб  $MKLQ$  на искомый ромб  $M_1K_1L_1Q_1$ , так как образ ромба при гомотетии есть ромб и точки  $M_1, K_1, L_1, Q_1$  принадлежат ребрам данного тетраэдра  $ABCD$ .

Для выбранной пары  $(AC, BD)$  скрепляющихся ребер тетраэдра искомое сечение всегда существует и единственно. Следовательно, для любого тетраэдра всегда существуют три и только три сечения, имеющие форму ромбов.

**Задача 2.** Даны тетраэдр  $A_1A_2A_3A_4$  и некоторая точка  $P$  пространства, не совпадающая с его центроидом  $G$ . Через каждую вершину  $A_i$  тетраэдра проведена прямая  $m_i$ , параллельная прямой, содержащей точку  $P$  и центроид грани  $\alpha_i$ , противоположащей вершине  $A_i$ . Докажите, что построенные четыре прямые пересекаются в одной точке  $Q$  и найдите отношение  $PQ : PG$ .

**Решение.** Пусть  $G_i$  — центроид грани  $\alpha_i$ . По свойству медиан тетраэдра тетраэдры  $G_1G_2G_3G_4$  и  $A_1A_2A_3A_4$  гомотетичны относительно центроида  $G$  с коэффициентом  $-3$ , а прямые  $m_i$  — суть образы прямых  $PG_i$  при этой гомотетии. Так как прямые  $PG_i$  имеют общую точку  $P$ , то их образы  $m_i$  также имеют общую точку  $Q$ . Тогда  $\overline{GQ} : \overline{GP} = -3$ , откуда  $PQ : PG = 4$ .

**Задача 3.** Постройте сферу, касающуюся данной плоскости  $\alpha$  в данной точке  $A$  и данной сферы  $\omega$ .

**Решение.** Две касающиеся сферы гомотетичны с центром гомотетии в точке касания. Центр  $X$  искомой сферы  $\gamma$  лежит на перпендикуляре к плоскости  $\alpha$  в точке  $A$  и на прямой, соединяющей центр  $O$  данной сферы  $\omega$  с точкой  $S$  касания сфер. Поэтому задача сводится к построению точки  $S$ . При указанной гомотетии образом плоскости  $\alpha$  является параллельная ей плоскость  $\alpha'$ , касающаяся данной сферы  $\omega$ . Плоскость  $\alpha'$  легко строится (рис. 164). Прямая  $AA'$  пересекает сферу  $\omega$  вторично в искомой точке  $S$ . Вторым концом  $B'$  диаметра сферы  $\omega$ , перпендикулярного плоскости  $\alpha$ , аналогичным путем приводит еще к одной сфере, удовлетворяющей требованию задачи.

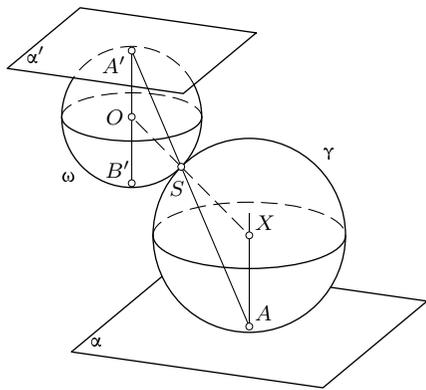


Рис. 164

## §2. Преобразования подобия

**2.1. Определение и инварианты подобий пространства.** Преобразование пространства называется *преобразованием подобия*, или подобием, если для любых двух точек  $A$  и  $B$  и их образов  $A_1$  и  $B_1$  при этом преобразовании выполняется равенство  $A_1B_1 = kAB$ , где  $k$  — постоянное (положительное) число, называемое *коэффициентом подобия*. В частности, при  $k = 1$  подобие является движением. Гомотетия с коэффициентом  $k$  есть подобие с коэффициентом  $|k|$ .

Как и в планиметрии, подобие  $\varphi^k$  пространства можно представить композицией гомотетии  $H_O^{\pm k}$  и движения  $f$ :

$$\varphi^k = f \circ H_O^{\pm k}. \quad (11.1)$$

Из представления (11.1) подобия вытекают свойства (инварианты) подобий пространства.

1. При подобии прямая отображается на прямую, отрезок на отрезок на отрезок, луч на луч, плоскость на плоскость, полуплоскость на полуплоскость.

2. Подобие сохраняет величину угла между прямыми, между прямой и плоскостью, между двумя плоскостями.

3. Подобие сохраняет отношение любых двух отрезков. (Это — прямое следствие из определения подобия).

4. Если тело  $T'$  — образ тела  $T$  при подобии  $\varphi^k$ , то  $V(T') = k^3V(T)$ .

В частности, если  $T$  и  $T'$  — тетраэдры, то это отношение есть следствие первой формулы Штаудта для объема тетраэдра, определения подобия и свойства 2. Если  $T'$  и  $T$  — многогранники, то их можно разбить на подобные тетраэдры, откуда и будет следовать свойство 4. Для других тел оно получается с помощью соответствующих формул их объемов.

Существуют два рода подобий пространства. Подобия первого рода сохраняют ориентацию каждого тетраэдра, подобия второго рода переводят каждый тетраэдр в тетраэдр противоположной ориентации. (Об ориентации тетраэдра см. §2 гл. 10.)

Аналогично соответствующей теореме для подобий плоскости называется *теорема о задании подобия пространства*: если даны два тетраэдра  $ABCD$  и  $A'B'C'D'$  такие, что  $A'B' = kAB$ ,  $B'C' = kBC$ ,  $C'D' = kCD$ ,  $A'C' = kAC$ ,  $A'D' = kAD$ ,  $B'D' = kBD$ , то существует только одно подобие пространства, при котором  $A \rightarrow A'$ ,  $B \rightarrow B'$ ,  $C \rightarrow C'$ ,  $D \rightarrow D'$ .

**2.2. Координатные формулы подобий пространства** получаются на основе формул (10.1) движения и представления (11.1) подобия. Поль-

зуюсь произволом выбора центра гомотетии, примем в качестве него начало  $O$  заданной прямоугольной декартовой системы координат. Тогда для подобия  $\varphi^k$  получаем формулы:

$$\begin{aligned}x' &= k(a_1x + b_1y + c_1z) + x_0, \\y' &= k(a_2x + b_2y + c_2z) + y_0, \\z' &= k(a_3x + b_3y + c_3z) + z_0.\end{aligned}\tag{11.2}$$

Так как гомотетия, с положительным коэффициентом есть преобразование первого рода, то в этих формулах род движения  $f$  совпадает с родом подобия  $\varphi^k$ . Напомним, что матрица

$$\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1 \\a_2 & b_2 & c_2 \\a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}$$

ортогональна (п. 7.2 гл. 10).

**2.3. Центр подобия пространства.** Поскольку существуют гомотетии двух родов, то в представлении (11.1) подобия пространства можно всегда полагать совпадающими род подобия и род гомотетии. Тогда в этом представлении движение  $f$  будет всегда движением только первого рода. Таковыми являются переносы, повороты и винтовые движения. Но композиция гомотетии и переноса есть гомотетия с другим центром. Следовательно, все подобия пространства сводятся к композициям гомотетии и поворота:

$$\varphi^k = R_l^\alpha \circ H_A^{\pm k}.\tag{11.3}$$

Ось  $l$  поворота зависит от выбора центра  $A$  гомотетии.

Подобие, отличное от движения, не может иметь более одной неподвижной точки, которая называется *центром подобия*. Докажем, что *подобие, не являвшееся движением, всегда имеет центр*.

Пусть подобие пространства задано композицией (11.3). Если  $A \in l$ , то точка  $A$  и есть искомый центр подобия. При  $A \notin l$  проведем через  $A$  плоскость  $\omega$  перпендикулярно  $l$ . Плоскость  $\omega$  неподвижна как при гомотетии, так и при повороте, и следовательно, неподвижна и при заданном подобии. На множестве точек этой плоскости  $\omega$  данное подобие  $\varphi^k$  является композицией гомотетии с центром  $A$  и поворота  $R_B^\alpha$ , где  $B = l \cap \omega$ . Эта композиция является подобием первого рода плоскости  $\omega$ . Поэтому его неподвижная точка  $Q$  существует. Ее построение рассмотрено в следующем пункте 2.4. Эта точка  $Q$  и есть центр данного подобия  $\varphi^k$  пространства.

**2.4. Построение центра подобия первого рода плоскости.** Пусть подобие  $\varphi^k$  первого рода плоскости задано композицией

$$\varphi^k = R_B^\alpha \circ H_A^k.\tag{11.4}$$

Центр  $B$  поворота зависит от выбора центра  $A$  гомотетии. Требуется найти точку  $Q = \varphi^k(Q)$ .

Построим точку  $A' = R_B^\alpha(A)$  и точку  $B_0$ , для которой  $H_A^k(B_0) = B$  (рис. 165). Тогда  $\varphi^k(A) = A'$  и  $\varphi^k(B_0) = B$ . По определению поворота ориентированный угол  $ABA'$  равен углу  $\alpha$  поворота. По свойству подобий

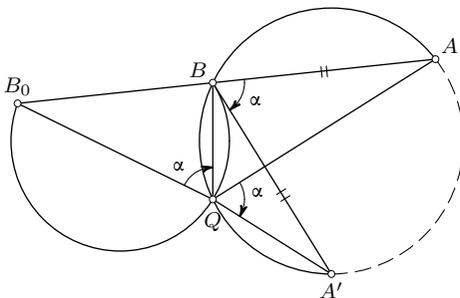


Рис. 165

первого рода плоскости ориентированные углы  $AQA'$  и  $B_0QB$  также равны  $\alpha$  (угол подобия). Поэтому искомая точка  $Q$  принадлежит той дуге  $AA'$  окружности  $ABA'$ , для которой точка  $B$  является серединой. Из точки  $Q$  отрезок  $B_0B$  виден под (ориентированным!) углом  $\alpha$ . Следовательно, точка  $Q$  принадлежит одной из двух дуг окружностей известного множества точек плоскости. Таким образом, искомый центр  $Q$  подобия есть вторая точка пересечения двух указанных дуг, имеющих общую точку  $B$ .

Построенная точка  $Q$  действительно неподвижна при заданном подобии  $\varphi^k$ . Это подобие может быть задано двумя парами соответственных точек  $A \rightarrow A'$  и  $B_0 \rightarrow B$ . Треугольники  $AQB_0$  и  $A'QB$  подобны (по равенству углов  $A$  и  $A'$ ,  $B_0QA$  и  $BQA'$ ) и одинаково ориентированы. Это значит, что  $Q \rightarrow Q$ .

**2.5. Классификация подобий пространства.** В представлении (11.3) подобия пространства композицией гомотетии и поворота возьмем за центр гомотетии неподвижную точку  $Q$  (центр) подобия. Тогда эта точка  $Q$  необходимо должна принадлежать оси  $l$  поворота. Итак, имеем классификационную теорему о подобиях пространства,

**Теорема.** *Любое подобие пространства, отличное от движения и гомотетии, является композицией гомотетии и поворота около оси, содержащей центр гомотетии. Род гомотетии совпадает с родом подобия. Эта композиция коммутативна.*

Указанная композиция гомотетии и поворота, ось которого содержит центр гомотетии, называется *гомотетическим поворотом* пространства. Он может быть первого или второго рода.

Наглядно классификацию всех подобий пространства, включая и движения, можно представить следующей схемой.



## Задачи к главе 11

**11.1.** Докажите, что шесть центров гомотетий трех попарно неравных сфер лежат по три на четырех прямых.

**11.2.** Докажите, что шесть центров гомотетий четырех попарно гомотетичных фигур лежат в одной плоскости по три на четырех прямых.

**11.3.** Найдите отношение объема тетраэдра к объему тетраэдра, вершинами которого являются центры тяжести граней данного тетраэдра.

**11.4.** Постройте куб, одна грань которого касается данной сферы, а вершины противоположной грани лежат на этой сфере. Найдите отношение ребра куба к диаметру сферы.

**11.5.** Две сферы касаются внутренним образом в точке  $S$ . Плоскость  $\alpha$  касается меньшей сферы в точке  $T$ . Докажите, что луч  $ST$  служит осью конуса с вершиной  $S$ , содержащего окружность пересечения плоскости  $\alpha$  с большей сферой.

**11.6.** Постройте сферу, проходящую через данную точку и касающуюся трех данных пересекающихся плоскостей.

**11.7.** Постройте сферу, проходящую через две данные точки и касающуюся двух данных плоскостей.

**11.8.** Постройте сферу, касающуюся трех данных пересекающихся плоскостей и данной сферы.

**11.9.** Докажите, что две ограниченные фигуры не могут быть гомотетичными более чем двумя способами.

**11.10.** Преобразование пространства, отличное от движения, отображает каждую прямую на параллельную ей прямую или на себя. Докажите, что это преобразование является *гомотетией*.

**11.11.** Преобразование пространства отображает каждую прямую на прямую и сохраняет величину угла между прямыми. Докажите, что это преобразование является *подобием*.

**11.12.** Найдите множество центров гомотетий пространства, каждая из которых отображает три заданные точки на точки, принадлежащие трем заданным плоскостям, имеющим единственную общую точку.

**11.13.** Найдите множество центров гомотетий пространства с одним и тем же коэффициентом, при каждой из которых образ данной прямой  $m$  пересекает другую данную прямую  $l$ .

**11.14.** Найдите множество прямых, проходящих через данную точку и обладающих тем свойством, что отрезки этих прямых, заключенные между двумя данными плоскостями, делятся данной точкой в одном и том же отношении  $k$ .

**11.15.** Докажите, что два тетраэдра подобны, если между их элементами установлено такое соответствие, при котором соответственные элементы одинаково расположены в обоих тетраэдрах и выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1) ребра одного тетраэдра пропорциональны соответственным ребрам другого;

2) три грани одного тетраэдра подобны трем соответственным граням другого;

3) одна из граней одного тетраэдра подобна соответственной грани другого и прилежащие к этим граням соответственные двугранные углы равны;

4) две грани одного тетраэдра подобны двум соответственным граням другого и двугранные углы между этими гранями равны;

5) трехгранный угол одного тетраэдра равен соответственному трехгранному углу другого и соответственные ребра, образующие эти трехгранные углы, пропорциональны;

6) два трехгранных угла одного тетраэдра равны двум соответственным трехгранным углам другого.

**11.16.** На данной прямой  $l$  найдите точку, равноудаленную от данной точки  $M$  и данной плоскости  $\alpha$ .

**11.17.** В данную сферу впишите тетраэдр, грани которого соответственно параллельны граням данного тетраэдра.

**11.18.** Дана сфера и точка  $S$  вне нее. Постройте конус с вершиной  $S$ , окружность основания которого лежит на данной сфере, а образующие делятся сферой пополам.

**11.19.** В правильную четырехугольную пирамиду вписана сфера. Плоскость, проходящая через ее центр параллельно плоскости основания пирамиды, делит объем пирамиды пополам. Найдите двугранный угол при основании пирамиды.

**11.20.** Постройте куб по его диагонали.

**11.21.** Даны две неравные сферы  $\alpha$  и  $\beta$  и принадлежащие им соответственно точки  $A$  и  $B$ . Найдите преобразование подобия, при котором  $\alpha \rightarrow \beta$  и  $A \rightarrow B$ .

**11.22.** Найдите множество центроидов тетраэдров, вписанных в данный тетраэдр.

## Аффинные преобразования

### §1. Начала теории аффинных преобразований пространства

**1.1. Определение аффинного преобразования пространства и его следствия.** Преобразование пространства, которое отображает каждую плоскость на плоскость, называется *аффинным преобразованием*.

Прямая есть линия пересечения двух плоскостей. Поэтому согласно определению аффинное преобразование пространства отображает каждую прямую на прямую.

Аффинное преобразование пространства сохраняет параллельность плоскостей, параллельность прямых, параллельность прямой и плоскости, отображает скрещивающиеся прямые на скрещивающиеся прямые. Каждое из этих утверждений тривиально доказывается способом приведения к противоречию.

В 1880 году французский геометр Г. Дарбу в письме к Ф. Клейну доказал инвариантность отношения трех точек прямой при аффинном преобразовании плоскости, опираясь лишь на тот факт, что образом всякой прямой является прямая. Однако это доказательство не простое и здесь мы его не будем излагать. Интересующийся читатель может найти его в книге И. М. Яглома и В. Г. Ашкинудзе «Идеи и методы аффинной и проективной геометрии» (с. 41–45).

Аффинное преобразование пространства *индуцирует* аффинное отображение каждой плоскости на ее образ. Можно было бы дать такое определение аффинного преобразования пространства: преобразование пространства, которое *аффинно* отображает каждую плоскость на плоскость называется аффинным преобразованием. Однако такое определение избыточно.

Подобия отображают каждую плоскость на плоскость и поэтому являются аффинными преобразованиями.

#### 1.2. Задание аффинного преобразования пространства.

**Теорема.** *Существует единственное аффинное преобразование пространства, которое отображает четыре данные некопланарные точки  $A, B, C, D$  на четыре наперед заданные некопланарные точки  $A', B', C', D'$  соответственно.*

**Доказательство.** Рассмотрим две аффинные системы координат (АСК)  $(D, \bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3)$  и  $(D', \bar{e}'_1 \bar{e}'_2 \bar{e}'_3)$ , где  $\bar{e}_1 = \overline{DA}$ ,  $\bar{e}_2 = \overline{DB}$ ,  $\bar{e}_3 = \overline{DC}$  и  $\bar{e}'_1 = \overline{D'A'}$ ,  $\bar{e}'_2 = \overline{D'B'}$ ,  $\bar{e}'_3 = \overline{D'C'}$ . Определим преобразование  $f$  пространства законом: каждой точке  $M$ , имеющей координаты  $x, y, z$  относительно первой АСК, поставим в соответствие такую точку  $M'$ , которая относительно второй АСК имеет те же самые координаты  $x, y, z$ . Очевидно, это преобразование  $f$  аффинное, поскольку образом плоскости, имеющей уравнение  $ax + by + cz + d = 0$  относительно первой АСК, является множество точек, которое относительно второй АСК имеет то же самое уравнение, т. е. тоже плоскость, ибо вид уравнения плоскости не зависит от выбора аффинной системы координат. Согласно закону преобразования  $f$ , в частности,  $f(A) = A'$ ,  $f(B) = B'$ ,  $f(C) = C'$ ,  $f(D) = D'$ .

Для доказательства *единственности* аффинного преобразования  $f$  достаточно заметить, что всякое аффинное преобразование пространства обладает свойством: *соответственные точки в соответственных АСК имеют равные соответственные координаты*. Это прямо следует из инвариантности отношения коллинеарных векторов (из инвариантности отношения трех точек прямой) при аффинном преобразовании. В самом деле, если

$$\overline{OM} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3 \quad \text{и} \quad x\bar{e}_1 = \overline{OM}_1, \quad y\bar{e}_2 = \overline{OM}_2, \quad z\bar{e}_3 = \overline{OM}_3,$$

то

$$x = \frac{\overline{OM}_1}{\bar{e}_1}, \quad y = \frac{\overline{OM}_2}{\bar{e}_2}, \quad z = \frac{\overline{OM}_3}{\bar{e}_3}.$$

Поэтому любое другое аффинное преобразование, имеющее те же четыре пары соответственных точек  $A \rightarrow A'$ ,  $B \rightarrow B'$ ,  $C \rightarrow C'$ ,  $D \rightarrow D'$ , необходимо совпадает с первоначально построенным аффинным преобразованием  $f$ .  $\square$

**1.3. Координатные формулы аффинного преобразования.** Пусть дана аффинная система координат  $(O, \bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3)$  и аффинное преобразование  $f$  переводит точку  $M(x, y, z)$  в точку  $M'(x', y', z')$ . Требуется выразить координаты  $x', y', z'$  через  $x, y, z$  и параметры, задающие преобразование  $f$ .

Таковыми параметрами могут служить координаты образов базисных векторов:  $\bar{e}'_1(a_1, a_2, a_3)$ ,  $\bar{e}'_2(b_1, b_2, b_3)$ ,  $\bar{e}'_3(c_1, c_2, c_3)$  и координаты образа  $O'(d_1, d_2, d_3)$  начала  $O$  координат данной АСК относительно этой АСК. Для решения поставленной задачи используем векторное равенство:

$$\overline{OM'} = \overline{O'M'} + \overline{OO'}.$$

Согласно определению координат вектора и координат точки имеем:

$$\begin{aligned}\overline{O'M'} &= x\overline{e'_1} + y\overline{e'_2} + z\overline{e'_3} = \\ &= x(a_1\overline{e}_1 + a_2\overline{e}_2 + a_3\overline{e}_3) + y(b_1\overline{e}_1 + b_2\overline{e}_2 + b_3\overline{e}_3) + z(c_1\overline{e}_1 + c_2\overline{e}_2 + c_3\overline{e}_3) = \\ &= (a_1x + b_1y + c_1z)\overline{e}_1 + (a_2x + b_2y + c_2z)\overline{e}_2 + (a_3x + b_3y + c_3z)\overline{e}_3.\end{aligned}$$

Первоначальное векторное равенство равносильно трем координатным:

$$\begin{aligned}x' &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2, \\ z' &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3.\end{aligned}\tag{12.1}$$

Поскольку векторы  $\overline{e'_1}$ ,  $\overline{e'_2}$ ,  $\overline{e'_3}$  линейно независимы, то

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.\tag{12.2}$$

Этот определитель называется *определителем аффинного преобразования*.

Обратно, если преобразование пространства задано формулами (12.1) при  $\Delta \neq 0$ , то оно является аффинным преобразованием.

Для доказательства технически проще проверить, что преобразование, обратное преобразованию (12.1), аффинное. Отсюда будет следовать аффинность преобразования (12.1). Возьмем произвольную плоскость  $Ax' + By' + Cz' + D = 0$ . Выполняя подстановки (12.1), получим уравнение ее прообраза:

$$\begin{aligned}(Aa_1 + Ba_2 + Ca_3)x + (Ab_1 + Bb_2 + Cb_3)y + \\ + (Ac_1 + Bc_2 + Cc_3)z + (Ad_1 + Bd_2 + Cd_3) = 0.\end{aligned}$$

Коэффициенты при  $x$ ,  $y$ ,  $z$  не могут быть одновременно нулями, так в противном случае система

$$\begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0, \\ Ab_1 + Bb_2 + Cb_3 = 0, \\ Ac_1 + Bc_2 + Cc_3 = 0. \end{cases}$$

с неравным нулю определителем  $\Delta$  имела бы лишь нулевое решение:  $A = B = C = 0$ , что противоречит смыслу уравнения плоскости.

Итак, формулы (12.1) при  $\Delta \neq 0$  и есть искомые координатные формулы аффинного преобразования пространства.

При  $\Delta > 0$  базис  $(\bar{e}'_1 \bar{e}'_2 \bar{e}'_3)$  одинаково ориентирован с базисом  $(\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3)$  (аффинное преобразование первого рода), а при  $\Delta < 0$  эти базисы ориентированы противоположно (аффинное преобразование второго рода).

## §2. Изменение объемов тел при аффинном преобразовании

**2.1. Выражение смешанного произведения векторов в аффинных координатах.** Некомпланарные векторы  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  образуют векторный (аффинный) базис пространства. Пусть векторы  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  имеют разложения по векторам этого базиса:  $\bar{a} = x_1 \bar{e}_1 + y_1 \bar{e}_2 + z_1 \bar{e}_3$ ,  $\bar{b} = x_2 \bar{e}_1 + y_2 \bar{e}_2 + z_2 \bar{e}_3$ ,  $\bar{c} = x_3 \bar{e}_1 + y_3 \bar{e}_2 + z_3 \bar{e}_3$ . Используя алгебраические свойства смешанного произведения, выразим смешанное произведение  $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$  через аффинные координаты этих векторов:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = (x_1 \bar{e}_1 + y_1 \bar{e}_2 + z_1 \bar{e}_3)(x_2 \bar{e}_1 + y_2 \bar{e}_2 + z_2 \bar{e}_3)(x_3 \bar{e}_1 + y_3 \bar{e}_2 + z_3 \bar{e}_3).$$

В раскрытом виде выражение смешанного произведения  $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$  содержит 27 слагаемых, из которых 21 равно нулю по причине компланарности векторов. Запишем остальные шесть слагаемых:

$$\begin{aligned} \bar{a}\bar{b}\bar{c} &= x_1 y_2 z_3 (\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3) + x_2 y_3 z_1 (\bar{e}_3 \bar{e}_1 \bar{e}_2) + x_3 y_1 z_2 (\bar{e}_2 \bar{e}_3 \bar{e}_1) + \\ &+ x_1 y_3 z_2 (\bar{e}_1 \bar{e}_3 \bar{e}_2) + x_2 y_1 z_3 (\bar{e}_2 \bar{e}_1 \bar{e}_3) + x_3 y_2 z_1 (\bar{e}_3 \bar{e}_2 \bar{e}_1) = \\ &= (x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 - x_3 y_2 z_1) (\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3). \end{aligned}$$

Выражение в скобках есть определитель третьего порядка. Итак, имеем окончательно формулу:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} (\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3). \quad (12.3)$$

**2.2. Зависимость между объемом тела и объемом его образа при аффинном преобразовании пространства.** Объем ориентированного параллелепипеда, построенного на векторах  $a, b, c$  как на ребрах, выражается через координаты этих векторов относительно базиса  $(\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3)$  формулой (12.3):

$$V = \bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} (\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3). \quad (12.3 \text{ а})$$

Смешанное произведение  $\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3$  равно объему  $V_0$  ориентированного параллелепипеда, построенного на базисных векторах. Поскольку аффинное преобразование оставляет без изменения координаты соответственных векторов в соответственных базисах, то для объема  $V'$  образа параллелепипеда объема  $V$  имеем:

$$V' = \overline{a' b' c'} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} (\bar{e}'_1 \bar{e}'_2 \bar{e}'_3). \quad (12.4)$$

Из (12.3 а) и (12.4) следует:

$$\frac{V}{V_0} = \frac{V'}{V'_0}, \quad V' = \frac{V'_0}{V_0} V.$$

По той же формуле (12.3 а)

$$V'_0 = \bar{e}'_1 \bar{e}'_2 \bar{e}'_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} (\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3) = \Delta V_0.$$

Число  $\frac{V'_0}{V_0} = \Delta$  постоянно для данного аффинного преобразования  $f$ .

Итак, для неориентированных объемов  $V$  и  $V'$  соответственных при аффинном преобразовании параллелепипедов имеет место зависимость

$$V' = |\Delta| V, \quad (12.5)$$

где  $\Delta$  — определитель аффинного преобразования.

Эта зависимость обобщается на объемы любых двух соответственных тел. Для двух соответственных тетраэдров это очевидно. Соответственные многогранники разлагаются на соответственные тетраэдры. Объем произвольного (кубируемого) тела определяется как общий предел последовательности вписанных в него многогранников и последовательности описанных около него многогранников при неограниченном уменьшении их наибольшей грани.

**Следствие.** *Отношение объемов любых двух тел инвариантно при аффинном преобразовании пространства*

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V'_1}{V'_2}.$$

Отношение площадей фигур не является инвариантом аффинного преобразования пространства. Оно сохраняется лишь для фигур, лежащих в одной плоскости или же в параллельных плоскостях.

### §3. Родство

**3.1. Определение и свойства родства.** Рассмотрим два тетраэдра  $ABCD$  и  $ABCD_1$  с общей гранью  $ABC$ . Руководствуясь теоремой о задании аффинного преобразования (п. 1.2), зададим аффинное преобразование  $f$  пространства парами точек  $A \rightarrow A, B \rightarrow B, C \rightarrow C, D \rightarrow D_1$ . Поскольку при этом преобразовании неподвижны три неколлинеарные точки  $A, B, C$ , то будет неподвижна и каждая точка плоскости  $ABC$ . Это — не единственный случай, когда аффинное преобразование пространства имеет плоскость неподвижных точек.

**О п р е д е л е н и е.** Аффинное преобразование пространства, имеющее плоскость неподвижных точек, называется *родственным преобразованием*, или *родством*, а плоскость его неподвижных точек называется *плоскостью родства*.

Родство можно задать его плоскостью и парой соответственных точек, не принадлежащих ей.

Родство является важным частным видом аффинного преобразования пространства и имеет свои частные виды. Например, зеркальная симметрия — частный вид родства.

Рассмотрим свойства родственных преобразований. Соответственные при родстве элементы (точки, прямые, плоскости и др.) называют *родственными элементами*.

1. *Родственные прямые (плоскости) пересекаются на плоскости  $\alpha$  родства или ей параллельны.*

В самом деле, если при родстве  $\rho$   $\rho(l) = l'$  и  $l \cap \alpha = K$ , то  $K \rightarrow K$  и поэтому  $K \in l'$ . Если  $l \parallel \alpha$ , то возьмем в плоскости  $\alpha$  прямую  $l_0$ , параллельную  $l$ . В силу инвариантности параллельности прямых их образы  $l_0$  и  $l'$  параллельны. Поэтому  $l' \parallel \alpha$  и  $l' \parallel l$ . Для родственных плоскостей доказательство аналогично.

2. *Прямые, каждая из которых соединяет две родственные точки, параллельны.*

Действительно, пусть  $\rho(A) = A'$  и  $\rho(X) = X'$ , где точка  $A$  фиксирована, а точка  $X$  переменная. Если  $(AX) \cap \alpha = K$ , то  $\frac{AK}{KX} = \frac{A'K}{KX'}$  (инвариантность отношения трех точек прямой), а это возможно лишь при условии  $(AA') \parallel (XX')$ .

Направление прямых, соединяющих родственные точки, называется *направлением родства*.

3. *Если направление родства непараллельно плоскости этого родства, то каждый отрезок, соединяющий две родственные точки, делится плоскостью родства в одном и том же отношении.*

4. Всякая плоскость, параллельная направлению родства, неподвижна при этом родстве. В ней индуцируется родство плоскости, осью которого является прямая ее пересечения с плоскостью данного родства пространства.

Отметим два частных случая родства. Если направление родства параллельно плоскости его неподвижных точек, то родство называют *сдвигом*. Если плоскость родства делит пополам каждый из отрезков, соединявших две родственные точки, то родство называется *косой зеркальной симметрией*.

**3.2. Представление аффинного преобразования пространства композицией подобия и родства.** О значимости родственного преобразования говорит такая теорема.

**Теорема.** *Аффинное преобразование пространства, отличное от подобия и родства, представимо композицией подобия и родства.*

**Доказательство.** Аффинное преобразование  $f$  пространства отображает сферу  $\sigma$  на эллипсоид  $\sigma'$ . Оно может быть задано этими фигурами. Известно, что существует (не единственная) плоскость  $\alpha'$ , содержащая центр эллипсоида  $\sigma'$  и пересекающая его по окружности  $\omega'$  (круговое сечение эллипсоида). Пусть  $\alpha$  — прообраз плоскости  $\alpha'$ . Тогда окружность  $\omega = \sigma \cap \alpha$  есть прообраз окружности  $\omega'$ . Построим сферу  $\beta$ , имеющую окружность  $\omega'$  своей диаметральной окружностью. Сфера  $\beta$  и эллипсоид  $\sigma'$  имеют общую окружность  $\omega'$ . Существует подобие  $\varphi$  (в частности, гомотетия), отображающее сферу  $\sigma$  на сферу  $\beta$ . Зададим родство  $\rho$  пространства плоскостью  $\alpha'$  неподвижных точек и парой соответственных точек  $\varphi(A) \rightarrow f(A)$ , где  $A$  — некоторая точка сферы  $\sigma$ ,  $A \notin \alpha$ ,  $\varphi(A) \in \beta$ ,  $f(A) \in \sigma'$ . Тогда  $\rho(\beta) = \sigma'$  и поэтому композиция  $\rho \cdot \varphi$  отображает  $\sigma$  на  $\sigma'$ . В силу единственности аффинного преобразования, при котором  $\sigma \rightarrow \sigma'$ , эта композиция совпадает с данным аффинным преобразованием  $f: f = \rho \cdot \varphi$ .  $\square$

Это доказательство предложено И. В. Измestьевым.

Представление  $f = \rho \cdot \varphi$ , очевидно, не единственно. Аффинное преобразование можно представить также композицией родства и подобия, но уже не совпадавшими с прежними  $\rho$  и  $\varphi$ .

## §4. Метод аффинных преобразований в геометрических задачах

**4.1. Сущность метода аффинных преобразований.** Множество аффинных преобразований пространства есть группа, имеющая своей подгруппой группу преобразований подобия. Теория инвариантов аффин-

ной группы преобразований называется аффинной геометрией. Фигура называется аффинной, если ее характеристическое свойство является аффинным, т. е. сохраняется при аффинных преобразованиях. При аффинных преобразованиях аффинная фигура отображается на фигуру с тем же названием. Аффинными фигурами являются точка, прямая, отрезок, луч, плоскость, полуплоскость, треугольник, параллелограмм, трапеция, эллипс, тетраэдр, параллелепипед, призма, конус (не круговой), эллипсоид и др.

Две фигуры называется *аффинно эквивалентными* (аффинно «равными»), если существует аффинное преобразование, отображающее одну из них на другую. Например, аффинно эквивалентны любые два треугольника, любые два тетраэдра, два произвольных параллелепипеда, сфера и эллипсоид и др. Аффинно эквивалентные фигуры обладают одними и теми же аффинными свойствами, хотя их метрические свойства, вообще говоря, различны (длины отрезков, меры углов, отношения непараллельных отрезков, отношения площадей плоских фигур в непараллельных плоскостях).

Если данная задача является аффинной, то ее правомерно решать на любой фигуре из класса аффинно эквивалентных фигур, которому принадлежит рассматриваемая в этой задаче фигура. Поэтому целесообразно выбрать такую из этих фигур, которая с метрической точки зрения является наиболее простой: из всех тетраэдров — правильный тетраэдр, из всех параллелепипедов — куб, из всех эллипсоидов — сфера и т. д. Решение данной аффинной задачи на этих метрически «хороших» фигурах существенно упрощается тем, что используются их метрические свойства.

#### **4.2. Примеры решения задач методом аффинных преобразований.**

**Задача 1.** Докажите, что любая плоскость, содержащая середины двух противоположных ребер тетраэдра, делит его на две равновеликие части.

**Решение.** Задача аффинная, так как содержит только аффинные понятия: тетраэдр, плоскость, середина отрезка, отношение объемов фигур. Поскольку любые два тетраэдра аффинно эквивалентны, то ее решение для правильного тетраэдра имеет силу и для любого тетраэдра. Но правильный тетраэдр симметричен относительно прямой, проходящей через середины двух его противоположных ребер. Эта осевая симметрия отображает секущую плоскость на себя, а части тетраэдра, на которые он разбивается секущей плоскостью, отображаются друг на друга. Поэтому их объемы равны.

Непосредственное решение этой задачи для произвольного тетраэдра значительно сложнее.

**Задача 2.** Длины полуосей эллипсоида равны  $a, b, c$ . Найдите объем области пространства, ограниченной эллипсоидом.

**Решение.** Эллипсоид аффинно эквивалентен сфере, при этом его полуосям соответствуют три попарно сопряженных радиуса сферы. Но три такие радиуса сферы попарно перпендикулярны. Поэтому прямоугольному параллелепипеду с ребрами  $a, b, c$  соответствует куб с ребром  $r$  равным радиусу сферы. В силу инвариантности отношения объемов при аффинных преобразованиях для искомого объема  $V$  имеем

пропорцию:  $\frac{V}{abc} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{r^3}$ , откуда  $V = \frac{4}{3}\pi abc$ .

**Задача 3.** Две непараллельные плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересечены параллельными прямыми  $a, b, c, d$ , никакие три из которых не лежат в одной плоскости. Эти прямые пересекают данные плоскости соответственно в точках  $A$  и  $A_1, B$  и  $B_1, C$  и  $C_1, D$  и  $D_1$ . Докажите, что: 1) тетраэдры  $ABCD_1$  и  $A_1B_1C_1D$  равновелики; 2) тетраэдры  $ABC_1D_1$  и  $A_1B_1CD$  равновелики.

**Решение.** Выполним аффинное преобразование пространства, которое прямыми  $a$  и  $m = \alpha \cap \beta$  отображает на перпендикулярные прямые  $a'$  и  $m' = \alpha' \cap \beta'$ , причем прямая  $a'$  равнонаклонена к образам  $\alpha'$  и  $\beta'$  плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ . Тогда параллельные прямые  $a', b', c', d'$  перпендикулярны к биссекторной плоскости  $\gamma$  двух вертикальных двугранных углов между плоскостями  $\alpha'$  и  $\beta'$ . Тетраэдры  $A'B'C'D'_1$  и  $A'_1B'_1C'_1D'$  симметричны относительно плоскости  $\gamma$  и потому равновелики. По этой же причине и равновелики тетраэдры  $A'B'C'_1D'_1$  и  $A'_1B'_1C'D'$ . Отсюда следует истинность доказываемых утверждений.

## Задачи к главе 12

**12.1.** Докажите методом аффинных преобразований теоремы пунктов 1.1 и 1.2 гл. 6.

**12.2.** В каждой грани тетраэдра выбрана произвольная точка и построена точка, симметричная выбранной относительно центроида грани, в которой она выбрана. Докажите, что центроид системы четырех исходных точек и центроид системы четырех построенных точек симметричны относительно центроида данного тетраэдра.

**12.3.** Через бимедиану тетраэдра проведена плоскость. Докажите, что отрезок, соединяющий точки ее пересечения с прямыми, содержащими два других противоположных ребра, делится этой бимедианой пополам.

**12.4.** Укажите все аффинные преобразования, каждое из которых отображает на себя данный тетраэдр общего вида. Покажите, что группа этих преобразований (группа аффинных автоморфизмов тетраэдра) изоморфна группе самосовмещений правильного тетраэдра (§ 9 гл. 10). Какие из рассматриваемых преобразований имеют единственную неподвижную точку (укажите какую)? прямую неподвижных точек? плоскость неподвижных точек?

**12.5.** Докажите, что существует один и только один эллипсоид, касающийся граней тетраэдра в их центроидах (*вписанный эллипсоид Штейнера*).

**12.6.** Докажите, что существует единственный описанный около тетраэдра эллипсоид, касательные плоскости к которому в вершинах тетраэдра параллельны плоскостям противоположных граней (*описанный эллипсоид Штейнера*).

**12.7.** Докажите, что существует единственное аффинное преобразование пространства, отображающее данный эллипсоид (в частности, сферу) на наперед заданный эллипсоид.

**12.8.** Вершина параллелепипеда соединена с центрами трех не содержащих ее граней. Найдите отношение объема полученного тетраэдра к объему данного параллелепипеда.

**12.9.** Докажите, что параллелепипеды, каждый из которых построен на трех сопряженных полудиаметрах эллипсоида как на ребрах, равновелики.

**12.10.** Если аффинное преобразование пространства отображает некоторое тело на себя, то оно сохраняет объемы всех тел. Докажите.

**12.11.** Докажите, что аффинное преобразование

$$\begin{aligned}x' &= -3x - 2y + 2, \\y' &= 12x + 7y - 6, \\z' &= -4x - 2y + z + 2\end{aligned}$$

является родством. Найдите уравнение его плоскости и координаты вектора направления.

**12.12.** Напишите формулы родственного преобразования, для которого плоскость  $Oxy$  аффинной системы координат служит плоскостью неподвижных точек, а точка  $(0, 0, 1)$  переходит в точку  $(x_0, y_0, z_0)$ .

**12.13.** Напишите формулы аффинного преобразования, переводящего сферу  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  в эллипсоид  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

## Задачи общего содержания

1. Докажите, что в любой правильной треугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре больше  $60^\circ$ .
2. Докажите, что в любой правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре является тупым.
3. Даны четыре луча  $OA, OB, OC, OD$ . Докажите, что
$$\cos AOB + \cos BOC + \cos COD + \cos DOA + \cos AOC + \cos BOD \geq -2.$$

В каком случае имеет место равенство?

4. Если сумма плоских углов триэдра равна  $180^\circ$ , то сумма косинусов его двугранных углов равна единице. Докажите.
5. Докажите, что биссекторная плоскость двугрannого угла тетраэдра делит противоположащее ребро в отношении площадей граней, образующих этот угол.
6. Докажите, что для любого тетраэдра  $ABCD$  имеет место соотношение:  $S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2 \cos(CD) = S_3^2 + S_4^2 - 2S_3S_4 \cos(AB)$ .
7. В параллелепипеде длины диагоналей одной грани равны  $a$  и  $a_1$ , другой —  $b$  и  $b_1$ , третьей —  $c$  и  $c_1$ . Вычислите площадь грани с диагоналями  $a$  и  $a_1$ .
8. Основанием пирамиды является квадрат. Величины двугранных углов при основании относятся как  $1 : 2 : 4 : 2$ . Найдите их.
9. Основание прямой призмы — прямоугольный треугольный треугольник с острым углом  $\varphi$  и площадью  $S$ . Площадь боковой грани равна  $Q$ . Найдите объем призмы.
10. Два цилиндра, высоты которых равны  $a$  и  $b$ , имеют равные развертки боковых поверхностей. Найдите отношение  $a : b$ , при котором площадь полной поверхности одного цилиндра вдвое больше площади поверхности другого.
11. Развертка боковой поверхности конуса представляет собой круговой сектор с углом  $\alpha$  радиан и хордой  $a$ . Вычислите объем конуса.
12. Две противоположные вершины куба являются центрами оснований цилиндра, а остальные лежат на поверхности этого цилиндра. Найдите отношение объемов цилиндра и куба.
13. Высота усеченной пирамиды равна  $h$ , а площадь ее среднего сечения равна  $S$ . Найдите область изменения ее объема.

14. Около сферы радиуса  $R$  описан конус, в котором три образующих попарно перпендикулярны. Вычислите объем конуса и площадь его полной поверхности.

15. Выпуклый многогранник, все вершины которого лежат в двух параллельных плоскостях, называется *призматойдом*. Докажите, что его объем можно вычислить по формуле (7.2) Ньютона–Симпсона.

16. Параллельные прямые, проходящие через вершины тетраэдра  $ABCD$ , пересекают плоскости его граней, противоположащих этим вершинам, соответственно в точках  $A_1, B_1, C_1, D_1$ . Докажите, что объем тетраэдра  $A_1B_1C_1D_1$  вдвое больше объема тетраэдра  $ABCD$ .

17. Диагональ куба с ребром  $a$  служит осью цилиндра, окружности оснований которого касаются граней куба в их центрах. Вычислите объем цилиндра.

18. Радиус сферы, описанный около тетраэдра, равен  $R$ . Радиусы описанной и вписанной окружностей одной его грани равны  $\rho$  и  $r$ . Определите расстояние от центра описанной сферы до центра окружности, вписанной в выбранную грань.

19. Три сферы радиуса  $R$  касаются одной плоскости и попарно касаются друг друга. Найдите радиус сферы, касающейся данной плоскости и всех трех данных сфер.

20. В каждый из трехгранных углов тетраэдра вписана сфера. Эти четыре сферы имеют равные радиусы и имеют общую точку. Вычислите их радиус, если даны радиусы  $R$  и  $r$  описанной и вписанной сфер данного тетраэдра.

21. Три цилиндра радиуса  $R$  имеют попарно перпендикулярные оси и каждые два имеют единственную общую точку на их образующих. Найдите наибольший радиус шара, который пройдет через зазор между цилиндрами.

22. Вычислите длину ребра куба, вписанного в конус, образующая которого имеет длину  $l$  и наклонена к плоскости основания под углом  $\alpha$ .

23. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды имеет длину  $a$  и наклонено к плоскости основания под углом  $\alpha$ . В пирамиду вписан равносторонний цилиндр так, что его нижнее основание лежит в плоскости основания пирамиды. Найдите высоту цилиндра.

24. В тетраэдре два противоположных ребра имеют длины  $a$  и  $b$ , остальные ребра имеют длину  $c$ . Вычислите радиусы описанной и вписанной сфер этого тетраэдра.

25. Сфера радиуса  $r$  касается всех ребер треугольной пирамиды. Ее центр находится на высоте пирамиды внутри нее на расстоянии  $r\sqrt{3}$  от вершины. Докажите, что пирамида правильная и найдите ее высоту.

**26.** Грани двугранного угла величины  $\alpha$  касается конуса по его образующим. Найдите угол между этими образующими, если угол осевого сечения конуса равен  $\varphi$ .

**27.** Угол между смежными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды равен  $\omega$ , длина стороны основания равна  $a$ . Сфера касается ее описанной сферы и боковых граней. Вычислите ее радиус.

**28.** Основанием пирамиды  $TABC$  является прямоугольный треугольник  $ABC$ , в котором угол  $BAC$  равен  $60^\circ$ . Ребро  $TA$  перпендикулярно плоскости основания. Биссектриса  $AD$  угла  $BAC$  имеет длину  $b$ . Расстояние между прямыми  $TB$  и  $AD$  равно  $\frac{b}{2}$ . Найдите угол между прямыми  $TC$  и  $AD$  и площадь описанной сферы.

**29.** Сфера радиуса  $R$  делит каждое из ребер  $AB, BC, CD, DA$  тетраэдра  $ABCD$  на три равные части и содержит середины ребер  $AC$  и  $BD$ . Найдите высоту тетраэдра, опущенную из вершины  $D$ .

**30.** Два полукруга радиуса  $R$  расположены в плоскости так, что один конец полуокружности каждого служит центром полуокружности другого. Вычислите объем тела вращения и площадь его поверхности, образованного вращением объединения этих полукругов около касательной, проведенной из конца одной полуокружности к другой полуокружности.

**31.** Круговой сектор радиуса  $R$  с центральным углом  $270^\circ$  вращается около касательной, проведенной к его дуге в ее середине. Подсчитайте объем полученного тела вращения.

**32.** Сектор, равный  $\frac{3}{4}$  круга радиуса  $R$ , вращается около касательной к его дуге в конце этой дуги. Определите объем полученного тела вращения.

**33.** Прямоугольник с длинами его сторон 3 и 4 вращается около его диагонали. Найдите объем тела вращения.

**34.** Площадь сферы равна  $S$ . Найдите наименьшую площадь поверхности описанного около нее конуса.

**35.** В правильной треугольной пирамиде боковая грань имеет заданную постоянную площадь и наклонена к плоскости основания под углом  $\alpha$ . При каком значении  $\alpha$  расстояние от центра основания до боковой грани будет наибольшим?

**36.** Найдите наибольшую возможную величину угла между плоскостью боковой грани и не принадлежащим ей боковым ребром правильной четырехугольной пирамиды.

**37.** Докажите, что координаты направляющего вектора  $\vec{p}$  ( $p_1, p_2, p_3$ ) оси поворота и оси винтового движения, заданных формулами (10.1),

находятся из системы

$$\begin{aligned}(a_1 - 1)p_1 + b_1p_2 + c_1p_3 &= 0, & a_2p_1 + (b_2 - 1)p_2 + c_2p_3 &= 0, \\ a_3p_1 + b_3p_2 + (c_3 - 1)p_3 &= 0\end{aligned}$$

при условии

$$\begin{vmatrix} a_1 - 1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - 1 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

**38.** Докажите, что угол  $\varphi$  поворота (и винтового движения), заданного формулами (10.1), определяется формулой:

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(a_1 + b_2 + c_3 - 1), \quad 0 < \varphi \leq \pi.$$

**39.** Движение второго рода задано формулами (10.1). Докажите, что вектор  $\bar{n}(n_1, n_2, n_3)$ , ортогональный плоскости симметрий (зеркальной, переносной, поворотной), определяется из системы:

$$\begin{aligned}(a_1 + 1)n_1 + b_1n_2 + c_1n_3 &= 0, & a_2n_1 + (b_2 + 1)n_2 + c_2n_3 &= 0, \\ a_3n_1 + b_3n_2 + (c_3 + 1)n_3 &= 0.\end{aligned}$$

**40.** Докажите, что угол  $\varphi$  поворотной симметрии, заданной формулами (10.1), определяется формулой:

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(a_1 + b_2 + c_3), \quad 0 < \varphi \leq \pi, \quad a_1 + b_2 + c_3 \neq 1.$$

**41.** Найдите композицию осевых симметрий пространства, оси которых содержат последовательно взятые стороны вписанного в окружность четырехугольника.

**42.** В тетраэдр вписана сфера. Касательные плоскости к ней, параллельные граням тетраэдра, своим пересечением образуют новый тетраэдр. Докажите, что он равен данному тетраэдру.

**43.** Если преобразование пространства отображает каждую плоскость на параллельную ей плоскость или на себя, то оно является гомотетией или переносом. Докажите.

**44.** Постройте сферу, вписанную в данный триэдр и содержащую заданную точку.

**45.** Дан тетраэдр  $ABCD$ . Прямая пересекает плоскости  $BCD$ ,  $CDA$ ,  $DAB$ ,  $ABC$  соответственно в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$ . Докажите, что середины отрезков  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $DD_1$  принадлежат одной плоскости.

**46.** В данной плоскости  $\alpha$  найдите пару соответственных прямых при заданном аффинном преобразовании пространства.

**47.** Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  некопланарны. Аффинное преобразование пространства задано парами точек:  $A \rightarrow B$ ,  $B \rightarrow C$ ,  $C \rightarrow D$ ,  $D \rightarrow A$ . Напишите формулы этого преобразования в аффинной системе координат

с началом  $D$  и базисными векторами  $\bar{e}_1 = \overline{DA}$ ,  $\bar{e}_2 = \overline{DB}$ ,  $\bar{e}_3 = \overline{DC}$ . Найдите неподвижные точки этого преобразования.

**48.** Напишите формулы аффинного преобразования, обратного преобразованию, заданному в предыдущей задаче №47. Найдите уравнения образа и прообраза плоскости, проходящей через точку  $D$  параллельно плоскости  $ABC$ , при преобразовании задачи №47.

**49.** Постройте неплоский пятиугольник, если даны середины всех его сторон.

**50.** Шаровой сегмент целиком расположен внутри цилиндра и имеет с ним общие основание и высоту. В каких пределах может изменяться отношение  $\lambda$  объема цилиндра к объему сегмента?

**51.** Площадь поверхности шара и его объем равны соответственно площади боковой поверхности и объему сегмента некоторого шара. Определите величину дуги осевого сечения сегмента.

**52.** Из множества всех конусов с данной площадью  $S$  полной поверхности найдите тот, который имеет наибольший объем.

**53.** В сферу радиуса  $R$  вписан куб и на его гранях вне него построены правильные пирамиды с вершинами на сфере. Найдите объем полученного многогранника.

**54.** Докажите, что максимальная площадь ортогональной проекции прямоугольного параллелепипеда на плоскость вдвое больше площади треугольника, образованного диагоналями трех граней параллелепипеда, имеющих общую вершину.

**55.** В правильный триэдр  $SABC$  вписана произвольная сфера с центром  $O$ . Касательная плоскость к ней, проведенная через вершину  $S$  триэдра, пересекает две его грани по лучам  $SM$  и  $SN$ . Докажите, что величина двугранного угла при ребре  $SO$  триэдра  $SOMN$  не зависит от выбора касательной плоскости, содержащей вершину  $S$ .

**56.** Четыре прямые  $AM$ ,  $BM$ ,  $CM$ ,  $DM$ , проходящие через вершины тетраэдра  $ABCD$  и его внутреннюю точку  $M$ , пересекают противоположные этим вершинам грани соответственно в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$ . Докажите, что имеют место соотношения:

$$\frac{MA_1}{AA_1} + \frac{MB_1}{BB_1} + \frac{MC_1}{CC_1} + \frac{MD_1}{DD_1} = 1, \quad \frac{MA}{AA_1} + \frac{MB}{BB_1} + \frac{MC}{CC_1} + \frac{MD}{DD_1} = 3$$

(теорема Жергона для триэдра).

**57.** Через внутреннюю точку  $M$  тетраэдра  $ABCD$  проведены четыре плоскости, параллельные соответственно его граням, и в каждый из полученных отсеченных тетраэдров вписана сфера. Найдите сумму радиусов этих сфер, если радиус вписанной в данный тетраэдр сферы равен  $r$ .

# Ответы, указания

## Часть I

### Глава 1

**1.12.** 2 : 1, считая от вершины  $S$ . Сначала постройте общую прямую плоскости сечения и плоскости основания.

**1.13.**  $\frac{a}{8}\sqrt{3(a^2 + 4h^2)}$ .

**1.21.** Сечение — правильный шестиугольник с вершинами в серединах ребер куба.

**1.23.** Перпендикуляры к биссекторным плоскостям.

**1.25.**  $\sqrt{\frac{a^4 + b^4}{a^2 + b^2}}$ . **1.26.**  $\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$ . **1.27.**  $\operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{2}}{5}$ . **1.28.**  $\arccos \frac{1}{4}$ .

**1.29.**  $a$  или  $\frac{a}{\sqrt{5}}$ . **1.30.**  $\arccos \frac{2}{3}$ ,  $\arccos \frac{1}{6}$ . **1.31.**  $\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{2}}$ . **1.32.**  $\frac{2ab}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}$ .

**1.33.** Проекция искомой прямой на плоскость основания куба параллельна диагонали основания.

**1.34.** 1)  $30^\circ$ , 2)  $45^\circ$ . **1.35.**  $60^\circ$ . **1.36.**  $\arccos(\sin \alpha \cdot \sin \beta)$ . **1.38.**  $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{4}$ .

**1.39.**  $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{2} \cos 2\alpha}{\sin \alpha}$ . **1.40.**  $\operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha\right)$ . **1.41.**  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ . **1.42.**  $\frac{ah}{\sqrt{a^2 + 4h^2}}$ .

### Глава 2

**2.4.**  $\sin x = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{\alpha}{2}$ . **2.5.**  $\cos x = \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$ . **2.6.**  $\cos x = \frac{3}{2} \sin^2 \varphi - 1$ .

**2.7.**  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ . **2.9.**  $\frac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha)$ . **2.10.**  $\cos x = 1 - 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$

**2.11.**  $\operatorname{tg} x = \sqrt{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ . **2.12.**  $90^\circ$ . **2.13.**  $\cos x = \sqrt{\frac{1}{3}(1 + 2 \cos \alpha)}$ .

**2.14.**  $\cos x = \sqrt{\frac{2(1 + 2 \cos \alpha)}{3(1 + \cos \alpha)}}$ . **2.15.**  $a\sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ .

**2.18.** Смотрите задачу 2 п. 5.2 гл. 2.

**2.20.** Сначала постройте развертку искомого тетраэдра по аналогии с п. 2.1 гл. 2.

**2.21.** Отложите на ребрах искомого триэдра равные отрезки  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ . По заданным углам можно построить отрезки  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$

и треугольник  $ABC$ . Затем, пользуясь разверткой (рис. 24), постройте триэдр  $OABC$ .

**2.24.** Проведите плоскость, перпендикулярную общей прямой данных плоскостей.

**2.25.** См. задачу 1 § 5 гл. 2.

**2.26.** В произведении  $\Delta = \sin \hat{A} \sin \beta \sin \gamma$  замените  $\sin \hat{A}$ , пользуясь равенством (2.10). Полученное выражение преобразуйте к заданному виду.

**2.28.** Разверните поверхность пирамиды на плоскость основания, разрезав ее по боковому ребру.

**2.30.**  $\arccos(\operatorname{ctg} \alpha)$ ,  $\arcsin \frac{1}{\sqrt{2} \sin \alpha}$ .

### Глава 3

**3.3.**  $\frac{3}{4} \sqrt{(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2}$ . **3.4.**  $\frac{a^2 \sin \beta (1 + \sin \alpha)}{\cos \alpha}$ . **3.5.**  $\frac{7S}{8 \cos \frac{\alpha}{2}}$ .

**3.6.**  $\frac{1}{4} a^2 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{15})$ . **3.7.**  $\frac{a^2 \sin \alpha (1 + \cos \beta)}{\cos \beta}$ . **3.8.**  $\frac{(a+b) \sqrt{ab} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$ .

**3.9.**  $\frac{1}{6} S \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{S \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$ . **3.14.** Используйте задачи 1 и 2 § 2 гл. 1.

**3.15.**  $l^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}$ . **3.16.**  $\frac{-2l^3 \cos \alpha \cos \frac{\alpha}{2}}{3 \sin^3 \frac{\alpha}{2}}$ .

**3.17.**  $2 \cos \alpha$ . Рассмотрите ортогональную проекцию второго сечения на плоскость первого сечения.

**3.20.**  $\cos x = \frac{1}{3}(\sqrt{7} - 1)$ .

### Глава 4

**4.1.** а) окружность, б) сфера. **4.2.** Сфера. **4.3.** Плоскость.

**4.4.** Сфера, концентричная данной.

**4.5.** Сфера с диаметром  $AO$  ( $A$  — данная точка,  $O$  — центр данной сферы) с исключенной точкой  $A$ .

**4.6.** Окружность, если  $AB < 2r$ ; точка, если  $AB = 2r$ ; пустое множество, если  $AB > 2r$ .

**4.7.** Ось окружности  $ABC$ .

**4.8.** Четыре прямых.

**4.9.** Две плоскости, параллельные плоскости  $\alpha$ .

**4.10.** Плоскость, параллельная данной.

4.11. См. задачу № 1.21.

4.13. Прямая серединной плоскости.

4.14. Окружность серединной плоскости с центром в точке пересечения проекций данных прямых. Радиус этой окружности равен  $\sqrt{d^2 - \frac{1}{2}a^2}$ , где  $a$  — расстояние между данными прямыми.

4.15. Плоскость.

4.16. Окружность.

4.17. Четыре полуплоскости. Найдите сначала точки искомого ГМТ в плоскости, перпендикулярной данным.

4.18. Четыре полосы (четырёхгранная призматическая поверхность), перпендикулярным сечением которых является прямоугольник с вершинами на данных плоскостях.

4.19. Окружность в плоскости, проходящей через точку  $A$  перпендикулярно той из данных прямых, которая не содержит точку  $A$ .

4.20. Круговая цилиндрическая поверхность, диаметрально противоположными образующими которой являются прямая  $a$  и параллельная ей прямая, содержащая точку  $A$ . Эти две прямые исключаются.

4.21. Линия пересечения половины круговой цилиндрической поверхности с плоскостью.

## Глава 5

5.1.  $\bar{a} \parallel \bar{b}$ .      5.2. 14.      5.3. 5.      5.4.  $\frac{1}{8}\sqrt{(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2}$ .

5.5.  $\overline{AC} = \overline{DB}$ ,  $S = \frac{1}{4}|\overline{AB} \times \overline{DC}| = 3\sqrt{3}$ .      5.7. 1/12.      5.8. 8/3.

5.10. По условию существуют числа  $x, y, z$ , для которых  $x(\bar{a} \times \bar{b}) + y(\bar{b} \times \bar{c}) + z(\bar{c} \times \bar{a}) = \bar{0}$ . Отсюда следует компланарность векторов  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  и затем коллинеарность векторов  $\bar{a} \times \bar{b}$ ,  $\bar{b} \times \bar{c}$ ,  $\bar{c} \times \bar{a}$ .

5.11. Используйте задачу п. 2.2 гл. 5.

5.12. 3.      5.13. 11.      5.14.  $\sin \varphi = \frac{4\sqrt{2}}{45}$ .      5.15.  $\cos \varphi = \frac{18}{\sqrt{374}}$ .

5.16.  $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = (-7, 14, -7)$ ,  $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (10, 13, 19)$ .

5.18. Прямые, данные в условии задачи, коллинеарны соответственно векторам  $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$ ,  $\bar{b} \times (\bar{c} \times \bar{a})$ ,  $\bar{c} \times (\bar{a} \times \bar{b})$ .

5.20.  $\frac{1 + \alpha\beta\gamma}{(1 + \alpha)(1 + \beta)(1 + \gamma)}$ ,  $\frac{S_1}{S} = \frac{V_{OA_1B_1C_1}}{V_{OABC}}$ , где  $O$  — произвольная точка вне плоскости  $ABC$ .

5.22. Привлеките формулу (5.9) и примените правило умножения двух определителей.

## Глава 6

**6.3.** Сфера с центром в центроиде тетраэдра.

**6.6.** Дважды примените формулу (6.7).

$$6.10. \frac{1}{3} \sqrt{2S_1 S_2 S_3}.$$

$$6.11. \frac{abc}{ab + bc + ca}.$$

$$6.12. \frac{\sqrt{3}l^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{2(4 - 3 \cos^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$6.13. \frac{d^3}{3 \sin \frac{\alpha}{2} (1 + 2 \cos \alpha)}.$$

$$6.15. \frac{\sqrt{3}}{2} h^3.$$

$$6.19. \frac{5}{27}.$$

$$6.20. \frac{k^2(k+3)}{1+3k}.$$

$$6.22. 4\sqrt{2} - 5.$$

$$6.23. \frac{2}{1 + \sqrt{5}}.$$

**6.24.** Пара плоскостей, содержащих прямую  $CD$ . Одна из них проходит через середину ребра  $AB$ , а другая параллельна ему. Прямая  $CD$  исключается.

**6.25.** Четыре прямые:  $DS$ ,  $DA_1$ ,  $DB_1$ ,  $DC_1$ , где  $S$  — центроид грани  $ABC$ , а точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  симметричны вершинам  $A$ ,  $B$ ,  $C$  относительно середин противоположных сторон треугольника  $ABC$ .

**6.26.** Пять точек: центроид данного тетраэдра и четыре точки, симметричные его вершинам относительно центроида.

**6.29.** См. п. 2.2 гл. 6.

**6.31.** См. задачу 2 п. 2.1 гл. 1. Искомая точка удалена от грани  $ABC$  на расстояние  $\sqrt{-\overline{DA_1} \cdot \overline{DB_1}}$ .

**6.37.** Докажите равенство  $S_1 \overline{JA} + S_2 \overline{JB} + S_3 \overline{JC} + S_4 \overline{JD} = \bar{0}$  и сравните его с (6.2).

**6.42.** В равногранном тетраэдре диаметр вписанной сферы равен половине его высоты.

**6.43.** Преобразуйте формулу (6.42).

## Глава 7

$$7.1. \frac{\pi S \sqrt{2S}}{3 \cos^3 \alpha \sqrt{\sin^3 2\alpha}}.$$

$$7.3. \cos \alpha = \frac{1 + \sqrt{17}}{8}.$$

$$7.4. 252\pi \text{ и } 720\pi.$$

$$7.5. \frac{\lambda^2(\lambda+3)}{1+3\lambda}.$$

$$7.6. \frac{384}{125\pi}.$$

$$7.7. \frac{1}{3} \pi a^3 (30 - 16\sqrt{2}).$$

$$7.8. \sin^4 \frac{\alpha}{4} \left( 2 + \cos \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$7.9. \frac{2}{3} \pi (R - a)^2 (2R + a).$$

$$7.10. \frac{1}{12} \pi a^3 \sqrt{2}.$$

$$7.11. \frac{\left( 1 + \sin \frac{\alpha}{2} \right)^3}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{4}}.$$

$$7.12. \frac{1}{12} \pi R^3 (8 - \sqrt{3}).$$

$$7.13. 1 : 2. \quad 7.15. \frac{3}{4} \pi R^3.$$

**7.16.** Сначала, пользуясь леммой п. 4.1 гл. 7, найдите площадь поверхности, образованной вращением двух симметричных друг другу сторон.

**7.17.**  $\pi a^2 12\sqrt{3}$ ,  $9\pi a^3$ .      **7.18.**  $\frac{1}{2}\pi d^3 \sin^2 \varphi$ ,  $S = 2d^2 \sin \varphi (\sin \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{\varphi}{2})$ .

**7.19.**  $V = \frac{1}{2}\pi a^2 (2b + a \sin \alpha + a \cos \alpha)$ ,  $S = 4\pi a (2b + a \sin \alpha + a \cos \alpha)$ .

**7.20.**  $\pi a^3 \sin \alpha (\frac{1}{2} + \sin \alpha)$ ,  $4\pi a^2 \sin \alpha (\frac{1}{2} + \sin \alpha)$ .      **7.21.**  $\frac{1}{2}\pi a^2 h$ .

**7.22.** Поставьте призму на боковое ребро.      **7.23.**  $2\pi^2 R^2 m \cos \varphi$ .

**7.24.**  $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$ . Искомый объем равен сумме объемов тел вращения двух треугольников  $A_1 C_1 D_1$  и  $AA_1 C_1$  около диагонали  $AC_1$  (рис. 110).

**7.25.**  $4\pi R^3 (\pi + 4)$ . Используйте теорему п. 4.4 гл. 7. Искомый объем равен сумме объемов двух тел вращения около прямой  $l$ , полученных вращением проекций цилиндра на плоскость  $\alpha$  и на перпендикулярную ей плоскость, проходящую через  $l$ .

**7.26.**  $\frac{1}{6}\pi R^3 (3\pi - 4\sqrt{2})$ .

## Глава 8

**8.1.**  $\sqrt{39}$ .      **8.2.**  $\frac{4Rr}{(R+r)^2}$ .      **8.4.**  $\frac{19}{9}\pi a^2$ .      **8.5.**  $\arcsin \frac{4}{5}$ .      **8.7.**  $\frac{ab}{2c}$ ,  $\frac{bc}{2a}$ ,  $\frac{ca}{2b}$ .

**8.8.**  $\frac{1}{2}(2 - \sqrt{3})$ .      **8.9.**  $4\pi Rr$ .      **8.10.**  $\frac{4}{9}\pi a\sqrt{3}$ .      **8.11.**  $2\pi(\sqrt{3} - 1)R$ .

**8.12.**  $S = \pi(r^2 + h^2)$ .      **8.13.**  $S = \pi r^2$ .

**8.14.** Частями сферы являются сферические двуугольники с площадью  $\frac{1}{4}\pi a^2 (2 - \sqrt{3})$  каждый и сферические четырехугольники с площадью  $\frac{1}{2}\pi a^2 (\sqrt{3} - 1)$  каждый.

**8.15.**  $\frac{1}{6}\pi a^2 (2\sqrt{3} - 3)$ .      **8.16.**  $\sqrt[3]{\frac{6V - 3Q}{\pi}}$ .      **8.18.**  $\frac{a(2b - a)}{2\sqrt{3b^2 - a^2}}$ .      **8.21.**  $\frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$ .

**8.24.** Три сферы, имеющие две общие точки.      **8.27.**  $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{27} (8\sqrt{3} - 9)$ .

## Глава 9

**9.5.** Используйте неравенство (9.3).

**9.7.** Сначала докажите, что  $d \leq a + b + c$ .

**9.10.** Если  $2a$  — ребро основания,  $l$  — апофема, то  $\frac{R}{r} = \frac{a^2 + l^2}{2a(l - a)}$ .

Доказав это, исследуйте полученное отношение. Равенство в доказываемом неравенстве достигается в случае, когда центры сфер совпадают.

**9.11.** Рассмотрите сечение тетраэдра, параллельное его грани и содержащее центр вписанной сферы.

**9.15.** Плоские углы триэдра  $OACD_1$  равны  $2\alpha$ ,  $2\beta$ ,  $2\gamma$ , если  $O$  — центр прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

**9.16.** Используйте задачу 2.2.

**9.17.** Привлеките векторы  $\bar{n}_i$  задачи п. 2.2 гл. 5. Из них можно построить косой четырехугольник. Примените к нему неравенство §3 гл. 9.

**9.18.** Запишите неравенства задачи 9.17 для трех косых четырехугольников данного тетраэдра. Кроме того, привлеките неравенство (2.3) для суммы двугранных углов триэдра.

**9.19.**  $\frac{S\sqrt{S}}{6\sqrt{6}}$ . **9.21.**  $V = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi R^3$ . **9.22.**  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ ,  $V = \frac{2\sqrt{3}\pi}{27}l^3$ . **9.23.**  $\frac{8}{3}\pi r^3$ .

**9.24.**  $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ . **9.25.**  $h = 2r = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$ . **9.26.**  $\varphi = 45^\circ$ ,  $V = \frac{S\sqrt{2S}}{6(1+\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}}$ .

**9.27.**  $R\sqrt{2}$ . **9.28.**  $h = \frac{4}{3}R$ ,  $V = \frac{16}{81}nR^3 \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$ . **9.29.**  $\arccos \frac{1}{3}$ .

**9.30.**  $h : r = \sqrt{2}$ . **9.31.**  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ . **9.32.**  $6R^2$ . **9.33.**  $\frac{2\sqrt{3}}{3}R$ . **9.34.**  $2\pi\sqrt[3]{4V^2}$ .

**9.35.**  $16\sqrt{\frac{21}{17}}$ . **9.36.**  $\frac{4\pi\sqrt{3}}{81}$ .

**9.37.** Вершины основания пирамиды находятся на средних линиях квадрата на расстоянии  $\frac{1}{10}a$  от края.  $V = \frac{8a^3}{75\sqrt{10}}$ .

**9.38.**  $\frac{2}{9}V$ . **9.39.**  $r = \frac{2}{3}R$ ,  $\frac{1}{3}h$  — высота цилиндра.

## Часть II

### Глава 10

**10.9.** Две скрещивающиеся прямые имеют три оси симметрии.

**10.10.** Пусть прямая  $c$  — произвольная секущая данных скрещивающихся прямых  $a$  и  $b$ . Если  $\alpha$  и  $\beta$  — плоскости симметрии прямых  $a$  и  $c$ ,  $c$  и  $b$ , то  $S_\beta \circ S_\alpha$  — искомый поворот.

**10.12.** Осью симметрии служит прямая, содержащая середины отрезков  $AC$  и  $BD$ .

**10.13.** Пусть дан четырехгранный угол  $SABCD$  и  $SA = SB = SC = SD$ . Тогда прямая, проходящая через середины отрезков  $AC$  и  $BD$ , является осью симметрии данного угла.

**10.17.**  $S_b \circ S_a = S_c \circ S_b$ , поэтому  $S_c = S_b \circ S_a \circ S_b$ .

**10.18.** Используйте поворот около первой прямой на угол, величина которого равна величине двугранного угла правильного тетраэдра.

**10.21.** Тетраэдры  $OABC$  и  $O'A'B'C'$  равны. См. доказательство теоремы §5 гл. 10.

**10.24.** Рассмотрите конус с вершиной на данной прямой  $l$ , образующие которого наклонены к данной плоскости под углом  $\varphi$ .

**10.26.** Шесть указанных плоскостей пересекаются в точке, симметричной точке  $S$  относительно центроида данного тетраэдра.

**10.30.**  $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \varphi \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ .      **10.31.**  $\cos x = 1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ .

**10.32.**  $\cos x = -\sin^2 \psi + \cos^2 \psi \cos \varphi$ .      **10.34.** Винтовое движение.

**10.35.** Тожественное преобразование.

**10.36.** Поворот около прямой, перпендикулярной плоскости параллелограмма.

**10.37.** Винтовое движение с осью  $OA$ , углом  $180^\circ$  и вектором  $2\overline{AO}$ , где  $O$  — центр данной симметрии,  $A$  — его ортогональная проекция на плоскость симметрии.

**10.38.** Винтовое движение, ось которого параллельна  $l$ , угол равен  $180^\circ$ . Если  $\bar{r} \perp l$ , то имеем осевую симметрию.

**10.39.** Прямые  $a, b, c$  либо попарно скрещиваются и имеют общий перпендикуляр, либо лежат в одной плоскости и имеют общую точку.

**10.40.** Прямые  $a, b, c$  попарно перпендикулярны, при этом прямые  $a$  и  $b$  пересекаются.

**10.43.** Постройте две пересекающиеся прямые, соответственно параллельные данным прямым  $a$  и  $b$ .

**10.44.** Четыре поворота и четыре поворотные симметрии.

**10.45.** Эти точки лежат на бимедиане тетраэдра, которая является его осью симметрии.

**10.46.** Выполните поворот на  $90^\circ$  около прямой, соединяющей центры граней  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$ .

**10.47.** Винтовое движение с углом  $180^\circ$  и осью, лежащей в плоскости данных прямых.

**10.48.** Композиция  $S_c \circ S_b \circ S_a$  при  $a \parallel b \parallel c$  есть осевая симметрия, осью которой является образ прямой  $a$  при переносе на вектор  $\frac{\bar{r}}{2}$ , если  $S_c \circ S_b = T_{\bar{r}}$ .

**10.49.** Переносная симметрия, плоскость которой параллельна плоскости данной зеркальной симметрии.

**10.50.** Переносная симметрия. Представьте данный поворот композицией двух зеркальных симметрий, плоскость одной из которых перпендикулярна плоскости данной зеркальной симметрии.

**10.51.** Поворотная симметрия.

**10.52.** Композиция указанных центральных симметрий есть симметрия относительно центра сферы.

**10.53.** Композиция осевых симметрий относительно перпендикулярных биссектрис углов  $BOC$  и  $COA$  триэдра  $OABC$  есть зеркальная

симметрия  $S_l$  и отображает  $OB$  на  $OA$ . Следовательно, прямая  $l$  содержит биссектрису угла  $AOB$ .

**10.54.** Три плоскости, определяемые линиями пересечения плоскостей граней триэдра с его высотными плоскостями (п. 8.4 гл. 10).

**10.55.** Пусть  $m, n, p$  — биссектрисы плоских углов триэдра  $Oabc$ , противоположащих соответственно ребрам  $a, b, c$ . Композиция  $S_n \circ S_m \circ S_p$  есть поворот, отображающий луч  $a$  на себя. Поэтому задача сводится к построению оси  $a$  этого поворота. Ребра  $b$  и  $c$  — образы луча  $a$  при симметриях  $S_p$  и  $S_n$ .

**10.56.** Прямой круговой конус (коническая поверхность) с вершиной  $B$  и направляющей окружностью с центром в середине отрезка  $AB$ , лежащей в плоскости симметрии точек  $A$  и  $B$ .

**10.57.** Композицией трех зеркальных симметрий, плоскости которых имеют единственную общую точку, является поворотная симметрия. Искомая плоскость параллельна ее плоскости.

**10.58.** Данное равенство можно записать так:  $(Z_B \circ Z_A) \circ S_m \circ (Z_A \circ Z_B) = S_m$ , но  $Z_B \circ Z_A = T_{\bar{r}}$ , где  $\bar{r} = 2\overline{AB}$ . Следовательно,  $T_{\bar{r}} \circ S_m \circ T_{\bar{r}} = S_m$ , что имеет место тогда и только тогда, когда  $\bar{r} \parallel m$ .

**10.59.** Пусть  $A_1$  и  $B_1$  — ортогональные проекции точек  $A$  и  $B$  на плоскость  $\alpha$ . Композиция  $Z_A \circ S_\alpha$  есть винтовое движение с осью  $A_1A$ , углом  $180^\circ$  и вектором  $2\overline{A_1A}$  (задача 10.37). Поэтому движение  $(Z_A \circ S_\alpha)^2$  есть перенос на вектор  $4\overline{A_1A}$ . Аналогично движение  $(S_\alpha \circ Z_B)^2$  есть перенос на вектор  $4\overline{B_1B}$ . Равенство  $\overline{A_1A} = \overline{B_1B}$  имеет место в том и только в том случае, когда середина отрезка  $AB$  принадлежит плоскости  $\alpha$ .

**10.60.**  $\frac{a^3}{1 + \sqrt{2}}$ .      **10.61.**  $\frac{3}{2}a^3$ .      **10.62.**  $\frac{a^3\sqrt{2}}{6(2 + \sqrt{6})}$ .      **10.63.**  $\frac{a^3}{12\sqrt{2}}$ .

**10.67.** Симметрия относительно плоскости  $x + y + z = 1$ .

**10.68.** Симметрия относительно прямой  $x = y = z$ .

**10.69.** Симметрия относительно прямой  $\begin{cases} 3y - x = 5, \\ z = 1. \end{cases}$

**10.70.** Поворот на угол  $\varphi = \arccos\left(-\frac{29}{30}\right)$  около прямой  $\frac{x-5}{7} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{1}$ .

**10.71.** Винтовое движение с осью  $\begin{cases} y = 2(x - 10), \\ z + 2 = 0, \end{cases}$  углом  $\arccos \frac{2}{3}$  и вектором  $\bar{r}(3, 6, 0)$ .

**10.72.** Поворотная симметрия с центром  $(10/3, -2/3, 5/3)$ , углом  $\arccos \frac{7}{10}$  и плоскостью, перпендикулярной вектору  $(1, 1, -7)$ .

**10.73.** Переносная симметрия относительно плоскости  $2x - 4y - 5 = 0$  и вектором  $\bar{r}(0, 0, 3)$  переноса.

**10.74.** Переносная симметрия с плоскостью  $x + 2y + 3z - 7 = 0$  и вектором  $\bar{r}(6, 12, -10)$ .

**10.75.** Поворотная симметрия с центром  $(9, -3, 3/2)$ , углом  $90^\circ$  и осью, коллинеарной вектору  $(2, 2, 1)$ .

**10.76.** Винтовое движение с осью  $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-14}{3}$ , углом  $180^\circ$  и вектором  $(-1, -2, -3)$ .

**10.77.** Симметрия относительно плоскости  $5x + 2y + z + 30 = 0$ .

**10.78.**

$$x' = -\frac{1}{9}x + \frac{8}{9}y + \frac{4}{9}z,$$

$$y' = \frac{8}{9}x - \frac{1}{9}y + \frac{4}{9}z,$$

$$z' = \frac{4}{9}x + \frac{4}{9}y - \frac{7}{9}z.$$

**10.80.**

$$x' = \frac{1}{9}x + \frac{8}{9}y - \frac{4}{9}z,$$

$$y' = \frac{8}{9}x + \frac{1}{9}y + \frac{4}{9}z,$$

$$z' = -\frac{4}{9}x + \frac{4}{9}y + \frac{7}{9}z.$$

**10.82.**

$$x' = \frac{4}{9}x + \frac{1}{9}y + \frac{8}{9}z - 14,$$

$$y' = \frac{7}{9}x + \frac{4}{9}y - \frac{4}{9}z - 2,$$

$$x' = -\frac{4}{9}x + \frac{8}{9}y + \frac{1}{9}z + 5.$$

**10.79.**

$$x' = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y + \sqrt{\frac{3}{8}}z,$$

$$y' = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y - \sqrt{\frac{3}{8}}z,$$

$$z' = -\sqrt{\frac{3}{8}}x + \sqrt{\frac{3}{8}}y + \frac{1}{2}z.$$

**10.81.**

$$x' = \frac{11}{15}x + \frac{2}{15}y + \frac{10}{15}z + 2,$$

$$y' = \frac{2}{15}x + \frac{14}{15}y - \frac{5}{15}z + 4,$$

$$z' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + 6.$$

**10.84.**

$$\frac{1}{27} \begin{pmatrix} 10 & 23 & -10 \\ -25 & 10 & -2 \\ 2 & 10 & 25 \end{pmatrix}.$$

## Глава 11

**11.3.** 27. **11.4.**  $\frac{2}{3}$ .

**11.7.** Задача сводится к предыдущей, так как искомая сфера касается плоскости, симметричной одной из данных плоскостей относительно плоскости симметрии данных точек.

**11.8.** Примените гомотегию с центром в точке касания данной и искомой сфер. Эту точку можно построить.

**11.10.** Из условия задачи следует, что данное преобразование сохраняет величину угла между прямыми, следовательно, является подобием.

**11.11.** Достаточно доказать, что данное преобразование отображает каждую сферу на сферу.

**11.12.** Прямая, соединяющая точку пересечения трех данных плоскостей с точкой пересечения плоскостей, каждая, из которых содержит одну из данных точек и параллельна одной из данных плоскостей. Указанные две точки этой прямой исключаются.

**11.13.** Если прямые  $m$  и  $l$  скрещиваются, то искомым множеством является параллельная им плоскость. Если эти прямые пересекаются, то искомым множеством будет содержащая их плоскость без этих прямых. При  $m \parallel l$  задача теряет смысл.

**11.14.** Рассмотрите образ одной из данных плоскостей при гомотетии с центром в данной точке и коэффициентом  $-\frac{1}{k}$ .

**11.17.** Рассмотрите сферу, описанную около данного тетраэдра.

**11.19.**  $\arccos(\sqrt[3]{2} - 1)$ .

**11.22.** Внутренность многогранника, который получается отсечением от данного тетраэдра гомотетичных ему тетраэдров с центрами гомотетий в его вершинах и коэффициентом  $\frac{1}{4}$ .

## Глава 12

**12.7.** Примите во внимание, что в аффинной системе координат, заданной тройкой сопряженных полудиаметров эллипсоида, он имеет простейшее уравнение  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

**12.8.** 1 : 12.

**12.9.** Используйте аффинную эквивалентность сферы и эллипсоида.

**12.11.**  $2x + y - 1 = 0$ ,  $\bar{r}(1, -3, 1)$ .

**12.12.**  $x' = x + x_0z$ ,  $y' = y + y_0z$ ,  $z' = z + z_0z$ .

**12.13.**  $x' = ax$ ,  $y' = by$ ,  $z' = cz$ .

### Задачи общего содержания

- 8.**  $30^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 60^\circ$ .    **9.**  $\frac{1}{2}Q\sqrt{S \sin 2\varphi}$ .    **10.**  $\frac{1}{2}(\sqrt{\pi^2 + 2} - \pi)$ .  
**11.**  $\frac{\alpha^2 a^3 \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}{192\pi^2 \sin^3 \frac{\alpha}{2}}$ .    **12.**  $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$ .    **13.**  $Sh < V < \frac{4}{3}Sh$ .    **14.**  $\frac{\sqrt{2}}{6}\pi R^3(\sqrt{2} + \sqrt{3})^3$ ;  
 $\frac{1}{2}\pi R^2(22 + 9\sqrt{6})$ .    **17.**  $\frac{1}{18}\pi a^3\sqrt{3}$ .    **18.**  $d^2 = R^2 - 2\rho r$ .    **19.**  $\frac{1}{3}R$ .    **20.**  $\frac{Rr}{R \pm r}$ .  
**21.**  $R(\sqrt{2} - 1)$ .    **22.**  $\frac{2l \sin \alpha}{2 + \sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha}$ .    **23.**  $\frac{a \sin \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$ .    **24.**  $R = \frac{\sqrt{4c^4 - a^2b^2}}{2\sqrt{4c^2 - a^2 - b^2}}$ ,

- $r = \frac{ab\sqrt{4c^2 - a^2 - b^2}}{2(a\sqrt{4c^2 - a^2} + b\sqrt{4c^2 - b^2})}$ . **25.**  $\frac{4}{3}r\sqrt{3}$ . **26.**  $\cos x = 1 - 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}$ .
- 27.**  $\frac{a \sin^2 \frac{\omega}{2}}{\sqrt{2} \cos \frac{\omega}{2} \sqrt{-\cos \omega} (1 + \sqrt{-\cos \omega})}$ . **28.**  $45^\circ$ ;  $\frac{27}{8}\pi b^2$ . **29.**  $\frac{4R\sqrt{14}}{7}$ . **30.**  $V = \frac{3}{2}\pi^2 R^3$ ,  
 $S = 3\pi R^2(1 + \pi)$ . **31.**  $\frac{1}{2}\pi R^3 \left(3\pi - \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$ . **32.**  $\frac{1}{2}\pi R^3 \left(3\pi + \frac{4}{3}\right)$ . **33.**  $\frac{4269\pi}{320}$ .
- 34.**  $2S$ . **35.**  $\operatorname{arctg} \sqrt{2}$ . **36.**  $\sin x = 2(\sqrt{2} - 1)$ . **38.** Искомый угол равен углу между вектором, перпендикулярным оси поворота и его образом. На основании системы задачи № 37 вектор  $(a_1 - 1, b_1, c_1)$  ортогонален оси, а его образом является вектор  $(1 - a_1, -a_2, -a_3)$ . **39.** Образом вектора  $\bar{n}$  является вектор  $-\bar{n}$ . **40.** Вектор  $(a_1 + 1, b_1, c_1)$  ортогонален оси поворотной симметрии (№ 39). **41.** Перенос. **46.** Прямые  $\alpha \cap f^{-1}(\alpha)$  и  $\alpha \cap f(\alpha)$ , если  $f(\alpha) \parallel \alpha$ . **47.**  $x' = -x - y - z + 1$ ,  $y' = x$ ,  $z' = y$ . Неподвижен центр тяжести тетраэдра  $ABCD$ . **48.** Формулы обратного преобразования:  $x' = y$ ,  $y' = z$ ,  $z' = -x - y - z + 1$ . Данная плоскость имеет уравнение  $x + y + z = 0$ , ее образ  $x - 1 = 0$ , прообраз  $z - 1 = 0$ . **49.** К цели приводит композиция центральных симметрии с центрами в заданных серединах сторон.
- 50.**  $\frac{3}{2} \leq \lambda < 2$ . **51.**  $2 \arccos(\sqrt{3} - 1)$ . **52.** Конус, образующие которого наклонены к плоскости основания под углом  $\arccos \frac{1}{3}$ . **53.**  $\frac{8}{3}R^2$ . **55.** Этот угол равен  $60^\circ$ . **57.**  $3r$ .

## *Литература*

- [1] Адамар Ж. Элементарная геометрия. Ч. 2. Стереометрия. — М.: Учпедгиз, 1958.
- [2] Атанасян Л. С. и др. Геометрия 10–11. — М.: Просвещение, 1992.
- [3] Бевз Г. П. Геометрия тетраэдра. — Киев: Радянська школа. 1974.
- [4] Готман Э. Г., Скопец З. А. Решение геометрических задач аналитическим методом. — М.: Просвещение, 1979.
- [5] Клопский В. М., Скопец З. А., Ягодовский М. И. Геометрия 9–10. — М.: Просвещение, 1977.
- [6] Наумович Н. В. Геометрические места в пространстве и задачи на построение. — М.: Учпедгиз, 1962.
- [7] Перепёлкин Д. И. Курс элементарной геометрии. Ч. 2. — М.–Л.: ГИТТЛ, 1949.
- [8] Понарин Я. П. Элементарная геометрия. Т. 1. — М.: МЦНМО, 2004.
- [9] Понарин Я. П. Преобразования пространства. — Киров: Вятский госпедуниверситет, 2000.
- [10] Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф. Задачи по стереометрии. — М.: Наука, 1989.
- [11] Рабинович В. Л. Вычисление объемов с помощью принципа Кавальери // «Квант». 1972. № 6. С. 9–12.
- [12] Розенфельд Б. А., Сергеева Н. Д. Стереографическая проекция. — М.: Наука, 1973.
- [13] Сивашинский И. Х. Неравенства в задачах. — М.: Наука, 1967.
- [14] Скопец З. А., Понарин Я. И. Геометрия тетраэдра и его элементов. — Ярославль: Верхне-Волжское книжное изд-во. 1974.
- [15] Шевелёв Л. Я. Объем тел вращения // «Квант». 1973. № 8. С. 35–37.
- [16] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. — М.: Наука, 1970.

## Предметный указатель

- бимедиана тетраэдра, 91
- вектор ортоцентра, 109  
— центроида, 92
- группа преобразований, 205
- движение пространства, 183  
— — винтовое, 192
- двуугольник сферический, 145
- избыток угловой сферического  
треугольника, 146
- инверсия пространства, 149
- клин, 100
- кольцо шаровое, 126
- конус касательных, 142
- координаты барицентрические,  
102
- медиана тетраэдра, 92  
— триэдра, 39
- окружности сферы большие,  
— — малые, 140
- ориентация тройки векторов, 78  
— тетраэдра, 185
- ортоось триэдра, 41
- ортоцентр, 109
- ось конуса вписанного, 39  
— — описанного, 40  
— радикальная, 148  
— симметрии, 184
- параболоид гиперболический, 69
- параллелепипед описанный, 19,  
113
- перенос параллельный, 183
- перпендикуляр общий скрещива-  
ющихся прямых, 20
- плоскости перпендикулярные, 18  
— триэдра высотные, 41  
— — медианные, 39
- плоскость биссекторная, 39  
— перпендикулярная прямой, 17  
— радикальная, 147  
— родства, 233  
— срединная, 68  
— симметрии, 184
- поворот гомотетический, 225  
— пространства, 188
- пояс сферический, 144
- преобразование аффинное, 228  
— инволюционное, 149  
— подобия, 222  
— родственное, 233
- принцип Кавальери, 126
- проекция стереографическая, 154
- произведение векторное, 79  
— смешанное, 80
- прямая Эйлера, 110
- прямые перпендикулярные, 17  
— скрещивающиеся, 19
- расстояние между прямыми, 21
- самосовмещение фигуры, 205
- сегмент сферический, 143  
— шаровой, 123
- сектор шаровой, 124

симметрия зеркальная, 184  
— осевая, 183  
— переносная, 190  
— поворотная, 192  
— центральная, 183  
синус Штаудта триэдра, 36  
слой шаровой, 125  
степень точки, 146  
сфера Аполлония, 72  
сферы вневписанные, 107  
— ортогональные, 148  
  
теорема Гюльдена, 129–133,  
— Жергона для триэдра, 242  
— косинусов для тетраэдра, 94  
— — для триэдра, 34  
— Лейбница, 93  
— Менелая для триэдра, 87  
— о задании подобия, 222  
— о трех перпендикулярах, 17  
— синусов для тетраэдра, 99  
— — для триэдра, 35  
— Чевы для триэдра, 87  
тетраэдр ортогональный, 110  
— ортоцентрический, 109  
— равногранный, 112  
тождество Бретшнейдера, 153  
— Лагранжа, 161  
тор, 128  
точка Люиллье, 172  
— Монжа, 209

треугольник сферический, 46  
триэдры полярные, 32  
— смежные, 31  
  
угол двугранный, 24  
— между большими окружностями, 45  
— между плоскостями, 24  
— между прямой и плоскостью, 23  
— между скрепляющимися прямыми, 23  
— трехгранный (триэдр), 31  
  
фигуры равные (конгруэнтные), 183  
формула Достора, 97  
— Ньютона–Симпсона, 119  
— проекций граней тетраэдра, 53  
— Сервуа, 98, 121  
— Штаудта, 97, 100, 152  
— Юнгиуса, 99  
  
центроид тетраэдра, 92  
центр подобия, 223  
— радикальный, 148  
  
четверка прямых гиперболическая, 108  
  
эллипсоид Штейнера, 237