РОССИИСКАЯ АКАДЕМИЯ ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИИ ПСИХОЛОГО СОЦИАЛЬНЫИ ИНСТИТУТ

О.Ю. Ермолаев

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА ДЛЯ ПСИХОЛОГОВ

Учебник

Второе издание исправленное

Рекомендовано Редакционно издательским Советом Российской Академии образования к использованию в качестве учебно методического пособия

Москва
Московский психолого социальный **институт**
Издательство Флинта
2003

ББК 88 4
Е 74

Под редакцией
профессора докт психол наук *Т М Марютиной*

Рецензент
профессор канд техн наук *В Н Калинина*

Ермолаев О Ю

Математическая статистика для психологов Учебник / О Ю Ермолаев — 2 е изд испр — М Московский психолого социальный институт Флинта 2003 — 336 с — (Библиотека психолога)

ISBN 5 89502 310 X (МПСИ)
ISBN 5 89349 361 3 (Флинта)

Учебник представляет практическое руководство по математической статистике для психологов не имеющих специальных математических знаний В доступной иллюстративной форме на примерах рассматриваются основные методы обработки данных включая непараметрические и параметрические критерии оценки различий корреляционный дисперсионный факторный регрессионный анализы Приведены необходимые теоретические сведения и формулы для расчета типовых задач наиболее часто встречающихся в экспериментальных психологических исследованиях

Учебник предназначен для студентов вузов но может также быть использован и исследователями в различных областях науки применяющими статистические методы при решении практических задач

ISBN 5 89502 310 X (МПСИ)
ISBN 5 89349 361 3 (Флинта)

Оглавление

Введение

В древней китайской энциклопедии говорится, что «животные подразделяются на а) принадлежащих Императору, б) бальзамированных, в) прирученных г) молочных поросят, д) сирен, е) сказочных, ж) бродячих собак, з) включенных в настоящую классификацию, и) буйствующих, как в безумии, к) неисчислимых, л) нарисованных очень тонкой кисточкой из верблюжей шерсти, м) и прочих, н) только что разбивших кувшин, о) издалека кажущихся мухами» (Цит по *Мишель Фуко* Слова и вещи Санкт-Петербург 1994 г) Сегодня этот перечень вызывает у нас улыбку А не будут ли и наши статистические выкладки казаться столь же забавными нашим далеким потомкам? Кто знает?

«Зрелость науки обычно измеряется тем, в какой мере она использует математику Сама же математика не является наукой в эмпирическом смысле, но представляет собой формальную логическую, символическую систему, своего рода игру знаков и правил», — так начинает С С Стивенс свой капитальный труд «Экспериментальная психология», оказавший большое влияние на становление психологии не только за рубежом, но и в нашей стране Как же психологи используют математику?

Из истории психологии хорошо известно, что, например, психофизика начала свое развитие с установления математических закономерностей (знаменитая формула Вебера—Фехнера) В настоящее время математические процедуры обязательно входят в такие разделы психологии как психометрика, психодиагностика, дифференциальная психология Современная психогенетика, например, широко использует такой раздел высшей математики как структурное моделирование и т д

С другой стороны многие фундаментальные психологические теории например теория деятельности А Н Леонтьева теория развивающего обучения В В Давыдова психоанализ Фрейда трансактный анализ Берна и другие хорошо известные теории были созданы без всякой опоры на математику В то же время главное отличие отраслей психологических знаний использующих математические методы заключается в том что их предмет исследования не только может быть описан но **измерен** Возможность измерения того или иного психологического феномена свойства характеристики черты и т д открывает доступ для применения методов количественного анализа а значит и соответствующих вычислительных процедур

Наиболее естественным путем которым математика проникает в психологию является математическая статистика Современная статистика является разделом математики При этом многие статистические процедуры достаточно просты и легко выполнимы

Правильное применение статистики позволяет психологу

1) доказывать правильность и обоснованность используемых методических приемов и методов
2) строго обосновывать экспериментальные планы
3) обобщать данные эксперимента
4) находить зависимости между экспериментальными данными
5) выявлять наличие существенных различий между группами испытуемых (например экспериментальными и контрольными)
6) строить статистические предсказания
7) избегать логических и содержательных ошибок и многое другое

Нельзя забывать однако что сама по себе статистика — это только инструментарий помогающий психологу эффективно разбираться в сложном экспериментальном материале Наиболее важным в любом эксперименте является четкая постановка задачи тщательное планирование эксперимента построение непротиворечивых гипотез

Математическая статистика в руках психолога может и должна быть мощным инструментом позволяющим не только успешно лавировать в море экспериментальных данных но и прежде всего способствовать становлению его объективного мышления

Настоящее учебное пособие призвано решить следующие задачи

1) дать представление об основных статистических процедурах и способах их применения
2) научить студентов самостоятельно проводить первоначальную статистическую обработку данных экспериментальных исследований
3) научить студентов делать правильные психологические выводы на основе результатов статистического анализа
4) научить студентов понимать психологическую литературу в которои используется статистическая обработка экспериментальных данных
5) грамотно подготавливать данные для работы со статистическими пакетами на ЭВМ и правильно понимать результаты их работы
6) использовать данное пособие как справочник

Глава 1

ПОНЯТИЕ ИЗМЕРЕНИЯ

В своей работе психолог достаточно часто сталкивается с проблемой измерения индивидуально психологических особенностей таких например как креативность нейротизм импульсивность свойства неврной системы и т п Для этого в психодиагностике разрабатываются специальные измерительные процедуры в том числе и тесты Помимо того в психологии широко используются экспериментальные методы и модели исследования психических феноменов в познавательной и личностной сферах Это могут быть модели процессов познания (восприятия памяти мышления) или особенности мотивации ценностных ориентации личности и т п Главное заключается в том что в ходе эксперимента изучаемые характеристики могут получать количественное выражение Количественные данные полученные в результате тщательно спланированного эксперимента по определенным измерительным процедурам используются затем для статистической обработки

Измерение в самом широком смысле может быть определено как приписывание чисел объектам или событиям которое осуществляется по определенным правилам Эти правила должны устанавливать соответствие между некоторыми свойствами рассматриваемых объектов с одной стороны и ряда чисел с другой В целом можно сказать что измерение — это процедура с помощью которой измеряемый объект сравнивается с некоторым эталоном и получает численное выражение в определенном масштабе или шкале

В каждом конкретном случае измерение является операцией с помощью которой экспериментальным данным придается форма связного числового сообщения Именно закодированная в числовой форме информация позволяет использовать математические методы и выявлять то, что без обращения к числовой интерпретации могло бы остаться скрытым, кроме того, числовое представление объектов или событий позволяет оперировать сложными понятиями в более сокращенной форме Именно это и является причиной использования измерений в любой науке, в том числе и психологии В целом научно-исследовательскую работу психолога, проводящего эксперименты, можно представить по следующей схеме

ИССЛЕДОВАТЕЛЬ (психолог)

↓

предмет исследования (психические свойства процессы функции и т п)

↓

испытуемый (группа испытуемых)

↓

эксперимент (измерение)

↓

данные эксперимента (числовые коды)

↓

статистическая обработка данных эксперимента

↓

результат статистической обработки (числовые коды)

↓

выводы (печатный текст отчет диплом, статья и т п)

↓

ПОЛУЧАТЕЛЬ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ (руководитель курсовой дипломной или кандидатской работы заказчик читатель статьи и т п)

1.1. Измерительные шкалы

Любой вид измерения предполагает наличие единиц измерения Единица измерения это та «измерительная палочка», как говорил С Стивенс, которая является условным эталоном для осуществления тех или иных измерительных процедур В естественных науках и технике существуют стандартные единицы измерения, например, градус, метр, ампер и т д

Психологические переменные за единичными исключениями не имеют собственных измерительных единиц Поэтому в большинстве случаев значение психологического признака определяется при помощи специальных измерительных шкал

Согласно С Стивенсу (1951), существует четыре типа измерительных шкал (или способов измерения)

1) номинативная, номинальная или шкала наименований,

2) порядковая, ординарная или ранговая шкала,

3) интервальная или шкала равных интервалов,

4) шкала равных отношений, или шкала отношений

Все находящиеся в одной строчке наименования являются синонимами и поэтому в дальнейшем изложении будут использоваться на равных основаниях

Процесс присвоения количественных (числовых) значений, имеющейся у исследователя информации, называется кодированием Иными словами — ***кодирование*** это такая операция, с помощью которой экспериментальным данным придается форма числового сообщения (кода)

Применение процедуры измерения возможно только четырьмя вышеперечисленными способами Причем каждая измерительная шкала имеет собственную, отличную от других форму числового представления, или кода Поэтому закодированные признаки изучаемого явления, измеренные по одной из названных шкал, фиксируются в строго определенной числовой системе, определяемой особенностями используемой шкалы Измерения, осуществляемые с помощью двух первых шкал, считаются качественными, а осуществляемые с помощью двух последних шкал — количественными

Специфические особенности измерительных шкал обязательно должны учитываться при получении экспериментального материала в прикладных исследованиях После измерения, проведенного в той или иной шкале, исследователь будет оперировать реальными свойствами изучаемого психологического явления, представленного числовыми кодами Именно это и позволяет психологу применять соответствующие статистические операции к полученным экспериментальным данным

Поэтому закодированные признаки изучаемого яаления, измеренные по одной из названных выше шкал, фиксируются в строго определенной знаковой или числовой системе, задаваемой правилами построения используемой шкалы Нестандартизованная процедура оперирования с числами (кодами), полученными в разных измерительных шкалах, неизбежно приведет к искажению результатов исследования, а то и просто к неправильному выводу

Получив в соответствующей шкале массив экспериментальных данных, психолог начинает окончательное оформление результатов своей работы в виде таблиц, графиков, статистических выкладок и других процедур, необходимых для получения строгого вывода из его экспериментального исследования Самое главное, однако, о чем должен помнить психолог при выборе способа измерения, это то, что он должен соответствовать поставленной задаче исследования

Рассмотрим подробно все четыре шкалы

1.2. Номинативная шкала *(шкала наименований)*

Измерение в номинативной шкале (номинальной, или шкале наименований) состоит в присваивании какому-либо свойству или признаку определенного обозначения или символа (численного, буквенного и т п) По сути дела, процедура измерения сводится к классификации свойств, группнровке объектов, к объелинению их в классы, группы при условии, что объекты, принадлежашие к одному классу, идентичны (или аналогичны) друг другу в отношении какого-либо признака или свойства, тогда как объекты, различающиеся по этому признаку, попадают в разные классы

Иными словами, при измерениях по этой шкале осуществляется классификация или распределение объектов (например, особенностей личности) на непересекающиеся классы, группы Таких непересекающихся классов может быть несколько Классический пример измерения по номинативной шкале в психологии — разбиение людей по четырем темпераментам сангвиник, холерик, флегматик и меланхолик

Номинальная шкала определяет, что разные свойства или признаки качественно отличаются друг от друга, но не подразумевает каких-либо количественных операций с ними Так, для признаков, измеренных по этой шкале нельзя сказать, что какой-то из них больше, а какой-то меньше, какой-то лучше, а какой-то хуже Можно лишь утверждать, что признаки, попавшие в разные группы (классы) различны Последнее и характеризует данную шкалу как качественную

Приведем еще ряд примеров измерения в номинативной шкале Социолог изучает вопрос о том, как люди предпочитают проводить досуг

а) с приятелями,

б) на лоне природы,

в) в занятиях спортом,

г) в кругу семьи

Получается четыре непересекающихся множества, причем этот перечень может быть продолжен в зависимости от задач исследования

Еще пример — группировка по мотивам увольнения с работы

а) не устраивал заработок,

б) неудобная сменность,

в) плохие условия труда,

г) неинтересная работа,

д) конфликт с начальством и т д

Здесь все респонденты (опрашиваемые) делятся на пять классов а), б), в), г) и д)

Пример большего числа классов разбиения по номинативной шкале — нумерация игроков спортивных команд

Следует подчеркнуть, что присваиваемые объектам в номинативной шкале символы являются условными, их можно заменить один на другой без ущерба для изучаемого объекта или явления Более того, поскольку эти символы не несут никакой информации, операции с ними не имеют смысла В частности, упорядочить (ранжировать) пункты рассмотренных выше примеров невозможно, более того, нельзя сказать, какой из этих пунктов является наиболее значимым, а какой наименее

Самая простая номинативная шкала называется ***дихотомической.*** При измерениях по дихотомической шкале измеряемые признаки можно кодировать двумя символами или цифрами, например 0 и 1, или 2 и 6, или буквами А и Б, а также любыми двумя отличающимися друг от друга символами Признак, измеренный по дихотомической шкале, называется ***альтернативным.***

В дихотомической шкале все объекты, признаки или изучаемые свойства разбиваются на два непересекающихся класса, при этом исследователь ставит вопрос о том, «проявился» ли интересующий его признак у испытуемого или нет Например, в одном конкретном исследовании признак «полная семья» проявился у 23 школьников из 30 т е 23 школьникам можно поставить, например, цифру 1, соответствующую признаку «полная семья», остальным цифру 0, соответствующую признаку — «неполная семья»

Приведем еще примеры, относящиеся к измерениям по дихотомической шкале испытуемый ответил на пункт опросника либо «да», либо «нет», кто то проголосовал «за», кто-то «против», этот человек «экстраверт», а другой «интроверт», этот человек умеет водить машину, тот не умеет и т п Во всех перечисленных случаях получаются два непересекающихся множества, применительно к которым можно только подсчитать количество индивидов, обладающих тем или иным признаком

В номинативной шкале можно подсчитать частоту встречаемости признака т е число испытуемых, явлений и т п, попавших в данный класс (группу) и обладающих данным свойством Например, мы хотим выяснить число мальчиков и девочек в спортивной секции Для этого мы кодируем мальчиков, например, цифрой 1, а девочек — цифрой 0 После этого подсчитываем общее количество цифр (кодов) 1 и 0 Это и есть подсчет частоты признака Понятно, что можно было закодировать мальчиков буквой А или символом &, а девочек буквой Б или символом #, а потом подсчитать количество букв А или символов & для мальчиков и букв Б или символов # — для девочек результат, очевидно, будет тем же самым

Единица измерения, которой мы оперируем в случае номинативной шкалы, — это количество наблюдений (испытуемых, свойств, реакции и т п) Общее число наблюдений (респондентов и т п) принимается за 100%, и тогда мы можем вычислить процентное соотношение, например, мальчиков и девочек в классе Если же количество групп разбиения больше чем две, то также можно подсчитать процентный состав испытуемых (респондентов) в каждой группе

Кроме того, мы можем найти группу, в которой число респондентов наибольшее, т е группу с наибольшей частотой измеренного признака Эта группа носит название моды

К результатам измерений, полученным в номинативной шкале, возможно применить лишь небольшое число статистических методов В настоящем пособии разбираются следующие методы критерий Макнамары, критерий χ^2 (хи-квадрат), угловое преобразование Фишера «φ» и коэффициент корреляции «φ» (см главы 6, 8, 11)

1.3. Порядковая *(ранговая, ординарная)* шкала

Измерение по этой шкале расчленяет всю совокупность измеренных признаков на такие множества, которые связаны между собой отношениями типа «больше — меньше», «выше — ниже», «сильнее — слабее» и т п Если в предыдущей шкале было несущественно, в каком порядке располагаются измеренные признаки, то в ***порядковой (ранговой)*** шкале все признаки располагаются по рангу — от самого большего (высокого, сильного, умного и т п) до самого маленького (низкого, слабого, глупого и т п) или наоборот

Типичный и очень хорошо известный всем пример порядковой шкалы — это школьные оценки от 5 до 1 балла Еще пример — судейство в некоторых видах спорта или зрелищных программах (КВН, ДОГШОУ и др), которые также представляют собой вариант ранжирования

Еще пример психолог изучает группу спортсменов, имеющих следующую градацию звании мастер спорта кандидат в мастера и перворазрядник В этом случае удобно каждую отдельную группу обозначить собственным символом, например, 1, 2 и 3 (или наоборот — 3, 2 и 1) Эти же градации можно обозначить и другими символами, например, буквами А, Б и В При этом на основе этих символов можно сказать, что представитель первой группы имеет более высокую спортивную квалификацию, чем представители двух других

В порядковой (ранговой) шкале должно быть не меньше трех классов (групп) например, ответы на опросник «да», «не знаю» «нет», или — низкий, средний, высокий, и т п , с тем расчетом, чтобы можно было расставить измеренные признаки по порядку Именно поэтому эта шкала и называется порядковой, или ранговой, шкалой

От классов просто перейти к числам, если считать, что низший класс получает ранг (код или цифру) 1, средний — 2, высшии — 3 (или наоборот) Чем больше число классов разбиений всей экспериментальной совокупности, тем шире возможности статистической обработки полученных данных и проверки статистических гипотез

При кодировании порядковых переменных им можно приписывать любые цифры (коды), но в этих кодах (цифрах) обязательно должен сохраняться порядок, или, иначе говоря, каждая последующая цифра должна быть больше (или меньше) предыдущей

Например, пусть необходимо закодировать уровень агрессивности по пяти градациям Это можно сделать самыми разными способами, представленными в таблице 1 1

Таблица 1 1

Градация	Код	Градация	Код	Градация	Код	Градация	Код
Самыи низкии	1	Самыи низкий	14	Самьи низкии	99	Самыи низкии	1
Низкии	3	Низкии	23	Низкии	77	Низкии	2
Средний	6	Средний	34	Средний	55	Средний	3
Высокии	10	Высокии	56	Высокий	33	Высокии	4
Самыи высокии	15	Самыи высокии	199	Самыи высокии	11	Самыи высокии	5

Каждый из вариантов кодирования правильный — поскольку он сохраняет порядок Ни про один из них нельзя сказать, что он самыи точный, однако последнии вариант кодировки (ранжиро вания) наиболее естественный, привычный, и поэтому он и является наиболее предпочтительным Как правило, все случаи ранжирования реализуются в этой форме кодирования

Этот пример хорошо иллюстрирует положение о том, что интервалы в ранговой шкале не равны между собой Например, рассмотрим разность рангов по абсолютной величине в первом столбце кодов 3 - 1 = 2, 6 - 3 = 3, 10 - 6 = 4, 15 - 10 = 5 Во втором столбце кодов она такова 23 - 14 = 9, 34 - 23 = 11, 56 - 34 = 22, 119 - 56 = 143 Именно поэтому числа в ранговых шкалах обозначают лишь порядок следования признаков, а операции с числами в этой шкале — это операции с рангами

1.3.1. Правила ранжирования

Пример 1 1 Испытуемому предлагается задание, в котором семь личностных качеств необходимо упорядочить (проранжировать) в двух столбцах в левом столбце в соответствии с особенностями его «Я реального», а в правом столбце, в соответствии с особенностями «Я идеального»

Результаты ранжирования даны в таблице 1 2

Таблица 12

Я реальное	Качества личности	Я идеальное
7	Ответственность	1
1	Общительность	5
3	Настоичивость	7
2	Энергичность	6
5	Жизнерадостность	4
4	Терпеливость	3
6	Решительность	2

Ранжирование в левом столбце осуществляется следующим образом поскольку всего имеется 7 качеств, то максимальный ранг 7 приписывается качеству наиболее значимому на данный момент времени, а минимальный 1 — наименее значимому Остальным качествам, в соответствии со степенью их значимости, приписываются цифры (ранги) от 6 до 2

В правом столбце проводится ранжирование в соответствии с тем, какими качествами человек хотел бы обладать в идеале Максимально желательному ставится в соответствие наибольший ранг и так далее, причем наименее желательным ставятся наименьшие величины рангов

Процедура ранжирования по сути является формальной, поэтому в зависимости от предпочтения можно проставлять величины рангов и в противоположном порядке, т е наиболее значимому качеству приписать ранг 1, наименее значимому ранг 7

Подчеркнем, что ранжировать можно не только качественные признаки, но и количественные признаки какого либо измеренного психологического свойства, например, показатель невербального интеллекта, по тесту Векслера или показатель уровня тревожности по тесту Теилора и многое другое

Например, в результате экспресс диагностики невроза у пяти испытуемых по методике К Хека и X Хесса были получены следующие баллы

24, 25, 37, 13, 12 — этому ряду чисел можно проставить ранги двумя способами

1 Большему числу в ряду ставится больший ранг — в этом случае получиться 3, 4, 5, 2, 1

2 Большему числу в ряду ставится меньший ранг — в этом случае получится 3, 2, 1, 4, 5

1.3.2. Проверка правильности ранжирования

Процедура ранжирования достаточно проста, однако ошибки могут возникнуть совершенно неожиданно Поэтому всегда, когда проводится ранжирование, необходима проверка правильности реализации этой процедуры В наиболее общем случае для проверки правильности ранжирования столбца (или строчки) признаков применяется следующая формула

Если ранжируется N признаков, то сумма всех полученных рангов должна быть равна

$$\text{Сумма рангов} = 1+2+3+ \ldots +N = \frac{N\,(N+1)}{2} \qquad (1.1)$$

где N — количество ранжируемых признаков

Эта формула широко используется в дальнейшем, поэтому ее следует хорошо запомнить

Совпадение итогов подсчета рангов по формуле (1 1) и по реальным результатам ранжирования экспериментальных данных является подтверждением правильности ранжирования

В случае примера 1 число ранжируемых признаков было $N = 7$, поэтому сумма рангов, подсчитанная по формуле (1 1) должна равняться $\frac{7 \cdot 8}{2} = 28$

Сложим величины рангов отдельно для левого и правого столбца таблицы 1 2

$7 + 1 + 3 + 2 + 5 + 4 + 6 = 28$ — для левого столбца

и $1 + 5 + 7 + 6 + 4 + 3 + 2 = 28$ — для правого столбца

Суммы рангов, подсчитанные по формуле (1 1) и в результате реального ранжирования, совпали, следовательно, ранжирование проведено правильно Подобную проверку следует обязательно делать после каждого ранжирования

В дальнеишем нам встретиться еще несколько разных вариантов ранжирования Например, ранжирование таблицы чисел Подобные таблицы будут в дальнейшем использоваться достаточно часто, поэтому следует хорошо усвоить правила проверки правильности ранжирования табличных данных

1 Вариант. Предположим, что у нас были протестированы две группы испытуемых по 5 человек в каждой группе по методике дифференциальной диагностики депрессивных состояний В А Жмурова и у них получены следующие тестовые баллы, которые сразу же занесем в таблицу 1 3

Таблица 13

№ испытуемых п/п	Группа 1	Группа 2
1	15	26
2	45	67
3	44	23
4	14	78
5	21	3

Перед психологом стоит задача проранжировать обе группы испытуемых как одну, т е объединить выборку и проставить ранги объединенной выборке Сделаем это в таблице 1 4

Таблица 14

№ испытуемых п/п	Группа 1	Ранги	Группа 2	Ранги
1	15	8	26	5
2	45	3	67	2
3	44	4	23	6
4	14	9	78	1
5	21	7	3	10
Суммы		31		24

Проверим правильность ранжирования Поскольку у нас уже получены суммы рангов по столбцам, то общую реальную сумму рангов можно получить просто сложив эти суммы, итак 31 + 24 = 55

Чтобы применить формулу (1 1) нужно подсчитать общее количество испытуемых — это 5 + 5 = 10, тогда по формуле (1 1) получаем.

$$\frac{11\ 10}{2} = 55$$

Следовательно, ранжирование проведено правильно.

В том случае, если в таблице имеется большое количество строк и столбцов, для подсчета рангов можно использовать модификацию формулы (1 1), она будет выглядеть так

$$\text{Сумма рангов} = \frac{((k\ c+1)\ k\ c)}{2} \qquad (1\ 2)$$

где k — число строк, c — число столбцов

Проведем вычисление суммы рангов по формуле (1 2) для нашего примера У нас 5 строк и 2 столбца, следовательно, сумма рангов будет равна

$$\frac{((5\ 2+1)\ 5\ 2)}{2} = 55$$

2 Вариант. В ряде статистических методов ранжирование табличных данных осуществляется по каждой строчке отдельно Проиллюстрируем это положение на предыдущем примере, добавив еще одну группу испытуемых из 5 человек Получится таблица 1 5 в которой проведем ранжирование по строчкам

Таблица 15

№ испытуемых п/п	Группа 1	Ранги	Группа 2	Ранги	Группа 3	Ранги
1	15	1	26	2	37	3
2	45	2	67	3	24	1
3	44	2	23	1	55	3
4	14	1	78	3	36	2
5	21	2	3	1	33	3
Суммы		8		10		12

Обратите внимание, что в таблице 1 5 минимальному по величине числу ставится минимальный ранг

В случае такого ранжирования сумма всех рангов по каждой строчке должна быть равна 6, поскольку у нас ранжируется всего три величины 1 + 2 + 3 = 6

Расчетная формула общеи суммы рангов для такого способа ранжирования определяется по формуле

$$\text{Сумма рангов} = \frac{n \cdot c \cdot (c+1)}{2} \quad (1\ 3)$$

Где n — количество испытуемых в столбце

c — количество столбцов (групп испытуемых, измерений и т п)

Правильность ранжирования вновь определяется условием совпадения расчетных сумм реальных рангов, полученных по таблице и по расчетной формуле (1 3)

Проверим правильность ранжирования для нашего примера
Реальная сумма рангов такова $8 + 10 + 12 = 30$

По формуле (1 3) она такова $\frac{5 \cdot 3 \cdot (3+1)}{2} = 30$

Следовательно, ранжирование было проведено правильно

1.3.3. Случай одинаковых рангов

При выставлении экспертных оценок или в дрvгих случаях ранжирования возникают ситуации, когда двум или большему числу ка честв приписываются одинаковые ранги Рассмотрим такой случай применительно к примеру 1 2, в котором ранжировались семь личностных качеств Для иллюстрации разобьем первый и второй столбцы в таблице 1 2 на две части, представив ее в виде таблицы 1 6

Таблица 16

Я реальное		Качества личности	Я идеальное	
7	7	Ответственность	1	1
1	1	Общительность	5	(5)
(3)	2 5	Настойчивость	7	7
(2)	2 5	Энергичность	5	(6)
5	5	Жизнерадостность	5	(4)
4	4	Терпеливость	3	3
6	6	Решительность	2	2

Предположим, что при оценке особенностей «Я реального» испытуемый считает, что такие качества как «настойчивость» и «энергичность» должны иметь один и тот же ранг Тогда при проведении ранжирования (см столбец № 1 таблицы 1 6) этим качествам необходимо проставить условные ранги, обязательно идущие по порядку друг за другом — и отметить эти ранги круглыми скобками — ( ) Однако, поскольку эти качества, по мнению испытуемого, должны иметь одинаковые ранги, во втором столбце таблицы 1 6, относящемуся к «Я реальному» следует поместить среднее арифметическое рангов, проставленных в скобках, т е $\frac{(2+3)}{2} = 2\,5$ Таким образом, второй столбец таблицы 1 6 и будет окончательным итогом ранжирования особенностей «Я реального» данным испытуемым

Проверим правильность ранжирования Вначале складываем реальные ранги, полученные во втором столбце таблицы 1 6 1 + 2, 5 + 2, 5 + 5 + 4 + 6 = 28

Мы помним, что по формуле (1 1) сумма рангов также равнялась 28 Следовательно, ранжирование проведено правильно

Предположим, что при ранжировании качеств, относящихся к «Я идеальному» испытуемый считает, что таким качествам как «общительность», «энергичность» и «жизнерадостность» нужно проставить одинаковые ранги В таком случае этим качествам он ставит условные ранги по порядку в круглых скобках в последнем пятом столбце таблицы 1 6 Среднее арифметическое условных рангов $\frac{(4+5+6)}{3} = 5$ и есть искомый ранг, который приписывается трем вышеназванным качествам, в четвертом столбце таблицы 1 6

Подчеркнем еще раз, что условные ранги должны располагаться по порядку величин, несмотря на то, что ранжируемые качества не находятся рядом друг с другом

Проверим опять правильность ранжирования, суммируя полученные в четвертом столбце ранги 1 + 2 + 3 + 5 + 5 + 5 + 7 = 28

Мы помним что по формуле (1 1) сумма рангов также равнялась 28 Следовательно, ранжирование проведено правильно

Одинаковые ранги можно присваивать любому числу ранжируемых величин В таком случае им также приписывается величина среднего арифметического от количества условных рангов, проставляемых по порядку их величин

Рассмотрим особенности ранжирования количественных характеристик Несмотря на то что ранжирование широко используется применительно к количественным показателям, следует помнить, что в порядковой шкале операции с числами — это по сути дела операции с рангами (порядками), но не с количественным выражением свойств (качеств, признаков и т п) как таковых

В этом случае правила ранжирования таковы

1 Наименьшему числовому значению приписывается ранг 1

2 Наибольшему числовому значению приписывается ранг, равный количеству ранжируемых величин

3 В случае если несколько исходных числовых значений оказались равными, то им приписывается ранг, равный средней величине тех рангов, которые эти величины получили бы, если бы они стояли по порядку друг за другом и не были бы равны

Отметим, что под этот случай могут попасть как первые, так и последние величины исходного ряда для ранжирования

4 Общая сумма реальных рангов должна совпадать с расчетной, определяемой по формуле (1 1)

5 Не рекомендуется ранжировать более чем 20 величин (признаков, качеств, свойств и т п), поскольку в этом случае ранжирование в целом оказывается малоустойчивым

6 При необходимости ранжирования достаточно большого числа объектов их следует объединять по какому-либо признаку в достаточно однородные классы (группы), а затем уже ранжировать полученные классы (группы)

Пример 1.2. Психолог получил у 11 испытуемых следующие значения показателя невербального интеллекта 113, 107, 123, 122, 117 117, 105, 108, 114, 102, 104 Необходимо проранжировать эти показатели, и лучше всего это сделать в таблице

Таблица 17

№ испытуемых п/п	Показатели интеллекта	Ранги
1	113	6
2	107	4
3	123	11
4	122	10
5	117	(8) 8 5
6	117	(9) 8 5
7	105	3
8	108	5
9	114	7
10	102	1
11	104	2

В этой таблице условные и реальные ранги располагались в одном столбце, что удобнее и экономиг много места

Проверим правильность ранжирования по формуле (1 1) подставляем исходные значения в формулу, получаем $\frac{11\ 12}{2} = 66$

Суммируем реальные ранги, получаем

$$6 + 4 + 11 + 10 + 8{,}5 + + 8{,}5 + 3 + 5 + 7 + 1 + 2 = 66$$

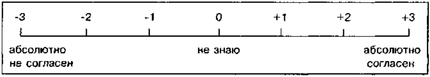
Поскольку суммы совпали, следовательно, ранжирование проведено правильно

В ранговой шкале применяется множество разнообразных статистических методов, часть из которых будет описана ниже Наиболее часто к измерениям, полученным в этой шкале, применяются коэффициенты корреляции Спирмена и Кэндалла, кроме того применительно к данным, полученным в этой шкале, используют разнообразные критерии различий

1.4. Шкала интервалов

В шкале ***интервалов***, или ***интервальной*** шкале, каждое из возможных значений измеренных величин отстоит от ближайшего на равном расстоянии. Главное понятие этой шкалы — интервал, который можно определить как долю или часть измеряемого свойства между двумя соседними позициями на шкале Размер интервала — величина фиксированная и постоянная на всех участках шкалы. Для измерения посредством шкалы интервалов устанавливаются специальные единицы измерения, в психологии это стены и стенайны. При работе с этой шкалой измеряемому свойству или предмету присваивается число, равное количеству единиц измерения, эквивалентное количеству имеющегося свойства Важной особенностью шкалы интервалов является то, что у нее нет естественной точки отсчета (нуль условен и не указывает на отсутствие измеряемого свойства).

Так, в психологии часто используется семантический дифференциал Ч. Осгуда, который является примером измерения по интервальной шкале различных психологических особенностей личности, социальных установок, ценностных ориентаций, субъективно-личностного смысла, различных аспектов самооценки и т п:



Однако, как подчеркивают С. Стивенс и ряд других исследователей, психологические измерения в шкале интервалов по сущности нередко оказываются измерениями, выполненными в шкале порядков. Основанием для этого утверждения служит тот факт, что функциональные возможности человека меняются в зависимости от разных условий При измерении, например, силы с помощью динамометра или устойчивости внимания с помощью секундомера, результаты измерения в начале и в конце опыта по причине усталости испытуемого не будут квантифицироваться равными интервалами

Только измерение по строго стандартизированной тестовой методике, при условии того, что распределение значений в репрезентативной (см. ниже) выборке достаточно близко к нормальному (см. ниже), может считаться измерением в интервальной шкале. Примером последнего могут служить стандартизованные тесты интеллекта, где условная единица измерения *IQ* эквивалентна как при низких, так и при высоких значениях интеллекта

Принципиально важным является и то, что к экспериментальным данным, полученным в этой шкале, применимо достаточно большое число статистических методов.

1.5. Шкала отношений

Шкалу ***отношений*** называют также шкалой ***равных отношений*** Особенностью этой шкалы является наличие твердо фиксированного нуля, который означает полное отсутствие какого-либо свойства или признака Шакала отношений является наиболее информативной шкалой, допускающей любые математические операции и использование разнообразных статистических методов.

Шкала отношений по сути очень близка интервальной, поскольку если строго фиксировать начало отсчета, то любая интервальная шкала превращается в шкалу отношений

Именно в шкале отношений производятся точные и сверхточные измерения в таких науках, как физика, химия, микробиология и др Измерение по шкале отношений производятся и в близких к психологии науках, таких, как психофизика, психофизиология, психогенетика

Глава 2

ПОНЯТИЕ ВЫБОРКИ

Психолог-экспериментатор в большинстве случаев изучает какую-то определенную выборку людей, которая всегда отбира ется из большей по численности группы Такая объемлющая группа называется в статистике ***генеральной совокупностью*** Таким образом, ***генеральная совокупность*** — это любая группа людей, которую психолог изучает по выборке Теоретически считается, что объем генеральной совокупности не ограничен Практически же объем генеральной совокупности всегда ограничен и может быть различным в зависимости от предмета наблюдения и той задачи, которую предстоит решать психологу

Выборкой называется любая подгруппа элементов (испытуемых, респондентов), выделенная из генеральной совокупности для проведения эксперимента При этом отдельный индивид из выборки, с которым работает психолог, называется испытуемым (*респондентом*)

Объем выборки, обычно обозначаемой буквой n, может быть любым, но не меньшим чем два респондента В статистике различают малую ($n < 30$), среднюю $30 < n < 100$ и большую выборку ($n > 100$)

2.1. Полное исследование

Если психологическому исследованию (наблюдению, измерению, эксперименту) подвергаются все представители изучаемой генеральной совокупности, то такое исследование называют ***полным***, или ***сплошным***

Предполагается что в соответствии с задачами гипотезами и планом полное обследование генеральнои совокупности по зволяет получить исчерпывающую информацию об изучаемых в неи психологических закономерностях Однако в отечественной и зарубежной психологии еще никогда не проводилось сплошно го исследования по тои причине что на практике определить размеры тои или инои генеральнои совокупности и тем более исследовать ее — задача нереальная и кроме того в определен ной степени избыточная Если выборка испытуемых по своим ха рактеристикам репрезентативна генеральнои совокупности то есть основания полученные при ее изучении результаты распро странить на всю генеральную совокупность Нельзя упускать из вида также и то что работа психолога по существу представ ляет собой сложныи вид деятельности требующии высокои профессиональной компетентности и нередко много времени для работы с каждым испытуемым

2.2. Выборочное исследование

Если психолог производит выбор ограниченного числа элементов из изучаемои (генеральнои) совокупности то такое исследование называют ***частичным*** или ***выборочным***

Выборочный метод является основным в экспериментальной работе психолога при изучении генеральных совокупностеи Его преимущество перед полным (сплошным) исследованием всех элементов генеральнои совокупности заключается в том что он сокращает как время так и затраты труда а главное — позволя ет получать информацию о таких группах полное обследование которых принципиально невозможно или нецелесообразно

2.3. Зависимые и независимые выборки

Выборки называются ***независимыми*** (***несвязными***) если про цедvра эксперимента и полученные результаты измерения неко торого своиства у *испытуемых однои выборки не оказывают вли* яния на особенности протекания этого же эксперимента и ре зультаты измерения этого же свойства у испытуемых (респондентов) другой выборки

И напротив выборки называется ***зависимыми*** (***связными***) если процедура эксперимента и полученные результаты измере ния некоторого свойства проведенные на однои выборке ока зывают влияние на другую Следует подчеркнуть что одна и та же группа испытуемых на которои дважды проводилось психо логическое обследование (пусть даже разных психологических качеств признаков особенностеи) по определению оказывает ся зависимои или связнои выборкой

2.4. Требования к выборке

К выборке применяется ряд обязательных требовании опре деленных прежде всего целями и задачами исследования Плани рование эксперимента должно включать в себя учет как объема выборки так и ряда ее особенностей Так в психологических ис следованиях важно требование ***однородности*** выборки Оно озна чает что психолог изучая например подростков не может включать в эту же выборку взрослых людеи Напротив исследо вание выполненное методом возрастных срезов принципиаль но предполагает наличие разновозрастных испытуемых Однако и в этом случае должна соблюдаться однородность выборки но уже по другим критериям в первую очередь таким как возраст пол Основаниями для формирования однороднои выборки могут служить разные характеристики такие как уровень интеллекта национальность отсутствие определенных заболевании и т д в зависимости от целеи исследования

В общеи статистике имеется понятие ***повторнои*** и ***безповтор нои*** выборки или иначе говоря выборки с возвратом и без возврата В качестве примера приводится как правило выбор шара доставаемого из какои либо емкости В случае выборки с возвратом каждыи выбранныи шар опять возвращается в емкость и следовательно может быть выбран снова При бесповторном выборе однажды выбранный шар откладывается в сторону и больше не может участвовать в выборке В психологических ис следованиях можно наити аналоги подобного рода способам организации выборочного исследования поскольку психологу нередко приходится несколько раз тестировать одних и тех же испытуемых при помощи однои и тои же методики Однако с рого говоря повторнои в этом случае является процедура тес тир вания Выборка испытуемых при полнои тождественности с става в случае повторных исследовании всегда будет иметь не которые отличия обусловленные функциональнои и возрастной изменчивостью присущеи всем людям Подобная выборка по ха рактеру проведения процедуры является повторнои хотя смысл термина здесь очевидно инои чем в случае с шарами

Важно подчеркнуть что все требования предъявляемые к оои выборке сводятся к тому что на ее основе психологом должна быть получена наиболее полная неискаженная инфор мация об особенностях генеральнои совокупности из которои взята эта выборка Иными словами выборка должна как можно более полно отражать характеристики изучаемои генеральнои со вокупности

2.5. Репрезентативность выборки

Состав экспериментальной выборки должен представлять (моделировать) генеральную совокупность поскольку выводы полученные в эксперименте предполагается в дальнеишем пе ренести на всю генеральную совокупность Поэтому выборка должна обладать особым качеством — ***репрезентативностью*** позволяющим распространить полученные на неи выводы на всю генеральную совокупность

Репрезентативность выборки очень важна тем не менее по объективным причинам соблюдать ее краине сложно Так хоро шо известен факт что от 70% до 90% всех психологических ис следовании поведения человека проводились в США в 60 х годах XX века с испытуемыми студентами колледжеи причем боль шинство из них были студентами психологами В лабораторных исследованиях выполняемых на животных наиболее распрост раненным объектом изучения являются крысы Поэтому неслу чаино психологию называли раньше наукои о студентах второ курсниках и белых крысах Студенты психологических коллед жеи составляют всего 3% от общеи численности населения США Очевидно что выборка студентов нерепрезентативна в качестве модели претендующеи на представительство всего населения страны

Репрезентативная выборка или как еще говорят ***представительная*** выборка — это такая выборка в которои все основные признаки генеральной совокупности представлены приблизительно в тои же пропорции и с тои же частотои с которои данныи признак выступает в даннои генеральнои совокупности Иными словами репрезентативная выборка представляет собои меньшую по размеру но точную модель той генеральнои совокупности которую она должна отражать В тои степени в какои выборка является репрезентативнои выводы основанные на изучении этои выборки можно с большои долей уверенности считать применимыми ко всеи генеральной совокупности Это распространение результатов называется ***генерализуемостью***

В идеале репрезентативная выборка должна быть такои чтобы каждая из основных изучаемых психологом характеристик черт особенностеи личности и т п была бы представлена в неи пропорционально этим же особенностям в генеральнои совокупности Согласно этим требованиям процедура формирования выборки должна иметь внутреннюю логику способную убедить исследователя что при сравнении с генеральнои совокупностью она деиствительно окажется репрезентативнои представительнои

В своеи конкретнои деятельности психолог деиствует следующим образом устанавливает подгруппу (выборку) внутри генеральнои совокупности подробно изучает эту выборку (проводит с ней экспериментальную работу) а затем если это позволяют результаты статистического анализа распространяет полученные выводы на всю генеральную совокупность Это и есть основные этапы работы психолога с выборкои

Начинающии психолог должен иметь в виду часто повторяющуюся ошибку каждыи раз когда он осуществляет сбор любых данных любым методом и из любого источника у него всегда появляется соблазн распространить свои выводы на всю генеральную совокупность Для того чтобы избежать подобной ошибки надо не просто обладать здравым смыслом но прежде всего хорошо владеть основными понятиями математическои статистики

2.6. Формирование и объем репрезентативной выборки

Возникает закономерный вопрос, как сформировать репрезентативную выборку? С точки зрения статистики репрезентативность выборки означает, что представленное в выборке распределение изучаемых признаков соответствует (с определенной долей погрешности) их распределению в генеральной совокупности

Опишем два метода, обеспечивающие репрезентативность выборки

Первый метод формирования ***простой случайной*** выборки В этом случае выборка состоит из элементов, отобранных из генеральной совокупности таким образом, чтобы каждый элемент этой совокупности имел бы равные возможности (равную вероятность) попасть в выборку Полученная таким образом выборка называется ***простой случайной выборкой***

Получить простую случайную выборку можно путем обычной жеребьевки (по аналогии с лотереей) или с помощью специальных таблиц случайных чисел В последнем случае элементы генеральной совокупности перенумеровываются и из таблицы случайных чисел, открытой на произвольной странице, выписываются номера элементов, которые должны быть взяты в выборку Данная процедура трудно осуществима, поскольку для ее реализации необходимо учитывать каждого представителя генеральной совокупности

Второй метод основывается на понятии ***стратифицированной случайной выборки*** Для этого необходимо разбить элементы генеральной совокупности на страты (группы) в соответствии с некоторыми характеристиками Например, при обследовании спроса на некоторый товар генеральную совокупность желательно разбить на группы, различающиеся по величине дохода, социальной принадлежности или даже по месту жительства (город, деревня) Если произведена подобная разбивка совокупности и случайная выборка производится отдельно из каждой группы (страты), то полученная в итоге выборка носит название ***стратифицированная случайная выборка***

Как определяется объем выборки? Подчеркнем, что он зависит прежде всего от задач исследования Психолог может изучать единичные случаи, если те по каким-либо причинам представляют особый интерес для науки Так, например, строится работа с одаренными детьми, каждыи из которых, как правило, имеет свои неповторимые особенности Предметом отдельного исследования могут служить также редкие или уникальные случаи нарушения развития В частности, пристальное внимание известного ученого П К Анохина и его сотрудников было сосредоточено на изучении особенностей функционирования организма сросшихся сиамских близнецов Маши и Даши (это пример так называемой минимальной выборки)

Когда психолог ставит целью изучение характеристик, присущих многим представителям генеральной совокупности, возникает вопрос о наиболее приемлемом объеме выборки В этих случаях очевидно, что больший объем выборки, позволяет получить более надежные результаты Объем выборки зависит также от степени однородности изучаемого явления Как правило, чем более однородно изучаемое явление, тем меньще может быть объем выборки Например, психолог изучает выраженность уровня маскулинности—феминности у мастеров спорта по хоккею Поскольку подобная группа спортсменов представляет собой достаточно однородную выборку, то ее объем может быть весьма небольшим, например, в пределах однои команды — 12—20 человек

Кроме того, объем выборки зависит от тех статистических методов, которые предполагается использовать Одни методы требуют большого количества испытуемых в выборке, другие могут применяться при относительно небольшом их количестве Например, некоторые непараметрические критерии различий могут использоваться при сравнении групп численностью в 5—7 человек, а факторный анализ наиболее адекватен, если объем выборки составит около 100 человек

Для психологических исследований рекомендуется использовать экспериментальную и контрольную группы, так чтобы численность обоих сравниваемых групп была не менее 30—35 испытуемых в каждои

Глава 3

ФОРМЫ УЧЕТА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Для наглядного представления экспериментальных данных используются различные приемы облегчающие прежде всего визуальный анализ полученной в эксперименте информации К таким приемам относят таблицы ряды распределении графи ки гистограммы Их применяют с тои целью чтобы полученные экспериментальные данные представить наглядным образом и можно было бы в явнои форме увидеть характерные особеннос ти и результаты эксперимента

Первичныи экспериментальныи материал полученный пси хологом нуждается в соответствующей обработке Обработка на чинается с упорядочения и систематизации собранных данных Процесс систематизации результатов эксперимента объедине ние их в относительно однородные группы по некоторому при знаку называется **группировкои**

Группировка — это не просто техническии прием позволя ющии представить первичные данные в ином виде но прежде всего такая операция которая позволяет глубже выявить связи между изучаемыми явлениями От того как группируется исход ныи материал во многих случаях зависят выводы о природе изу чаемого явления Поэтому группировка должна быть обдуман нои отвечать требованию поставленнои задачи и соответство вать содержанию изучаемого явления

3.1. Таблицы

Наиболее распространенной формои группировки экспери ментальных данных являются **статистические таблицы** Таблицы бывают **простыми и сложными** К простым относятся таблицы применяемые при альтернативной группировке, когда одна группа испытуемых противопоставляется другой, например, здоровые — больным, высокие люди — низким и т п Пример простой таблицы приведен ниже (см Таблицу 3 1) В ней представлены результаты обследования мануальной асимметрии у 110 учащихся 3—6-х классов

Таблица 3 1

Классы	Праворукие	Леворукие	Сумма
3 и 4	43	6	49
5 и 6	44	17	61
Сумма	87	23	110

Из таблицы видно, что леворукие ученики чаще встречаются среди учащихся пятых и шестых классов, чем среди третьих и четвертых классов

Можно в большей степени детализировать эту таблицу, выделив каждый класс в отдельную строку

Таблица 3 2

Классы	Праворукие	Леворукие	Сумма
3	23	2	25
4	20	4	24
5	22	11	33
6	22	8	30
Суммы	87	23	110

Из таблицы 3 2 хорошо видно, что леворуких учащихся больше в пятых классах школы, и меньше — в третьих

Простые таблицы рекомендуется использовать, когда измерение изучаемых признаков производится в номинативной или ранговой шкале

Усложнение таблиц происходит за счет возрастания объема и степени дифференцированности представленной в них информа ции К сложным таблицам относят так называемые многополь ные таблицы которые могут использоваться при выяснении причинно следственных отношении между варьирующими признаками Такие таблицы как правило имеют сложное строение позволяющее одновременно осуществлять разные варианты группировки данных Примером сложнои таблицы служит Таблица 3 3 в которои представлены классические данные Ф Гальтона иллюстрирующие наличие положительнои зависимости между ростом родителеи и их детеи Таблица организована таким образом что позволяет оценить частоту встречаемости в популяции однозначно фиксируемых соотношении роста родителеи и роста ребенка Например при низком росте родителеи в 66 дюймов (1 дюим равен 2 54 см) только один из 144 обследованных детеи имел рост в 60 7 дюимов а 56 детеи имели рост 66 7 дюима В то же время высокии рост детеи (74 7 дюима) был зафиксирован только в тех семьях где родители имели рост не ниже 70 дюймов

Таблица 33

Рост родителеи	Рост детей в дюимах								Всего
	60 7	62 7	64 7	66 7	68 7	70 7	72 7	74 7	
74							4		4
72			1	4	11	17	20	6	62
70	1	2	21	48	83	66	22	8	251
68	1	15	56	130	148	69	11		430
66	1	15	19	56	41	11	1		144
64	2	7	10	14	4				37
Все о	5	39	107	255	387	163	58	14	928

Эта таблица позволяет выявить тенденцию заключающуюся в том что у высоких родителеи как правило дети имеют высокии рост а у низкорослых родителеи чаще бывают дети невысокого роста Данныи пример показывает что таблицы имеют не только иллюстративное но и аналитическое значение позволяя обнаруживать разные аспекты связеи между варьирующими признаками

Следует запомнить что правильно составленные таблицы — это большое подспорье в экспериментальнои работе позволяющее одновременно осуществлять разные варианты группировки полученных данных

3.2. Статистические ряды

Особую форму группировки данных представляют так называемые *статистические ряды,* или числовые значения признака, расположенного в определенном порядке

В зависимости от того, какие признаки изучаются, статистические ряды делят на атрибутивные, вариационные, ряды динамики, регрессии, ряды ранжированных значений признаков и ряды накопленных частот Наиболее часто в психологии используются *вариационные* ряды, ряды *регрессии* и ряды *ранжированных значении признаков*

Вариационным рядом распределения называют двойной ряд чисел, показывающий, каким образом числовые значения признака связаны с их повторяемостью в данной выборке Например, психолог провел тестирование интеллекта по тесту Векслера у 25 школьников, и сырые баллы по второму субтесту оказались следующими 6, 9, 5, 7, 10, 8, 9, 10, 8, 11, 9, 12, 9, 8, 10, 11, 9, 10, 8, 10, 7, 9, 10, 9, 11 Как видим, некоторые цифры попадаются в данном ряду по несколько раз Следовательно, учитывая число повторений, данные ряд можно представить в более удобной, компактной форме

Варианты	x_i	6	9	5	7	10	8	11	12	(3 1)
Частоты вариант	f_i	1	7	1	2	6	4	3	1	

Это и есть вариационный ряд Числа, показывающие, сколько раз отдельные варианты встречаются в данной совокупности, называются частотами, или весами, вариант Они обозначаются строчной буквой латинского алфавита f_i и имеют индекс «*i*», соответствующий номеру переменной в вариационном ряду

Общая сумма частот вариационного ряда равна объему выборки, т е

$$n = \sum_{i=1} f = 1+7+1+2+6+4+3+1 = 25$$

Частоты можно выражать и в процентах При этом общая сумма частот или объем выборки принимается за 100% Процент каждой отдельной частоты или веса подсчитывается по формуле

$$n_i\% = \frac{f_i}{n}\ 100\% \qquad (3\ 2)$$

Процентное представление частот полезно в тех случаях, когда приходится сравнивать вариационные ряды, сильно различающиеся по объемам Например, при тестировании школьной готовности детей города, поселка городского типа и села были обследованы выборки детей численностью 1000, 300 и 100 человека соответственно Различие в объемах выборок очевидно Поэтому сравнение результатов тестирования лучше проводить, используя проценты частот

Приведенный выше ряд (3 1) можно представить по другому Если элементы ряда расположить в возрастающем порядке, то получится так называемый ранжированный вариационный ряд

Варианты	x_i	5	6	7	8	9	10	11	12	(3 3)
Частоты	f_i	1	1	2	4	7	6	3	1	

Подобная форма представления (3 3) более предпочтительна, чем (3 1), поскольку лучше иллюстрирует закономерность варьирования признака

Частоты, характеризующие ранжированный вариационный ряд, можно складывать, или накапливать Накопленные частоты получаются последовательным суммированием значений частот от первой частоты до последней

В качестве примера вновь обратимся к ряду 3 3 Преобразуем его в ряд 3 4 в котором введем дополнительную строчку и назовем ее «кумуляты частот»

Варианты	x_i	5	6	7	8	9	10	11	12	
Частоты	f_i	1	1	2	4	7	6	3	1	(3 4)
Кумуляты частот		1	2	4	8	15	21	24	25	

Рассмотрим подробно как получилась последняя строчка В начале ряда частот стоит 1 В кумулятивном ряду на втором месте стоит 2 — это сумма первой и второй частоты, т е $1 + 1$, на третьем месте стоит 4 это сумма второй (уже накопленной частоты) и третьей частоты, т е $2 + 2$, на четвертом $8 = 4 + 4$ и т д

3.3. Понятие распределения и гистограммы

В статистике под рядом *распределения* понимают распределение частот по вариантам Измеренные величины признака в выборке варьируют в пределах от минимального до максимального значения. Этот предел разбивают на так называемые классовые интервалы, которые, в зависимости от конкретных данных, могут быть как равными по величине, так и неравными

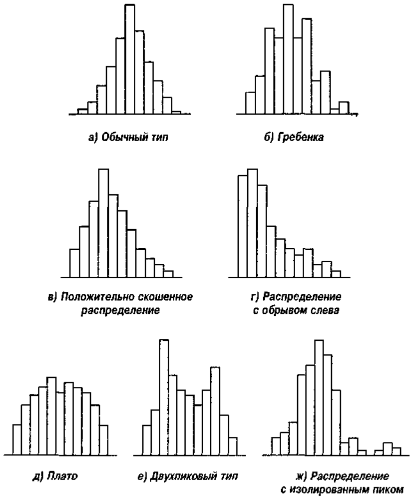


Рис. 1. Виды гистограмм

Если по оси абсцисс — OX откладывать величины классовых интервалов, а по оси ординат — OY величины частот, попадающих в данный классовый интервал, то получается так называемая *гистограмма распределения частот* При этом над каждым классовым интервалом строится колонка или прямоугольник, площадь которого оказывается пропорциональной соответствующей частоте Гистограмма представляет собой графическое изображение данного частотного распределения

Глава 4

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Для экспериментальных данных полученных по выборке можно вычислить ряд числовых характеристик (мер)

4.1. Мода

Числовои характеристикои выборки как правило не требующеи вычислении является так называемая *мода* ***Мода*** — это такое числовое значение которое встречается в выборке наиболее часто Мода обозначается иногда как $\hat{X}$

Так например в ряду значении (2 6 6 8 9 9 9 10) модои является 9 потому что 9 встречается чаще любого другого числа Обратите внимание что мода представляет собои наиболее часто встречающееся значение (в данном примере это 9) а не частоту встречаемости этого значения (в данном примере равную 3)

Моду находят согласно следующим правилам

1) В том случае когда все значения в выборке встречаются одинаково часто принято считать что этот выборочныи ряд не имеет моды Например 5 5 6 6 7 7 — в этои выборке моды нет

2) Когда два соседних (смежных) значения имеют одинаковую частоту и их частота больше частот любых других значении мода вычисляется как среднее арифметическое этих двух значении

Например в выборке 1 2 2 2 5 5 5 6 частоты рядом расположенных значении 2 и 5 совпадают и равняются 3 Эта частота больше чем частота других значении 1 и 6 (у которых она равна 1)

Следовательно модои этого ряда будет величина $\frac{(2+5)}{2} = 3\ 5$

3) Если два несмежных (не соседних) значения в выборке имеют равные частоты которые больше частот любого другого значения то выделяют две моды Например в ряду 10 11 11 11 12 13 14 14 14 17 модами являются значения 11 и 14 В таком случае говорят что выборка является бимодальнои

Могут существовать и так называемые мультимодальные распределения имеющие более двух вершин (мод)

4) Если мода оценивается по множеству сгруппированных данных то для нахождения моды необходимо определить группу с наибольшеи частотои признака Эта группа называется модальнои группои

4.2. Медиана

Медиана — обозначается $\tilde{X}$ (X с волнои или Md) и определяется как величина по отношению к которои по краинеи мере 50% выборочных значении меньше нее и по краинеи мере 50% — больше Можно дать второе определение сказав что ***медиана*** — это значение которое делит упорядоченное множество данных пополам

Задача 4 1 Наидем медиану выборки 9 3 5 8 4 11 13

Решение Сначала упорядочим выборку по величинам входящих в нее значении Получим 3 4 5 8 9 11 13 Поскольку в выборке семь элементов четвертыи по порядку элемент будет иметь значение большее чем первые три и меньшее чем последние три Таким образом медианои будет четвертыи элемент — 8

Задача 4.2. Найдем медиану выборки 20, 9, 13, 1, 4, 11

Упорядочим выборку 1, 4, 9, 11, 13, 20 Поскольку здесь имеется четное число элементов, то существует две «середины» — 9 и 13 В этом случае медиана определяется как среднее арифметическое этих значений

$$Md = \frac{9+11}{2} = 10$$

4.3. Среднее арифметическое

Среднее **арифметическое** ряда из n числовых значений X_1, X_2, X_i обозначается $\overline{X}$ и подсчитывается как

$$\overline{X} = \frac{(X_1 + X_2 + \quad + X_i)}{n} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X\right) \qquad (4\ 1)$$

Здесь величины 1, 2 n являются так называемыми индексами

В том случае, если отдельные значения выборки повторяются, ***среднюю*** арифметическую вычисляют по формуле

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \; f_i \qquad (4\ 2)$$

$\overline{X}$ в таком случае называют взвешенной средней, где f_i — частоты повторяющихся значений

Знак $\sum$ является символом операции суммирования Он означает, что все значения X_i должны быть просуммированы Числа, стоящие над и под знаком $\sum$ называются пределами суммирования и указывают наибольшее и наименьшее значения индекса суммирования, между которыми расположены его промежуточные значения

Например, в формуле (4 1) суммирование начинается с первого элемента выборки, поэтому и пишется так $i = 1$, и заканчивается последним, поэтому наверху символа суммирования $\sum$ стоит величина n

Если же мы запишем так

$$\sum_{=4}^{6} X$$

то, поскольку нижний индекс суммирования i равен 4, а верхний равен 6 то будут просуммированы следующие элементы ряда X_4, X_5 и X_6, и в результате будет получено $X_4 + X_5 + X_6$

Или, если будет написано следующее выражение

$$\sum_{1}^{3} X_i$$

то, поскольку нижний индекс суммирования i равен 1, а верхний равен 3, то будут просуммированы следующие элементы ряда X_1, X_2 и X_3, и в итоге будет получено $X_1 + X_2 + X_3$

В дальнейшем мы будем пользоваться сокращением, которое состоит в том, что если производится суммирование всех элементов выборки от первого до последнего, то верхний и нижний пределы суммирования указываться не будут, а пишется просто

$\sum X$ или $\sum X$

При вычислении величины средней по таблице чисел в дальнейшем будет использоваться следующая формула

-гоць

$$\overline{X} = \frac{1}{N} \sum_{-1}^{p} \sum_{-1}^{n} (x_{ij}) \qquad (4\ 3)$$

где x_{ij} — значения всех переменых, полученных в эксперименте, или все элементы таблицы,

при этом индекс j меняется от 1 до p, где p число столбцов в таблице, а индекс i меняется от 1 до n где n — число испытуемых или число строк в таблице

Тогда $\overline{X}$ — обшая средняя всеи анализируемой совокупности данных, N — обшее число всех элементов в таблице (анализируемой совокупности экспериментальных данных) и в общем случае $N = p\ \ n$

Символическое обозначение x_{ij} очень удобно Например, пусть перед нами стоит задача — указать конкретный элемент нашей таблицы Для этого мы должны знать номер столбца, например 4, и номер строки (или порядковыи номер испытуемого), например 5 Тогда его обозначение будет таково x_{54} Это значит, что выбран пятый элемент в строчке из четвертого столбца

Символ $\sum\sum$ (двоиная сумма) означает что вначале осуществляется суммирование всех элементов таблицы по индексу i — т е по строкам затем полученные суммы по строчкам складываются по столбцам или иначе говоря по индексу j

Следует подчеркнуть что средние величины характеризуют выборку одним (средним) числом Преимущество или иначе информативная значимость средних величин заключается в их способности аккумулировать или уравновешивать все индивидуальные отклонения в результате чего проявляется то наиболее устоичивое и типичное что характеризует качественное своеобразие варьирующего объекта позволяя отличить одну выборку от другои а на этои основе например одно измеренное психологическое своиство от другого

Однако среднее как статистическии показатель не лишено недостатков Так например при вычислении среднего количества ошибок при выполнении корректурнои пробы может быть получена величина равная 1 3 ошибки или при определении среднего числа учеников обучающихся в пятых классах данной школы может быть получена величина равная 30 07 Конечно с точки зрения статистика эти величины обычны но для психологических задач они могут быть неприемлемы

Кроме того среднее оказывается достаточно чувствительным к очень маленьким или очень большим величинам отличающимся от основных значении измеренных характеристик Приведем пример из книги Дж Б Мангеима и Ричарда К Рича Политология Методы исследования М 1997 г Пусть 9 человек имеют доход от 4500 до 5200 тыс долларов в месяц Величина их среднего дохода равняется 4900 долларов Если же к этои группе добавить человека имеющего доход в 20000 тыс долларов в месяц то средняя всеи группы сместится и окажется равнои 6410 долларов хотя никто из всеи выборки (кроме одного человека) реально не получает такои суммы Понятно что аналогичное смещение но в противоположную сторону можно получить и в том случае если добавить в эту группу человека с очень маленьким годовым доходом

Важно подчеркнуть что подобные краиние величины т е те которые существенно искажают величину среднеи оказываются в то же время и наименее характерными для изучаемои генераль ной совокупности Именно поэтому в статистике, кроме среднеи величины, используются и другие характеристики «типичных значений» выборки, такие, как мода, медиана и ряд других характеристик

4.4. Разброс выборки

Разброс (иногда эту величину называют *размахом*) выборки обозначается буквой R Это самый простои показатель, который можно получить для выборки — разность между максимальной и минимальной величинами данного конкретного вариационного ряда, т е

$$R = X_{max} - X_{min}$$

Понятно, что чем сильнее варьирует измеряемый признак, тем больше величина R, и наоборот

Однако может случиться так, что у двух выборочных рядов и средние, и размах совпадают, однако характер варьирования этих рядов будет различный Например, даны две выборки

$$X = 10 \quad 15 \quad 20 \quad 25 \quad 30 \quad 35 \quad 40 \quad 45 \quad 50 \qquad \bar{X} = 30 \quad R = 40$$

$$Y = 10 \quad 28 \quad 28 \quad 30 \quad 30 \quad 30 \quad 32 \quad 32 \quad 50 \qquad \bar{Y} = 30 \quad R = 40$$

При равенстве средних и разбросов для этих двух выборочных рядов характер их варьирования различен Для того чтобы более четко представлять характер варьирования выборок, следует обратиться к их распределениям

4.5. Дисперсия

Рассмотрим еще одну очень важную числовую характеристику выборки, называемую ***дисперсией*** Дисперсия представляет собой наиболее часто использующуюся меру рассеяния случайной величины (переменной) **Дисперсия** это среднее арифметическое квадратов отклонений значений переменной от ее среднего значения

$$D = \frac{1}{n} \sum_i (X_i - \overline{X})^2 \qquad (4\ 4)$$

где n — объем выборки

i — индекс суммирования

$\overline{X}$ — среднее, вычисляемое по формуле(4 1)

Вычислим дисперсию следующего ряда

$$2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 10 \qquad (4\ 5)$$

Прежде всего найдем среднее ряда (4 5) Оно равно $\overline{X} = 6$

Рассмотрим величины $(X_i - \overline{X})$ для каждого элемента ряда Иными словами, из каждого элемента ряда 4 5 вычтем величину среднего этого ряда Полученные величины характеризуют то, насколько каждый элемент отклоняется от средней величины в данном ряду Обозначим полученную совокупность разностей как множество T Тогда T есть

$$T = (2 - 6 = -4,\ 4 - 6 = -2,\ 6 - 6 = 0,\ 8 - 6 = 2,\ 10 - 6 = 4)$$

Так образуется новый ряд чисел Его особенность в том, что при сложении этих чисел обязательно получится ноль Проверим $(-4) + (-2) + 0 + 2 + 4 = 0$

Отметим, что сумма такого ряда $\Sigma(X_i - \overline{X})$ всегда будет равна нулю

Для того чтобы избавиться от нуля, каждое значение разности $(X - \overline{X})$ возводят в квадрат, все их суммируют и затем делят на число элементов, т е применяют формулу 4 4 В нашем примере получится следующее

$$\sum_i^i (X_i - \overline{X})^2 = (-4)\ (-4) + (-2)\ (-2) + 0\ 0 + 2\ 2 + 4\ 4 =$$

$$= 16 + 4 + 0 + 4 + 16 = 40$$

$$D = \frac{40}{6} = 6{,}8$$

Это и есть искомая дисперсия

Общий алгоритм вычисления дисперсии для одной выборки следующий

1 Вычисляется среднее по выборке

2 Для каждого элемента выборки вычисляется его отклонение от средней, т е получается множество T

3 Каждый элемент множества T возводят в квадрат

4 Находится сумма этих квадратов

5 Эта сумма, как и в случае вычисления среднего, делится на общее количество членов ряда — n В ряде случаев, особенно когда величина выбоки мала, деление осуществляется не на величину n, а на величину $n - 1$

Величина, получающаяся после пятого шага, и есть искомая ***дисперсия.***

Расчет дисперсии для таблицы чисел осуществляется по формуле 4 6

$$D = \frac{\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ij} - \overline{X}\right)^2}{N-1} \tag{4 6}$$

где x_{ij} — значения всех переменых, полученных в эксперименте, или все элементы таблицы

индекс j меняется от 1 до p, где p число столбцов в таблице, а индекс i меняется от 1 до n, где n — число испытуемых или число строк в таблице

$\overline{X}$ — общая средняя всех элементов таблицы, вычисленная по формуле 4 3,

N — общее число всех элементов в таблице (анализируемой совокупности экспериментальных данных) и в общем случае $N = p \quad n$

Дисперсию для генеральной совокупности принято обозначать как σ^2, а дисперсию выборки как S_x^2 причем индекс x обозначает, что дисперсия характеризует варьирование числовых значении признака вокруг их средней арифметическои

Преимущество дисперсии перед размахом в том, что дисперсию можно представить как сумму ряда чисел (согласно ее определению), т е разложить на составные компоненты, позволяя тем самым более подробно охарактеризовать исходную выборку Важная характеристика дисперсии заключается также и в том, что с ее помощью можно сравнивать выборки, различные по объему

Однако сама дисперсия, как характеристика отклонения от среднего, часто неудобна для интерпретации Так, например, предположим, что в эксперименте измерялся рост в сантимет рах, тогда размерность дисперсии будет являться характеристикой площади, а не линейного размера (поскольку при подсчете дисперсии сантиметр возводится в квадрат)

Для того чтобы приблизить размерность дисперсии к размерности измеряемого признака применяют операцию извлечения квадратного корня из дисперсии Полученную величину называют ***стандартным отклонением.***

Из суммы квадратов, деленных на число членов ряда извле кается квадратный корень

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X - \bar{X})^2} \quad (4\ 7)$$

Другими словами стандартное отклонение выборки S_x представляет собой корень квадратный, извлеченный из дисперсии выборки S_x^2 Стандартное отклонение для генеральной совокупности обозначают также символом σ Подчеркнем еще раз, что размерность стандартного отклонения и размерность исходного ряда совпадают

В нашем примере $S_x = \sqrt{\frac{40}{6}} = 2\ 58$

4.6. Степень свободы

Число степеней свободы это число свободно варьирующих единиц в составе выборки Так, если вся выборка состоит из n элементов и характеризуется средней $\bar{X}$, то любой элемент этой совокупности может быть получен как разность между величиной n $\bar{X}$ и суммой всех остальных элементов, кроме самого этого элемента

Пример Рассмотрим ряд 4 5 2 4 6 8 10 Мы помним, что средняя этого ряда равна 6 В этом ряду 5 чисел, следовательно $N = 5$ Предположим, что мы хотим получить последний элемент ряда 4 5 — 10, зная все предыдущие элементы и среднее этого ряда Тогда

$$5 \quad 6 - 2 - 4 - 6 - 8 = 10$$

Предположим, что мы хотим получить первый элемент ряда 4 5 — 2, зная все последующие элементы и среднее этого ряда. Тогда

$$5 \quad 6 - 4 - 6 - 8 - 10 = 2 \text{ и т д}$$

Следовательно, один элемент выборки не имеет свободы вариации и всегда может быть выражен через другие элементы и среднее Это означает, что число степеней свободы у выборочного ряда обозначаемое в таких случаях символом k будет определяться как $k = n - 1$, где n — общее число элементов ряда (выборки)

При наличии не одного, а нескольких ограничений свободы вариации, число степеней свободы, обозначаемое как ν (греческая буква ню) будет равно $\nu = n - k$, где k соответствует числу ограничений свободы вариации

В общем случае для таблицы экспериментальных данных число степеней свободы будет определяться по следующей формуле

$$\nu = (c - 1) \quad (n - 1) \qquad (4\ 8)$$

где c — число столбцов, а n — число строк (число испытуемых)

Следует подчеркнуть, однако, что для ряда статистических методов расчет числа степеней свободы имеет свою специфику

4.7. Понятие нормального распределения

Нормальное распределение играет большую роль в математической статистике, поскольку многие статистические методы предполагают, что, анализируемые с их помощью экспериментальные данные распределены нормально График нормального распределения имеет вид колоколообразной кривой (см рис 2)

Его важной особенностью является то, что форма и положение графика нормального распределения определяется только двумя параметрами средней μ (мю) и стандартным отклонением σ (сигма) Если стандартное отклонение σ постоянно, а величина средней μ меняется, то собственно форма нормальной кривой остается неизменной, а лишь ее график смещается вправо (при увеличении μ) или влево (при уменьшении μ) по оси абсцисс — *OX* При условии постоянства средней μ изменение сигмы влечет за собой изменение только ширины кривой при уменьшении сигмы кривая делается более узкой, и поднимается при этом вверх, а при увеличении сигмы кривая расширяется, но опускается вниз Однако во всех случаях нормальная кривая оказывается строго симметричной относительно средней, сохраняя правильную колоколообразную форму

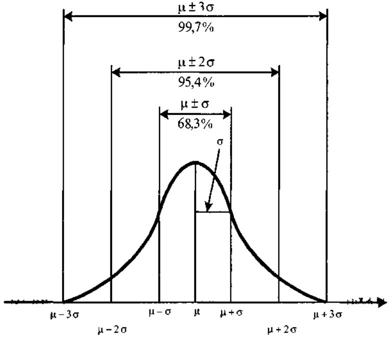


Рис. 2. Параметры μ и σ для нормального распределения

Для нормального распределения характерно также совпадение величин средней арифметической, моды и медианы Равенство этих показателей указывает на нормальность данного распределения Это распределение обладает еще одной важной особенностью чем больше величина признака отклоняется от среднего значения, тем меньше будет частота встречаемости (вероятность) этого признака в распределении «Нормальным» такое распределение было названо потому, что оно наиболее часто встречалось в естественно-научных исследованиях и казалось «нормой» распределения случайных величин

В психологических исследованиях нормальное распределение используется в первую очередь при разработке и применении тестов интеллекта и способностей Так, отклонения показателей интеллекта *IQ* следуют закону нормального распределения, имея среднее значение равное 100 для любой конкретной возрастной группы и стандартное отклонение в подавляющем большинстве случаев равное 16

Исходя из закона нормального распределения можно установить, насколько близко к крайним значениям распределения подходит то или иное значение *IQ*, а используя таблицы стандартного нормального распределения, можно вычислить, какая часть популяции имеет то или иное значение *IQ*

Однако применительно к другим психологическим категориям, в первую очередь к таким, как личностная и мотивационная сферы применение нормального распределения представляется весьма дискуссионным Известно, что в реальных психологических экспериментах редко получаются данные, распределенные строго по нормальному закону В большинстве случаев сырые психологические данные часто дают асимметричные, «ненормальные» распределения Как подчеркивает Е В Сидоренко (30), причина этого заключается в самой специфике некоторых психологических признаков Бывает, что от 10 до 20% испытуемых получают оценку «ноль», например, в методике Хекхаузена, когда в их рассказах не встречается ни одной словесной формулировки которая отражала бы мотивы надежды на успех или боязни неудачи Распределение таких оценок не может быть нормальным, как бы ни увеличивался объем выборки

Несмотря на это, при обработке экспериментальных данных всегда целесообразно проводить оценку характера распределения (см главу 8, раздел 8 2) Эта оценка важна, потому что в зависимости от характера распределения решается вопрос о возможности применения того или иного статистического метода Как будет понятно из дальнейшего изложения, при нормальном распределении экспериментальных данных применяются особые методы статистической обработки

Глава 5

ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ПРОВЕРКИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Полученные в экспериментах выборочные данные всегда ограничены и носят в значительной мере случайный характер Именно поэтому для анализа таких данных и используется математическая статистика, позволяющая обобщать закономерности, полученные на выборке, и распространять их на всю генеральную совокупность

5.1. Проверка статистических гипотез

Подчеркнем еще раз, что полученные в результате эксперимента на какой-либо выборке данные служат основанием для суждения о генеральной совокупности Однако в силу действия случайных вероятностных причин оценка параметров генеральной совокупности, сделанная на основании экспериментальных (выборочных) данных всегда будет сопровождаться погрешностью, и поэтому подобного рода оценки должны рассматриваться как предположительные, а не как окончательные утверждения Подобные предположения о свойствах и параметрах генеральной совокупности получили название *статистических гипотез* Как указывает Г В Суходольскии «Под статистической гипотезой обычно понимают формальное предположение о том, что сходство (или различие) некоторых параметрических или функциональных характеристик случайно или, наоборот, неслучайно» (28, с 279)

Сущность проверки статистической гипотезы заключается в том, чтобы установить, согласуются ли экспериментальные данные и выдвинутая гипотеза, допустимо ли отнести расхождение между гипотезой и результатом статистического анализа экспериментальных данных за счет случайных причин? Таким образом, статистическая гипотеза это научная гипотеза, допускающая статистическую проверку, а математическая статистика это научная дисциплина задачей которой является научно обоснованная проверка статистических гипотез

5.2. Нулевая и альтернативная гипотезы

При проверке статистических гипотез используются два понятия так называемая нулевая (обозначение H_0) и альтернативная гипотеза (обозначение H_1)

Принято считать, что нулевая гипотеза H_0 — это гипотеза о сходстве, а альтернативная H_1 — гипотеза о различии Таким образом, принятие нулевой гипотезы H_0 свидетельствует об отсутствии различий, а гипотезы H_1 о наличии различий

Если, например, две выборки извлечены из нормально распределенных генеральных совокупностей, причем одна выборка имеет с параметры μ_x и σ_x, а другая параметры μ_y и σ_y, то нулевая гипотеза исходит из предположения о том, что $\mu_x = \mu_y$ и $\sigma_x = \sigma_y$ т е разность двух средних $\mu_x - \mu_y = 0$ и разность двух стандартных отклонений $\sigma_x - \sigma_y = 0$ (отсюда и название гипотезы — нулевая)

Принятие альтернативной гипотезы H_1 свидетельствует о наличии различий и исходит из предположения, что $\mu_x - \mu_y \neq 0$ и $\sigma_x - \sigma_y \neq 0$

Вообще говоря, при принятии или отвержении гипотез возможны различные варианты

Например, психолог провел выборочное тестирование показателей интеллекта у группы подростков из полных и неполных семей В результате обработки экспериментальных данных установлено, что у подростков из неполных семей показатели интеллекта в среднем ниже, чем у их ровесников из полных семей Может ли психолог на основе полученных результатов сделать вывод о том, что неполная семья ведет к снижению интеллекта у подростков? Принимаемый в таких случаях вывод носит называние статистического решения Подчеркнем, что такое решение всегда вероятностно

При проверке гипотезы экспериментальные данные могут противоречить гипотезе H_0, тогда эта гипотеза отклоняется В противном случае, т е если экспериментальные данные согласуются с гипотезой H_0 она не отклоняется Часто в таких случаях говорят, что гипотеза H_0 принимается (хотя такая формулировка не совсем точна, однако она широко распространена и мы ею будем пользоваться в дальнейшем) Отсюда видно, что статистическая проверка гипотез, основанная на экспериментальных, выборочных данных, неизбежно связана с риском (вероятностью) принять ложное решение При этом возможны ошибки двух родов Ошибка первого рода произойдет, когда будет принято решение отклонить гипотезу H_0, хотя в действительности она оказывается верной Ошибка второго рода произойдет когда будет принято решение не отклонять гипотезу H_0 хотя в действительности она будет неверна Очевидно, что и правильные выводы могут быть приняты также в двух случаях Вышесказанное лучше представить в виде таблицы 5 1

Таблица 5 1

Результат проверки гипотезы H_0	Возможные состояния проверяемой гипотезы	
	Верна гипотеза H_0	Верна гипотеза H_1
Гипотеза H_0 отклоняется	Ошибка первого рода	Правильное решение
Гипотеза H_0 не отклоняется	Правильное решение	Ошибка второго рода

Не исключено что психолог может ошибиться в своем статистическом решении, как видим из таблицы 5 1 эти ошибки могут быть только двух родов Поскольку исключить ошибки при принятии статистических гипотез невозможно, то необходимо минимизировать возможные последствия, т е принятие неверной статистической гипотезы В большинстве случаев единственный путь минимизации ошибок заключается в увеличении объема выборки

5.3. Понятие уровня статистической значимости

При обосновании статистического вывода следует решить вопрос где же проходит линия между принятием и отвержением нулевой гипотезы? В силу наличия в эксперименте случайных влиянии эта граница не может быть проведена абсолютно точно Она базируется на понятии ***уровня значимости*** ***Уровнем значимости*** называется вероятность ошибочного отклонения нулевой гипотезы Или иными словами ***уровень значимости*** это вероятность ошибки первого рода при принятии решения Для обозначения этои вероятности как правило употребляют либо греческую букву α либо латинскую букву P В дальнейшем мы будем употреблять букву P

Исторически сложилось так что в прикладных науках использующих статистику и в частности в психологии считается что низшим уровнем статистической значимости является уровень $P = 0\ 05$ достаточным — уровень $P = 0\ 01$ и высшим уровень $P - 0\ 001$ Поэтому в статистических таблицах которые приводятся в приложении к учебникам по статистике обычно даются табличные значения для уровней $P = 0\ 05$ $P = 0\ 01$ и $P = 0\ 001$ Иногда даются табличные значения для уровней $P - 0\ 025$ и $P - 0\ 005$

Величины 0 05 0 01 и 0 001 — это так называемые стандартные уровни статистической значимости При статистическом анализе экспериментальных данных психолог в зависимости от задач и гипотез исследования должен выбрать необходимый уровень значимости Как видим здесь наибольшая величина или нижняя граница уровня статистической значимости равняется 0 05 — это означает что допускается пять ошибок в выборке из ста элементов (случаев испытуемых) или одна ошибка из двадцати элементов (случаев испытуемых) Считается что ни шесть ни семь ни большее количество раз из ста мы ошибиться не можем Цена таких ошибок будет слишком велика

Заметим что в современных статистических пакетах на ЭВМ используются не стандартные уровни значимости а уровни подсчитываемые непосредственно в процессе работы с соответствующим статистическим методом Эти уровни обозначаемые буквой P могут иметь различное числовое выражение в интервале от 0 до 1 например $P = 0\ 7$ $P = 0\ 23$ или $P = 0\ 012$ По нятно, что в первых двух случаях полученные уровни значимости слишком велики и говорить о том, что результат значим нельзя В то же время в последнем случае результаты значимы на уровне 12 тысячных Это достоверный уровень

Правило принятия статистического вывода таково на основании полученных экспериментальных данных психолог подсчитывает по выбранному им статистическому методу так называемую эмпирическую статистику, или эмпирическое значение Эту величину удобно обозначить как $Ч_{эмп}$ Затем эмпирическая статистика $Ч_{эмп}$ сравнивается с двумя критическими величинами, которые соответствуют уровням значимости в 5% и в 1% для выбранного статистического метода и которые обозначаются как $Ч_{кр}$ Величины $Ч_{кр}$ находятся для данного статистического метода по соответствующим таблицам, приведенным в приложении к любому учебнику по статистике Эти величины, как правило, всегда различны и их в дальнейшем для удобства можно назвать как $Ч_{кр1}$ и $Ч_{кр2}$ Найденные по таблицам величины критических значений $Ч_{кр1}$ и $Ч_{кр2}$ удобно представлять в следующей стандартной форме записи

$$Ч_{кр} = \begin{cases} Ч_{кр1} \text{ найденное по таблицам Приложения для } P \le 0{,}05 \\ \\ Ч_{кр2}, \text{ найденное по таблицам Приложения для } P \le 0\ 01 \end{cases} \qquad (5\ 1)$$

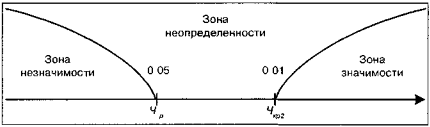
Подчеркнем, однако, что мы использовали обозначения $Ч_{эмп}$ и $Ч_{кр}$ как сокращение слова «число» Во всех статистических методах приняты свои символические обозначения всех этих величин как подсчитанной по соответствующему статистическому методу эмпирической величины, так и найденных по соответствующим таблицам критических величин Например, при подсчете рангового коэффициента корреляции Спирмена (см главу 11, раздел 11 3) по таблице 21 Приложения были найдены следующие величины критических значений, которые для этого метода обозначаются греческой буквой ρ (ро) Так для $P = 0{,}05$ по таблице 21 Приложения найдена величина $\rho_{кр1} = 0{,}61$ и для $P = 0{,}01$ величина $\rho_{кр2} = 0{,}76$

В принятой в дальнейшем изложении стандартной форме записи это выглядит следующим образом

$$\rho_{кр} - \begin{cases} 0\ 61 \text{ для } P < 0\ 05 \\ 0\ 76 \text{ для } P < 0\ 01 \end{cases} \qquad (5\ 2)$$

Теперь нам необходимо сравнить наше эмпирическое значе ние с двумя наиденными по таблицам критическими значения ми Лучше всего это сделать расположив все три числа на так называемои «оси значимости Ось значимости представляет собои прямую на левом конце которои располагается 0 хотя он как правило не отмечается на самой этои прямои и слева направо идет увеличение числового ряда По сути дела это при вычная школьная ось абсцисс *OX* декартовои системы координат Однако особенность этои оси в том что на неи выделено три участка «зоны» Левая зона называется зоной незначимости правая — зонои значимости а промежуточная зонои неопреде ленности Границами всех трех зон являются $Ч_р$ для $P = 0\ 05$ и $Ч_р$ для $P = 0\ 01$ как это показано ниже

Ось значимости

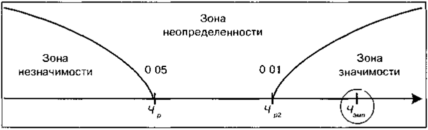


Подсчитанное $Ч$ по какому либо статистическому методу должно обязательно опасть в одну из трех зон

1 Пусть $Ч_{м}$ попало в зону незначимости тогда рисунок выгля дит так

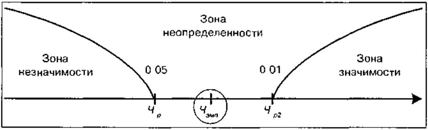
В этом случае принимается гипотеза H_0 об отсутствии различий

2 Пусть $Ч_{эмп}$ попало в зону значимости тогда рисунок выглядит так



В этом случае принимается альтернативная гипотеза H_1 о на личии различии а гипотеза H_0 отклоняется

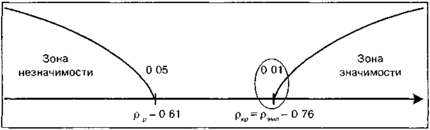
3 Пусть $Ч_{эмп}$ попало в зону неопределенночсти тогда рисунок выглядит так



В этом случае перед психологом стоит дилемма Так в зависи мости от важности решаемой задачи он может считать полученную статистическую оценку достовернои на уровне 5% и принять тем самым гипотезу H_1 отклонив гипотезу H_0 либо — недостовернои на уровне 1% приняв тем самым гипотезу H Подчеркнем одна ко что это именно тот случаи когд психолог может допустить ошибки первого или второго рода Как уже говорилось выше в этих обстоятельствах лучше всего увеличить объем выборки

Подчеркнем также что величина $Ч_{к}$ может точно совпасть либо с $Ч_{кр}$ либо с $Ч$ В перво i случае можно считать что оценка достоверна то іно на уровне в 5% и принять гипотезу H_1 или напротив принять гипотезу H_0 Во втором случ іе как пра вило принимается альтернагивная гипотеза H о наличии разли чии а гипотеза H_0 отклоняется

Для иллюстрации этих положении строим соответствующую «ось значимости» рассмотренного выше примера для оценки уровня значимости эмпирически рассчитанного рангового коэффициента корреляции Спирмена



Как видим, в этом случае $\rho_{кр} = \rho_{эмп}$, следовательно принимается альтернативная гипотеза H_1 о наличии различий, а гипотеза H_0 отклоняется

5.4. Этапы принятия статистического решения

Принятие статистического решения разбивается на этапы или шаги

1 Формулировка нулевой и альтернативной гипотез

2 Определение объема выборки N

3 Выбор соответствующего уровня значимости или вероятности отклонения нулевой гипотезы Это может быть величина меньшая или равная 0 05 (5% уровень значимости) В зависимости от важности исследования можно выбрать уровень значимости в 0,1% или даже в 0,001%

4 Выбор статистического метода, который зависит от типа решаемой психологической задачи

5 Вычисление соответствующего эмпирического значения по экспериментальным данным согласно выбранному статистическому методу

6 Нахождение по таблице Приложения для выбранного статистического метода критических значений соответствующих уровню значимости для $P = 0\ 05$ и для $P = 0{,}01$

7 Построение оси значимости и нанесении на нее табличных критических значении и эмпирического значения $Ч_{эм}$. Для этого целесообразно каждый раз пользоваться приведенными выше рисунками

8 Формулировка принятия решения (выбор соответствующей гипотезы H_0 или H_1)

5.5. Классификация психологических задач, решаемых с помощью статистических методов

Подчеркнем еще раз, что, прежде чем выполнить любои психологическии эксперимент, необходимо четко сформулировать его задачи, определить экспериментальную гипотезу и все этапы ее статистической проверки, а также выбрать соответствующий статистический метод, наиболее эффективный для решения поставленных в исследовании задач

Подавляющее большинство задач, решаемых психологом в эксперименте предполагает те или иные сопоставления Это могут быть сопоставления одних и тех же показателей в разных группах испытуемых или, напротив, разных показателей в одной и той же группе Для определения степени эффективности каких-либо воздействий (обучение, тренировка, тренинг, инструктаж и т п) сравниваются показатели «до» и «после» этих воздействий Например, сравниваются показатели уровня агрессивности у подростков до и после психотренинга, что позволяет определить его эффективность Или в лонгитюдном исследовании сопоставляются результаты у одних и тех же испытуемых по одним и тем же методикам, но в разном возрасте, это позволяет выявить временную динамику анализируемых показателей Иногда возникает задача сравнить индивидуальные показатели, полученные при различных внешних условиях, для выявления связи между показателями и факторов, объединяющих эти связи

Два выборочных распределения сравниваются между собои или с теоретическим законом распределения, чтобы выявить различия или, напротив, сходство в типах распределении Например, сравнение распределении времени решения простой и сложных задач позволит построить классификацию задач и типологию испытуемых

В общем психологические задачи, решаемые с помощью методов математической статистики, условно можно разделить на несколько групп

1 Задачи, требующие установления сходства или различия

2 Задачи, требующие группировки и классификации данных

3 Задачи, ставящие целью анализ источников вариативности получаемых психологических признаков

4 Задачи, предполагающие возможность прогноза на основе имеющихся данных

Эта неполная классификация носит предварительный характер По мере ознакомления с методами математической статистики, излагаемыми в данном пособии, читатель получит более детальное представление о типологии задач и главное — методов, которые могут быть адекватно использованы для их решения Наиболее полная сводка типов задач и методов их решения дана в Приложении 3

Глава 6

СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ РАЗЛИЧИЙ

Однои из наиболее часто встречающихся статистических задач с которыми сталкивается психолог является задача сравнения результатов обследования какого либо психологического признака в разных условиях измерения (например до и после определенного воздеиствия) или обследования контрольнои и экспериментальнои групп Помимо этого нередко возникает необходимость оценить характер изменения того или иного психологического показателя в однои или нескольких группах в разные периоды времени или выявить динамику изменения этого показателя под влиянием экспериментальных воздеиствии Для решения подобных задач используется достаточно большои набор статистических способов называемых в наиболее общем виде критериями различии Эти критерии позволяют оценить степень статистическои достоверности различии между разнообразными показателями измеренными согласно плану проведения психологического исследования Важно учитывать что уровень достоверности различии включается в план проведения эксперимента Другими словами исследователь при постановке экспериментальнои задачи априори выбирает уровень достоверности различии (как правило от 5% и выше в зависимости от особенностеи решаемои задачи) которыи будет считаться приемлемым

Существует достаточно большое количество критериев различии Каждыи из них имеет свою специфику различаясь между собои по различным основаниям Одним из таких основании является тип измерительнои шкалы для которои предназначен тот или иной критерий Например, с помощью некоторых критериев можно обрабатывать данные, полученные только в номинальных шкалах Ряд критериев дает возможность обрабатывать данные, полученные в порядковой, интервальной и шкале отношений

Критерии различаются также по максимальному объему выборки, который они могут охватить, а также и по количеству выборок, которые можно сравнивать между собой с их помощью Так, существуют критерии, позволяющие оценить различия сразу в трех и большем числе выборок Некоторые критерии позволяют сопоставлять неравные по численности выборки

Еще одним признаком, дифференцирующим критерии, служит само качество выборки она может быть связной (зависимой) или несвязной (независимой) Выборки также могут быть взяты из одной или нескольких генеральных совокупностей Именно эта характеристика выборки служит наиболее важным основанием, по которому прежде всего выбираются критерии

Кроме того, критерии различаются по мощности ***Мощность*** критерия — это его способность выявлять различия или отклонять нулевую гипотезу, если она неверна Напомним, что ошибке первого рода соответствует отказ от нулевой гипотезы Можно сказать также, что мощность критерия характеризует его способность избегать ошибки второго рода

Психолог может решать экспериментальные задачи с использованием разных статистических критериев При этом возможна такая ситуация, что один критерий позволяет обнаружить различия, а другой критерий различий не выявляет Последнее означает, что первый критерий оказывается более мощным, чем другой В таком случае закономерно возникает вопрос зачем использовать менее мощные критерии? Однако известно, что, как правило, чем мощнее критерий, тем более трудоемкой является процедура вычислений с его помощью Более того, если значимые различия установлены с помощью менее мощного критерия, то более мощный, заведомо подтвердит факт существования этих различий Следовательно использование менее мощных критериев нередко бывает оправданным (прежде всего в целях экономии времени вычислений) Нельзя забывать при этом, что отсутствие достоверных различий, зафиксированное с помощью одного критерия не является гарантиеи того что более мощныи критерии не установит их наличия

В свете вышесказанного не проще ли сразу применять толь ко один наиболее мощныи критерии? Однако большое разно образие критериев различия предоставляет следующие возмож ности

— выбирать критерий адекватныи типу шкалы в которои получены экспериментальные данные
— работать со связными (зависимыми) и несвязными (неза висимыми) выборками
— работать с неравными по объему выборками
— выбирать из критериев разные по мощности (в зависимо сти от целеи исследования)

6 1 1 Параметрические и непараметрические критерии

Все критерии различий условно подразделены на две группы параметрические и непараметрические критерии

Критерии различия называют ***параметрическим*** если он основан на конкретном типе распределения генеральнои сово купности (как правило нормальном) или использует парамет ры этои совокупности (средние дисперсии и т д) Критерий различия называют ***непараметрическим*** если он не базируется на предположении о типе распределения генеральной совокуп ности и не использует параметры этои совокупности Поэтому для непараметрических критериев предлагается также исполь зовать такои термин как критерии свободныи от распределе ния (8 с 37)

При нормальном распределении генеральнои совокупности параметрические критерии обладают большеи мощностью по сравнению с непараметрическими Иными словами они спо собны с большей достоверностью отвергать нулевую гипотезу если последняя неверна По этои причине в тех случаях когда выборки взяты из нормально распределенных генеральных со вокупностеи следует отдавать предпочтение параметрическим критериям

Однако как показывает практика подавляющее большинство данных получаемых в психологических экспериментах *не распределены нормально* поэтому применение параметрических критериев при анализе результатов психологических исследовании может привести к ошибкам в статистических выводах В таких случаях непараметрические критерии оказываются более мощными т е способными с большеи достоверностью отвергать нулевую гипотезу

Итак при оценке различии в распределениях далеких от нормального непараметрические критерии могут выявить значимые различия в то время как параметрические критерии таких различии не обнаружат Важно отметить что во первых непараметрические критерии выявляют значимые различия и в том случае если распределение близко к нормальному во вторых при вычислениях вручную непараметрические критерии являются значительно менее трудоемкими чем параметрические

6 1 2 Рекомендации к выбору критерия различии

При подготовке экспериментального исследования психолог должен заранее запланировать характеристики сопоставляемых выборок (прежде всего связность — несвязность и однородность) их величину (объем) тип измерительнои шкалы и вид используемого критерия различии Последовательно это можно представить в виде следующих этапов

- Прежде всего следует определить является ли выборка связной (зависимои) или несвязнои (независимои)
- Следует определить однородность неоднородность выборки
- Затем следует оценить объем выборки и зная ограничения каждого критерия по объему выбрать соответствующии критерии
- При этом целесообразнее всего начинать работу с выбора наименее трудоемкого критерия
- Если используемыи критерий не выявил различия — следует применить более мощный но одновременно и более трудоемкии критерии

- Если в распоряжении психолога имеется несколько критериев то следует выбирать те из них которые наиболее полно используют информацию содержащуюся в экспериментальных данных
- При малом объеме выборки следует увеличивать величину уровня значимости (не менее 1%) так как небольшая выборка и низкий уровень значимости приводят к увеличению вероятности принятия ошибочных решений

6 2. Непараметрические критерии для связных выборок

6 2 1 Критерии знаков G

Нередко сравнивая на глазок результаты до и «после какого либо воздействия (например тренинга) психолог видит тенденции повторного измерения — большинство показателей может увеличиваться или напротив уменьшаться Наиболее простым путем оценки различий казалось бы является подсчет процентов в изменениях в ту или другую сторону «до и после и сравнение полученных процентов между собой На основе этого сравнения можно было бы придти к заключению что если наблюдаются различия в процентах то имеет место различие и в сравниваемых психологических характеристиках до и после Подобный подход категорически неприемлем поскольку для процентов нельзя определить уровень достоверности в их различиях Делать какие либо выводы из экспериментального материала возможно только на основе статистических процедур специально сконструированных так что на их основе можно определить уровень достоверности различий Проценты взятые сами по себе не дают возможности делать статистически достоверные выводы Поэтому для того чтобы доказать эффективность какого либо воздействия необходимо выявить статистически значимую тенденцию в смещении (сдвиге) показателей

Для решения подобных статистических задач психолог может использовать целый ряд критериев различия Один из наиболее простых критериев различия — критерий знаков G Этот крите рий относится к непараметрическим и применяется только для связанных (зависимых) выборок Он дает возможность установить, насколько однонаправленно изменяются значения признака при повторном измерении связанной, однородной выборки Критерий знаков применяется к данным, полученным в ранговой, интервальной и шкале отношений

Решим с использованием критерия знаков следующую задачу

Задача 6.1. Психолог проводит групповой тренинг Его задача — выяснить будет ли эффективен данный конкретный вариант тренинга для снижения уровня тревожности участников?

Решение Для решения этой задачи психолог с помощью теста Тейлора дважды выявляет уровень тревожности у 14 участников до и после проведения тренинга Результаты измерения приведем в таблице 6 1, включив в нее столбец, необходимый для расчета по критерию знаков G

Таблица 6 1

№ испытуемых п/п	Уровень тревожности «до» тренинга	Уровень тревожности «после» тренинга	Сдвиг
1	30	34	+ 4
2	39	39	0
3	35	26	− 9
4	34	33	− 1
5	40	34	− 6
6	35	40	+ 5
7	22	25	+ 3
8	22	23	+ 1
9	32	33	+ 1
10	23	24	+ 1
11	16	15	− 1
12	34	27	− 7
13	33	35	+ 2
14	34	37	+ 3

В столбце обозначенном словом Сдвиг» для каждого учас тника отдельно определяют насколько изменился его уровень тревожности после проведения тренинга Сдвиг — это величина разности между уровнями тревожности одного и того же участ ника после и до тренинга Но не наоборот! Величины сдви гов обязательно должны быть даны в соответствующем столбце таблице с учетом знаков

В критерии знаков по результатам полученным в столбце таблицы обозн іченном словом Сдвиг подсчитываются суммы нулевых положительных и отрицательных сдвигов При исполь зовании критерия знаков необходимо учитывать только сумму положительных и отрицательных сдвигов а сумму нулевых — от брасывать

Проведем необходимыи подсчет для нашеи задачи

общее число (сумма) нулевых сдвигов – 1
общее число (сумма) положительных сдвигов = 8
общее число (сумма) отрицательных сдвигов = 5

Таким образом отбросив нулевые сдвиги получаем 13 нену левых сдвигов При этом подсчет показал что сдвиги имели мес то и что большая часть из них положительна

Напомним что критерии знаков G предназначен для уста новления того как изменяются значения признака при повтор ном измерении связной выборки в сторону увеличения или уменьшения Поэтому анализируя соотношение положительных и отрицательных сдвигов в нашеи задаче решаем вопрос мож но ли утверждать что после проведения тренинга наблюдается достоверныи сдвиг в сторону уменьшения vровня тревожности участников?

Для решения этого вопроса необходимо ввести два обозна чения Первое — сумма сдвигов получившаяся наибольшеи но сит название **типичного сдвига** и обозначается буквои n Типич ныи сдвиг используется при работе с таблицеи 1 Приложения в которои приводятся критические величины 5% и 1% уровнеи значимости данного критерия Второе — сумма сдвигов полу чившаяся наименьшеи носит название — **нетипичного сдвига** и обозначается как — $G_{эмп}$ Эта величина ($G_{м}$) располагается на оси значимости» В нашем случае $G_{м} = 5$ В целом типичныи и нетипичныи сдвиги рассматриваются как дополнительные друг к другу

Подчеркнем что в том случае когда величины типичного и нетипичного сдвигов оказываются равными критерии знаков неприменим

Оценка статистическои достоверности различии по критерию знаков производится по таблице 1 Приложения В неи в столбце обозначенным буквои n приведены величины типичных сдвигов а в столбцах имеющих обозначение соответствующее уровнями значимости $P - 0\ 05$ и $P = 0\ 01$ — так называемые критические величины Условно их также можно считать нетипичными сдвигами Они обозначаются как G_p и с ними сравнивается полученное значение нетипичного сдвига $G_н$

Итак оцениваем уровень достоверности различии нашей задачи Для этого необходимо воспользоваться таблицеи 1 Приложения Поскольку в нашем примере $n = 8$ (это число типичных сдвигов) поэтому нужныи нам участок таблицы 1 Приложения выглядит так

Таблица 62

n	P	
	0 05	0 01
8	1	0

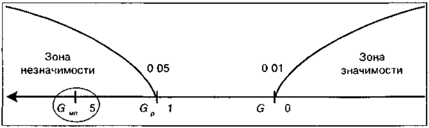
Более компактно соответствующую строчку таблицы 1 Приложения принято записывать следующим образом

$$G_p = \begin{cases} 1 \text{ для } P \le 0\ 05 \\ 0 \text{ для } P \le 0\ 01 \end{cases}$$

Эта запись означает что при уровне значимости в 5% сумма нетипичных сдвигов не должна превышать 1 а при уровне значимости в 1% — 0 В нашем случае $G\ \ - 5$ что существенно больше 1

Для большеи наглядности следует построить так называемую ось значимости» на которои располагаются как величины критических сдвигов так и величина G т е величина нетипичного сдвига

Ось значимости имеет следующий вид



Использование оси значимости позволяет отчетливо видеть что $G_м$ попало в зону незначимости т е полученный в эксперименте общий положительный сдвиг который соответствует увеличению уровня тревожности испытуемых после проведения тренинга статистически недостоверен Иначе говоря данный способ воздействия не привел к существенным изменениям в уровне тревожности испытуемых

Обращаем внимание читателя что в критерии знаков ось значимости образно говоря перевернута Нуль располагается не как обычно (на числовой оси слева) а справа и увеличение числового ряда идет в противоположную сторону т е справа налево Последнее связано с тем что чем больше количество нетипичных сдвигов тем меньше вероятность того что суммарный сдвиг окажется статистически достоверен Подобные исключения в направленности «оси значимости будут встречаться и далее Такой тип расположения оси значимости справедлив для критериев T Вилкоксона Макнамары и критерия U Вилкоксона Манна—Уитни

Полученный выше результат может быть переформулирован также в терминах нулевой и альтернативной гипотез поскольку преобладание типичного положительного направления сдвига в данном конкретном эксперименте является случайным то должна быть принята гипотеза H_0 об отсутствии различий или о наличии сходства Возвращаясь к психологической задаче укажем что согласно критерию знаков примененный психологом способ тренинга неудовлетворителен поскольку не дает статистически достоверных изменений в состоянии участников тренинга

Задача 6 2 Получив отрицательныи результат психолог внес в способ тренинга соответствующие коррективы Он снова выдвигает гипотезу улучшенныи способ тренинга позволяет эффективно снижать уровень тревожности испытуемых

Решение. Для проверки этого утверждения психолог провел аналогичный, эксперимент, но уже на большеи выборке испытуемых На это раз он включил в группу 19 человек В таблице 6 3 приводятся результаты эксперимента

Таблица 6 3

№ испытуемых п/п	Уровень тревожности «до» тренинга	Уровень тревожности «после» тренинга	Сдвиг
1	24	22	2
2	12	12	0
3	40	23	17
4	30	31	+ 1
5	40	32	- 8
6	35	24	11
7	40	40	0
8	32	12	20
9	40	22	- 18
10	24	21	- 3
11	33	30	- 3
12	38	26	- 12
13	39	38	- 1
14	25	23	2
15	28	22	6
16	36	22	14
17	37	36	- 1
18	32	38	+ 2
19	25	25	0

Подсчитываем суммы сдвигов

нулевых – 3
положительных – 2
отрицательных – 14

Таким образом, получаем, что большинство сдвигов отрицательны Теперь именно отрицательные сдвиги будут «типичными» в отличие от предыдущего случая, когда типичными были положительные сдвиги В таблице 1 Приложения ищем строчку, в которой $n = 14$ Эта строчка вынесена ниже в таблицу 6 4

Таблица 6 4

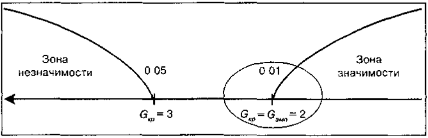
n	P	
	0,05	0,01
14	3	2

Поскольку в нашем случае основной, типичный сдвиг — отрицательный то дополнительный, «нетипичный» сдвиг будет положительным и, как следует из таблицы 6 4, на уровне значимости 5% общее количество таких сдвигов не должно превышать числа 3, а при уровне значимости 1% — 2 Вновь переведем вышесказанное в стандартную форму записи

$$G_{кр} = \begin{cases} 3 \text{ для } P \le 0{,}05 \\ 2 \text{ для } P \le 0{,}01 \end{cases}$$

В нашем случае сумма положительных (т е нетипичых) сдвигов равна 2 То есть $G_{эмп} = 2$

Строим «ось значимости»



Значение G = 2 совпало с критическим значением зоны значимости $G_{кр}$ для 1% Следовательно психолог может утверж дать что полученныи в результате эксперимента сдвиг уровня тревожности статистически значим на 1% уровне Иными слова ми в результате тренинга тревожность испытуемых понизилась статистически достоверно

Переформулируем полученныи результат в терминах статис тических гипотез поскольку преобладание типичного отрица тельного направления сдвига в данном случае не случаино то следовательно на 1% уровне может быть принята гипотеза H о наличии различии а гипотеза H о сходстве отклонена

Для лучшего понимания работы с критерием знаков рассмот рим последнюю строчку таблицы 1 Приложения В неи стоит чис ло 300 это означает что для рtботы с очень большими по чис ленности выборками критерии знаков не предназначен При чис ле типичных сдвигов равном 300 критические значения для не типичиых сдвигов будут равны соответственно

$$G_{кр} = \begin{cases} 135 \text{ для } P \leq 0\ 05 \\ 129 \text{ для } P \leq 0\ 01 \end{cases}$$

Следовательно если число нетипичных сдвигов $G_{нт}$ при числе типичных сдвигов равном 300 не превышает 135 ($G_{эмп} < G_{кр} = 135$) то на уровне значимости 5% принимается гипотеза H_1 о различии и аналогично если $G_{эм}$ не превышает 129 ($G_{м} < G_{кр} = 129$) то на 1% уровне значимости также принимается гипотеза H о различии и на соответствующих уровнях отклоняются гипотезы H_0 о сходстве Мы помним что при работе с критерием знаков сумма нулевых сдвигов не учитывается Поэтому общая величина выборки в этом критерии может быть достаточно большой но не большей чем 300 + 135 = 435 элементов Напомним еще раз что в случае равенства числа типичных и нетипичных сдвигов — критерии знаков не применим

В заключении следует заметить что критерии знаков являет ся одним из самых простых по способу вычисления Традицион но он считается одним из наименее мощных Однако можно ут верждать что если критерии знаков показал значимые различия на 1% уровне то другие более мощные критерии подтвердят эти различия В то же время, если критерий знаков не выявил значимых различии, возможно, что более мощные критерии, напротив, такое различие выявят

Для применения критерия G необходимо соблюдать следующие условия

1 Измерение может быть проведено в шкале порядка, интервалов и отношений

2 Выборка должна быть однородной и связной

3 Число элементов в сравниваемых выборках должно быть равным

4 G критерий знаков может применяться при величине типичного сдвига от 5 до 300 (на большую величину не рассчитана таблица достоверности)

5 При большом числе сравниваемых парных значений критерий знаков достаточно эффективен

6 При равенстве типичных и нетипичных сдвигов критерий знаков неприменим, следует использовать другие критерии

6.2.2. Парный критерий T — Вилкоксона

Для решения задач, в которых осуществляется сравнение двух рядов чисел, кроме критерия знаков G психолог может использовать парный критерий T — Вилкоксона Этот критерий является более мощным, чем критерий знаков, и применяется для оценки различий экспериментальных данных, полученных в двух разных условиях на одной и той же выборке испытуемых Он позволяет выявить не только направленность изменений, но и их выраженность, т е он позволяет установить, насколько сдвиг показателеи в каком-то одном направлении является более интенсивным, чем в другом

Критерий T основан на ранжировании абсолютных величин разности между двумя рядами выборочных значений в первом и втором эксперименте (например «до» и «после» какого-либо воздействия) Ранжирование абсолютных величин означает, что знаки разностей не учитываются, однако в дальнейшем наряду с общеи суммои рангов находится отдельно сумма рангов как для положительных так и для отрицательных сдвигов Если интен сивность сдвига в одном из направлении оказывается большей то и соответствующая сумма рангов также оказывается больше Этот сдвиг как и в случае критерия знаков называется типич ным а противоположныи меньшии по сумме рангов сдвиг — нетипичным Как и для критерия знаков эти два сдвига оказыва ются дополнительными друг к другу Критерии T — Вилкоксона базируется на величине нетипичного сдвига которыи называет ся в дальнеишем $T_{эм}$

Задача 6 3 Психолог проводит с младшими школьниками коррекционную работу по формированию навы ков внимания используя для оценки результа тов корректурную пробу Задача состоит в том *чтобы определить будет ли уменьшаться количе* ство ошибок внимания у младших школьников после специальных коррекционных упражнении?

Решение Для решения этои задачи психолог у 19 детей определяет количество ошибок при выполнении корректурнои пробы до и после коррекционных упражнений В таблице 6 5 приведены соответ ствующие экспериментальные данные и допол нительные столбцы необходимые для работы по парному критерию T — Вилкоксона

Таблица 6 5

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7
№ испы туемых п/п	До	После	Сдвиг (значение разности с учетом знака)	Абсолют ные ве личины разностей	Ранги абсолют ных вели чин раз ностей	Символ нети пичного сдвига
1	24	22	2	2	10 5	
2	12	12	0	0	2	
3	42	41	1	1	6 5	
4	30	31	+ 1	1	6 5	
5	40	32	8	8	15	

Продолжение таблицы 6 5

6	55	44	11	11	16	
7	50	50	0	0	2	
8	52	32	20	20	18	
9	50	32	- 18	18	17	
10	22	21	- 1	1	6 5	
11	33	34	+ 1	1	6 5	*
12	78	56	- 22	22	19	
13	79	78	- 1	1	6 5	
14	25	23	2	2	10 5	
15	28	22	6	6	13 5	
16	16	12	- 4	4	12	
17	17	16	1	1	6 5	
18	12	18	+ 6	6	13 5	
19	25	25	0	0	2	
Сумма					190	$T_{эмп}$=26 5

Обработка данных по критерию T — Вилкоксона осуществ ляется следующим образом

1 В четвертый столбец таблицы 6 5 вносятся величины сдвигов с учетом знака Их вычисляют путем вычитания из чисел тре тьего столбца соответствующих чисел второго столбца

2 В пятом столбце в соответствие каждому значению сдвига ста вят его абсолютную величину

3 В шестом столбце ранжируют абсолютные величины сдвигов представленных в пятом столбце

4 Подсчитывают сумму рангов В нашем примере она составляет

12 5 + 6,5 + 6 5 + 15 + 16 + 2 + 18 + 17 + 6,5 + 6,5 + 19 + 6 5 + + 10 5 + 13 5 + 12 + 6 5 + 13 5 + 2 = 190

5 Подсчитывают сумму рангов по формуле (1 1)

$$\frac{N\ (N+1)}{2} = \frac{19\ (19+1)}{2} = 190$$

6 Проверяют правильность ранжирования на основе совпадения сумм рангов полученных двумя способами В нашем случае обе величины совпали 190 = 190, следовательно, ранжирование проведено правильно

7 Любым символом отмечают все имеющиеся в таблице нетипичные сдвиги В нашем случае — это три положительных сдвига

8 Суммируют ранги нетипичных сдвигов Это и будет искомая величина $T_{эмп}$ В нашем случае эта сумма равна $T_{эмп} = 6,5 + 13,5 + 6,5 = 26\ 5$

По таблице 2 Приложения определяют критические значения $T_{кр}$ для n = 19 Подчеркнем, что в данном критерии, в отличие от критерия знаков, поиск критических величин в таблице 2 Приложения ведется по общему числу испытуемых

Нужная нам строка таблицы Приложения выделена ниже в таблицу 6 6

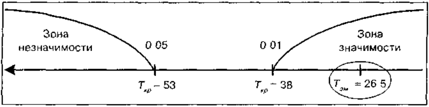
Таблица 66

n	*P*	
	0,05	0,01
19	53	38

Поскольку в нашем случае основной типичный сдвиг — отрицательный, то дополнительный, «нетипичный» сдвиг будет положительным и на уровне значимости в 5% сумма рангов таких сдвигов не должна превышать числа 53, а при уровне значимости в 1% не должна превышать числа 38 Используем принятую форму записи, представим сказанное выше следующим образом

$$T_{кр} = \begin{cases} 53 \text{ для } P \leq 0,05 \\ 38 \text{ для } P \leq 0,01 \end{cases}$$

- Строим «ось значимости»



Анализ «оси значимости» показывает, что полученная величина $T_{эмп}$ попадает в зону значимости Можно утверждать, следовательно, что зафиксированные в эксперименте изменения неслучайны и значимы на 1% уровне Таким образом, применение коррекционных упражнений способствует повышению точности выполнения корректурной пробы

Полученный результат может быть переформулирован в терминах нулевой и альтернативной гипотез поскольку преобладание типичного отрицательного направления сдвига в данном конкретном эксперименте не является случайным, то должна быть принята гипотеза H_1 о наличии различий, а гипотеза H_0 отклонена

Обращаем внимание читателя, что направление «оси значимости» в этом критерии, так же как и критерии знаков, имеет положение нуля справа, в отличие от традиционного — слева, и увеличение числового ряда идет в противоположную сторону

Для применения критерия *T* Вилкоксона необходимо соблюдать следующие условия

1 Измерение может быть проведено во всех шкалах, кроме номинальной

2 Выборка должна быть связной

3 Число элементов в сравниваемых выборках должно быть равным

4 Критерий *T* — Вилкоксона может применяться при численности выборки от 5 до 50 (на большую величину не рассчитана таблица достоверности)

6.2.3. Критерий Фридмана

Критерий Фридмана можно рассматривать как распространение критерия *T* — Вилкоксона на три и большее количество измерении связной выборки испытуемых Критерий позволяет установить уровень статистической достоверности различий сразу в нескольких измерениях (от 3 до 100), но не дает возможности выявить направление изменений При наличии сразу нескольких измерений преимущество критерия Фридмана по сравнению с двумя предыдущими критериями очевидно поскольку оба эти критерия работают только с двумя столбцами чисел Предположим что с помощью критерия знаков нам нужно было бы сравнить четыре столбца чисел Тогда критерии знаков пришлось бы использовать шесть раз — сравнение первого столбца со вторым третьим и четвертым второго — с третьим и четвертым и третьего с четвертым Критерии Фридмана позволяет выявить наличие значимых различии в измерениях за один раз

Задача 64 Шести школьникам предъявляют тест Равена Фиксируется время решения каждого задания Выясняется вопрос — будут ли найдены статистически значимые различия между временем решения первых трех задании теста?

Решение Итак психолог измерил время решения первых трех задании теста у шести испытуемых

Результаты этих измерении приведены в таблице

Таблица 67

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
№ испытуемых п/п	Время решения первого задания теста в сек	Время решения второго задания теста в сек	Время решения третьего задания теста в сек
1	8	3	5
2	4	15	12
3	6	23	15
4	3	6	6
5	7	12	3
6	15	24	12

Для нахождения различии можно было бы воспользоваться двумя предыдущими критериями но тогда нужно было бы сравнивать между собои данные второго столбца с третьем и четвертым а также данные третьего столбца с четвертым т е выполнить три однотипных операции Критерии Фридмана позволяет сразу сравнить между собои три и большее число столбцов что дает возможность существенно ускорить процесс решения

Применение критерия Фридмана требует выполнения следующих операций

1 Ранжирование экспериментальных данных **по строкам** таблицы 6 7 Обратите внимание, что в этом случае ранжирование проводится не по столбцам (вертикально), т е по одному показателю в группе испытуемых, а по строкам (горизонтально), т е по всем показателям для одного испытуемого Выполняя эту о .р цию в нашей задаче перепишем еще раз таблицу 6 7, добавив в нее необходимые столбцы для значений рангов

Таблица 6 8

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7
№ испытуемых п/п	Время решения первого задания теста в сек	Ранги времени решения первого задания теста	Время решения второго задания теста в сек	Ранги времени решения второго задания теста	Время решения третьего задания теста в сек	Ранги времени решения третьего задания теста
1	8	3	3	1	5	2
2	4	1	15	3	12	2
3	6	1	23	3	15	2
4	3	1	6	2 5	6	2 5
5	7	2	12	3	3	1
6	15	2	24	3	12	1
Сумма рангов		10		15 5		10 5

2 Суммирование полученных рангов по **столбцам** таблицы 6 8

В столбце 3 получена сумма рангов равная 10, в столбце 5 — равная 15,5 и в столбце 7 — равная 10,5

3 Подсчет общей суммы рангов 10 + 15,5 + 10,5 = 36

4 Подсчет суммы рангов по формуле (1 3)

$$\frac{n\ c\ (c+1)}{2} = \frac{6\ 3\ (3+1)}{2} = 36$$

где c — число столбцов,
n — число строк или число испытуемых (что в данном случае одно и то же)

5 Проверка правильности ранжирования Поскольку значения сумм рангов, полученных двумя разными способами совпали, следовательно ранжирование проведено правильно

6 Расчет эмпирического значения критерия Фридмана, осуществляемый по следующей формуле

$$\chi^2_{фр\,э} = \left[\frac{12}{n\ c\ (c+1)} \sum_{i=1}^{c}\left(R_i^2\right)\right] - 3\ n\ (c+1) \qquad (6\ 1)$$

где n — количество испытуемых или строчек
c — количество столбцов
R_i — сумма рангов i-того столбца

7 Подставляем в формулу 6 1 необходимые значения из таблицы 6 8, получаем

$$\chi^2_{фр_{эмп}} = \left[\frac{12}{6\ 3\ 4}\ (10\ 10+15{,}5\ 15{,}5+10{,}5\ 10{,}5)\right] - 3\ 6\ 4 = 3{,}08$$

8 По таблице 3 Приложения определяем величины критических значений $\chi^2_{fr}кр$ для числа испытуемых равному 6 Соответствующий блок таблицы 3 Приложения представлен в таблице 6 9

Таблица 69

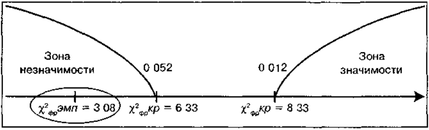
n	P	
	0,052	0,012
6	0 33	8 33

Подчеркнем, что с целью стандартизации предъявления табличных значений, критические значения, взятые из таблицы 3 Приложения даны в виде, соответствующем ранее использованному варианту Следует особо подчеркнуть, что таблицы для поиска критических значений критерия Фридмана очень специфичны и отличаются от стандартных статических таблиц Здесь уровни значимости P — даны нетрадиционно, и поэтому каждый раз следует выбирать наиболее близкие значения к 0,05 и 0,01 В нашем случае эти значения составляют 0,052 и 0 012

Переводя табличные значения в привычную формv записи, получаем

$$\chi^2_{фр}кр = \begin{cases} 6{,}33 \text{ для } P \le 0{,}052 \\ 8{,}33 \text{ для } P \le 0{,}012 \end{cases}$$

Соответствующая «ось значимости» имеет вид



Таким образом, полученное эмпирическое значение критерия Фридмана попало в зону незначимости Отсюда следует, что статистически значимых различий во времени решения первых трех заданий теста нет

Переформулируем полученный результат в терминах нулевой и альтернативной гипотез поскольку между показателями, измеренными в трех разных условиях, существуют лишь случайные различия, то принимается нулевая гипотеза H_0, т е гипотеза о сходстве, а гипотеза H_1 отклоняется

Еще одна специфическая особенность критерия Фридмана заключается в том, что в зависимости от числа измерений (условий), используются разные таблицы критических значений На это следует особо обратить внимание, чтобы не допустить ошибочных статистических выводов

Правила использования таблиц для нахождения критических значений в критерии Фридмана приведены ниже

1 При общем количестве измерений равном 3 и числе испытуемых от 2 до 9 критические значения критерия Фридмана определяются по таблице 3 Приложения

2 При общем количестве измерений равном 4 и числе испытуемых от 2 до 4 критические значения критерия Фридмана определяются по таблице 4 Приложения

3 При большем количестве измерении и испытуемых критические значения критерия Фридмана определяются по таблице 12

Приложения для критерия хи квадрат В этом случае число степенеи свободы определяется по формуле $\nu = c - 1$ где c — количество условии измерения (Подробнее о критерии хи квадрат см ниже глава 8)

С целью более глубокого овладения критерием Фридмана рассмотрим еще один вариант задачи но уже для первых четы рех задании теста

Задача 6 5 Анализируя результаты предшествующеи работы с критерием Фридмана психолог предположил что время решения четвертого задания будет значимо отличаться от времени решения первых трех задании

Решение. Результаты всех четырех измерений приведены в таблице 6 10 в которои произведено ранжирова ние всех измерении по строкам и суммирование рангов по столбцам

Таблица 6 10

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7	№ 8	№ 9
№ испы туе мых п/п	Время реше ния пер вого зада ния теста в сек	Ранги вре мени реше ния пер вого зада ния теста	Время реше ния второ го за дания теста в сек	Ранги вре мени реше ния второ го за дания теста	Время реше ния тре тьего зада ния теста в сек	Ранги вре мени реше ния тре тьего зада ния теста	Время реше ния чет верто го зада ния теста в сек	Ранги вре мени реше ния чет верто го за дания теста
1	8	3	3	1	5	2	12	4
2	4	1	15	4	12	2	13	3
3	6	1	23	4	15	2	20	3
4	3	1	6	2 5	6	2 5	12	4
5	7	2	12	4	3	1	8	3
6	15	3	24	4	12	2	7	1
Сумма рангов		11		19 5		11 5		18

Опускаем объяснения ряда операций, которые даны выше и проверим только правильность ранжирования Как следует из таблицы 6 10 общая сумма рангов составила 11 + 19,5 + 11,5 + 18 = 60

Согласно расчетной формуле (1 3) $\frac{n\ c\ (c+1)}{2}$ она должна быть $\frac{6\ 4\ (4+1)}{2} = 60$

Равенство полученных сумм подтвердило правильность ранжирования

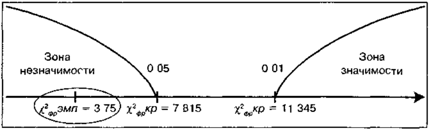
Определяем эмпирическое значение критерия по формуле (6 1)

$$\chi^2_{фр}эмп = \left[\frac{12}{6\ 3\ 5}\ \left(11^2 + 19{,}5^2 + 11{,}5^2 + 18^2\right)\right] - 3\ 6\ 5 = 5{,}75$$

Поскольку в данном примере рассматривается четыре измерения, а количество испытуемых больше 4, то критические величины находятся по таблице 12 Приложения для критерия хи-квадрат Число степеней свободы определяется по формуле $v = c - 1$ или $v = 4 - 1 = 3$ Используя привычную форму записи для критических величин получаем следующее выражение

$$\chi^2_{фр}кр = \begin{cases} 7{,}815 \text{ для } P \le 0{,}05 \\ 11{,}345 \text{ для } P \le 0{,}01 \end{cases}$$

«Ось значимости» в этом случае имеет вид



И вновь полученное эмпирическое значение критерия Фридмана попало в зону незначимости Следовательно второе предположение психолога не подтвердилось, или, иначе в терминах статистических гипотез — вновь принимается гипотеза H_0 о сходстве времени решения первых четырех заданий теста

Для применения критерия Фридмана необходимо выполнять следующие условия

1 Измерение должно быть проведено в шкале интервалов или отношений

2 Выборка должна быть связной

3 В выборке должно быть не менее двух испытуемых, каждый из которых имеет не менее трех измеренных показателей Верхний предел для количества испытуемых не определен, а количество измерений не может превышать 100 (см таблицу 12 Приложения)

4 В зависимости от числа измерений и количества испытуемых используются разные таблицы значимости (правила выбора таблиц см выше)

6.2.4. Критерий Пейджа

Критерий Пейджа (его полное название L критерий тенденций Пейджа) можно рассматривать как эквивалент критерия Фридмана для сопоставления показателей измеренных в трех и более условиях на одной и той же выборке испытуемых Однако этот критерий не только позволяет выявить различия, но указывает на направление в изменении величин признака Именно поэтому он является более предпочтительным

Так, например, критерий Пейджа позволяет проверить предположения о временной или ситуативно обусловленной динамике изменения каких-либо признаков К сожалению, применение этого достаточно мощного критерия ограничено объемом выборки — число испытуемых не может быть больше 12 и числом измерений признака — оно не может быть больше 6

Задача 6.6. Решим еще раз задачу 6 5, но уже помощью критерия Пейджа, используя уже готовую таблицу 6 10 *При этом основной тенденцией данного* примера будем считать увеличение времени решения второго и четвертого заданий по сравнению с первым и третьим заданиями

Решение Подчеркнем что первые несколько операции аналогичны операциям критерия Фридмана По этому их описание мы опускаем и отсылаем к предыдущему критерию

Дальнейшая работа с критерием Пейджа заключается в преобразовании таблицы 6 10 Следует попарно переставить столбцы таблицы 6 10 ориентируясь на величины сумм рангов так чтобы в начале таблицы стояли столбцы с наименьшеи суммои рангов а в конце таблицы — с наибольшеи Понятно что столбцы с соответствующими измерениями также переставляются После проведения необходимых перестановок получается таблица 6 11

Таблица 6 11

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7	№ 8	№ 9
№ испытуемых п/п	Время решения первого задания теста в сек	Ранги времени решения первого задания теста	Время решения третьего задания теста в сек	Ранги времени решения третьего задания теста	Время решения четвертого задания теста в сек	Ранги времени решения четвертого задания теста	Время решения второго задания теста в сек	Ранги времени решения второго задания теста
1	8	3	5	2	12	4	3	1
2	4	1	12	2	13	3	15	4
3	6	1	15	2	20	3	23	4
4	3	1	6	2 5	12	4	6	2 5
5	7	2	3	1	8	3	12	4
6	15	3	12	2	7	1	24	4
Сумма рангов		11		11 5		18		19 5

Теперь все готово для подсчета эмпирического значения L_n критерия Пеиджа Оно определяется по формуле

$$L = \sum_{i}(R_i \, i) \qquad (6\,2)$$

где R_i — сумма рангов i-того столбца в упорядоченной таблице

i — порядковый номер столбца, получившийся в новой таблице, упорядоченной по сумме рангов

c — число измерений

Используя формулу (6 2) вычисляем эмпирическое значение $L_{эмп}$ для нашего примера

$$L_{эмп} = (11 \cdot 1) + (11{,}5 \cdot 2) + (18 \cdot 3) + (19{,}5 \cdot 4) = 166$$

По таблице 5 Приложения определяем критические значения $L_{кр}$ для числа испытуемых $n = 6$ и для числа измерений $c = 4$ Отметим, что в таблице критических значений критерия Пейджа добавлен уровень значимости 0,001 или 0,1% Представим соответствующий блок таблицы 5 Приложения в виде таблицы 6 12

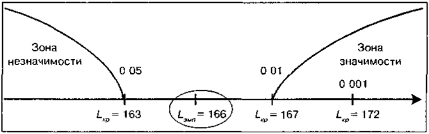
Таблица 6 12

№ — число испытуемых	С — количество измерений 4	Р — уровень значимости Р
6	172	0 001
	167	0 01
	163	0 05

Используя привычную форму записи для критических величин, получаем следующее выражение

$$L_{кр} = \begin{cases} 163 \text{ для } P \leq 0{,}05 \\ 167 \text{ для } P \leq 0{,}01 \\ 172 \text{ для } P \leq 0{,}001 \end{cases}$$

Строим «ось значимости»



В нашем примере значение $L_{эмп}$ попало в зону неопределенности, следовательно, можно считать, что тенденция увеличения времени решения заданий теста №№ 2 и 4 по сравнению с заданиями №№ 1 и 3 оказалась значимой на уровне 5%

Переформулируем полученный результат в терминах нулевой и альтернативной гипотез поскольку между показателями, измеренными при решении четырех заданий теста, существуют не случайные различия на 5% уровне значимости, то нулевая гипотеза H_0, т е гипотеза о сходстве отвергается, и принимается альтернативная гипотеза H_1 о наличии различий

Сравнивая выводы, полученные при решении задачи 5 с помощью критериев Фридмана и Пейджа, можно подумать, что они не согласуются друг с другом Однако это не совсем так Эти критерии обращаются к разным сторонам анализируемого материала, характеризуя различные аспекты обрабатываемых данных Если первый критерий — Фридмана — выявляет наличие различии в измеренных показателях (признаках), то критерий Пейджа позволяет выявить тенденцию в изменениях величин измеряемых признаков

Приведем еще один пример использования критерия Пейджа

Задача 6.7. Психолог высказывает предположение о наличии следующей тенденции время решения заданий теста будет возрастать по мере увеличения их сложности

Решение. Для выявления этой тенденции психолог сравнивает время решения пяти заданий теста у тех же шести испытуемых Поскольку начальные операции с данными представлены выше, то результаты обработки по критерию Пейджа сразу представим в виде таблицы 6 13

Как всегда необходимо проверить правильность ранжирования Общая сумма рангов составила 11 + 22 + 11,5 + 19 + 26,5 = 90

Согласно формуле (1 3) $\frac{n\ c\ (c+1)}{2}$ она должна быть

$$\frac{6\ 5\ (5+1)}{2} = 90$$

Таблица 6 13

№ испы туе мых п/п	Время реше ния пер вого зада ния теста в сек	Ранги вре мени реше ния пер вого зада ния теста	Время реше ния второ го за дания теста в сек	Ранги вре мени реше ния второ го за дания теста	Время реше ния тре тьего зада ния теста в сек	Ранги вре мени реше ния тре тьего зада ния теста	Время реше ния чет верто го зада ния теста в сек	Ранги вре мени реше ния чет верто го за дания теста	Время реше ния пято го за дания в сек	Ранги вре мени реше ния пятого зада ния теста
1	8	3	3	1	5	2	12	4	24	5
2	4	1	15	4	12	2	13	3	35	5
3	6	1	23	5	15	2	20	4	18	3
4	3	1	6	2 5	6	2 5	12	4	43	5
5	7	2	12	4 5	3	1	8	3	12	4 5
6	15	3	24	5	12	2	7	1	22	4
Сумма рангов		11		22		11 5		18		26 5

Сравнив результаты первого и второго подсчета рангов де лаем вывод о том что ранжирование произведено правильно

Теперь чтобы подсчитать L по формуле (6 2) не будем строить новую таблицу а применим второй способ вычислении Для этого рассмотрим сумму рангов как обычныи ряд чисел и проранжируем этот ряд Причем каждои величине этого нового упорядоченного ряда поставим в соответствие его ранг Этот ранг в формуле (6 2) обозначен как индекс i Поэтому получатся сле дующие соответствия

$$11 \to i = 1 \quad 11\ 5 \to i - 2 \quad 19 \to i - 3 \quad 22 \to i - 4 \quad 26\ 5 \to i \quad 5$$

Теперь имея суммы рангов и соответствующие им индексы можно применить формулу (6 2)

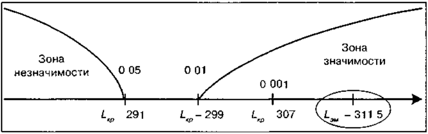
$$L_{н} - (11\ \ 1) + (11\ 5\ \ 2) + (19\ \ 3) + (22\ \ 4) + (26\ 5\ \ 5) = 311\ 5$$

Следующим этапом как всегда является нахождение крити ческих величин для соответствующего числа испытуемых и изме рении

По таблице 5 Приложения находим для $n - 6$ и $c - 5$

$$L_{кр} = \begin{cases} 291 \text{ для } P \leq 0\ 05 \\ 99 \text{ для } P < 0\ 01 \\ 307 \text{ для } P \leq 0\ 001 \end{cases}$$

Строим соответсгвенно ‹ось значимости



Полученная величина $L_{эмп}$ критерия тенденции Пейджа оказалась значимои на 0 1% уровне Следовательно по мере увеличения сложности задании увеличивается и время их решения

В терминах статистических гипотез полученныи результат таков H — нулевая гипотеза о сходстве должна быть отвергнута а на уровне 0 1% следует принять альтернативную гипотезу H о наличии различий Иными словами тенденция увеличения времени решения задании теста с увеличением их сложности не является случайнои

Для применения критерия Пеиджа необходимо соблюдать следующие условия

1 Измерение может быть проведено в ранговои интервальнои и в шкале отношении

2 Выборка должна быть связнои

3 В выборке должно быть не менее двух и не больше 12 испытуемых каждыи из которых имеет не менее трех измеренных показателеи

4 Применение критерия ограничено так как таблицы критических значении рассчитаны на небольшую выборку ($n \leq 12$) и маленькое число измерении (не больше 6) Если эти ограничения не выполняются приходится использовать критерии Фридмана

6 2.5. Критерий Макнамары

Критерии Макнамары очень прост однако его использование имеет некоторые особенности и требует определенных навыков в статистических расчетах и работе с таблицами критических величин Этот критерии относится также к числу непараметрических критериев и предназначен для работы с данными полученными в самои простои из номинальных — в дихотомической шкале Рассмотрим примеры его использования

Задача 68 Психолога интересует вопрос — является ли выбранныи им способ профессиональной ориентации к профессии экономиста достаточно эффективным?

Решение Для решения этой задачи школьный психолог проводит эксперимент по выявлению эффективных форм профориентационной работы к профессии экономиста среди учащихся выпускных классов С этой целью он использует такие мероприятия как беседы экскурсии циклы лекции и т п Отношение 20 учащихся к этои профессии выяснялось до и после проведения профориентационнои работы

Школьники отвечают на вопросы о профессии экономиста по следующему правилу нравится (кодируется цифрои 1) не нравится — (кодируется цифрои 0) Таким образом экспериментальные данные получены психологом в самои простои шкале — дихотомическои Результаты двукратного опроса 20 учащихся записаны в форме таблицы 6 14 имеющии формат 2×2 Таблицы подобного рода называют также четерехпольными таблицами Поля в этих таблицах обозначаются заглавными латинскими буквами A B C и D Иногда используют маленькие буквы a b c и d

Таблица 6 14

		Второи опрос		Сумма
		Нравится	Не нравится	
Первыи опрос	Нравится	A 2	B – 2	4
	Не нравится	C – 11	D – 5	16
	Сумма	13	7	20

В Таблице 6 14 A — обозначает число учащихся которые ю и после профориентационнои работы дали ответ нравит ся «C — число учащихся которые первыи раз дали ответ не нравится а второи раз нравится» «B» — число учащих ся ответивших первыи раз нравится а второи раз «не нра вится D» число учащихся оба раза ответивших не нра вится

Подчеркнем что возможна ситуация в которои $B - C$ В этом случае критерии Макнамары не может быть применен Следует спользоваться критерием хи квадрат

Напомним что психолога интересует вопрос — является ли эффективнои выбранная им система ориентации учащихся к профессии экономиста?

Работа по критерию Макнамары начинается с выяснения вопроса о том будет ли сумма чисел стоящих в ячеиках B и C меньше или равна 20 или эта сумма будет превышать число 20 В первом случае т е когда сумма чисел $B + C < 20$ используется один способ расчета по критерию Назовем его — способ А Если сумма чисел стоящих в ячеиках $B + C > 20$ — используется дру гой способ Назовем его способ — Б

Способ А Пусть сумма $(B + C) < 20$ тогда дальнеишии расчет по критерию Макнамары производится следующим образом

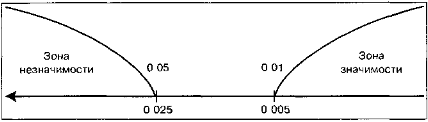
1 Находится наименьшая величина из величин B и C которая обозначается буквои m т е $m - min(B \ C)$

2 Находится сумма величина $B + C$ которая обозначается буквои n т е $n - B + C$

3 По таблице 6 Приложения на пересечении строк таблицы m и n находится величина $M_{\text{и}}$ Особо подчеркнем что в отличие от всех критериев по таблице 6 Приложения находятся не критические величины а именно эмпирическое значение критерия Макнамары Это принципиальное отличие этого критерия от всех других

4 Величины M в случае способа А являются постоянными и равны соответственно 0 025 для 5% уровня и 0 005 для 1% уровня значимости

5 Строится соответствующая «ось значимости»



6 На «ось значимости» наносится $M_{эмп}$, найденное по таблице 6 Приложения

7 Осуществляется статистический вывод по критерию Макнамары

Способ Б. Пусть сумма $(B + C) > 20$

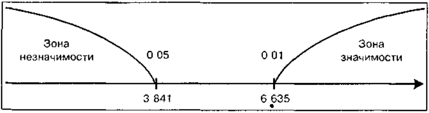
1 Производится расчет $M_{эм}$ по следующей формуле

$$M_{эмп} = \frac{(B-C)^2}{(B+C)} \qquad (6\ 3)$$

2 Находятся критические величины $M_{кр}$ по таблице 12 Приложения для критерия хи-квадрат с числом степеней свободы $\nu = 1$ (см глава 8, п 8 1) Однако поскольку величина степени свободы критерия хи-квадрат в данном случае всегда постоянна и равна 1, то критические величины $M_{кр}$ так же, как и в случае способа А, всегда одни и те же и равны $M_{кр} = 3{,}841$ для 5% уровня значимости и $M_{кр} = 6{,}635$ для 1% уровня значимос ти В традиционной форме записи это выглядит так

$$M_{кр} = \begin{cases} 3{,}841 \text{ для } P \le 0{,}05 \\ 6{,}635 \text{ для } P \le 0{,}01 \end{cases}$$

3 Строится соответствующая «ось значимости»



4 На «ось значимости» наносится $M_{эмп}$, подсчитанное по формуле (6 3)

5 Осуществляется статистический вывод по критерию Макнамары

Продолжим решение нашей задачи В ней $n = (B + C) = 2 + 11 = 13 < 20$ — следовательно необходимо применить первый способ В нашем случае $m = 2$ — как наименьшая из величин B и C

Поэтому, чтобы получить $M_{эмп}$ (подчеркнем еще раз, а не $M_{кр}$ — как обычно!) — следует обратиться к таблице 6 Приложения В ней находим в левом крайнем столбце величину $n = 13$ Это число есть сумма $B + C = 13$ В верхней строчке находим число $m = 2$ — это минимальное из чисел B и C На пересечении соответствующей строчки и столбца стоит число 011

Нужная нам ячейка таблицы 6 Приложения вынесена в таблицу 6 15

Таблица 6 15

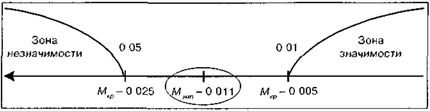
n / m	2
13	011

Примечание Нули в таблице 6 Приложения опущены, поэтому к любому числу, найденному по этой таблице, нужно слева добавить нуль и запятую, так чтобы получить необходимую величину в виде 0, <число, взятое из таблицы> Таким образом, из таблицы 6 Приложения и таблицы 6 15 следует, что $M_{эмп} = 0{,}011$

Можно еще раз, хотя это и не обязательно в данном конкретном случае, воспользоваться традиционной формой записи

$$\text{Мкр} = \begin{cases} 0{,}025 \text{ для } P \le 0{,}05 \\ 0{,}005 \text{ для } P \le 0{,}01 \end{cases}$$

Следует построить «ось значимости»



Поскольку $M_{эмп}$ попало в зону неопределенности, то на 5% уровне значимости можно отклонить гипотезу H_0 о сходстве и принять альтернативную гипотезу H_1 о различии, иными словами на 5% уровне значимости можно сделать вывод о том, что разработанный и примененный психологом цикл лекций, бесед и экскурсий способствовал формированию у школьников положительного отношения к профессии экономиста

Продолжим знакомство с критерием Макнамары Для этого решим следующую задачу

Задача 6.9. Психолог выясняет вопрос — будут ли обнаружены различия в успешности решения двух, различных по сложности мыслительных задач? Для решения этого вопроса группа из 120 учащихся решала оба типа задач

Решение Полученные результаты сразу представим в виде таблицы 6 16

Таблица 6 16

		Первая задача		Сумма
		Решена верно	Решена неверно	
Вторая задача	Решена верно	$A = 50$	$B = 31$	81
	Решена неверно	$C = 19$	$D = 20$	39
	Сумма	69	51	120

Из таблицы 6 16 следует, что 50 учащихся верно решили обе задачи, 19 верно решили первую задачу и неверно вторую, 31 — неверно решили первую задачу и верно вторую, 20 — неверно решили обе задачи

Прежде всего вычислим сумму $(B + C) = 31 + 19 = 50$ Она оказалась больше 20, следовательно, необходимо применить способ Б работы с критерием Макнамары и вычисление $M_{эмп}$ следует проводить по формуле (6 3)

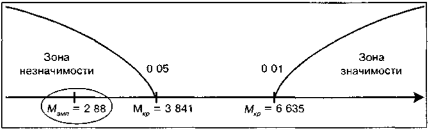
$$M_{эмп} = \frac{(B-C)^2}{B+C} = \frac{(31-19)^2}{31+19} = 2,88$$

Мы помним, что при $n > 20$ величины $M_{кр}$ равны 3,841 для 5% уровня значимости и 6,635 для 1% уровня значимости

Следовательно, в традиционной форме записи

$$M_{кр} = \begin{cases} 3{,}841 \text{ для } P \le 0{,}05 \\ 6{,}635 \text{ для } P \le 0{,}01 \end{cases}$$

Построив «ось значимости» получаем



Значение $M_{эмп}$ попало в зону незначимости, таким образом следует принять нулевую гипотезу H_0 о сходстве и отклонить гипотезу H_1 о различиях Иными словами, у психолога нет оснований предполагать статистически значимое отличие в успешности решения выбранных задач с разным уровнем сложности

Для применения критерия Макнамары необходимо соблюдать следующие условия

1 Измерение должно быть проведено в дихотомической шкале

2 Выборка должна быть связной

3 При количестве измерений $n \le 20$ для определения величины $M_{эмп}$ используется таблица биноминального распределения, а величины $M_{кр}$ постоянны и равны 0,025 для 5% уровня значимости и 0,005 для 1% уровня значимости

4 При количестве измерений $n > 20$ $M_{эмп}$ вычисляется по формуле (6 3), а величины $M_{кр}$ постоянны и равны 3,841 для 5% уровня значимости и 6,635 для 1% уровня значимости

Глава 7

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ДЛЯ НЕСВЯЗНЫХ ВЫБОРОК

7.1. Критерий *U* Вилкоксона—Манна—Уитни

Несвязанные или независимые выборки образуются, когда в целях эксперимента для сравнения привлекаются данные двух или более выборок, причем эти выборки могут быть взяты из одной или из разных генеральных совокупностей Таким образом, для несвязных выборок характерно, что в них обязательно входят разные испытуемые

Для оценки достоверности различий между несвязными выборками используется ряд непараметрических критериев Одним из наиболее распространенных является критерий *U* Этот критерий применяют для оценки различий по уровню выраженности какого-либо признака для двух независимых (несвязных) выборок При этом выборки могут различаться по числу входящих в них испытуемых Этот критерий особенно удобен в том случае, когда число испытуемых невелико и в обеих выборках не превышает величину 20, хотя таблицы критических значений рассчитаны для величин выборок не превышающих 60 человек испытуемых

Задача 7.1. Две неравные по численности группы испытуемых решали техническую задачу Показателем успешности служило время решения Испытуемые меньшей по численности группы получали дополнительную мотивацию в виде денежного вознаграждения Психолога интересует вопрос — влияет ли вознаграждение на успешность решения задачи?

Психологом были получены следующие результаты времени решения технической задачи в секундах в первой группе — с дополнительной мотивацией — 39, 38, 44, 6, 25, 25, 30, 43, во второй группе — без дополнительной мотивации — 46, 8, 50, 45 32, 41, 41, 31, 55 Число испытуемых в первой группе обозначается как $n1$ и равно 8, во — второй как $n2$ и равно 9

Для ответа на вопрос задачи применим критерий U — Вилкоксона — Манна — Уитни Существует два способа подсчета по критерию U Последовательно рассмотрим оба способа

7.1.1. Первый способ расчета по критерию U

Полученные данные необходимо объединить, т е представить как один ряд и упорядочить его по возрастанию входящих в него величин Подчеркнем, что для критерия U важны не сами численные значения данных, а порядок их расположения Предварительно обозначим каждый элемент первой группы символом x, а второй — символом y Тогда общий упорядоченный по возрастанию численных величин ряд можно представить так

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} x & y & x & x & x & y & y & x & x & y & y & x & x & y & y & y & y \\ 6 & 8 & 25 & 25 & 30 & 31 & 32 & 38 & 39 & 41 & 41 & 43 & 44 & 45 & 46 & 50 & 55 \end{array} \qquad (7\ 1)$$

Если бы упорядоченный ряд, составленный по данным двух выборок, принял бы такой вид

$$xxxxxxxx \quad yyyyyyyyyyy \qquad (7\ 2)$$

то, очевидно, что такие две выборки значимо различались бы между собой (как, например, различаются в классе двоечники и отличники) Расположение (7 2) называется идеальным Критерий U основан на подсчете нарушений в расположении чисел в упорядоченном экспериментальном ряду по сравнению с идеальным рядом Любое нарушение порядка идеального ряда называют инверсией Одним нарушением (одной инверсией) считают такое расположение чисел когда перед некоторым числом первого ряда стоит только одно число второго ряда Если перед некоторым числом первого ряда стоят два числа второго ряда — то возникают две инверсии и т д

Удобно подсчитывать число инверсии расположив исходные данные в виде таблицы в которои один столбец состоит из данных первого ряда а второи из данных второго При этом и первыи и второи столбцы имеют пропуски чисел которые обозначаются символом —

Пропуск в первом столбце означает что в соседнем столбце имеется число занимающее промежуточное положение по отношению к числам первого столбца ограничивающим пропуск То же самое верно для пропусков второго столбца Упорядоченное объединение экспериментальных данных в порядке их возрастания представленное отдельно в первом и втором столбце с учетом пропусков и является по существу модифицированным рядом 7 1

Представим этот модифицированыи ряд в виде таблицы 7 1 в которую добавлены еще два столбца для подсчета инверсии В третьем столбце таблицы даны инверсии первого столбца по отношению ко второму они обозначаются как инверсии X/Y а в четвертом столбце инверсии второго столбца по отношению к первому они обозначаются как инверсии Y/X

Таблица 7 1

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
Группа с дополнительнои мотивациеи X	Группа без дополнительнои мотивации Y	Инверсии X/Y	Инверсии Y/X
6		0	
	8		1
25		1	—
25		1	
30		1	—
	31	—	4
	32	—	4

Продолжение таблицы 7 1

38	—	3	—
39	—	3	—
—	41	—	6
—	41	—	6
43	—	5	—
44	—	5	—
—	45	—	8
—	46	—	8
—	50	—	8
—	55	—	8
Суммы инверсии		19	53

Инверсии X/Y подсчитываются следующим образом число 6 первого столбца не имеет перед собой никаких чисел второго столбца, поэтому в третьем столбце напротив числа 6 ставим ноль, числа 25, 25 и 30 первого столбца (x) имеют перед собой только одно число второго столбца — 8 (y), т е имеют по одной инверсии, поэтому в столбце 3 для инверсий X/Y каждому из чисел 25, 25 и 30 ставим в соответствие число 1 Числа 38 и 39 первого столбца имеют перед собой по три числа второго столбца — это числа 8, 31 и 32, т е имеют по три инверсии Последние два числа первого столбца 43 и 44 имеют перед собой 5 чисел второго столбца, т е по 5 инверсий Таким образом, суммарное число инверсий X/Y третьего столбца составляет

$$U(x/y) = 1 + 1 + 1 + 3 + 3 + 5 + 5 = 19$$

Необходимо рассчитать также число инверсий второго столбца (y) по отношению к первому (x), т е суммарное число инверсий Y/X Поскольку число 8 (y) имеет перед собой одно число первого столбца — 6, то в столбце 4 с инверсиями для Y/X напротив числа 8 ставим число инверсий — 1 числа 31 и 32 второго столбца имеют перед собои четыре числа первого столбца 6, 25, 25 и 30, следовательно числу 31 и числу 32 приписываем в столбце 4 величины инверсий равные 4 и так далее Таким образом суммарное число инверсий Y/X четвертого столбца со ставляет

$$U(y/x) = 1 + 4 + 4 + 6 + 6 + 8 + 8 + 8 + 8 - 53$$

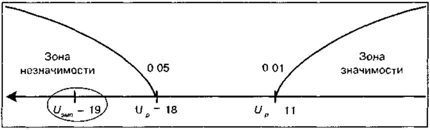
Видно что во втором случае сумма инверсии существенно больше Принято считать что $U_{эмп}$ есть минимальная из сумм ин версии

Или иначе говоря $U_{эмп} = min(U(x/y)\ \ U(y/x)) = 19$ (7 3)

Получив $U_{эмп}$ обращаемся к таблице 7 Приложения Эта таб лица в отличие от предыдущих состоит из нескольких таблиц рассчитанных отдельно для уровнеи $P = 0\ 05$ $P = 0\ 01$ а также для величин $n1$ и $n2$ В нашем случае $n1 = 8$ и $n2 = 9$ По этим таб лицам находим что значения $U_{р}$ равны 18 для $P = 0\ 05$ и 11 для $P = 0\ 01$ В принятой нами форме записи это выглядит так

$$U_{кр} = \begin{cases} 18 \text{ для } P < 0\ 05 \\ 11 \text{ для } P < 0\ 01 \end{cases}$$

Соответствующая «ось значимости» имеет вид



Полученное значение $U_{эм}$ попало в зону незначимости сле довательно принимается гипотеза H_0 о сходстве а гипотеза H_1 о наличии различии отклоняется Таким образом психолог может утверждать что дополнительная мотивация не приводит к ста тистически значимому увеличению эффективности решения тех ническои задачи

Подчеркнем что ось значимости в этом критерии как и в ряде других критериев (см главу 6) имеет направление справа налево При этом числовые значения по оси абсцисс по мере увеличения уровнеи значимости убывают Последнее закономер но, поскольку чем меньше взаимопересечений (инверсий) в двух рядах тем больше достоверность их различий

7.1.2. Второй способ расчета по критерию U

Преимущество второго способа подсчета по критерию U наиболее отчетливо проявляется в тех случаях, когда две или большее количество одинаковых величин будут входить в оба сравниваемых ряда Поскольку в таких случаях нет определенного правила расстановки одинаковых чисел, то возможна следующая ситуация, представленная в таблицах 7 2 и 7 3 В этом случае одинаковые числа равные 25 встречаются в обоих столбцах

Таблица 7 2

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
Группа X	Группа Y	Инверсии X/Y	Инверсии Y/X
6	–	0	–
–	8	–	1
25	–	1	–
25	–	1	–
25	–	1	–
–	25	–	4
–	25	–	4
–	25	–	4
Сумма		3	13

Таблица 7 3

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
Группа X	Группа Y	Инверсии X/Y	Инверсии Y/X
6	–	0	–
–	8	–	1
–	25	–	1
–	25	–	1

Продолжение таблицы 73

—	25	—	1
25	—	4	—
25	—	4	—
25	—	4	—
Сумма		12	4

Мы отчетливо видим, что суммы инверсий в обоих столбцах различны и зависят от того, как расположены одинаковые числа Подчеркнем, что расположение одинаковых чисел в обоих столбцах правильное В подобных случаях следует пользоваться для расчета вторым, более сложным способом Но есть возможность производить расчет и первым способом Для этого следует располагать эти числа равномерно друг под другом, например так

Ряд X	Ряд Y
—	—
25	—
—	25
25	—
—	25
25	—
—	25

В условиях той же задачи (7 1) несколько изменим экспериментальные данные таким образом, чтобы в обоих выборках имелись одинаковые значения Представим эти измененные данные в виде таблицы 7 4

Таблица 74

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
Группа с дополнительной мотивацией X ($n1 - 8$)	Группа без дополнительной мотивации Y ($n2 - 9$)	Ранги X $R(x)$	Ранги Y $R(y)$
6	—	1	—
—	8	—	2
25	—	(3) 3 5	—

Продолжение таблицы 74

25	–	(4) 3 5	–
30	–	(5) 5 5	–
–	30	–	(6) 5 5
–	32	–	7
38	–	8	–
41	–	(9) 10 5	–
–	41	–	(10) 10 5
–	41	–	(11) 10 5
41	–	(12) 10 5	–
44	–	13	–
–	45	–	14
–	46	–	15
–	50	–	16
–	55	–	17
Суммы рангов		55 5	97 5

Исходные данные 7 4 располагаются так же, как и в таблице 7 1 Затем в двух столбцах проставляются ранги так, как будто бы оба столбца образуют собой один упорядоченный ряд чисел Подчеркнем, однако, что ранги для чисел первого столбца помещаются в третий столбец, а ранги чисел второго столбца — в четвертый По каждому столбцу в отдельности подсчитываются суммы рангов

Следующим этапом, как обычно при ранжировании, является проверка его правильности Для этого

1 Подсчитывается общая сумма рангов из таблицы 7 4

$$55\ 5 + 97{,}5 = 153$$

2 Рассчитывается сумма рангов по формуле (1 1)

$$\frac{N\ (N+1)}{2} = \frac{17\ 18}{2} = 153,\ \text{где}\ N = n1 + n2$$

Поскольку расчетные суммы случаев совпали, то ранжирование было проведено правильно

3 Затем находится наибольшая по величине ранговая сумма Она обозначается как R_{max} В нашем случае она равна 97 5

4 $U_{эм}$ вычисляется по следующей формуле

$$U_{эм} = (n1\ n2) + n_x\ \frac{(n_x + 1)}{2} - R_{max} \qquad (7\ 4)$$

Где $n1$ — численное значение первой выборки,

$n2$ — численное значение второи выборки

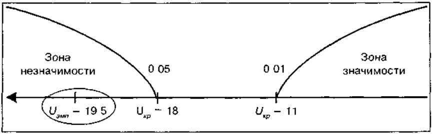
R_{max} — наибольшая по величине сумма рангов

n_x — количество испытуемых в группе с большей **суммой** рангов

Подсчитываем величину $U_{эм}$ по формуле 7 4

$$U_э = (8\ 9) + \frac{(9\ 10)}{2} - 97\ 5 = 19\ 5$$

Величины критических значении уже найдены нами при расчете первым способом по таблице 7 Приложения поэтому сразу строим «ось значимости» которая имеет следующии вид



Несмотря на то что мы немножко ‹подправили› экспериментальные данные для получения одинаковых чисел в обоих столбцах, рассчитанное значение $U_э$, вновь попало в зону незначимости следовательно принимается гипотеза H_0 о сходстве Тем самым психолог может утверждать что мотивация не приводит к статистически значимому увеличению эффективности времени решения техническои задачи

Для применения критерия *U* необходимо соблюдать следующие условия

1 Измерение должно быть проведено в шкале интервалов и отношений

2 Выборки должны быть несвязанными

3 Нижняя граница применимости критерия $n1 \geq 3$ и $n2 \geq 3$ или $n1 = 2$ а $n2 \geq 5$

4 Верхняя граница применимости критерия $n1$ и $n2 \leq 60$

Замечание Критерии *U* применяют и для связных выборок, рассматривая их при этом как независимые Последнее возможно, если связи внутри генеральной совокупности оказываются слабыми а различия между двумя связными выборкам — сильными В этом случае возможно получение значимых различий по критерию *U*, в то время как критерии, специально предназначенные для связанных выборок (см главу 6), могут и не обнаружить значимых различий

7.2. Критерий Q Розенбаума

Этот критерий существенно проще, чем критерий *U* Он основан на сравнении двух упорядоченных, но не обязательно равных по численности рядов наблюдений

Работа с критерием Розенбаума предполагает подсчет так называемых «хвостов» Потому этот критерий имеет также название — «критерий хвостов» Что же такое «хвост»?

Из предыдущего критерия мы помним, что два сравниваемых ряда имеют идеальное расположение (см 7 2), если они могут быть представлены так

$$\begin{array}{ll} xxxxxxxxxxx & \\ & yyyyyyyyyyyyyy \end{array} \qquad (7\ 5)$$

Поскольку в этом случае между элементами обоих рядов нет пересечений (одинаковых элементов), то между этими двумя рядами будет статистически значимое различие

В том случае, если в сравниваемых рядах будут равные элементы, их следует размещать точно друг под другом В этом случае два сравниваемых ряда можно расположить друг под другом следующими двумя эквивалентными способами

$$\begin{array}{ll} xxxxx|xxxxxxx| & S \\ T\ \ |yyyyyyy|yyyyyyyy & \end{array} \qquad (7\ 6)$$

или так

$$
\begin{array}{r|l|l}
T & \text{nnnnnnnn} & \text{nnnnnnn} \\
\text{zzzzzzzz} & \text{zzzzzzzzz} & \quad S
\end{array}
\tag{7 7}
$$

Выбор расположения либо 7 6, либо 7 7 произволен В обоих случаях символы T и S обозначают соответственно левый и правый «хвосты» Они подсчитываются так величина T равна числу элементов рядов x или z, которые находятся левее начала совпадающих элементов в рядах y и n, величина S — соответственно равна числу элементов, которые находятся в рядах y и n, правее конца совпадающих элементов

Таким образом, величина T «левого» хвоста в случае расположения данных 7 6 равна 5, в случае 7 7 — равна 8 Величина S «правого» хвоста в случае расположения данных 7 6 равна 8 в случае 7 7 — равна 7

$Q_{эм}$ подсчитывается очень просто — это сумма величин S и T Иными словами

$$Q_{эм} = S + T \tag{7 5}$$

После подсчета сумм "хвостов" следует обратиться к таблице 8 Приложения в соответствии с количеством испытуемых в сравниваемых выборках Когда сумма $Q_{эм} = S + T$ достаточно велика, можно считать различия сравниваемых выборок значимыми Для более полного знакомства с критерием решим следующую задачу

Задача 7.2. Используя тест Векслера психолог определил показатели интеллекта у двух групп учащихся из городской и сельской школы Его интересует вопрос — будут ли обнаружены статистически значимые различия в показателях интеллекта, если в городской выборке 11 детей, а в сельской 12?

Решение. Для решения задачи 7 2 результаты измерений сразу представим в удобном для расчета критерия Q виде т е расположив числа в порядке возрастания слева направо и одно измерение под другим (верхний ряд — городская школа, нижний — сельская)

I |96, 100, 104 104 120 120 120 120,|126, 130 134 ,

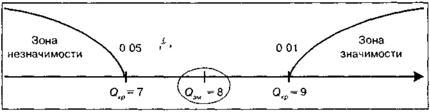
76 52 82, 84, 88,|96 100, 102 104 110, 118, 120| 5 ,

В этом случае $S = 3$, $T = 5$ $Q_{эмп} = S + T = 3 + 5 = 8$

Критические значения для критерия Q находим по таблице 8 Приложения, по которой определяем, что для $n1 = 11$ и $n2 = 12$ при $P = 0{,}05$ $Q_{кр} = 7$, а при $P = 0{,}01$ $Q_{кр} = 9$ В привычных обозначениях это выглядит следующим образом

$$Q_{кр} = \begin{cases} 7 \text{ для } P < 0{,}05 \\ 9 \text{ для } P \le 0{,}01 \end{cases}$$

Соответствующая ось значимости имеет вид



Полученное значение $Q_{эмп}$ попало в зону неопределенности Психолог поэтому может считать полученные различия между рядами значимыми на уровне 5% (т е принимать, что уровень интеллекта учащихся городской школы выше, чем у учащихся сельской школы) и незначимыми на уровне 1%, т е исходить из того, что показатели интеллекта не различаются в обеих школах Подчеркнем еще раз, что этот выбор уровня значимости определяется планом и задачами эксперимента

В терминах статистических гипотез полученный результат может звучать так гипотеза H_0 — о сходстве отклоняется на уровне значимости 0,05, в этом случае принимается альтернативная гипотеза H_1 — о различии В то же время гипотеза H_0 — о сходстве может приниматься на уровне значимости 0,01, в этом случае альтернативная гипотеза H_1 — о различии — отклоняется

Как видим, вычисления по критерию Q существенно проще чем по критерию U, и поэтому сравнение двух независимых выборок каждая из которых имеет больше 11 элементов целесообразно начинать именно с этого критерия Однако критерии Q

менее мощныи, чем критерий U Поэтому, если критерий Q не выявляет различии то последнее не означает, что их нет В таком случае целесообразно применить другие критерии Однако, если критерии Q выявил значимые различия на уровне 1% то можно ограничиться только этим критерием

Для использование критерия Q необходимо соблюдать следующие условия

1 Измерение может быть проведено в шкале порядка, интервалов и отношений

2 Выборки должны быть независимыми

3 В каждои из выборок должно быть не меньше 11 испытуемых

4 Приведенная в настоящем пособии таблица ограничивает верхний предел выборки 26 испытуемыми

5 При числе наблюдений $n1$ и $n2 \geq 26$ можно пользоваться следующими величинами $Q_{кр}$

$$Q_{кр} = \begin{cases} 8 \text{ для } P \leq 0{,}05 \\ 10 \text{ для } P \leq 0{,}01 \end{cases}$$

6 Принципиальным условием, дающим возможность применять критерий, является наличие «хвостов» т е расположение данных в сравниваемых рядах по типу 7 6 и 7 7 В случае расположения выборок следующим образом

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
yyyyyyyyyyyyy

критерии Q оказывается неприменим Следует использовать критерий U

7.3. *H* — критерий Крускала—Уоллиса

Критерий H применяется для оценки различий по степени выраженности анализируемого признака одновременно между тремя, четырьмя и более выборками Он позволяет выявить степень измснения признака в выборках, не указывая, однако, на направление этих изменений

Критерий основан на том принципе, что чем меньше взаимопересечение выборок, тем выше уровень значимости $H_{эмп}$. Следует подчеркнуть, что в выборках может быть разное количество испытуемых, хотя в приведенных ниже задачах приводится равное число испытуемых в выборках

Работа с данными начинается с того, что все выборки условно объединяются по порядку встречающихся величин в одну выборку и значениям этой объединенной выборки проставляются ранги. Затем полученные ранги проставляются исходным выборочным данным и по каждой выборке отдельно подсчитывается сумма рангов. Критерий построен на следующей идее — если различия между выборками незначимы, то и суммы рангов не будут существенно отличаться одна от другой и наоборот.

Задача 7.3. Четыре группы испытуемых выполняли тест Бурдона в разных экспериментальных условиях. Задача в том, чтобы установить — зависит ли эффективность выполнения теста от условий или, иными словами, существуют ли статистически достоверные различия в успешности выполнения теста между группами. В каждую группу входило четыре испытуемых

Решение. Число ошибок показателя переключаемости внимания в процентах дано в таблице 7.5:

Таблица 7.5

№ испытуемых п/п	1 группа	2 группа	3 группа	4 группа
1	23	45	34	21
2	20	12	24	22
3	34	34	25	26
4	35	11	40	27
Суммы	112	102	123	96

Для дальнейшей работы с критерием необходимо выстроить все полученные значения в один столбец по порядку и проставить им ранги

Таблица 76

Данные	Ранги	Данные	Ранги
11	1	26	9
12	2	27	10
20	3	34	12
21	4	34	12
22	5	34	12
23	6	35	14
24	7	40	15
25	8	45	16
Сумма рангов 136			

Проверим правильность ранжирования. Общая сумма рангов равна 136, и по формуле (1.1) она также составляет $\frac{16 \cdot 17}{2} = 136$, следовательно, ранги проставлены правильно.

Следующий этап в подсчете $H_{эмп}$ состоит в распределении данных вновь на исходные группы, но уже с полученными рангами.

Таблица 77

№ испытуемых п/п	1 группа	Ранги	2 группа	Ранги	3 группа	Ранги	4 группа	Ранги
1	23	6	45	16	34	12	21	4
2	20	3	12	2	24	7	22	5
3	34	12	34	12	25	8	26	9
4	35	14	11	1	40	15	27	10
Суммы	112	35	102	31	123	42	96	31

Теперь можно подсчитать величину $H_{эмп}$ по формуле

$$H_{эмп} = \frac{12}{N\,(N+1)} \sum \frac{R^2}{n} - 3\,(N+1) \qquad (7.6)$$

Где N — общее число членов в обобщенной выборке,

n — число членов в каждой отдельной выборке,

R — квадраты сумм рангов по каждой i-ой выборке

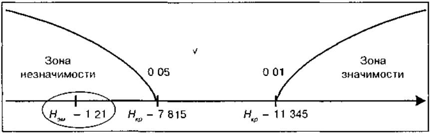
Подставляем данные таблицы 7 7 в формулу 7 6 и получаем

$$H_{эм} = \frac{12}{16 \cdot 17}\left[\frac{35 \cdot 35}{4} + \frac{31 \cdot 31}{4} + \frac{42 \cdot 42}{4} + \frac{28 \cdot 28}{4}\right] - 3 \cdot 17 = 1,21$$

При определении критических значений критерия H применительно к четырем и более выборкам используют таблицу 12 Приложения для критерия *хи*-квадрат, подсчитав предварительно число степеней свободы ν для $c = 4$ Тогда $\nu = c - 1 = 4 - 1 = 3$ Находим по таблице 12 Приложения $H_{кр}$ и представляем в привычном виде

$$H_{кр} = \begin{cases} 7{,}815 \text{ для } P < 0{,}05 \\ 11{,}345 \text{ для } P \le 0{,}01 \end{cases}$$

Соответствующая «ось значимости» имеет вид



Полученное эмпирическое значение $H_{эм}$ оказалось существенно меньше критического значения для 5% уровня Следовательно можно утверждать что различии по показателю переключаемости внимания между группами нет

Переформулируем полученный результат в терминах нулевой и альтернативной гипотез поскольку между показателями, измеренными в четырех разных условиях, существуют лишь случайные различия то принимается нулевая гипотеза H_0, т е гипотеза о сходстве Иными словами, различные условия проведения теста Бурдона не влияют на показатели переключаемости внимания

Подчеркнем, что если использовать критерии, позволяющие сравнивать только два ряда значений, то полученный выше результат потребовал бы шести сравнений — первая выборка со второй, третьей и т д

Для более полного знакомства с критерием *H* решим задачу 7 4

Задача 7.4. Анализируя результаты задачи 7 3, психолог обратил внимание, что наименьшей суммарной величиной рангов обладает последняя выборка испытуемых Предположив, что данные этой выборки повлияли на полученный результат, он исключил данные четвертой группы из расчетов и проверил наличие различий только между первыми тремя группами

Решение. Представим исходные данные сразу в виде таблицы 7 8

Таблица 78

№ испытуемых п/п	1 группа	2 группа	3 группа
1	23	45	34
2	20	12	24
3	34	34	25
4	35	11	40
Суммы	*112*	*102*	*123*

Объединим все данные в один столбец и проставим им ранги

Таблица 79

Данные	Ранги	Данные	Ранги
11	1	34	8
12	2	34	8
20	3	34	8
23	4	35	10
24	5	40	11
25	6	41	12
Сумма рангов 78			

Подсчитаем правильность ранжирования: сумма рангов из таблицы 7.9 равна 78. По формуле (1.1) сумма рангов равняется $\frac{12 \cdot 13}{2} = 78$, таким образом, суммы рангов совпадают и можно утверждать, что ранги проставлены правильно.

Снова разобьем обобщенный ряд на исходные группы, но уже с рангами и сделаем это в таблице 7.10.

Таблица 7.10

№ испытуемых п/п	1 группа	Ранги	2 группа	Ранги	3 группа	Ранги
1	23	4	45	12	34	8
2	20	3	12	2	24	5
3	34	8	34	8	25	6
4	35	10	11	1	40	11
Суммы	112	25	102	23	123	30

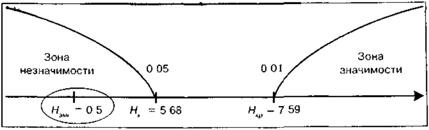
Теперь можно подсчитать величину $H_{эмп}$ по формуле (7.6). Подсчет дает следующее:

$$H_{эмп} = \frac{12}{12 \cdot 13}\left[\frac{25 \cdot 25}{4} + \frac{23 \cdot 23}{4} + \frac{30 \cdot 30}{4}\right] - 3 \cdot 13 = 0{,}5$$

В тех случаях, когда сравниваются три выборки по критерию H, критические величины этого критерия находятся по таблице 9 Приложения. В задаче 7.4 соответствующее значение $H_{кр}$ для выборки размером $n1 = 4$, $n2 = 4$ и $n3 = 4$ составляют 5,68 для $P = 0{,}05$ и 7,59 для $P = 0{,}01$. Используя принятый вариант записи, получаем выражение:

$$H_{кр} = \begin{cases} 5{,}68 \text{ для } P \leq 0{,}05 \\ 7{,}59 \text{ для } P \leq 0{,}01 \end{cases}$$

Соответствующая «ось значимости» в этом случае имеет вид



Следовательно, полученные различия по тесту Бурдона, но теперь уже между тремя группами вновь незначимы Иными словами четвертая группа не оказала значимого влияния на общии результат В терминах статистических гипотез мы вновь должны принять гипотезу H_0 — об отсутствии различий и отклонить гипотезу H_1

Для использование критерия *H* необходимо соблюдать следующие условия:

1 Измерение должно быть проведено в шкале порядка, интервалов или отношений

2 Выборки должны быть незарисимыми

3 Допускается разное число испытуемых в сопоставляемых выборках

4 При сопоставлении трех выборок допускается, чтобы в одной из них было $n = 3$, а в двух других $n = 2$ Однако в таком случае различия могут быть зафиксированы лишь на 5% уровне значимости

5 Таблица 9 Приложения предусмотрена только для трех выборок и $\{n1, n2, n3\}, \leq 5$, то есть максимальное число испытуемых во всех трех выборках может быть меньше и равно 5

6 При большем числе выборок и разном количестве испытуемых в каждои выборке следует пользоваться таблицеи 12 Прило жения для критерия *хи* квадрат В этом случае число степеней свободы при этом определяется по формуле $\nu = c - 1$, где c — количество сопоставляемых выборок

7.4. S — критерий тенденций Джонкира

Этот критерий ориентирован на выявление тенденции изменения измеряемого признака при сопоставлении от трех и до шести выборок. В отличие от предыдущего критерия H, количество элементов в каждой выборке должно быть одинаковым. Если же число элементов в каждой выборке различно, то необходимо случайным образом уравнять выборки, при этом неизбежно утрачивается часть информации. Если же потеря информации покажется слишком расточительной, то следует воспользоваться вышеприведенным критерием H — Крускала—Уоллиса, хотя в этом случае нельзя будет выдвигать гипотезу о наличии или отсутствии искомых тенденций.

Критерий S основан на следующем принципе: все выборки располагаются слева направо в порядке возрастания значений исследуемого признака. При этом выборка, в которой среднее значение или сумма всех значений меньше, чем в остальных выборках, располагается слева, а выборка, в которой эти же значения выше, располагается правее и так далее.

После такого упорядочивания для каждого отдельного элемента, стоящего слева в выборке, подсчитывается число инверсии по отношению ко всем элементам упорядоченных выборок, расположенных правее. Инверсией для данного элемента выборки считается число элементов, которые превышают данный элемент по величине по всем выборкам справа. Инверсии по отношению к собственной выборке, т.е. той, в которой находится данный элемент, не подсчитываются. В соответствии с этим правилом у последнего столбца выборки инверсии также не подсчитываются, т.к. справа больше нет данных.

Правило подсчета инверсий позволяет утверждать, что чем выше величина инверсий у крайних правых столбцов, тем выше уровень значимости статистики S.

С помощью этого критерия вновь обратимся к решению задачи 7.3. Но, поскольку критерий S выявляет тенденции, переформулируем условие задачи.

Задача 7.4. Необходимо установить: наблюдается ли тенденция к увеличению ошибок при выполнении теста Бурдона разными испытуемыми в зависимости от условий его выполнения?

Решение. Вновь воспроизведем таблицу 7 5, но уже как таблицу 7 11

Таблица 7 11

№ испытуемых п/п	1 группа	2 группа	3 группа	4 группа
1	23	45	34	21
2	20	12	24	22
3	34	34	25	26
4	35	11	40	27
Суммы	112	102	123	96

Следующий этап работы отражен в таблице 7 12 В ней данные таблицы 7 11 переструктурированы и упорядочены в соответствии с возрастанием сумм исходных данных

Таблица 7 12

№ испытуемых п/п	1 группа	2 группа	3 группа	4 группа
1	21	45	23	34
2	22	12	20	24
3	26	34	34	25
4	27	11	35	40
Суммы	96	102	112	123

Следующии этап связан с подсчетом инверсий Для того чтобы удобнее было подсчитывать инверсии, произведем упорядочение величин от наименьшего к наибольшему, но уже внутри каждой группы сверху вниз Получится таблица 7 13

Таблица 7 13

1 группа	2 группа	3 группа	4 группа
21	11	20	24
22	12	23	25
26	34	34	34
27	45	35	40

Обратим внимание на то, что в таблице 7.13 отсутствует первый столбец с номерами испытуемых, поскольку порядок расположения испытуемых в каждой группе переменный.

Собственно для подсчета инверсии можно использовать и таблицу 7.13, но мы будем считать инверсии в таблице 7.14. Инверсии подсчитываются следующим образом: из таблицы 7.13 видно, что первое число первого столбца равняется 21. Оно сравнивается со всеми числами остальных столбцов. Видим, что число 21 меньше следующих чисел второго, третьего и четвертого столбцов: 34, 45, 23, 34, 35, 24, 25, 34, 40. Этих чисел 9, следовательно, количество инверсий для числа 21 равно 9. Это число и ставим в скобках рядом с числом 21 в таблице 7.14.

Второе число в первом столбце таблицы 7.13 — 22. Оно меньше следующих чисел второго, третьего и четвертого столбцов: 34, 45, 23, 34, 35, 24, 25, 34, 40. Этих чисел 9 — следовательно, число инверсии для числа 22 также 9. Это число и ставим в скобках рядом с числом 22, уже в таблице 7.14. И т.д. В последней, четвертой группе инверсий нет, поскольку последний столбец, по правилам подсчета критерия не с чем сравнивать.

Таблица 7.14

1 группа	2 группа	3 группа	4 группа
21 (9)	11 (8)	20 (4)	24
22 (9)	12 (8)	23 (4)	25
26 (6)	34 (2)	34 (1)	34
27 (6)	45 (0)	35 (1)	40
(30)	(18)	(10)	

Следующий этап — подсчет общей суммы получившихся инверсии. Это число обозначается как A. В нашем примере оно равно $A = 30 + 18 + 10 = 58$.

Величина $S_{эм}$ критерия вычисляется по формуле

$$S_{эм} = 2 \cdot A - B \qquad (7.7)$$

В формуле (7.7) символ B также представляет собой выражение

$$B = \frac{c\,(c-1)}{2}\,n \qquad (7.8)$$

n — количество элементов в столбце (группе)

c — количество столбцов (групп)

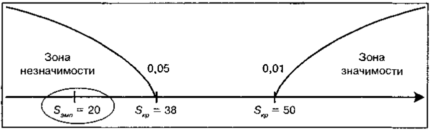
Подставляем в эти формулы необходимые данные, получаем

$$S_{эмп} = \frac{2\cdot(58)-(4\cdot 3)\cdot(4\cdot 4)}{2} = 20$$

По соответствующим значениям (n — число испытуемых) $n = 4$ и (c — число групп, столбцов) $c = 4$ по таблице 10 Приложения находим величины $S_{кр}$. В привычной записи они таковы

$$S_{кр} = \begin{cases} 38 \text{ для } P \le 0{,}05 \\ 50 \text{ для } P \le 0{,}01 \end{cases}$$

Строим «ось значимости»



Согласно полученному результату $S_{эмп}$ попало в зону незначимости, следовательно, принимается гипотеза H_0 о том, что тенденция к увеличению числа ошибок в тесте Бурдона в зависимости от условий его выполнения, не выявлена

Для использования критерия S необходимо соблюдать следующие условия:

1. Измерение может быть проведено в шкале порядка, интервалов и отношении
2. Выборки должны быть независимыми
3. Количество элементов в каждой выборке должно быть одинаковым. Если это не так, то необходимо случайным образом уравнять выборки

4 Нижняя граница применимости критерия не менее трех выборок и не менее двух элементов в каждом наблюдении Верхняя граница определяется таблицей 10 Приложения — не более 6 выборок и не более 10 элементов в каждой выборке Во всех других случаях следует пользоваться критерием *H*

Глава 8

КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ И МНОГОФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ «φ»

8.1. Критерий *хи*-квадрат

Критерий *хи*-квадрат (другая форма записи — χ^2 греческая буква «*хи*») один из наиболее часто использующихся в психологических исследованиях поскольку он позволяет решать большое число разных задач, и, кроме того, исходные данные для него могут быть получены в любой шкале, начиная со шкалы наименований

Критерий *хи*-квадрат используется в двух вариантах

- как расчет согласия эмпирического распределения и предполагаемого теоретического, в этом случае проверяется гипотеза H_0 об отсутствии различий между теоретическим и эмпирическим распределениями,
- как расчет однородности двух независимых экспериментальных выборок, в этом случае проверяется гипотеза H_0 об отсутствии различий между двумя эмпирическими (экспериментальными) распределениями

Критерий построен так, что при полном совпадении экспериментального и теоретического (или двух экспериментальных) распределений величина $\chi^2_{эм}$ (*хи*-квадрат эмпирическое) = 0, и чем больше расхождение между сопоставляемыми распределениями, тем больше величина эмпирического значения *хи*-квадрат

Основная расчетная формула критерия *хи*-квадрат выглядит так

$$\chi^2_{эмп} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_э - f_m)^2}{f_m} \tag{8.1}$$

где $f_э$ – эмпирическая частота

f_m – теоретическая частота

k — количество разрядов признака

Расчетная формула критерия *хи*-квадрат для сравнения двух эмпирических распределении в зависимости от вида представленных данных может иметь следующий вид

$$\chi^2_{эмп} = \frac{1}{N \cdot M} \sum_{i=1}^{k} \frac{(N \cdot x_i - M \cdot y_i)^2}{x_i + y_i} \tag{8.2}$$

где N и M — соответственно число элементов в первой и во второй выборке Эти числа могут совпадать, а могут быть и различными

Для критерия *хи*-квадрат оценка уровней значимости (см таблицу 12 Приложения 1) определяется по числу степеней свободы, которое обозначается греческой буквой ν (ню) и в большинстве случаев, вычисляется по формуле $\nu = k - 1$, где k каждый раз определяется по выборочным данным и представляет собой число элементов в выборке Если при расчете критерия используется таблица экспериментальных данных, то величина ν рассчитывается следующим образом $\nu = (k - 1) \cdot (c - 1)$, где k — число строк, а c — число столбцов

Рассмотрим ряд примеров решения задач с использованием критерия *хи*-квадрат

8.1.1. Сравнение эмпирического распределения с теоретическим

В разных задачах подсчет теоретических частот осуществляется по-разному Рассмотрим примеры задач, иллюстрирующих различные варианты подсчета теоретических частот Начнем с равновероятного распределения теоретических частот В задачах такого типа

(8 1 8 2 и 8 3) в силу требования равномерности распределения все теоретические частоты должны быть равны между собой

Задача 8 1 Предположим что в эксперименте психологу необходимо использовать шестигранный игральный кубик с цифрами на гранях от 1 до 6 Для чистоты эксперимента необходимо получить идеальный кубик т е такой чтобы при достаточно большом числе подбрасываний каждая его грань выпадала бы примерно равное число раз Задача состоит в выяснении того будет ли данный кубик близок к идеальному?

Решение Для решения этой задачи психолог подбрасывал кубик 60 раз при этом количество выпадений каждой грани (эмпирические частоты f) распределилось следующим образом

Таблица 8 1

Грани кубика	1	2	3	4	5	6
f — эмпирические частоты	12	9	11	14	8	6
f_m теоретические частоты	10	10	10	10	10	10

В идеальном случае необходимо чтобы каждая из 6 его граней (теоретические частоты) выпадала бы равное число раз $\frac{60}{6}$ 10 Величина $\frac{60}{6}$ 10 и будет очевидно теоретической частотой (f_m) одинаковой для каждой грани кубика

Согласно данным таблицы 8 1 легко подсчитать величину χ^2 (хи квадрат эмпирическое) по формуле (8 1)

$$\chi^2 = \frac{(12-10)^2}{10}+\frac{(9-10)^2}{10}+\frac{(11-10)^2}{10}+\frac{(14-10)^2}{10}+\frac{(8-10)^2}{10}+\frac{(6-10)^2}{10}=$$

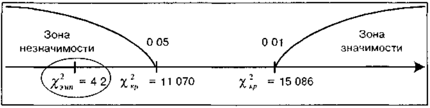
$$=\frac{(2)^2}{10}+\frac{(-1)^2}{10}+\frac{(1)^2}{10}+\frac{(4)^2}{10}+\frac{(-2)^2}{10}+\frac{(-4)^2}{10}=$$

$$=\frac{4}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{16}{10}+\frac{4}{10}+\frac{16}{10}=\frac{42}{10}=4\ 2$$

Теперь, для того чтобы найти $\chi^2_{кр}$, необходимо обратиться к таблице 12 Приложения 1, определив предварительно число степеней свободы ν. В нашем случае k (число граней) $= 6$, следовательно $\nu = 6 - 1 = 5$. По таблице 12 Приложения 1 находим величины $\chi^2_{кр}$ для уровней значимости 0,05 и 0,01.

$$\chi^2_{кр} = \begin{cases} 11{,}070 \text{ для } P \leq 0{,}05 \\ 15{,}086 \text{ для } P \leq 0{,}01 \end{cases}$$

Строим «ось значимости»



В нашем случае $\chi^2_{эмп}$ попало в зону незначимости и оказалось равным 4,2, что гораздо меньше 11,070 — критической величины для 5% уровня значимости. Следовательно, можно принимать гипотезу H_0 о том, что эмпирическое и теоретическое распределения не различаются между собой. Таким образом, можно утверждать, что игральный кубик «безупречен».

Понятно, также, что если бы $\chi^2_{эмп}$ попало в зону значимости, то следовало бы принять гипотезу H_1 о наличии различий и тем самым утверждать, что наш игральный кубик был бы далеко не «безупречен».

Задача 8.2. В эксперименте испытуемый должен произвести выбор левого или правого стола с заданиями. В инструкции психолог подчеркивает, что задания на обоих столах одинаковы. Из 150 испытуемых правый стол выбрали 98 человек, а левый 52. Можно ли утверждать, что подобный выбор левого или правого стола равновероятен или он обусловлен какой-либо причиной, неизвестной психологу?

Решение. Подчеркнем, что данная задача вновь на сопоставление экспериментального распределения с теоретическим. Каковы в этом случае параметры теоретического распределения? Предполагается, что выбор должен быть равновероятным, т е правый и левый стол должны выбрать одинаковое количество испытуемых, а это $\frac{150}{2}=75$ человек

Проверим совпадение эмпирического распределения с теоретическим по критерию *хи*-квадрат. Лучше всего для расчета критерия использовать таблицу 8 2, последовательность вычислений в которой соответствует формуле (8 1).

Таблица 8 2

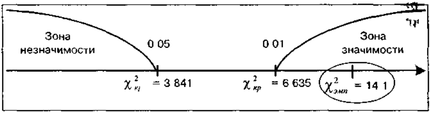
№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6
Альтернативы выбора стола	$f_э$	f_m	$(f_э - f_m)$	$(f_э - f_m)^2$	$\frac{(f_э - f_m)^2}{f_m}$
1 (правый)	98	75	23	529	7,05
2 (левый)	52	75	-23	529	7,05
Суммы	150	150	0		$\chi^2_{эмп}$ = 14,1

В таблице 8 2 альтернатива 1 соответствует выбору правого стола, а альтернатива 2 — выбору левого. Второй и третий столбцы таблицы соответственно эмпирические и теоретические частоты. Следует просуммировать эти два столбца, чтобы проверить равенство сумм эмпирических и теоретических частот Четвертый столбец соответствует разности между эмпирическими и теоретическими частотами $(f_э - f_m)$ В нижней строчке столбца эти разности просуммированы Полученная сумма равна 0 В дальнейших расчетах величина этой суммы не используется, но ее обязательно следует каждый раз вычислять, поскольку ее равенство нулю гарантирует правильность вычислений на этом этапе Если же сумма элементов четвертого столбца не равна нулю, это означает, что в расчеты вкралась ошибка

В нашем случае эмпирическая величина *хи*-квадрат, вычисленная по формуле (8.1), равна 14,1 и является суммой чисел в шестом столбце. Для того чтобы найти табличные значения $\chi^2_{кр}$ следует определить число степеней свободы по формуле $\nu = k - 1$, где k — количество альтернатив (строк). В нашем случае $k = 2$, следовательно $\nu = 2 - 1 = 1$. По таблице 12 Приложения 1 находим

$$\chi^2_{кр} = \begin{cases} 3{,}841 \text{ для } P \leq 0{,}05 \\ 6{,}635 \text{ для } P \leq 0{,}01 \end{cases}$$

Строим «ось значимости»



Полученные различия оказались значимыми на уровне 1%. Иными словами, испытуемые статистически значимо предпочитают выбор правого стола. В терминах статистических гипотез этот вывод звучит так: выбор направления оказался не случайным, поэтому нулевая гипотеза H_0 о сходстве отклоняется и на высоком уровне значимости принимается альтернативная гипотеза H_1 о различии. Если психологу интересны причины подобного выбора, то их следует выяснять в специальном эксперименте.

Задача 8.3. Психолог решает задачу: будет ли удовлетворенность работой на данном предприятии распределена равномерно по следующим альтернативам (градациям):

1 — Работой вполне доволен,

2 — Скорее доволен, чем не доволен,

3 — Трудно сказать, не знаю, безразлично,

4 — Скорее недоволен, чем доволен,

5 — Совершенно недоволен работой.

Решение. Для решения этой задачи производится опрос случайной выборки из 65 респондентов (испытуемых) об удовлетворенности работой «В какой степени Вас устраивает Ваша теперешняя работа?», причем ответы должны даваться согласно вышеозначенным альтернативам

Полученные ответы (эмпирические частоты) представлены в таблице 8 3 в столбце № 2 В этой же таблице в третьем столбце даны теоретические частоты для данной выборки испытуемых, которые, согласно предположению психолога, должны быть одинаковы и равняться $\frac{65}{5} = 13$ В следующих столбцах таблицы 8 3 приведены необходимые расчеты по формуле (8 1)

Таблица 83

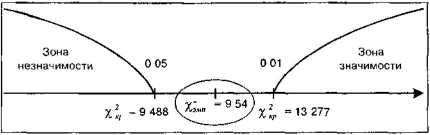
№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6
Альтернативы	$f_э$	f_m	$(f_э - f_m)$	$(f_э - f_m)^2$	$\frac{(f_э - f_m)^2}{f_m}$
1	8	13	5	25	1 92
2	22	13	+9	81	6 23
3	14	13	+1	1	0 08
4	9	13	4	16	1 23
5	12	13	-1	1	0 08
Суммы	65	65	0		$\chi^2_{эмп} = 9\ 54$

Напомним, что сумма величин $(f_э - f_m)$ в столбце № 4 должна равняться нулю Это показатель правильности вычислений

В шестом столбце таблицы подсчитана величина $\chi^2_{эмп}$ равная 9,54 Для того чтобы найти табличные значения $\chi^2_{кр}$ для двух уровней значимости, следует вначале определить число степеней свободы по формуле $\nu = k - 1$, где k — количество альтернатив (строк). В нашем случае $k = 5$, следовательно $\nu = 5 - 1 = 4$. По таблице 12 Приложения 1 находим

$$\chi^2_{кр} = \begin{cases} 9{,}488 \text{ для } P \leq 0{,}05 \\ 13{,}277 \text{ для } P \leq 0{,}01 \end{cases}$$

Строим «ось значимости»



Величина $\chi^2_{эмп}$ попала в зону неопределенности. Можно считать, однако, что полученные различия значимы на уровне 5% и принять гипотезу H_1 о различии теоретического и эмпирического распределений. Психолог может предположить, что на 5% уровне значимости выбор альтернатив респондентами не равновероятен. Таким образом, можно сказать, что эмпирическое распределение выбора альтернатив значимо отличается от теоретически предположенного равномерного выбора альтернатив. Причину этого, а также степень отвержения или предпочтения работы на данном предприятии психолог может выяснить в специальном исследовании.

При решении приведенных выше трех задач с равновероятным распределением теоретических частот не было необходимости использовать специальные процедуры их подсчета. Однако на практике чаще возникают задачи, в которых распределение теоретических частот не имеет равновероятного характера. В этих случаях для подсчета теоретических частот используются специальные формулы или таблицы. Рассмотрим задачу, в которой в качестве теоретического будет использоваться нормальное распределение.

Задача 8.4. У 267 человек был измерен рост. Вопрос состоит в том, будет ли полученное в этой выборке распределение роста близко к нормальному? (Задача взята из учебника Г Ф Лакина «Биометрия», 1990)

Решение. Измерения проводились с точностью до 0,1 см и все полученные величины роста оказались в диапазоне от 156,5 до 183,5 см Для расчета по критерию *хи*-квадрат целесообразно разбить этот диапазон на интервалы, величину интервала удобнее всего взять равной 3 см, поскольку 183,5 - 156,5 = 27 и 27 делится нацело на 3 $\left(\frac{27}{3}=9\right)$ Таким образом, все экспериментальные данные будут распределены по 9 интервалам При этом центрами интервалов будут следующие числа 158 (поскольку 156,5 + 159,5 = 316 и $\frac{316}{2}=158$), 161 (поскольку 159,5 + 162,5 = 322 и $\frac{322}{2}=161$), 164 и т д до 182

При измерении роста в каждый из этих интервалов попало какое-то количество людей — эта величина для каждого интервала и будет эмпирической частотой, обозначаемой в дальнейшем как $f_{эi}$

Чтобы применить расчетную формулу 8 1 необходимо прежде всего вычислить теоретические частоты Для этого по всем полученным значениям эмпирических частот (по всем выборочным данным) нужно вычислить

1) среднее $\overline{X}$

2) и среднеквадратическое отклонение (σ)

Для наших выборочных данных величина среднего $\overline{X}$ оказалась равной 166,22 и среднеквадратическое σ = 4,06

Затем для каждого выделенного интервала следует подсчитать величины *оі* по формуле (8 3) (где индекс *і* изменяется от 1 до 9 *т к у нас* 9 *интервалов*)

$$oi=\frac{f_{эi}-\overline{X}}{\sigma} \qquad (8\ 3)$$

Величины σi называются нормированными частотами Удобнее производить их расчет в приведенной ниже таблице 8 4 Подсчитав эти величины, необходимо занести их в соответствующую строчку третьего столбца таблицы 8 4

Затем по величинам нормированных частот по таблице 11 Приложения 1 находятся величины $f(\sigma i)$ которые называются ординатами нормальной кривой для каждой σi Величины $f(\sigma i)$, полученные из таблицы 11 Приложения 1 заносятся в соответствующую строчку четвертого столбца таблицы 8 4 Величины, полученные в третьем и четвертом столбцах таблицы 8 4 позволяют вычислить по соответствующей формуле необходимые нам теоретические частоты (обозначаемые как f_m) и также занести их в пятый столбец таблицы 8 4

Расчет теоретических частот осуществляется для каждого интервала по следующей формуле

$$f_n = \frac{f(\sigma i)\ (n\ \lambda)}{\sigma} \qquad (8\ 4)$$

где $n = 267$ (общая величина выборки),

$\lambda = 3$ (величина интервала) и

σ — среднеквадратичное отклонение

Напомним, что после подсчета эти величины заносятся в соответствующую строчку пятого столбца таблицы 8 4

Таблица 8 4

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
Центры интервалов xi	Эмпирические частоты f	$\sigma i = \frac{f - \bar{X}}{\sigma}$	Ординаты нормальной кривой $f(\sigma i)$	Расчетные теоретические частоты f_n
159	3	2 77	0 0086	1 6
161	9	-2 03	0 0508	10 0
164	31	-1 29	0 1736	34 3
167	71	0 55	0 3429	67 8
170	82	+0 19	0 3918	77 6
173	46	+0 93	0 2589	51 2

Продолжение таблица 84

176	19	+1,67	0,0989	19,5
179	5	+2 41	0,0219	4,4
182	1	+3,15	0,0028	0,6
Суммы	267	—	—	267,0

Рассмотрим более детально, как получаются необходимые нам показатели на примере первой строчки таблицы 8.4.

Так, согласно экспериментальным данным в первый интервал, т.е в интервал от 156,5 см до 159,5 см, попало 3 человека (или соответствующая эмпирическая частота $f_{э1} = 3$) Мы помним, что величина средней $\overline{X}$ для данной выборки равна 169,22 см, а величина $\sigma = 4,06$

Проведем расчет величины o1 для первого интервала по формуле (8.3):

$$o1 = \frac{(3-169,22)}{4,06} = -2,77$$

Подставляем полученную величину в первую строчку третьего столбца таблицы 8 4 Дальнейший расчет производится с модулями этих чисел.

Величину $f(o1) = 0,0086$ находим в таблице 11 Приложения 1 на пересечении строчки с числом 2,7 (десятые доли) и столбца с числом 7 (сотые доли). Заносим эту величину в первую строчку четвертого столбца таблицы 8 4.

Теоретическую частоту f_{m1} получаем в соответствии с формулой (8.4):

$$f_{m} = \frac{(f(o1)\ n\ \lambda)}{\sigma} = \frac{(0,0086\ \ 267\ \ 3)}{4,06} = 1,6$$

Заносим полученное число в первую строчку пятого столбца таблицы 8 4 Подобная процедура повторяется далее для каждого интервала.

Теперь у нас все готово для работы с критерием *хи*-квадрат по формуле 8 1 на основе стандартной таблицы В целях упрощения расчетов сократим число интервалов до 7 Это делается следующим образом складываем две верхние частоты и две нижни, где 3 + 9 = 12 и 1 + 5 = 6. Тогда стандартная таблица для исчисления хи-квадрат выглядит так

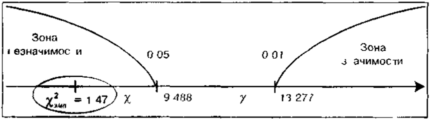
Таблица 85

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6
Альтернативы	f	f_m	$(f - f_m)$	$(f - f_m)^2$	$\frac{(f - f_m)^2}{f_m}$
1	12	11,6	+0,4	0,16	0,01
2	31	34,3	−3,3	10,89	0,32
3	71	67,8	+3,2	10,24	0,15
4	82	77,6	+4,4	19,36	0,25
5	46	51,2	−5,2	27,04	0,53
6	19	19,5	−0,5	0,25	0,01
7	6	5,0	+1,0	1,00	0,20
Суммы	267	267	0		$\chi^2_{эм} = 1,47$

В случае оценки равенства эмпирического распределения нормальному число степеней свободы определяется особым образом: из общего числа интервалов вычитают число 3. В данном случае 7 − 3 = 4. Таким образом, число степеней свободы ν в нашем случае будет равно $\nu = 4$. По таблице 12 Приложения 1 находим

$$\chi^2_{кр} = \begin{cases} 9,488 \text{ для } P \le 0,05 \\ 13,277 \text{ для } P \le 0,01 \end{cases}$$

Строим «ось значимости»



Полученная величина эмпирического значения *хи*-квадрат попала в зону незначимости, поэтому необходимо принять гипотезу *H* об отсутствии различий Следовательно существуют все основания утверждать, что наше эмпирическое распределение близко к нормальному

В заключении подчеркнем, что, несмотря на некоторую «громоздкость» вычислительных процедур, этот способ расчета дает наиболее точную оценку совпадения эмпирического и нормального распределений

8.1.2. Сравнение двух экспериментвльных распределений

На практике значительно чаще встречаются задачи, в которых необходимо сравнивать не теоретическое распределение с эмпирическим, а два и более эмпирических распределения между собой Ниже будут рассмотрены типичные варианты задач, предусматривающих сравнение экспериментальных распределений (данных) и способы их решения с использованием критерия *хи*-квадрат

В этих задачах с помощью критерия *хи*-квадрат проводится оценка однородности двух и более независимых выборок и таким образом проверяется гипотеза об отсутствии различии между двумя и более эмпирическими (экспериментальными) распределениями

Исходные данные двух эмпирических распределений для сравнения между собой могут быть представлены разными способами Наиболее простой из этих способов так называемая «четырехпольная таблица» Она используется в тех случаях, когда в первой выборке имеются два значения (числа) и во второй выборке также два значения (числа) Критерий *хи*-квадрат позволяет также сравнивать между собой три, четыре и большее число эмпирических величин Для расчетов во всех этих случаях используются различные модификации формулы (8 1), что позволяет существенно облегчить процесс вычисления

Начнем изучение сравнения двух эмпирических распределений с самого простого случая — использования четырехпольной таблицы

Задача 8.5 (Задача взята из учебного пособия «Психологическая диагностика» под ред. К. М. Гуревича и М. К. Акимовой. М. Изд-во УРАО, 1997 г.) Одинаков ли уровень подготовленности учащихся в двух школах, если в первой школе из 100 человек поступили в вуз 82 человека и во второй школе из 87 человек поступили в вуз 44?

Решение. Условия задачи можно представить в виде четырехпольной таблицы 8.6, ячейки которой, обозначаются обычно как A, B, C и D.

Таблица 8.6

	1 школа	2 школа
Число поступивших в вуз	A 82	B 44
Число не поступивших в вуз	C 18	D 43
Сумма	100	87

Согласно данным, представленным в таблице 8.6, в нашем случае имеется четыре эмпирические частоты, это соответственно 82, 44, 18 и 43. Для того чтобы можно было использовать формулу (8.1), необходимо для каждой из этих эмпирических частот найти соответственные «теоретические» частоты. Здесь и далее, в других задачах этого раздела, «теоретические» частоты вычисляются на основе имеющихся эмпирических частот разными способами, в зависимости от типа задачи. Вычислим четыре теоретических частоты в нашем случае.

Из таблицы 8.6 следует, что 18 и 43 человека из первой и второй школ соответственно не поступили в вуз. Относительно этих величин подсчитывается величина P. Это так называемая доля признака, или частота. В данном случае признаком явилось то, что выпускники не поступили в вуз. Величина P подсчитывается по формуле (8.5) следующим образом:

$$P = \frac{18 + 43}{100 + 87} = 0.33 \qquad (8.5)$$

Величина P позволяет рассчитать «теоретические» частоты для третьей строчки таблицы 8.6, которые обозначим как f_{m1} и f_{m2}.

Эти частоты показывают, сколько учащихся из первой и второй школ не должны были поступить в вуз Они подсчитывается следующим образом

f_{m1} для первой школы = 0,33 100 = 33

f_{m2} для второй школы = 0,33 87 = 28,71

Иными словами, из первой школы не должны были поступить в вуз 33 человека, а из второй 28,71 (Для большей точности вычислений по методу *хи*-квадрат желательно не округлять результаты вычислений, а сохранять сотые и даже тысячные значения после запятой) Исходя из вновь полученных «теоретических» частот — 33 и 28,71, мы можем произвести расчет того, сколько учащихся должны были бы теперь поступить в вуз из первой и второй школ Обозначим эти частоты как f_{m3} для первой и f_{m4} для второй школ, получим соответственно

f_{m3} для первой школы 100 - 33 = 67

f_{m4} для второй школы 87 - 28,71 = 58,29

Перепишем полученные «теоретические» частоты в новую таблицу 8 7

Таблица 8 7

	1 школа	2 школа
Число учащихся которые должны были бы поступить в вуз	A f_{m3} = 67	B f_{m4} = 58 29
Число учащихся которые не должны были поступить в вуз	C f_{m1} = 33	D f_{m2} = 28 71
Сумма	100	87

Подчеркнем, что сумма по столбцам для вновь найденных «теоретических» частот, должна совпадать с исходной, т е 67 + 33 = 100 и 82 + 18 = 100, аналогично — 58,29 + 28,71 = 87 и 44 + 43 = 87 Подчеркнем также, что при расчетах «теоретических» частот им можно было бы дать и другое символическое обозначение, более привычное Так, первую подсчитанную «теоретическую» частоту, представленную в ячейке C таблицы 8 7 можно было бы обозначить не как f_{m1} = 33, а как f_{m3} = 33 и так далее Это, однако, не принципиально главное производить вычисления строго по алгоритму в соответствии с формулой (8 1)

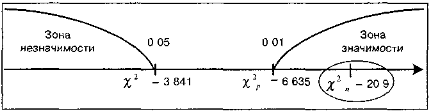
Теперь величина *хи* квадрат эмпирическая подсчитывается по знакомой формуле (8 1) Для этого из величин представленных в ячейках таблицы 8 6 вычитаются соответствующие величины представленные в ячейках таблицы 8 7

$$\chi^2_{э} = \frac{(18-33)^2}{33} + \frac{(82-67)^2}{67} + \frac{(43-28{,}71)^2}{28{,}71} + \frac{(44-58{,}29)^2}{58{,}29} = 20{,}9$$

В данном случае число степеней свободы $\nu = (k-1)\cdot(c-1)$ подсчитывается как произведение числа столбцов минус 1 на число строк минус 1 Иными словами $\nu = (2-1)\cdot(2-1) = 1$ поскольку у нас 2 строки и два столбца И в соответствии с таблицей 12 Приложения 1 находим

$$\chi^2_{кр} = \begin{cases} 3{,}841 \text{ для } P < 0{,}05 \\ 6{,}635 \text{ для } P < 0{,}01 \end{cases}$$

Строим ось значимости



Полученная величина $\chi^2_э$ попала в зону значимости Иными словами следует принять гипотезу H_1 о наличии различий между двумя эмпирическими распределениями Таким образом уровень подготовленности учащихся в двух школах оказался разным На основе эмпирических данных мы можем теперь утверждать что уровень подготовленности учащихся в первой школе существенно выше чем во второй Без использования критерия *хи* квадрат такого вывода мы сделать бы не могли

Решим аналогичную задачу т е задачу в которой сравниваются две выборки имеющие по два значения но другим способом

Задача 8.6. В двух школах района психолог выяснял мнения учителеи об организации психологической службы в школе В первой школе было опрошено 20 учителей, во второй 15 Психолога интересовал вопрос в какой школе психологическая служба поставлена лучше? Учителя давали ответы по номинативнои шкале — нравится (да), не нравится — (нет)

Решение. Результаты опроса представим в виде четырехпольной таблицы 8 8

Таблица 88

	1 школа	2 школа	Суммы
Число учителей ответивших на вопрос утвердительно	A 15	B 7	A + B = 22
Число учителеи ответивших на вопрос отрицательно	C 5	D 8	C + D = 13
Сумма	A + C = 20	B + D = 15	35

Величина эмпирического значения *хи*-квадрат подсчитывается здесь по-другому, согласно следующей формуле

$$\chi^2_{эмп} = \frac{N\ \left(|A\ D - B\ C| - N/2\right)^2}{(A+B)\ (A+C)\ (C+D)\ (B+D)} \qquad (8\ 6)$$

$N = A + B + C + D$ — или общее число учителей, принявших участие в опросе

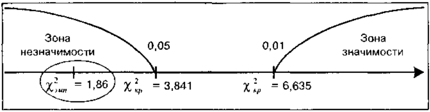
Подставляем исходные данные в формулу (8 6) получаем

$$\chi^2_{эмп} = \frac{35\ \left(|15\ 8 - 5\ 7| - 35/2\right)^2}{22\ 20\ 13\ 15} = 1\,86$$

В данном случае число степеней свободы $\nu = (k-1)\ (c-1)$ подсчитывается как произведение числа столбцов минус 1 на число строк минус 1 Иными словами, $\nu = (2-1)\ (2-1) = 1$, поскольку у нас 2 строки и два столбца И в соответствии с таблицей 12 Приложения 1 находим

$$\chi^2_{кр} = \begin{cases} 3{,}841 \text{ для } P \leq 0{,}05 \\ 6{,}635 \text{ для } P \leq 0{,}01 \end{cases}$$

Строим «ось значимости»:



Полученная величина $\chi^2_{эмп}$ попала в зону незначимости Иными словами, следует принять гипотезу H_0 об отсутствии различий между двумя эмпирическими распределениями Таким образом, уровень организации психологической службы в обоих школах оказался одинаковым

Теперь решим задачу, в которой сравниваются две выборки, имеющие по четыре значения каждал.

З а д а ч а 8.7. В двух школах района выяснялась успешность знания алгебры учащимися десятых классов. Для этого в обеих школах были случайным образом отобраны 50 учащихся и с ними проведены контрольные работы Проверялось предположение о том, что существенной разницы в уровне знаний учащимися алгебры в двух школах не существует

Р е ш е н и е. Результаты контрольных работ представим сразу в виде таблицы

Таблица 89

Школы	Оценки				Суммы
	2	3	4	5	
Школа 1	$O_{11} = 3$	$O_{12} = 19$	$O_{13} = 18$	$O_{14} = 10$	50
Школа 2	$O_{21} = 9$	$O_{22} = 24$	$O_{23} = 12$	$O_{24} = 5$	50
Суммы	$O_{11} + O_{21}$ 12	$O_{12} + O_{22} = 43$	$O_{13} + O_{23} = 30$	$O_{14} + O_{24} - 15$	100

В таблице 8 9 O_{11} — число учащихся первой школы, получивших оценку 2 в контрольной работе по алгебре, O_{12} — число учащихся первой школы, получивших оценку 3 в контрольной работе по алгебре, O_{13} — число учащихся первой школы, получивших оценку 4 в контрольной работе по алгебре и т д

Подчеркнем, что «визуальный» анализ данных таблицы 8 9 показывает, что во второй школе число «двоечников» в три раза больше, чем в первой, и, наряду с этим, число «отличников» в два раза меньше, чем в первой школе Казалось бы, можно сделать вывод о том, что вторая школа показывает существенно худшие результаты, чем первая Однако подобные утверждения можно делать только на основе статистической обработки экспериментальных данных

В общем случае для подобных задач подсчет эмпирического значения *хи*-квадрат осуществляется по формуле (8 7), являющейся модификацией формулы (8 2)

$$\chi^2_{эмп} = \frac{1}{n1\ n2} \sum \frac{(n1\ O_{2i} - n2\ O_{1i})^2}{O_{1i} + O_{2i}} \qquad (8\ 7)$$

Подставим данные нашего примера в формулу (8 7), получим

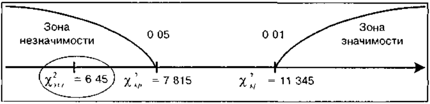
$$\chi^2_{эмп} = \frac{1}{50\ 50}\left[\frac{(50\ 9 - 50\ 3)^2}{3+9} + \frac{(50\ 24 - 50\ 19)^2}{19+24} + \frac{(50\ 12 - 50\ 18)^2}{18+12} + \right.$$

$$\left. + \frac{(50\ 5 - 50\ 10)^2}{10+5}\right] = 6{,}45$$

Число степеней свободы в данном случае равно $\nu = (k - 1)$ $(c - 1) = (2 - 1)$ $(4 - 1) = 3$ По таблице 12 Приложения 1 находим

$$\chi^2_{кр} = \begin{cases} 7{,}815 \text{ для } P \leq 0{,}05 \\ 11{,}345 \text{ для } P \leq 0{,}01 \end{cases}$$

Строим «ось значимости»



Полученные различия попали в зону незначимости Иными словами следует принять нулевую гипотезу H_0 о сходстве или о том что уровень знания учащимися алгебры в двух разных школах статистически значимо не отличается между собой Выше, при простом визуальном анализе экспериментальных данных мы высказывали предположение, что во второй школе успеваемость учащихся по алгебре существенно хуже, чем в первой, однако, критерий *хи*-квадрат показал, что это далеко не так

Задачи аналогичные рассмотренной выше, т е с большим числом значений в сравниваемых выборках можно решить и другим способом, используя хорошо знакомую нам формулу (8 1) Рассмотрим этот способ на примере решения задачи 8 8

Задача 8.8. Каково сходство в степени удовлетворенности работой на одном предприятии у двух неравных по численности групп? (Можно рассматривать эту задачу как продолжение задачи 8 3)

Решение. Для решения этой задачи психолог провел на том же предприятии (как в задаче 8 3) опрос о степени удовлетворенности работой еще в одной группе, но уже из 80 респондентов Теперь у психолога есть две выборки испытуемых, первая — 65 человек и вторая — 80 человек Полученные данные позволяют использовать критерий *хи*-квадрат по разному

- во-первых, на новой выборке из 80 респондентов можно решить задачу, аналогичную задаче 8 3
- во вторых, объединив две выборки можно опять решить задачу аналогичную задаче 8 3,
- в третьих, можно сравнить распределения выбора альтернатив двух выборок (первой и второй), т е сравнить степень удовлетворенности работой двух групп респондентов и решить необходимую нам задачу 8 8

Для решения задачи 8 8 на основе знания эмпирических частот первого и второго обследований, необходимо вычислить «теоретические› частоты по всей совокупности данных, поскольку в противном случае невозможно будет применить формулу (8 1)

Это осуществляется следующим образом сумма эмпирических частот 65 + 80 = 145 равна общему количеству респондентов, опрошенных психологом

Представим долю частот первой выборки в виде дроби $\frac{65}{145} = 0\ 45$ Представим долю частот второй выборки также в виде дроби $\frac{80}{145} = 0\ 55$

Особо подчеркнем, что ‹теоретические» частоты необходимо рассчитать для каждой альтернативы (вариантов ответов) отдельно для обоих выборок

Для этого по каждой альтернативе суммируем эмпирические частоты первой и второй выборок Поскольку, для первой альтернативы в первой выборке $f_э = 8$, а во второй выборке $f_э = 18$, то их сумма будет равна 8 + 18 = 26 Для второй альтернативы в первой выборке $f_э = 22$, во второй $f_э = 20$, тогда их сумма равняется 22 + 20 = 42 И так далее для каждой альтернативы

‹Теоретическая» частота каждого варианта ответа в обоих выборках получается как результат умножения суммы эмпирических частот на соответствующую процентную долю, представленную в виде десятичной дроби

Поскольку частоты выбора первого варианта ответа (альтернативы) составляют в обеих выборках 8 + 18 = 26, то

f_m для 1-й выборки = 26 0,45 = 11,7

f_m для 2-й выборки = 26 0,55 = 14 3

Поскольку частоты выбора второго варианта ответа (альтернативы) составляют в обеих выборках 20 + 22 = 42 поэтому

f_m для 1-й выборки = 42 0,45 = 18,9

f_m для 2-й выборки = 42 0,55 = 23,1

Поскольку частоты выбора третьего варианта ответа (альтернативы) составляют в обеих выборках 18 + 14 = 32, поэтому

f_m для 1-й выборки = 32 0,45 = 14,4

f_m для 2-й выборки = 32 0,55 = 17 6

Поскольку частоты выбора четвертого варианта ответа (альтернативы) составляют в обеих выборках 11 + 9 = 20, поэтому

f_m для 1 и выборки = 20 0 45 = 9

f_m для 2 и выборки = 20 0 55 = 11

Поскольку частоты выбора пятого варианта ответа (альтернативы) составляют в обеих выборках 13 + 12 = 25, поэтому

f_n для 1-й выборки = 25 0,45 = 11,25

f_m для 2-й выборки = 25 0,55 = 13 75

Следует помнить, что суммы рассчитанных «теоретических» частот по каждой альтернативе, должны совпадать с суммой эмпирических частот по этой же альтернативе Проверим правильность этого положения для рассчитанных «теоретических» частот

Для первого варианта ответа	11,7 + 14,3 = 26 = 8 + 18
Для второго варианта ответа	18,9 + 23,1 = 42 = 22 + 20
Для третьего варианта ответа	14,4 + 17,6 = 32 = 14 + 18
Для четвертого варианта ответа	9 + 11 = 20 = 9 + 11
Для пятого варианта ответа	11,25 + 13,75 = 25 = 12 + 13

Теперь для того чтобы использовать формулу (8 1), нужно объединить полученные эмпирические и «теоретические» частоты двух выборок в стандартную таблицу 8 10 Поскольку сравниваются только две выборки, то вместо одной альтернативы в таблице 8 10 будет две альтернативы под номерами 1 1 и 1 2 — это соответственно две первые альтернативы для первой и для второй выборки и так далее

Таблица 8 10

Альтернативы	f	f_m	$(f - f_m)$	$(f - f_m)^2$	$\frac{(f_э - f_т)^2}{f_т}$
1 1	8	11 7	3 7	13 69	1 17
1 2	18	14 3	+3 7	13 69	0 96
2 1	22	18 9	+3 1	9 61	0 51

Продолжение таблицы 8 10

2 2	20	23 1	3 1	9 61	0 42
3 1	14	14 6	0 4	0 16	0 01
3 2	18	17 6	+0 4	0 16	0 01
4 1	9	9	0	0	0
4 2	11	11	0	0	0
5 1	12	11 25	+0 75	0 56	0 05
5 2	13	13 75	0 75	0 56	0 05
Суммы	145	145	0		$\chi^2_{эмп}$ = 3 17

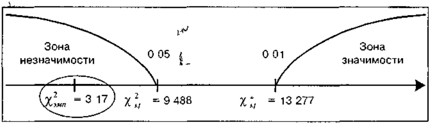
При сопоставлении двух эмпирических распределений число степеней свободы определяется по формуле $\nu = (k - 1)\ (c - 1)$, где k — число строк в таблице эмпирических частот только для первой выборки (или только для второй), c — количество сравниваемых распределений

В нашем случае $k = 5$, $c = 2$, следовательно $\nu = (5 - 1)\ (2 - 1) = 4$

По таблице 12 Приложения 1 находим

$$\chi^2_{кр} = \begin{cases} 9{,}488 \text{ для } P \leq 0{,}05 \\ 13{,}277 \text{ для } P \leq 0{,}01 \end{cases}$$

Строим «ось значимости»



Полученные различия попали в зону незначимости Т е следует принять нулевую гипотезу H_0 о сходстве Иными словами, распределения двух выборок значимо не отличаются между собой, и, следовательно, у двух групп опрошенных респондентов отсутствуют предпочтения в выборе удовлетворенности или неудовлетворенности работой

Число переменных в сравниваемых выборках может быть достаточно большим В этом случае целесообразно использовать специальный прием группировки значений по интервалам Число интервалов удобнее всего получать, используя таблицу 8 11

Таблица 8 11

Число значений переменной (от — до)	Число интервалов
25—40	5—6
40— 60	6—8
60—100	7—10
100—200	8—12
> 200	10—15

В двух следующих задачах сравниваются две выборки, в которых значений переменных столь много, что предыдущие способы сравнения оказываются трудновыполнимыми

Задача 8.9. Психолог сравнивает два эмпирических распределения, в каждом из которых было обследовано 200 человек по тесту интеллекта Вопрос различаются ли между собой эти два распределения?

Решение. Представим эмпирические данные в виде таблицы 8 12, в которой приведены также предварительные расчеты, необходимые для получения $\chi^2_{эмп}$

Таблица 8 12

Уровни интеллекта	Частоты		$f1 \quad f1$	$f1+f2$	$\dfrac{f1\ f1}{f1+f2}$
	$f1$	$f2$			
60	1	1	1	2	0 50
70	5	3	25	8	3 12
80	17	7	289	24	12 04
90	45	22	2025	67	30 22
100	70	88	4900	158	31 01

Продолжение таблицы 8 12

110	51	69	2601	120	21 68
120	10	7	100	17	5 88
130	1	2	1	3	0 33
140	0	1	0	1	0 00
Сумма	200	200			104 78

Для случая равенства числа испытуемых в первой и второй выборках расчет производится по формуле (8 8)

$$\chi_{эмп} = 4 \ \sum_{i} \frac{f1\ f1}{f1 + f2} - 2\ N \qquad (8\ 8)$$

Где $f1$ частоты первого распределения, а $f2$ — частоты второго N — число элементов в каждои выборке В нашем случае в каждой из выборок оно равно 200

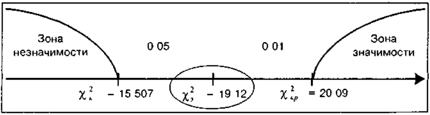
Произведем расчет по формуле (8 8), основываясь на результатах таблицы 8 12

$$\chi_{эм} = 4 \quad 104{,}78 - 2 \quad 200 = 419{,}12 - 400 = 19\ 12$$

В данном случае число степеней свободы $\nu = (k \quad 1) \quad (c - 1) =$ $= (9 - 1) \quad (2 - 1) = 8$, где k число интервалов разбиения, а c число столбцов В соответствии с таблицей 12 Приложения 1 находим

$$\chi^2_N = \begin{cases} 15{,}507 \text{ для } P \leq 0{,}05 \\ 20{,}09 \text{ для } P \leq 0{,}01 \end{cases}$$

Строим «ось значимости»



Полученные различия попали в зону неопределенности Психолог может как принять, так и отклонить гипотезу H_0

Рассмотрим еще одну аналогичную задачу, в которой число значений в каждой из выборок различно В этом случае используют другую формулу расчета

Задача 8.10. Психолог сравнивает два эмпирических распределения, в каждом из которых было обследовано по тесту интеллекта разное количество испытуемых Вопрос — различаются ли между собой эти два распределения?

Решение. Представим эмпирические данные сразу в виде таблицы 8 13, отметив при этом, что число градаций *IQ* увеличилось, в отличие от таблицы 8 12, до 150

Таблица 8 13

Уровни интеллекта	Частоты		$f1\ f1$	$f1 + f2$	$\dfrac{f1\ f1}{f1+f2}$
	$f1$	$f2$			
60	1	0	1	1	1 00
70	8	0	64	8	8 00
80	23	1	529	24	22 04
90	30	11	900	41	21 95
100	38	18	1444	56	25 78
110	12	14	144	26	5 54
120	7	3	49	10	4 90
130	4	4	16	8	2 00
140	1	1	1	2	0 00
150	0	1	0	1	0 50
Сумма	124	53			91 71

В таблице 8 13 произведены предварительные расчеты, необходимые для вычисления эмпирического значения критерия хи квадрат при условии разного числа испытуемых в первой и второи выборках В этом случае расчет производится по формуле (8 9)

$$\chi^2_{эмп} = \frac{N\ N}{n1\ n2}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{f1\ f1}{f1+f2} - \frac{n1\ n1}{N}\right) \qquad (8\ 9)$$

Где $f1$ частоты первого распределения, а $f2$ — частоты второго N — сумма числа элементов в первой $n1$ и второй $n2$ выборках В нашем случае оно равно 177 = 124 + 53, а сумма уже подсчитана в нижней строчке последнего столбца таблицы 8 13

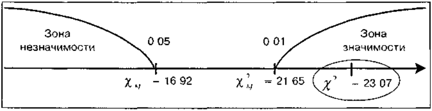
Осталось произвести расчет по формуле (8 9)

$$\chi^2_{эм} = 177\ \ 177/(124\ \ 53)\ \ (91{,}71 - (124\ \ 124)/177) = 23{,}07$$

В данном случае число степеней свободы $\nu = (k - 1)\ (c - 1) = (10 - 1)\ (2 - 1) = 9$, где k число интервалов разбиения, а c число столбцов В соответствии с таблицей 12 Приложения 1 находим

$$\chi^2_{кр} = \begin{cases} 16{,}92 \text{ для } P \le 0{,}05 \\ 21{,}66 \text{ для } P \le 0{,}01 \end{cases}$$

Строим «ось значимости»



Полученная величина эмпирического значения хи-квадрат попала в зону значимости Иными словами, следует принять гипотезу H_1 о том, что распределения уровнеи интеллекта в двух неравных по численности выборках статистически значимо отличаются между собой

8.1.3. Использование критерия хи-квадрат для сравнения показателей внутри одной выборки

Критерии *хи*-квадрат может быть применен и для выявления сходства или различия внутри однои, но численно достаточно большой выборки. В этом случае вычленяются показатели (а их может быть два и больше), по которым и осуществляется сравнение. Этот аспект применения критерия *хи*-квадрат сближает его с коэффициентом корреляции, который также находит степень связи между двумя или большим числом признаков. Различие между этими двумя методами прежде всего в том, что для подсчета коэффициента корреляции необходимо знать все величины сравниваемых признаков, а для использования критерия *хи*-квадрат важно знать только уровни (градации) сравниваемых признаков.

При сравнении показателей с помощью критерия *хи*-квадрат нулевая гипотеза H_0 звучит так: сравниваемые признаки не влияют друг на друга. В терминах корреляционных отношений между признаками связи нет, корреляция не отличается от нуля.

Соответственно альтернативная гипотеза H_1 звучит следующим образом: сравниваемые признаки влияют друг на друга. В терминах корреляционных отношений между признаками связь есть, корреляция значимо отличается от нуля.

В этих случаях применение критерия *хи*-квадрат основывается на использовании так называемых многопольных таблиц или, как их еще называют, таблиц сопряженности, т.е. таких таблиц, эмпирические данные в которых представлены размерностью большей чем 2×2.

В этом случае расчет эмпирического значения критерия *хи*-квадрат может осуществляться по следующим двум формулам:

$$\chi^2_{эмп} = \sum_{i=1}^{k} \frac{d_i^2}{f_{mi}} \qquad (8.10)$$

где d_i — разность между эмпирическими и «теоретическими» частотами,

f_{mi} — есть вычисленная, или «теоретическая» частота.

$$\chi^2_{эмп} = N \left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \frac{C_{ij}^2}{C_i \cdot C_j} - 1 \right) \qquad (8.11)$$

где k — число строк многопольной таблицы,

m — число столбцов многопольной таблицы,

N — общее число значений (элементов) в многопольной таблице, оно всегда является произведением $N = k \cdot m$,

C_{ij} — элементы многопольной таблицы,

C — суммарные значения по строкам многопольной таблицы

C_j — суммарные значения по столбцам многопольной таблицы

Проиллюстрируем все вышесказанное решением примера, взятого с некоторыми модификациями из учебного пособия «Психологическая диагностика» под ред К М Гуревича и М К Акимовой М Изд-во УРАО, 1997 г

Задача 8.11. Влияет ли уровень интеллекта на профессиональные достижения?

Решение. (Первый способ решения по формуле 8 10) Для решения этой задачи 90 человек оценили по степени их профессиональных достижений и по уровню интеллекта При разбиении на уровни (градации признака) по обоим признакам было взято три уровня Для показателя профессиональных достижений были получены следующие частоты признака 20 человек с высоким уровнем профессиональных достижений, 40 со средним и 30 с низким Первая группа составляет 22,2% выборки, вторая — 44 4% и третья — 33,3% от всей выборки При разбиении по уровню интеллекта было взято три равных по численности группы, в каждой по 30 человек уровень интеллекта ниже среднего, средний и выше среднего В процентах каждая группа составляет 33,3% от всей выборки Все эмпирические данные (частоты) представлены ниже в таблице 8 14

Таблица 8 14

IQ	Оценка профессиональных достижении			Всего
	Ниже среднего	Средняя	Выше среднего	
Ниже среднего	20 *A* (10)	5 *B* (13 3)	5 *C* (6 7)	30
Средний	5 *D* (10)	15 *E* (13 3)	10 *F* (6 7)	30
Выше среднего	5 *G* (10)	20 *H* (13 3)	5 *J* (6 7)	30
Итого	30	40	20	90

Для удобства каждая ячейка таблицы обозначена соответствующей латинской буквой A, B C и т д Таблица 8 14 устроена следующим образом в ячейку, обозначенную символом A, заносятся эмпирические частоты (или число) тех испытуемых, которые одновременно обладают следующей характеристикой ниже среднего по уровню профессиональных достижений и ниже среднего по интеллекту Таких испытуемых (эмпирических частот) оказалось 20 В ячейку, обозначаемую символом B, заносятся эмпирические частоты (или число) тех испытуемых, которые одновременно обладают характеристикой средние по уровню профессиональных достижений и ниже среднего по интеллекту Таких испытуемых (эмпирических частот) оказалось 5 В ячейку, обозначенную символом C, заносятся эмпирические частоты (или число) тех испытуемых, которые одновременно обладают характеристикой выше среднего по уровню професcионвльных достижений и ниже среднего по интеллекту Таких испытуемых (эмпирических частот) оказалось также 5 Заметим, что $20 + 5 + 5 = 30$, т е числу испытуемых, имеющих уровень интеллекта ниже среднего Подобные «разбиения» были проделаны для каждой ячейки таблицы 8 14 Подчеркнем, что в круглых скобках в каждой ячейке таблицы представлены вычисленные для этой ячеики «теоретические» частоты

Покажем, как для каждои ячеики таблицы 8 14 найти соответствующую «теоретическую» частоту Это делается следующим образом Для каждого столбца таблицы подсчитываются так называемые «частости» в процентах

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{30}{90}\right)\ 100\% = 33{,}3\% \\ &\left(\frac{40}{90}\right)\ 100\% = 44{,}4\% \\ &\left(\frac{20}{90}\right)\ 100\% = 22{,}2\% \end{aligned}\right\} \text{— частости}$$

Полученные величины «частостей» дают возможность подсчитать «теоретические» частоты для каждой ячейки таблицы 8 14 Они служат основой для подсчета «гипотетических» (а по сути теоретических) частот т е таких частот, которые при заданном соотношении экспериментальных данных должны были бы быть расположены в соответствующих ячейках таблицы 8 14 (Вспомним решение задачи 8 5)

Согласно этому положению «теоретическая» частота для ячейки А подсчитывается следующим образом 30 человек имеют уровень интеллекта ниже среднего, поэтому 33,3% от этого числа должны были бы попасть в группу с профессиональными достижениями ниже среднего уровня Находим эту «гипотетическую» величину так $\frac{30\ 33{,}3\%}{100\%} = 9{,}99 \approx 10$

Аналогично «теоретическая» частота для ячейки *D* считается следующим образом 30 человек имеют средний уровень интеллекта, поэтому 33,3% от этого числа должны были бы попасть в группу с профессиональными достижениями среднего уровня Находим эту «гипотетическую» величину так $\frac{30\ 33{,}3\%}{100\%} = 9{,}99 \approx 10$

Аналогично «теоретическая» частота для ячейки *G* считается следующим образом 30 человек имеют высокий уровень интеллекта, поэтому 33,3% от этого числа должны были бы попасть в группу с профессиональными достижениями выше среднего уровня Находим эту «гипотетическую» величину так $\frac{30\ 33{,}3\%}{100\%} =$
$= 9{,}99 \approx 10$

Рассмотрим, как производится подсчет для ячейки *В* 30 человек имеют низкий уровень интеллекта, поэтому 44,4% от этого числа должны были бы попасть в группу с профессиональными достижениями среднего уровня Находим эту «гипотетическую» величину так $\frac{30\ 44{,}4\%}{100\%} = 13{,}3$

Аналогично производится подсчет для ячейки *Е* 30 человек имеют средний уровень интеллекта, поэтому 44,4% от этого числа должны были бы попасть в группу с профессиональными достижениями среднего уровня Находим эту «гипотетическую» величину так $\frac{30\ 44{,}4\%}{100\%} = 13{,}3$

Аналогично производится подсчет для ячейки H 30 человек имеют уровень интеллекта выше среднего, поэтому 44,4% от этого числа должны были бы попасть в группу с профессиональными достижениями среднего уровня Находим эту «гипотетическую» величину так $\frac{30 \cdot 44{,}4\%}{100\%} = 13{,}3$

Рассмотрим, наконец, как производится подсчет для ячейки C 30 человек имеют низкий уровень интеллекта, поэтому 22,2% от этого числа должны были бы попасть в группу с профессиональными достижениями выше среднего уровня Находим эту «гипотетическую» величину так $\frac{30 \cdot 22{,}2\%}{100\%} = 6{,}7$

Расчет «теоретических гипотетических» частот для оставшихся ячеек проведите самостоятельно

Проверим правильность расчета «теоретических» частот для всех столбцов таблицы 8 14 $10 + 10 + 10 = 30$, $13{,}3 + 13{,}3 + 13{,}3 = 39{,}9 \approx 40$, $6{,}7 + 6{,}7 + 6{,}7 = 20{,}1 \approx 20$

Теперь все готово для использования формулы (8 1)

$$\chi^2_{эмп} = \frac{(20-10)^2}{10} + \frac{(5-13{,}3)^2}{13{,}3} + \frac{(5-6{,}7)^2}{6{,}7} + \frac{(5-10)^2}{10} + \frac{(15-13{,}3)^2}{13{,}3} +$$

$$+ \frac{(10-6{,}7)^2}{6{,}7} + \frac{(5-10)^2}{10} + \frac{(20-13{,}3)^2}{13{,}3} + \frac{(5-6{,}7)^2}{6{,}7} = 26{,}5$$

Для проверки правильности расчета «теоретических» частот в случае сравнения двух эмпирических наблюдений (см раздел 8 2) или для сравнения показателей внутри одной выборки может использоваться следующая формула (8 12)

$$fm = \frac{\left(\begin{array}{c}\text{Сумма частот}\\ \text{по соответствующей строке}\end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c}\text{Сумма частот}\\ \text{по соответствующему столбцу}\end{array}\right)}{\left(\text{Общее количество наблюдений}\right)} \qquad (8.12)$$

Проверим по этой формуле правильность наших расчетов:

$$f_m \text{ для ячейки } A - 30 \cdot \frac{30}{90} = 10{,}0$$

f_m для ячейки B — $30 \cdot \frac{40}{90} = 13,3$

f_m для ячейки C — $30 \cdot \frac{20}{90} = 6,7$

f_m для ячейки D — $30 \cdot \frac{30}{90} = 10,0$

f_m для ячейки E — $30 \cdot \frac{40}{90} = 13,3$

f_m для ячейки F — $30 \cdot \frac{20}{90} = 6,7$

f_m для ячейки G — $30 \cdot \frac{30}{90} = 10,0$

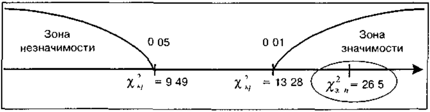
f_m для ячейки H — $30 \cdot \frac{40}{90} = 13,3$

f_m для ячейки J — $30 \cdot \frac{20}{90} = 6,7$

Число степеней свободы подсчитаем по знакомой формуле $\nu = (k-1)\cdot(c-1) = (3-1)\cdot(3-1) = 4$ где k число строк, а c — число столбцов и в соответствии с таблицей 12 Приложения 1 находим

$$\chi^2_{кр} = \begin{cases} 9,49 \text{ для } P \le 0,05 \\ 13,28 \text{ для } P \le 0,01 \end{cases}$$

Строим «ось значимости»



Полученные эмпирическая величина критерия *хи*-квадрат попала в зону значимости Иными словами, следует принять гипотезу H_1 о том, что уровень интеллекта влияет на успешность профессиональной деятельности

Решение. (Второй способ решения по формуле 8 11)

Подставим данные таблицы 8 14 в формулу (8 11) получим:

$$\chi^2_{эмп}=90\left\{\frac{1}{30}\left(\frac{20^2}{30}+\frac{5^2}{40}+\frac{5^2}{20}\right)+\frac{1}{30}\left(\frac{5^2}{30}+\frac{15^2}{40}+\frac{10^2}{20}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{30}\left(\frac{5^2}{30}+\frac{20^2}{40}+\frac{5^2}{20}\right)-1\right\}=90\left\{\frac{1}{2}+\frac{13}{24}+\frac{1}{4}-1\right\}=26{,}5$$

Как и следовало ожидать, эмпирическое значение *хи*-квадрат получено то же самое, что и при первом способе решения Все дальнейшие операции уже проделаны выше при первом способе решения данной задачи, поэтому не будем их повторять Безусловно, что второй способ существенно проще первого, однако, при расчетах по формуле (8 11) можно легко допустить ошибки Подчеркнем, что как первый, так и второй способы расчета эмпирического значения *хи*-квадрат позволяют работать с таблицами практически любой размерности 3×4, 4×4, 5×3, 5×6 и т п

Для применения критерия *хи*-квадрат необходимо соблюдать следующие условия:

1 Измерение может быть проведено в любой шкале

2 Выборки должны быть случайными и независимыми

3 Желательно, чтобы объем выборки был ≥ 20 С увеличением объема выборки точность критерия повышается

4 Теоретическая частота для каждого выборочного интервала не должна быть меньше 5

5 Сумма наблюдений по всем интервалам должна быть равна общему количеству наблюдений

6 Таблица критических значении критерия *хи*-квадрат рассчитана для числа степеней свободы ν, которое каждый раз рассчитывается по определенным правилам

[7] В общем случае число степеней свободы определяется по формуле $\nu = c - 1$, где c — число альтернатив (признаков, значений, элементов) в сравниваемых переменных

Для таблиц число степеней свободы определяется по формуле $\nu = (k - 1)\ (c - 1)$, где k — число столбцов, c — число строк

8.2. Критерий Колмогорова—Смирнова

Этот критерий используется для решения тех же задач, что и критерий *хи*-квадрат Иначе говоря, с его помощью можно сравнивать эмпирическое распределение с теоретическим или два эмпирических распределения друг с другом Однако если при применении *хи*-квадрат мы сопоставляем частоты двух распределений, то в данном критерии сравниваются накопленные (кумулятивные) частоты по каждому разряду (альтернативе) При этом если разность накопленных частот в двух распределениях оказывается большой, то различия между двумя распределениями являются существенными

Задача 8.12. Предположим, что в эксперименте психологу необходимо использовать шестигранный игральный кубик с цифрами на гранях от 1 до 6 Для чистоты эксперимента необходимо получить «идеальный» кубик, т е такой, чтобы при достаточно большом числе подбрасываний, каждая его грань выпадала бы примерно равное число раз Задача состоит в выяснении того, будет ли данный кубик близок к идеальному?

Решение. Подбросим кубик 120 раз и сравним полученное эмпирическое распределение с теоретическим Поскольку теоретическое распределение является равновероятным, то соответствующие теоретические частоты равны 20 Распределение эмпирических и теоретических частот представим совместно в таблице 8 15

Таблица 8 15

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7
Грани	1	2	3	4	5	6
B — частоты эмпирические	18	23	15	21	25	18
E частоты теоретические	20	20	20	20	20	20

Для подсчета по критерию Колмогорова—Смирнова необхо имо провести ряд преобразований с данными таблицы 8 15 Представим эти преобразования в таблице 8 16 и объясним их получение

Таблица 8 16

FE	20	40	60	80	100	120
FB	15	33	51	72	95	120
$\|FE \quad FB\|$	5	7	9	8	5	0

Символом *FE* в таблице 8 16 будем обозначать накопленные теоретические частоты В таблице они получаются следующим образом к первой теоретической частоте 20, добавляется вторая частота, также равная 20, получается число 20 + 20 = 40 Число 40 ставится на место второй частоты Затем к числу 40 прибавляется следующая теоретическая частота, полученная величина 60 — ставится на место третьей теоретической частоты и так далее

Символом *FB* в таблице 8 16 обозначаются накопленные эмпирические частоты Для их подсчета необходимо расположить эмпирические частоты по возрастанию 15, 18, 18, 21, 23, 25 и затем по порядку сложить Так, вначале стоит первая частота равная 15, к ней прибавляется вторая по величине частота и полученная сумма 15 + 18 = 33 ставится на место второй частоты, затем к 33 добавляется 18 (33 + 18 = 51), полученное число 51 ставится на место третьей частоты и т д

Символом $|FE - FB|$ в таблице 8 16 обозначаются абсолютные величины разности между теоретической и эмпирической частотой по каждому столбцу отдельно

Эмпирическую величину этого критерия которая обозначается как $D_{эмп}$ получают используя формулу (8 13)

$$D_{эмп} = \frac{\max|FE - FB|}{n} \qquad (8.13)$$

Для ее получения среди чисел $|FE - FB|$ находят максимальное число (в нашем случае оно равно 9) и делят его на объем выборки n. В нашем случае $n = 120$, поэтому $D_{эмп} = \frac{9}{120} = 0{,}075$

Для этого критерия таблица с критическими значениями дана в Приложении 1 под № 13. Из таблицы 13 Приложения 1 следует, однако, что в том случае, если число элементов выборке больше 100, то величины критических значений вычисляются по формуле (8.14)

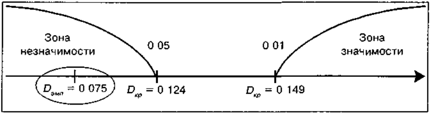
$$D_{кр} = \begin{cases} 1{,}36/\sqrt{n} \\ 1{,}63/\sqrt{n} \end{cases} \qquad (8.14)$$

Иными словами, вместо привычных табличных значений вычисляются величины $D_{кр}$ подстановкой величины объема выборки вместо символа n.

В нашем случае $n = 120$, поэтому $D_{кр}$ для 0,05 равно $\frac{1{,}36}{\sqrt{120}} = 0{,}124$, и $D_{кр}$ для 0,01 равно $\frac{1{,}63}{\sqrt{120}} = 0{,}149$, или в привычной форме записи

$$D_{кр} = \begin{cases} 0{,}124 \text{ для } P \le 0{,}05 \\ 0{,}149 \text{ для } P \le 0{,}01 \end{cases}$$

Строим «ось значимости»



В нашем случае $D_{эмп}$ оказалось равным 0,075, что гораздо меньше 0,124, иначе говоря, эмпирическое значение критерия

Колмогорова—Смирнова попало в зону незначимости Таким образом, гипотеза H_1 отклоняется и принимается гипотеза H_0 о том что теоретическое и эмпирическое распределения не отличаются между собои Следовательно можно с уверенностью утверждать, что наш игральный кубик «безупречен»

Приведем еше один пример решения задачи сравнения эмпирического распределения с теоретическим при помощи критерия Колмогорова—Смирнова

Задача 8.13 В выборке из здоровых лиц мужского пола, студентов технических и военно-технических вузов в возрасте от 19-ти до 22 лет, среднии возраст 20 лет, проводился тест Люшера в 8-цветном варианте Установлено, что желтыи цвет предпочитается испытуемыми чаще, чем отвергается Можно ли утверждать, что распределение желтого цвета по 8-ми позициям у здоровых испытуемых отличается от равномерного распределения? (Пример взят из книги Е В Сидоренко, (30) Ниже приведено решение этого примера с использованием вышеприведенного способа, а не способом, приведенным в работе Е В Сидоренко)

Решение. Представим экспериментальные данные сразу в виде таблицы 8 17

Таблица 8 17

Градации цвета	1	2	3	4	5	6	7	8
В – эмпирические частоты	24	15	13	8	15	10	9	8
Е – теоретические частоты	14	14	14	14	14	14	14	14

Сумма эмпирических частот этого примера равна 112 При подсчете теоретических частот мы исходим из предположения об их равенстве, следовательно $\frac{112}{8} = 14$

Упорядочим эмпирические частоты

8 8 9 10 13 15 24 25

Рассчитаем соответствующую кумулятивную таблицу

Таблица 8 18

FE	14	28	42	56	70	84	98	112
FB	8	16	25	35	48	63	87	112
$\lvert FE - FB \rvert$	6	12	17	21	22	21	11	0

В первой строчке таблицы 8 18, обозначенной символом *FE*, накопленные теоретические частоты получены так первая частота — 14, вторая частота — 14 + 14 = 28, третья частота — 28 + 14 = 42 и т д

Во второй строчке таблицы 8 18, обозначенной символом *FB*, накопленные эмпирические частоты получены так первая частота 8, вторая 8 + 8 = 16, третья — 16 + 9 = 25, четвертая 25 + 10 = 35 и т д

При n = 112 по формуле (8 13) находим

$$D_{эмп} = \frac{\max \lvert FE - FB \rvert}{n} = \frac{22}{112} = 0\,196$$

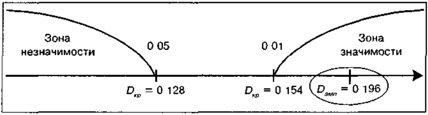
В нашем случае n = 112, поэтому по формуле (8 14) находим

$$\frac{1{,}36}{\sqrt{112}} = 0{,}128 \text{ и } \frac{1{,}63}{\sqrt{112}} = 0{,}154$$

В привычной форме записи величины критическнх значений выглядят так

$$D_{кр} = \begin{cases} 0{,}128 \text{ для } P \leq 0{,}05 \\ 0{,}154 \text{ для } P \leq 0{,}01 \end{cases}$$

Строим «ось значимости»



Полученная величина $D_{эмп}$ показывает, что эмпирическое распределение на высоком уровне значимости отличается от теоретического равномерного распределения Гипотеза H_0 отвергается Следовательно, распределение желтого цвета отличается от равномерного по восьми позициям

Отметим, что критерий Колмогорова—Смирнова позволяет сравнивать между собой два эмпирических распределения Однако проведение такого расчета оказывается достаточно сложным Поэтому в настоящем пособии способ сравнения двух эмпирических распределений с использованием критерия Колмогорова—Смирнова рассматриваться не будет, тем более что принцип сравнения двух эмпирических распределение подробно изложен выше при анализе работы с критерием *хи*-квадрат (см раздел 8 2)

Для применения критерия Колмогорова—Смирнова необходимо соблюдать следующие условия:

1 Измерение может быть проведено шкале интервалов и отношений

2 Выборки должны быть случайными и независимыми

3 Желательно, чтобы суммарный объем двух выборок ≥ 50 С увеличением объема выборки точность критерия повышается

4 Эмпирические данные должны допускать возможность упорядочения по возрастанию или убыванию какого-либо признака и обязательно отражать какое-то его однонаправленное изменение В том случае, если трудно соблюсти принцип упорядоченности признака, лучше использовать критерий *хи*-квадрат

8.3. Критерий Фишера — φ

Критерий Фишера предназначен для сопоставления двух рядов выборочных значений по частоте встречаемости какого-либо признака Этот критерий можно применять для оценки различий в любых двух выборках зависимых или независимых С его помощью можно сравнивать показатели одной и той же выборки, измеренные в разных условиях

8.3.1. Сравнение двух выборок по качественно определенному признаку

Задача 8.14. Психолог провел эксперимент, в котором выяснилось, что из 23 учащихся математической спецшколы 15 справились с заданием, а из 28 обычной школы с тем же заданием справились 11 человек. Можно ли считать, что различия в успешности решения заданий учащимися спецшколы и обычной школы достоверны?

Решение. Для решения этой задачи с помощью критерия Фишера показатели успешности выполнения заданий необходимо перевести в проценты. В процентах это составит

$$\frac{15}{23} \cdot 100\% = 65{,}2\% \text{ для спецшколы}$$

$$\frac{15}{23} \cdot 100\% = 39{,}3\% \text{ для обычной школы}$$

По таблице 14 Приложения 1 находим величины φ1 и φ2 — соответствующие процентным долям в каждой группе. Так для 65,2% согласно таблице соответствующая величина φ1 = 1,880, а для 39,3% величина φ2 = 1,355.

Эмпирическое значение $\varphi_{эмп}$ подсчитывается по формуле

$$\varphi_{эмп} = (\varphi 1 - \varphi 2) \cdot \sqrt{\frac{n1 \cdot n2}{n1 + n2}} \qquad (8.15)$$

φ1 — величина, взятая из таблицы 14 Приложения 1, соответствующая большей процентной доле,

φ2 — величина, взятая из таблицы 14 Приложения 1, соответствующая меньшей процентной доле,

$n1$ — количество наблюдений в выборке 1,

$n2$ — количество наблюдений в выборке 2.

В нашем случае

$$\varphi_{эмп} = (1{,}880 - 1{,}355) \cdot \sqrt{\frac{23 \cdot 28}{23 + 28}} = 1{,}86$$

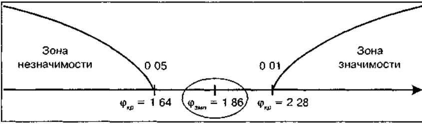
По таблице 15 Приложения 1 определяем, какому уровню значимости соответствует $\varphi_{эмп} = 1{,}86$

С таблицей 15 Приложения 1 работают следующим образом находят внутри ее число равное вычисленному $\varphi_{эмп}$ и смотрят между какими уровнями значимости (с учетом тысячной доли) оно находится Первый левый столбец таблицы 15 Приложения 1 соответствует уровням значимости от 0,00 (самое верхнее значение) до 010 (самое нижнее значение) Верхняя строчка таблицы — соответствует тысячной доле уровня значимости Итак, находим наше число, равное 1,86 внутри таблицы 15 — оно находится на пересечении строчки, соответствующей уровню значимости 0,03 и столбца, обозначенного цифрой 1 Следовательно уровень значимости $\varphi_{эмп} = 1{,}86$ равен $0{,}03 + 0{,}001 = 0{,}031$

Следует подчеркнуть, однако, что поскольку критические значения для 5% и 1% уровней значимости имеют фиксированную величину и составляют соответственно для 5% $\varphi_{кр} = 1{,}64$, а для 1% $\varphi_{кр} = 2{,}28$, то таблица 15 Приложения 1 практически не нужна Поскольку вышеозначенными величинами критических уровней можно пользоваться всегда В привычной форме записи это выглядит так

$$\varphi_{кр} = \begin{cases} 1{,}64 \text{ для } P \le 0{,}05 \\ 2{,}28 \text{ для } P \le 0{,}01 \end{cases}$$

Строим «ось значимости»



Поскольку мы попали в зону неопределенности, то в терминах статистических гипотез в данном примере можно принять гипотезу H_1 на 5% уровне значимости и отклонить ее на 1% уровне значимости Иными словами, на 5% уровне значимости можно говорить о различии между успешностью в решении задании учениками сравниваемых школ, а на уровне в 1% — этого утверждать нельзя

8.3.2. Сравнение двух выборок по количественно определенному признаку

Критерий Фишера с равным успехом может использоваться и при сравнении распределений количественных признаков

Задача 8.15. Будет ли уровень тревожности у подростков-сирот более высоким, чем у их сверстников из полных семей? Для решения этой задачи психолог проводил анализ выраженности уровня тревожности в группе сирот и в группе детей из полных семей при помощи опросника Тейлора 40 баллов и выше рассматривались как показатель очень высокого уровня тревоги (Практическая психодиагностика Методики и тесты — Изд-во БАХРАХ-М 2000 С 64)

Решение. В первой группе из 10 человек очень высокий уровень тревожности наблюдался у 7 испытуемых (70%), во второй группе из 13 человек он был обнаружен у 3 испытуемых (23,1%) Проверим, можно ли считать подобные различия статистически значимыми?

По таблице 14 Приложения 1 определяем величины $\varphi1$ и $\varphi2$ для первой и второй группы

$\varphi1 = 1{,}982$ для 70% и $\varphi2 = 1{,}003$ для 23 1%

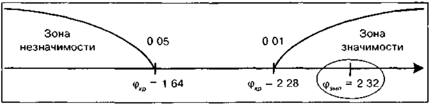
Подсчитываем $\varphi_{эмп}$ по формуле (8 14)

$$\varphi_{эмп} = (1{,}982 - 1{,}003)\sqrt{\frac{10 \cdot 13}{10+13}} = 2{,}32$$

Напомним, что критические величины для этого критерия таковы:

$$\varphi_{кр} = \begin{cases} 1{,}64 \text{ для } P \le 0{,}05 \\ 2{,}28 \text{ для } P \le 0{,}01 \end{cases}$$

Строим «ось значимости»



Полученная величина $\varphi_{эмп}$ превышает соответствующее критическое значение для уровня в 1%, следовательно различия между группами значимы на 1% уровне Иными словами в первой группе измеряемый признак выражен в существенно большей степени, чем во второй

Т е подростки сироты более тревожны, чем дети из полных семей Обратите внимание, что для получения подобного вывода понадобилась очень малая выборка испытуемых

В терминах статистических гипотез можно утверждать, что нулевая гипотеза H_0 отклоняется и на высоком уровне значимости принимается гипотеза H_1 о различиях

Для применения критерия Фишера φ необходимо соблюдать следующие условия

1 Измерение может быть проведено в любой шкале

2 Характеристики выборок могут быть любыми

3 Нижняя граница — в одной из выборок может быть только 2 наблюдения, при этом во второй должно быть не менее 30 наблюдений Верхняя граница не определена

4 Нижние границы двух выборок должны содержать не меньше 5 элементов (наблюдений) в каждой

Глава 9

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ РАЗЛИЧИЯ

Критерии носят название «параметрические», потому что в формулу их расчета включаются такие параметры выборки, как среднее, дисперсия и др Как правило, в психологических исследованиях чаще всего применяются два параметрических критерия — это t-критерий Стьюдента, который оценивает различия средних для двух выборок и F — критерий Фишера, оценивающий различия между двумя дисперсиями

9.1. t-критерий Стьюдента

Критерий t Стьюдента направлен на оценку различий величин средних $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ двух выборок X и Y, которые распределены по нормальному закону Одним из главных достоинств критерия является широта его применения Он может быть использован для сопоставления средних у связных и несвязных выборок, причем выборки могут быть не равны по величине

9.1.1. Случай несвязных выборок

В общем случае формула для расчета по t-критерию Стьюдента такова

$$t_{эмп} = \frac{|\overline{X} - \overline{Y}|}{Sd} \qquad (9\ 1)$$

где $$Sd = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} \qquad (9.2)$$

Рассмотрим сначала равночисленные выборки. В этом случае $n1 = n2 = n$, тогда выражение (9.2) будет вычисляться следующим образом

$$Sd = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2 + \sum(y_i - \bar{y})^2}{(n-1) \cdot n}} \qquad (9.3)$$

В случае неравночисленных выборок $n1 \neq n2$, выражение (9.2) будет вычисляться следующим образом

$$Sd = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2 + \sum(y_i - \bar{y})^2}{(n1 + n2 - 2)} \cdot \frac{(n1 + n2)}{(n1 \cdot n2)}} \qquad (9.4)$$

В обоих случаях подсчет числа степеней свободы осуществляется по формуле

$$k = (n1 - 1) + (n2 - 1) = n1 + n2 - 2 \qquad (9.5)$$

где $n1$ и $n2$ соответственно величины первой и второй выборки.

Понятно, что при численном равенстве выборок $k = 2 \cdot n - 2$.

Рассмотрим пример использования t-критерия Стьюдента для несвязных и неравных по численности выборок.

Задача 9.1. Психолог измерял время сложной сенсомоторной реакции выбора (в мс) в контрольной и экспериментальной группах. В экспериментальную группу *(X)* входили 9 спортсменов высокой квалификации. Контрольной группой *(Y)* являлись 8 человек, активно не занимающиеся спортом. Психолог проверяет гипотезу о том, что средняя скорость сложной сенсомоторной реакции выбора у спортсменов выше, чем эта же величина у людей, не занимающихся спортом.

Решение. Результаты эксперимента представим в виде таблицы 9.1, в которой произведем ряд необходимых расчетов.

Таблица 91

№	Группы		Отклонения от среднего		Квадраты отклонений	
	X	Y	$\sum(x_i-\bar{x})$	$\sum(y_i-\bar{y})$	$\sum(x_i-\bar{x})^2$	$\sum(y_i-\bar{y})^2$
1	504	580	– 22	– 58	484	3368
2	560	692	34	54	1156	2916
3	420	700	- 106	62	11236	3844
4	600	621	74	- 17	5476	289
5	580	640	54	– 2	2916	4
6	530	561	4	- 77	16	5929
7	490	680	- 36	42	1296	1764
8	580	630	54	- 8	2916	64
9	470	—	- 56	—	3136	—
Сумма	4734	5104	0	0	28632	18174
Среднее	526	638				

Средние арифметические составляют в экспериментальной группе $\frac{4734}{9}=526$, в контрольной группе $\frac{5104}{8}=638$.

Разница по абсолютной величине между средними

$$|\bar{X}-\bar{Y}| = 526 - 638 = 112.$$

Подсчет выражения 9.4 дает.

$$Sd=\sqrt{\frac{27632+18174}{9+8-2}\ \frac{9+8}{9\ 8}}=\sqrt{736,8}=27,14$$

Тогда значение $t_{эмп}$, вычисляемое по формуле (9.1), таково:

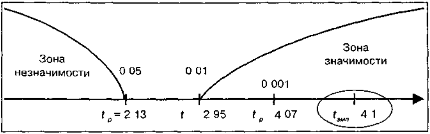
$$t_{эмп}=\frac{112}{27,14}=4,1$$

Число степеней свободы $k = 9 + 8 - 2 = 15$

По таблице 16 Приложения 1 для данного числа степеней свободы находим

$$t_{кр} = \begin{cases} 2\ 13 \text{ для } P \le 0\ 05 \\ 2\ 95 \text{ для } P < 0\ 01 \\ 4\ 07 \text{ для } P \le 0\ 001 \end{cases}$$

Строим ось значимости»



Таким образом обнаруженные психологом различия между экспериментальнои и контрольнои группами значимы более чем на 0 1% уровне или иначе говоря средняя скорость сложной сенсомоторнои реакции выбора в группе спортсменов существенно выше чем в группе людеи активно не заннмающихся спортом

В терминах статистических гипотез это утверждение звучит так гипотеза H о сходстве отклоняется и на 0 1% уровне значимости принимается альтернативная гипотеза H — о различии между экспериментальнои и контрольными группами

9 1.2 Случай связных выборок

В случае связанных выборок с равным числом измерении в каждои можно использовать более простую формулу t критерия Стьюдента

Вычисление значения t осуществляется по формуле

$$t = \frac{\bar{d}}{Sd} \qquad (9\ 6)$$

где

$$\bar{d} = \frac{\sum d}{n} = \frac{\sum (x - y)}{n} \qquad (9\ 7)$$

где $d = x - y$ — разности между соответствующими значениями переменнои X и переменнои Y а d среднее этих разностеи

В свою очередь Sd вычисляется по следующеи формуле

$$Sd \quad \sqrt{\frac{\sum d \quad \frac{\left(\sum d\right)^2}{n}}{n\,(n-1)}} \tag{9 8}$$

Число степенеи свободы к определяется по формуле $k = n - 1$

Рассмотрим пример использования t критерия Стьюдента для связных и очевидно равных по численности выборок

Задача 9 2 Психолог предположил что в результате научения время решения эквивалентных задач «игры в 5» (т е имеющих один и тот же алгоритм решения) будет значимо уменьшаться Для проверки гипо тезы у восьми испытуемых сравнивалось время решения (в минутах) первои и третьей задач

Решение Решение задачи представим в виде таблицы 9 2

Таблица 92

№ испыт	1 задача	3 задача	$\bar{d}$	d^2
1	4 0	3 0	1 0	1 0
2	3 5	3 0	0 5	0 25
3	4 1	3 8	0 3	0 09
4	5 5	2 1	3 4	11 56
5	4 6	4 9	0 3	0 09
6	6 0	5 3	0 7	0 49
7	5 1	3 1	2 0	4 00
8	4 3	2 7	1 6	2 56
Суммы	37 1	27 9	9 2	20 04

Вначале произведем расчет по формуле (9 7)

$$\bar{d} - \frac{\sum(x - y)}{n} = \frac{9\ 2}{8} \sim 1\ 15$$

Затем применим формулу (9 8), получим

$$Sd = \sqrt{\frac{20{,}04 - (9{,}2\ 9{,}2)/8}{8\ (8-1)}} = 0{,}41$$

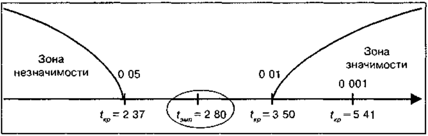
И, наконец, следует применить формулу (9 6) Получим

$$t_{эмп} = \frac{1{,}15}{0{,}41} = 2{,}80$$

Число степеней свободы $k = 8 - 1 = 7$ и по таблице 16 Приложения 1 находим $t_{кр}$

$$t_{кр} = \begin{cases} 2{,}37 \text{ для } P \leq 0{,}05 \\ 3{,}50 \text{ для } P \leq 0{,}01 \\ 5{,}41 \text{ для } P \leq 0{,}001 \end{cases}$$

Строим «ось значимости»



Таким образом, на 5% уровне значимости первоначальное предположение подтвердилось, действительно, среднее время решения третьей задачи существенно меньше среднего времени решения первой задачи В терминах статистических гипотез полученный результат будет звучать так на 5% уровне гипотеза H_0 отклоняется и принимается гипотеза H_1 — о различиях

Для применения t-критерия Стьюдента необходимо соблюдать следующие условия:

1 Измерение может быть проведено в шкале интервалов и отношений

2 Сравниваемые выборки должны быть распределены по нормальному закону

9.2. F — критерий Фишера

Критерии Фишера позволяет сравнивать величины выбороч ных дисперсии двух рядов наблюдении Для вычисления $F_{эмп}$ нуж но наити отношение дисперсии двух выборок причем так что бы большая по величине дисперсия находилась бы в числителе а меньшая знаменателе Формула вычисления по критерию Фи шера F такова

$$F_{эм} \quad \frac{S^2}{S^2} \qquad (9\ 9)$$

Где

$$S^2 - \left(\frac{1}{n1}\right) \sum (x \quad \bar{x})^2 \qquad (9\ 10)$$

$$S^2 \quad \left(\frac{1}{n2}\right) \sum (y \quad \bar{y})^2 \qquad (9\ 11)$$

Поскольку согласно условию критерия величина числителя должна быть больше или равна величине знаменателя то значе ние $F_{э}$ всегда будет больше или равно единице т е $F_{э} \geq 1$ Чис ло степеней свободы определяется также просто $df_1 = n1 - 1$ для первой (т е для той выборки величина дисперсии которои боль ше) и $df_2 - n2 \quad 1$ для второи выборки В таблице 17 Приложе ния 1 критические значения критерия Фишера $F_{кр}$ находятся по величинам df_1 (верхняя строчка таблицы) и df_2 (левыи столбец таблицы)

Задача 9 3 В двух третьих классах проводилось тестирование умственного развития по тесту ТУРМШ десяти учащихся Полученные значения величин средних достоверно не различались однако психолога интересует вопрос — есть ли различия в степени однородности показателеи умственного развития между классами

Решение Для критерия Фишера необходимо сравнить дис персии тестовых оценок в обоих классах Резуль таты тестирования представлены в таблице

Таблица 9.3

№№ учащихся п/п	Первый класс X	Второй класс Y	№№ учащихся п/п	Первый класс X	Второй класс Y
1	90	41	6	53	65
2	29	49	7	34	63
3	39	56	8	40	87
4	79	64	9	75	77
5	88	72	10	79	62
Суммы				606	636
Среднее				60,6	63 6

Как видно из таблицы 9.3, величины средних в обеих группах практически совпадают между собой 60,6 ≈ 63,6 и величнна t-критерия Стьюдента оказалась равной 0,347 и незначимой.

Рассчитав дисперсии для переменных X и Y, получаем

$$S^2_x = 572{,}83$$
$$S^2_y = 174{,}04$$

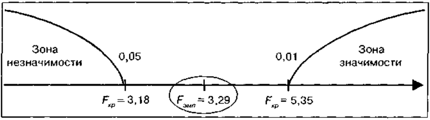
Тогда по формуле (9.9) для расчета по F критерию Фишера находим:

$$F_{эмп} = \frac{572{,}83}{174{,}04} = 3{,}29$$

По таблице 17 Приложения 1 для F критерия при степенях свободы в обоих случаях равных $df = 10 - 1 = 9$ находим $F_{кр}$.

$$F_{кр} = \begin{cases} 3{,}18 \text{ для } P \leq 0{,}05 \\ 5{,}35 \text{ для } P \leq 0{,}01 \end{cases}$$

Строим «ось значимости».



Таким образом, полученная величина $F_{эмп}$ попала в зону неопределенности В терминах статистических гипотез можно утверждать, что H_0 (гипотеза о сходстве) может быть отвергнута на уровне 5%, а принимается в этом случае гипотеза H_1 Психолог может утверждать, что по степени однородности такого показателя, как умственное развитие, имеется различие между выборками из двух классов

Для применения критерия *F* Фишера необходимо соблюдать следующие условия:

1 Измерение может быть проведено в шкале интервалов и отношений

2 Сравниваемые выборки должны быть распределены по нормальному закону

Глава 10

ВВЕДЕНИЕ В ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ ANOVA

Дисперсионный анализ предложенный Р Фишером является статистическим методом предназначенным для выявления влияния ряда отдельных факторов на результаты экспериментов Этот метод базируется на предположении о том что если на объект (группу испытуемых) влияет несколько независимых факторов и их влияние складывается то общую дисперсию значении признака характеризующую объект (группу испытуемых) можно разложить на сумму дисперсии возникающих в результате воздействия каждого отдельного фактора а также обусловленных случайными влияниями (остаточная дисперсия) Сравнение дисперсии обусловленных влиянием различных факторов со случаиной (остаточнои) дисперсиеи позволяет оценить значимость вклада каждого из факторов т е оценить достоверность этих влиянии

В основе дисперсионного анализа лежит предположение что одни переменные могут рассматриваться как причины а другие как следствия При этом в психологических исследованиях именно переменные рассматриваемые как причины считаются факторами (независимыми переменными) а вторые переменные рассматриваемые как следствия — результативными признаками (зависимыми переменными) Независимые переменные называют иногда регулируемыми факторами именно потому что в эксперименте психолог имеет возможность варьировать ими и анализировать получающиися результат Таким образом дисперсионныи анализ может выступать как метод направленныи на изучение изменчивости признака под влиянием каких-либо контролируемых факторов Он позволяет выявить взаимодействие двух или большего числа факторов в их влиянии на один и тот же результативный признак (зависимую переменную)

Сущность дисперсионного анализа заключается в расчленении общей дисперсии изучаемого признака на отдельные компоненты, обусловленные влиянием конкретных факторов, и проверке гипотез о значимости влияния этих факторов на исследуемый признак Сравнивая компоненты дисперсии друг с другом посредством F — критерия Фишера, можно определить, какая доля общей вариативности результативного признака обусловлена действием регулируемых факторов

Исходным материалом для дисперсионного анализа служат данные исследования трех и более выборок, которые могут быть как равными, так и неравными по численности, как связными, так и несвязными По количеству выявляемых регулируемых факторов дисперсионный анализ может быть однофакторным (при этом изучается влияние одного фактора на результаты эксперимента), двухфакторным (при изучении влияния двух факторов) и многофакторным

10.1. Однофакторный дисперсионный анализ

В данном учебнике будет рассмотрен только однофакторный дисперсионный анализ, используемый для несвязных выборок Оперируя как основным понятием дисперсии, этот анализ базируется на расчете дисперсий трех типов

- общая дисперсия, вычисленная по всей совокупности экспериментальных данных,
- внутригрупповая дисперсия, характеризующая вариативность признака в каждой выборке,
- межгрупповая дисперсия, характеризующая вариативность групповых средних

Основное положение дисперсионного анализа гласит общая дисперсия равна сумме внутригрупповой и межгрупповой дисперсий

Это положение перепишем в виде уравнения 10 1

$$\frac{\sum\sum(x_{ij}-\bar{x})^2}{N-1}=\frac{\sum\sum(x_{ij}-\bar{x}_j)^2}{N-p}+\frac{\sum n_j\,(\bar{x}_j-\bar{x})^2}{p-1} \qquad (10\,1)$$

где x_{ij} — значения всех переменных, полученных в эксперименте, при этом индекс j меняется от 1 до p, где p число сравниваемых выборок, их может быть три и больше, индекс i соответствует числу элементов в выборке (их может быть два и больше),

$\bar{x}$ — общая средняя всей анализируемой совокупности данных,

$\bar{x}_j$ — средняя j выборки,

N — общее число всех элементов в анализируемой совокупности экспериментальных данных,

p — число экспериментальных выборок

Проанализируем уравнение 10 1 более подробно

Пусть у нас имеется p групп (выборок) В дисперсионном анализе каждую выборку представляют в виде одного столбца (или строки) чисел Тогда, для того чтобы можно было указать на конкретную группу (выборку), вводится индекс j, который меняется соответственно от $j = 1$ до $j = p$ Например, если у нас 5 групп (выборок), то $p = 5$, а индекс j меняется соответственно от $j = 1$ до $j = 5$

Пусть перед нами стоит задача — указать конкретный элемент (значение измерения) какой-либо выборки Для этого мы должны знать номер этой выборки, например 4, и расположение элемента (измеренного значения) в этой выборке Этот элемент может располагаться в выборке начиная с первого значения (первая строчка) до последнего (последняя строчка) Пусть наш искомый элемент расположен на пятой строчке Тогда его обозначение будет таково x_{54} Это значит, что выбран пятый элемент в строчке из четвертой выборки

В общем случае в каждой группе (выборке) число составляющих ее элементов может быть различным — поэтому обозначим число элементов в j группе (выборке) через n_j Полученные в эксперименте значения признака в j группе обозначим через x_{ij} где $i = 1, 2,$, n_p — порядковый номер наблюдения в j группе

Дальнейшие рассуждения целесообразно проводить с опорой на таблицу 10 1 Подчеркнем, однако, что для удобства дальнейших рассуждений, выборки в этой таблице представлены не как столбцы, а как строчки (что, однако, не принципиально)

Таблица 10 1

Номер Выборки	Полученные значения признака	Число элементов в каждой выборки	Сумма всех элементов выборки	Средняя по выборке
1	$x_{11}\ x_{21}\ x_{n11}$	n_1	$\sum x_1 = T_1$	$\overline{X}_1 = \left(\frac{1}{n_1}\right)\sum x_1$
J	$x_{ij}\ x_{2j}\ x_{nj}$	n_j	$\sum x_{ij} = T_j$	$\overline{Y}_j = \left(\frac{1}{n_j}\right)\sum x_j$
P	$x_{1p}\ x_{2p}\ x_{np,p}$	n_p	$\sum x_p = T_p$	$\overline{X}_p = \left(\frac{1}{n_p}\right)\sum x_p$
Итого		$N = \sum n_j$	$\sum\sum x_{ij} = G$	$\overline{X} = \left(\frac{1}{N}\right)\sum\sum x_j$

В итоговой, последней строке таблицы даны общий объем всей выборки — N, сумма всех полученных значений G и общая средняя всей выборки $\overline{Y}$ Эта общая средняя получена как сумма всех элементов анализируемой совокупности экспериментальных данных, обозначенная выше как G, деленная на число всех элементов N

В крайнем правом столбце таблицы представлены величины средних по всем выборкам Например, в j выборке (строчка таблицы 10 1 обозначенная символом j) величина средней (по всей j выборке) такова $\overline{X}_j = \left(\frac{1}{n_j}\right)\cdot\sum x_{ij}$

Для расчета по методу однофакторного дисперсионного анализа, согласно уравнению 10 1, необходимо определить две дисперсии межгрупповую (дисперсию групповых средних) и внутригрупповую, поскольку общая дисперсия всей выборки является суммой этих дисперсий Считается, что межгрупповая дисперсия обусловлена влиянием изучаемого фактора, а величина внутригрупповой дисперсии рассматривается как случайная

Подчеркнем, однако, что при расчетах по методу однофакторного дисперсионного анализа, вначале подсчитываются не дисперсии, а квадраты отклонений (которые представлены в числителях всех трех членов формулы 10 1) и лишь в заключительной части расчетов они делятся на соответствующие величины для получения дисперсий и их дальнейшего сравнения Таким образом, в терминах квадратов отклонений основное уравнение однофакторного дисперсионного анализа можно переписать так

Общая сумма квадратов отклонений = сумма квадратов отклонений от групповых средних + сумма квадратов отклонений групповых средних от общей средней

Перепишем это положение в виде уравнения 10 2

$$Q_0 = Q_1 + Q_2 \tag{10 2}$$

Где Q_0 — общая сумма квадратов отклонений

Q_1 — сумма квадратов отклонений от групповых средних

Q_2 — сумма квадратов отклонений групповых средних от общеи среднеи

Теперь эти же обозначения представим в виде расчетных формул

$$Q_0 = \sum\sum\left(x_i - \overline{X}\right)^2 \tag{10 3}$$

$$Q_1 = \sum\sum\left(x_i - \overline{X}_j\right)^2 \tag{10 4}$$

$$Q_2 = \sum n_j \left(\overline{X}_j - \overline{X}\right)^2 \tag{10 5}$$

Для получения дисперсии необходимо поделить каждую из этих величин на соответствующую величину степенеи свободы Пусть v_0 — число степеней свободы, учитываемое при расчете общеи дисперсии, v_1 — число степеней свободы, учитываемое при расчете внутригрупповои дисперсии (согласно 10 1 оно равно $(N - p)$) v_2 — число степеней свободы учитываемое при расчете межгрупповой дисперсии (согласно 10 1 оно равно $(p\ \ 1)$)

Тогда $v = v_1 + v_2 = N - p + p\ \ 1 - N - 1$ и вычисление оценок дисперсии будет осуществляться таким образом

$$S = \frac{Q}{N-p} \ (10\ 6) \text{ и } S = \frac{Q}{p\ \ 1} \ (10\ 7)$$

Дисперсия S — характеризует рассеяние внутри групп (случайная вариация признака) эту величину называют также остаточной дисперсией

Дисперсия S — характеризует рассеяние групповых средних (систематическая вариация)

Заключительным этапом дисперсионного анализа является вычисление отношения дисперсии по формуле (10 8) причем межгрупповая дисперсия S всегда находится в числителе а внутригрупповая S (случайная) в знаменателе Оценка уровня значимости статистической гипотезы в дисперсионном анализе осуществляется с помощью F критерия Фишера (таблица 17 Приложения 1) При этом если влияние фактора отсутствует то отношение

$$F \quad \frac{S}{S^2} \tag{10 8}$$

не превзойдет критический предел ($F_ч < F_{кр}$) тогда следует принять нулевую гипотезу H об отсутствии влиянии фактора на экспериментальные данные и напротив если влияние фактора велико то ($F_ч > F_р$) в этом случае необходимо принять альтернативную гипотезу H о наличии влияния фактора на экспериментальные данные

В дисперсионном анализе нулевую гипотезу H можно сформулировать так средние величины анализируемого результативного фактора одинаковы для всех его градации Соответственно альтернативная гипотеза H_1 будет утверждать что средние величины результативного фактора различны для всех его градации

Поскольку для дисперсионного анализа необходимо получить общую сумму квадратов отклонении (обозначаемую как Q) то согласно определению дисперсии необходимо из каждого элемента экспериментальной совокупности данных вычесть общее среднее, полученные величины возвести в квадрат и сложить. Поскольку подобную вычислительную процедуру проделать достаточно сложно, то для вычислений по методу однофакторного дисперсионного анализа используются более простые уравнения.

При этом расчет оценок дисперсий удобно проводить по специальной таблице, получившей название таблицы дисперсионного анализа.

Таблица 10.2

Характер вариации	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Оценка дисперсии
Межгрупповая	$Q_1 = \sum n_j (\bar{X}_j - \bar{X})^2$	$p - 1$	$S_1^2 = \frac{Q_1}{(p-1)}$
Внутригрупповая	$Q_2 = \sum\sum (x_{ij} - \bar{X}_j)^2$	$N - p$	$S_2^2 = \frac{Q_2}{(N-p)}$
Итого	$Q_o = \sum\sum (x_{ij} - \bar{X})^2$	$N - 1$	

При этом величины Q_o, Q_1 и Q_2 можно вычислить по следующим упрощенным формулам (обозначения даны в таблицах 10.1 и 10.2).

$$Q_o = \sum\sum x_{ij}^2 - \frac{G^2}{N} \tag{10.9}$$

$$Q_2 = \sum \frac{T_j^2}{n_j} - \frac{G^2}{N} \tag{10.10}$$

Поскольку

$$Q_1 = Q_o - Q_2 \tag{10.2}$$

$$Q_1 = \sum\sum x_{ij}^2 - \sum \frac{T_j^2}{n_j} \tag{10.11}$$

В качестве примеров использования однофакторного дисперсионного анализа ANOVA для несвязных выборок решим несколько задач.

Задача 10.1. В четырех группах испытуемых, по 17 человек в каждой, проводилось изучение времени реакции на звуковой стимул. Интенсивность стимула составила 40 60, 80 и 100 дБ, причем в каждой группе предъявлялись стимулы только одной интенсивности Проверялась гипотеза о том, что среднее время реакции уменьшается по мере увеличения громкости звука

Теперь переформулируем условия задачи в терминах однофакторного дисперсионного анализа В этой задаче регулируемым фактором (т е тем фактором, который меняет психолог) является сила звука, а ее уровни рассматриваются как градации фактора Таким образом, фактор «сила звука» выступает как независимая переменная, а время реакции как результативный признак, или как зависимая переменная Проверяется гипотеза H_0, согласно которой средние и дисперсии в группах обусловлены случайными влияниями и не зависят от действия регулируемого фактора

Решение. Представим исходные данные для работы с однофакторным дисперсионным анализом в виде таблицы 10 3, в которую внесены некоторые дополнительные расчетные данные

Таблица 10 3

Испытуемые п/п	Группа 1	Группа 2	Группа 3	Группа 4
	40 дБ	60 дБ	80 дБ	100 дБ
1	304	272	202	180
2	268	264	178	160
3	272	256	181	157
4	262	269	183	167
5	283	285	187	180
6	265	247	186	167
7	286	250	190	187
8	257	245	167	156
9	279	251	156	159

Продолжение таблицы 10.3

10	275	261	183	171
11	268	250	167	155
12	254	228	176	158
13	245	257	186	163
14	253	214	192	161
15	235	242	168	157
16	260	222	176	150
17	246	234	192	158
$\sum x$ – сумма по столбцам	4512	4247	3070	2786
$\bar{X}$ – среднее по столбцам	265	250	181	164
$\sum x^2$ – сумма квадратов каждого элемента по столбцам	1 202 208	1 066 391	556 506	458 246

Вычисления по методу однофакторного дисперсионного анализа достаточно трудоемки и требуют пристального внимания, во избежание возможных ошибок.

Алгоритм вычислений по методу однофакторного дисперсионного анализа для несвязанных выборок таков:

1. Рассчитываем суммы элементов по каждому столбцу и заносим их в соответствующие ячейки таблицы 10.3.
2. Рассчитываем средние по каждому столбцу, разделив соответствующие суммы по столбцам на общее число испытуемых в каждой группе, — 17. Полученные данные заносим в соответствующие ячейки таблицы 10.3
3. Для получения величины, обозначенной выше как G, вычисляем общую сумму всех экспериментальных данных.

$$G = 4512 + 4247 + 3070 + 2786 = 14615$$

4 Вычисляем квадрат суммы всех экспериментальных данных $\left(\sum\sum x_{ij}\right)^2$

$$G^2 = 14615 \quad 14615 = 213598225$$

4 Делим полученную величину на общее число экспериментальных данных

$$\frac{213598225}{(17 \ 4)} \quad 3141150,4$$

Получилась величина, обозначенная выше как $\frac{G^2}{N}$ Эта величина используется в формулах (10 9) и (10 10)

5 Рассчитываем сумму квадратов суммарных значений по каждому *столбцу*

$$4512^2 + 4247^2 + 3070^2 + 2786^2 =$$

$$= 20358144 + 18037009 + 9424900 + 7761796 = 55581849$$

6 Делим эту величину на число испытуемых в группе (столбце)

$$\frac{55581849}{17} - 3269520 \ 5$$

Получилась величина, обозначенная выше как

$$\sum \frac{T_j^2}{n_j}$$

7 У нас все готово для вычисления величины Q_2 по формуле (10 9) Она равна

$$Q_2 = 3269520,5 - 3141150,4 = 128370 \ 1$$

8 По таблице 10 2 определяем число степеней свободы для Q_2, оно равно $p \quad 1 = 4 - 1 = 3$

9 Вычисляем величину S_2^2 равную $\frac{Q_2}{3}$,

$$S_2 = \frac{128370 \ 1}{3} - 42790,0$$

10 Вычисляем сумму квадратов значений всех экспериментальных данных, т е $\sum\sum x_{ij}^2$

$$304\ 304 + 268\ 268 + 272\ 272 + \quad + 150\ 150 + 158\ 158 =$$
$$= 1202208 + 1066391 + 556506 + 458246 = 3283351$$

11 Вычисляем величину Q_0 по формуле (10 9)

$$3283351 - 3141150{,}4 = 142200{,}6$$

12 Вычисляем величину $Q_1 = Q_0 - Q_2$

$$142200{,}6 - 128370{,}1 = 13830{,}5$$

13 По таблице 10 2 определяем число степеней свободы для Q_1, оно равно $N - p = 68 - 4 = 64$

14 Вычисляем величину $S_1^2 = \dfrac{Q_1}{(N - p)}$

$$S_1^2 = \frac{13830{,}5}{64} = 216{,}1$$

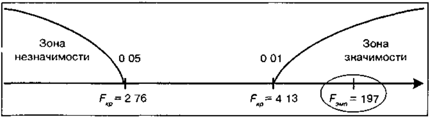
15 Осталось применить к полученным **величинам критерий F** Фишера

$$F_{эмп} = \frac{S_2^2}{S_1^2} = \frac{42790{,}0}{216{,}1} = 197$$

16 Находим критические точки $F_{кр}$ По таблице 17 Приложения 1 для F критерия, при степенях свободы равных 64 и 3 находим $F_{кр}$

$$F_{кр} = \begin{cases} 2{,}76 \text{ для } P \le 0{,}05 \\ 4{,}13 \text{ для } P \le 0{,}01 \end{cases}$$

Строим «ось значимости»



Таким образом, полученная величина $F_{эмп}$ попала в зону значимости В терминах статистических гипотез можно утверждать, что H_0 гипотеза об отсутствии различий отвергается, а принимается H_1 Психолог может быть уверенным, что при увеличении силы звука скорость реакции значительно увеличивается Или регулируемый фактор — сила звука оказывает существенное влияние на независимую переменную — скорость реакции

Дополнение к расчетам по методу однофакторного дисперсионного анализа

Величину Q_2 и, соответственно, S_2^2 можно подсчитать и по-другому, согласно ее определению по следующей формуле

$$Q_2 = \sum n_j \left(\overline{X}_j - \overline{X}\right)^2$$

Иными словами, вычисляются общее среднее всей выборки и групповые средние Из групповых средних вычитается общее среднее, полученная разность возводится в квадрат и умножается на число членов в группе Поученные произведения суммируются Итак

1 Вычисляем общее среднее по всем экспериментальным данным

$$\overline{X} = \frac{265 + 250 + 181 + 164}{4} = 215$$

2 Находим разность между каждым средним по группам (столбцам) и общим средним

$$d_1 = 265 - 215 = +50$$
$$d_2 = 250 - 215 = +35$$
$$d_3 = 181 - 215 = -34$$
$$d_4 = 164 - 215 = -51$$

3 Находим межгрупповую сумму квадратов (обозначение Q_2) следующим образом

$$Q_2 = 17 \quad (50^2 + 35^2 + 34^2 + 51^2) =$$
$$= 17 \quad (2500 + 1225 + 1156 + 2601) = 17 \quad 7482 = 127194$$

4 Зная число степеней свободы 3, находим теперь S_2^2

$$S_2^2 = \frac{Q_2}{3} = \frac{127194}{3} = 42398$$

Полученное значение S_2^2 оказалось несколько меньше предыдущего, что связано с погрешностями вычислений, поскольку в данном способе расчета групповые средние округлялись до целого числа и дробные значения отбрасывались Однако общий вывод дисперсионного анализа не изменился

Закрепим полученные знания решением еще двух задач Отличие последующих задач от предыдущей будет состоять в том, что число испытуемых в группах не будет равным и, кроме того, будут сразу вычисляться величины Q_1 и Q_2

Задача 10.2 (Эта задача, с некоторыми модификациями взята из учебника Дж Гласс, Дж Стенли Статистические методы в педагогике и психологии М , 1976)

В эксперименте на оценку конформизма принимали участие три группы студентов Первой группе (24 человека) сообщалось, что их мнения обычно расходятся с мнениями большинства других студентов университета Второй группе (12 человек) сообщалось, что их мнение довольно часто согласуется с мнениями других Третьей группе (24 человека) сообщалось, что их мнения, как правило, полностью совпадают с мнением других студентов университета Таким образом у испытуемых (студентов) создавалась установка на слабое, среднее и сильное соответствие групповому давлению Затем всех испытуемых просили ответить на 18 суждений, по которым имелись высказывания большинства студентов Число совпадений с мнениями большинства рассматривалось как показатель конформизма

Переформулируем эту задачу в терминах ANOVA регулируемым фактором являются три градации социальной установки на конформизм Результативным признаком — число совпадений собственного высказывания и мнения большинства Проверяется гипотеза H_0 о том, что средние и дисперсии числа совпадений в трех группах не различаются между собои влияние установки как регулирующего фактора не обнаруживается

Решение Исходные данные для решения задачи приведены в таблице 10 4

Таблица 10 4

1 Слабое соответствие	2 Среднее соответствие	3 Сильное соответствие
15 13 11 9	15 12	18 14 12 10
14 13 10 9	15 11	17 14 12 10
14 13 10 9	14 11	16 14 12 10
14 13 10 8	14 10	15 14 12 10
13 13 10 8	14 10	14 13 11 9
13 13 10 8	13 10	14 13 11 8
n – 24	n 12	n_3 – 24

Каждое число в таблице 10 4 соответствует числу совпадений мнения одного испытуемого с мнением большинства из 18 суждений

Подсчитаем суммы значении оценок конформизма по каж дои группе общую сумму и сумму квадратов каждого значения

$$\sum X_1 \quad 273 \quad \sum X \quad 149 \quad \sum X_3 = 303$$

$$G = 273 + 149 + 303 = 725$$

$$\sum \sum x \; = 9085$$

Произведем дальнейшии расчет Величину Q_2 рассчитаем по формуле (10 10)

$$Q \; = \frac{273}{24} + \frac{149^2}{12} + \frac{303}{24} - \frac{725^2}{60} - 20 \;\, 416$$

а величину Q_1 по формуле (10 11)

$$Q_1 = 9085 - \left[\frac{273}{24} + \frac{149^2}{12} + \frac{303^2}{24} \right] = 304 \;\, 167$$

И поскольку

$$S_1 = \frac{Q}{N-p} \qquad S - \frac{Q_2}{p \ 1}$$

то $S_1 = \frac{304\ 167}{57} - 5\ 336$ и $S - \frac{20\ 416}{2} - 10\ 208$

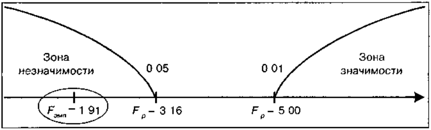
Тогда

$$F = \frac{10\ 208}{5\ 336} = 1\ 91$$

По таблице 17 Приложения 1 находим $F_{кр}$ для $df_2 = 2$ и $df_1 = 57$

$$F_{кр} = \begin{cases} 3\ 16 \text{ для } P < 0\ 05 \\ 5\ 00 \text{ для } P \leq 0\ 01 \end{cases}$$

Строим «ось значимости»



$F_{эмп}$ находится в зоне незначимости Иными словами следует принять гипотезу H_0 о сходстве отклонив гипотезу H_1 о различии Следовательно социальная установка не играет роли регулирующего фактора и не оказывает влияния на мнения студентов

Решим еще одну задачу с помощью метода однофакторного дисперсионного анализа в которой численные значения групп также не равны между собой

Задача 10 3 Психолог сравнивает эффективность четырех разных методик обучения производственным навыкам Для этой цели из всех выпускников ПТУ выбраны четыре группы учащихся обучавшиеся соответственно четырьмя разными методами Эффективность методик оценивалась по сумме обработанных учащимися деталей в течении одного дня

В категории ANOVA задача переформулируется так: регулируемый фактор (независимая переменная) — тип обучающей программы, результирующий признак — продуктивность деятельности ученика, оцениваемая по количеству сделанных деталей. Проверяется гипотеза об отсутствии различий в средних и дисперсиях между группами учащихся и, соответственно, об отсутствии влияния регулируемого фактора, т. е. типа программы обучения, на продуктивность деятельности ученика.

Решение. Результаты обследования представим в виде таблицы 10.5.

Таблица 10.6

№ учащихся	1 группа	2 группа	3 группа	4 группа
1	60	75	60	95
2	80	66	80	85
3	75	85	65	100
4	80	80	60	80
5	85	70	86	
6	70	80	75	
7		90		
Число учеников в группах	$n_1 = 6$	$n_2 = 7$	$n_3 = 6$	$n_4 = 4$
Суммарная выработка всей группы в шт	450	546	426	360

Поскольку сумма значений по каждой группе уже приведена в таблице, то подсчитаем общую сумму и сумму квадратов каждого значения:

$$G = 450 + 546 + 426 + 360 = 1782$$

$$\sum\sum x_i^2 = 140481$$

Произведем дальнеищий расчет Величину Q рассчитаем по формуле (10 10)

$$Q_2 - \frac{450^2}{6}+\frac{546^2}{7}+\frac{426^2}{6}+\frac{360^2}{4} \quad \frac{1782}{23} \quad 917\ 7$$

а величину Q по формуле (10 11)

$$Q_1 = 140481 - \left[\frac{450^2}{6}+\frac{546^2}{7}+\frac{426^2}{6}+\frac{360}{4}\right] \quad 2414\ 7$$

И поскольку

$$S^2 = \frac{Q_1}{N \quad p} \qquad \text{и} \qquad S_2 = \frac{Q}{p-1}$$

то $S^2 \quad \frac{2414\ 7}{19} = 78\ 8$ и $S_2 \quad \frac{917\ 7}{3} \quad 305\ 9$

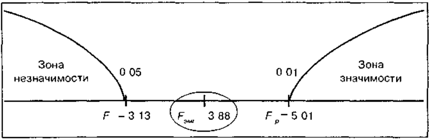
Тогда

$$F_{\text{к}} \quad \frac{305\ 9}{78\ 8} \quad 3\ 88$$

По таблице 17 Приложения 1 находим F_p для $df_2 = 3$ и $df_1 = 19$

$$F_p - \begin{cases} 3\ 13 \text{ для } P < 0\ 05 \\ 5\ 01 \text{ для } P < 0\ 01 \end{cases}$$

Строим ось значимости



F находится в зоне неопределенности Однако на уровне 5% можно принять гипотезу H о наличии рзличии в эффективнос ти методик обучения Иными словами методики обучения в данном случае оказывают влияние на эффективность производственных навыков

В данном пособии мы ограничились изучением только однофакторного дисперсионного анализа для несвязных выборок, поскольку имеется целый ряд учебников, в которых различные методы дисперсионного анализа рассмотрены очень подробно, например, пособие Е В Сидоренко, к которому мы и отсылаем читателей

Для применения однофакторного дисперсионного анализа необходимо соблюдать следующие условия:

1 Измерение может быть проведено в шкале интервалов и отношений

2 Результативный признак должен быть распределен нормально в исследуемой выборке

3 Для адекватного использования метода требуется не менее трех градаций фактора и не менее двух испытуемых в каждой градации

10.2. «Быстрые» методы — критерии дисперсионного анализа

Как мы только что убедились, дисперсионный анализ достаточно трудоемок Иногда можно воспользоваться так называемыми «быстрыми» методами — критериями дисперсионного анализа Общим для этих методов является следующие особенности Объектом анализа служит здесь изменчивость признака, обусловленная влиянием одного или нескольких факторов Однако как таковые дисперсии при расчетах с помощью этих методов не вычисляются, а вариативность оценивается другими способами с помощью величины размаха между максимальными и минимальными значениями признака (критерии Линка и Уоллеса) или посредством оценки диапазона разности рангов (критерий Немени) Использование этих статистических характеристик ускоряет и упрощает процедуру расчетов Следует иметь в виду, однако, что эти критерии дают приблизительную оценку влияния фактора, и если они не подтверждают влияния, то дисперсионный анализ возможно, их обнаружит

10.2.1. Критерий Линка и Уоллеса

Задача 10.4. Психолог провел в обычной школе (1 группа), в школе интернате (2 группа) и в специализированном колледже (3 группа) тестирование мышления с помощью серии задач Всего было предъявлено 10 задач В каждой группе было по 8 испытуемых Фиксировалось количество решенных задач Психолог выясняет вопрос, влияет ли специфика школьного обучения на эффективность решения задач

В категории ANOVA задача переформулируется так регулируемый фактор (независимая переменная) — тип школы (или специфика обучения), результирующий признак — количество решенных задач Проверяется гипотеза об отсутствии различий в средних и дисперсиях между группами учащихся и, соответственно, об отсутствии влияния регулируемого фактора, т е специфики обучения, на продуктивность мыслительной деятельности ученика

Решение. Результаты тестирования представлены в таблице 10 7

Таблица 10 7

№ испытуемых	1 ГРУППА	2 ГРУППА	3 ГРУППА
1	3	4	6
2	5	4	7
3	2	3	8
4	4	8	6
5	8	7	7
6	4	4	9
7	3	2	10
8	9	5	9

Вычисляем среднее каждого столбца.

$$\sum \overline{X}1 = 4,750 \qquad \sum \overline{X}2 = 4,625 \qquad \sum \overline{X}3 = 7,750$$

Вычисляем размах (max—min) в каждом столбце: это разность между наибольшим и наименьшим значением

1 гр 9 − 2 = 7
2 гр 8 − 2 = 6
3 гр 10 − 6 = 4

Вычисляем разность между максимальным и минимальным средним:

$$\left(\max \overline{X}1 - \min \overline{X}2\right) = 7,750 - 4,625$$

Формула для подсчета эмпирического значения критерия очень проста.

$$K_{эмп} = \frac{n\ \left(\max \overline{X}_i - \max \overline{X}_j\right)}{сумма\ размахов} \qquad (10\ 12)$$

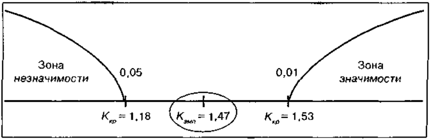
В нашем случае $n = 8$ и сумма размахов равна 7 + 6 + 4 = 17. Подставляем эти величины в формулу (10.12), получаем:

$$K_{эмп} = \frac{8\ (7,750 - 4,625)}{7 + 6 + 4} = \frac{8 \cdot 3,125}{17} = 1,47$$

По таблице 18 Приложения 1 находим $K_{кр}$ при $n = 8$ и $k = 3$

$$K_{кр} = \begin{cases} 1,18 \text{ для } P \le 0,05 \\ 1,53 \text{ для } P \le 0,01 \end{cases}$$

Строим «ось значимости»:



Таким образом, на уровне 5% можно принять гипотезу H_1 о том, что различия между выборками не случайны и обусловлены действием регулируемого фактора Важно подчеркнуть, что и однофакторный дисперсионный анализ привел бы к тому же выводу (величина $F = 6{,}05$ при уровне значимости $P = 0{,}008$).

С помощью этого критерия можно также статистически обосновано высказать утверждение о равенстве или неравенстве полученных средних. Проверка осуществляется по формуле.

$$|\text{Разница средних}| > \frac{K_{кр}\ (\text{сумма размахов})}{n} \qquad (10\ 13)$$

в том случае, если неравенство выполняется, то различия между средними статистически значимы. Разница средних берется по модулю.

С помощью формулы (10 13) сравним средние задачи 10.4.

$$\overline{X}1 - \overline{X}2 = 4{,}750 - 4{,}625 = 0{,}125$$

$$0{,}125 > 1{,}18\ \frac{(7+6+4)}{8} = 2{,}507$$

Неравенство не выполняется, следовательно, статистически значимых различий между значениями первого и второго среднего нет.

Проверим различия между первым и третьим значениями среднего:

$$\overline{X}3 - \overline{X}1 = 7{,}750 - 4{,}750 = 3$$

$$3 > 1{,}18\ \frac{(7+6+4)}{8} = 2{,}507$$

В данном случае неравенство выполняется.

Проверим различия между вторым и третьим значениями среднего:

$$\overline{X}3 - \overline{X}2 = 7{,}750 - 4{,}625 = 3{,}125$$

$$3{,}125 > 1{,}18\ \frac{(7+6+4)}{8} = 2{,}507$$

И здесь неравенство выполняется Таким образом, мы можем окончательно сказать, что в нашем случае справедливо $X1 = X2 \neq X3$ Из этого следует, что средний показатель количества решенных задач достоверно выше у учащихся интерната и колледжа

10.2.2. Критерий Немени

Этот критерий основан на ранжировании всей выборки Если в выборке k групп по n элементов в каждой, то наименьшему наблюдению приписывается ранг 1, наибольшему ранг n k Затем суммируются ранги каждой из групп и вычисляются абсолютные значения их разностей По таблице 19 Приложения 1 делается вывод об уровне сходства или различия в группах

Критерий Немени позволяет, так же как и предыдущий критерий, оценить различия средних между группами Для применения этого критерия необходимо, чтобы группы испытуемых были равными по величине Количество групп должно быть не меньше трех и не больше 10

Задача 10.5 В четырех группах спортсменов высокой квалификации (футболисты, гимнасты, теннисисты и пловцы, по 5 человек в каждой) сравнивалось время реакции выбора в мс Психолог выясняет вопрос, будут ли различия по времени реакции у спортсменов разного профиля

В этой задаче регулируемый фактор (условие) — спортивная специализация, результирующий признак — длительность времени реакции Гипотеза H_0 констатирует отсутствие различий между группами, а также отсутствие влияния регулируемого фактора, т е типа спортивной специализации

Решение. Результаты эксперимента приведены в таблице 10 8, в которой проведено необходимое ранжирование экспериментальных данных одновременно по всеи выборке в целом

Таблица 10 8

1 группа		2 группа		3 группа		4 группа	
Баллы	Ранги	Баллы	Ранги	Баллы	Ранги	Баллы	Ранги
203	12	213	16	171	5	207	13
184	7 5	246	18	208	14	152	2
169	4	184	7 5	260	19	176	6
216	17	282	20	193	10	200	11
209	15	190	9	160	3	145	1
Сумма рангов по стол бцам	55 5		70 5		51		33

Проверим правильность ранжирования $55{,}5 + 70\ 5 + 51 + 33 = 210$

И по формуле (1 2) $k\ c\ \frac{(k\ c+1)}{2}=\frac{20\ 21}{2}=210$ где k — число строк, а c — число столбцов

Абсолютные разности между суммами рангов представим также в виде таблицы

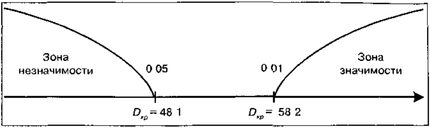
Таблица 10 9

Разности рангов между группами	1 – 2	1 3	1 4
2 3	|55 5 70 5|−15	|55 5 - 51|−4 5	|55 5 - 33|=22 5
2 - 4		|70 5 - 51|=19 5	|70 5 – 33|=37 5
3 4			|51 - 33|=18

По таблице 19 Приложения 1 находим $D_{кр}$ для $k = 4$ и $n = 5$

$$D_{кр} = \begin{cases} 48{,}1 \text{ для } P \le 0\ 05 \\ 58{,}2 \text{ для } P \le 0{,}01 \end{cases}$$

Строим «ось значимости»



Как видим из таблицы 10 9 для абсолютных разностей рангов ни одна из этих величин не достигает даже 5% уровня значимости Следовательно, можно с уверенность утверждать, что различия во времени реакции между группами спортсменов высокой квалификации носят случайных характер и тип спортивной специализации не влияет на эти показатели Подчеркнем, что расчет этих же данных по методу однофакторного дисперсионного анализа также не выявил статистически значимых различий, величина $F = 1{,}7$ при уровне значимости $P = 0{,}206$

Для применения «быстрых» методов — критериев дисперсионного анализа необходимо соблюдать следующие условия:

1 Измерение может быть проведено в шкале интервалов и отношений

2 Результативный признак должен быть распределен нормально в исследуемой выборке

3 Группы испытуемых должны быть равными по численности

4 Количество групп должно быть не меньше трех, и в последнем методе не больше 10

Глава 11

КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

11.1 Понятие корреляционной связи

Психолога нередко интересует как связаны между собои две или большее количество переменных в однои или нескольких изучаемых группах Например могут ли учащиеся с высоким уровнем тревожности демонстрировать стабильные академические достижения или связана ли продолжительность работы психологов в школе с размером их заработнои платы или с чем больше связан уровень умственного развития учащихся — с их успеваемостью по математике или по литературе и т п ?

В математике для описания связеи между переменными величинами используют понятие функции F которая ставит в соответствие каждому определенному значению независимой переменнои X определенное значение зависимои переменнои Y Полученная зависимость обозначается как $Y = F(X)$ Здесь X — является аргументом а Y — соответствующим ему значением функции $F(X)$ Такого рода однозначные зависимости между переменными величинами X и Y называют функциональными Хорошо известен пример функциональнои зависимости из школьного курса физики — $S = V\ T$ где S — путь V — скорость T — время При этом зная две из переменных величин всегда можно наити третью

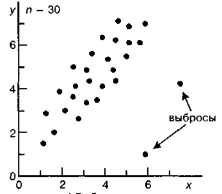
Но подобные однозначные или функциональные связи между переменными величинами встречаются далеко не всегда

Известно, например, что в среднем между ростом людей и их весом наблюдается положительная связь, и такая, что чем больше рост, тем больше вес человека Однако из этого правила имеются исключения, когда относительно низкие люди имеют избыточный вес, и, наоборот, астеники, при высоком росте имеют малый вес Причиной подобных исключений является то, что каждый биологический, физиологический или психологический признак определяется воздействием многих факторов средовых, генетических, социальных, экологических и т д Поэтому связи между психологическими при наками имеют не функциональный, а статистический характер, когда в среднем определенному значению одного признака, например, выраженной акцентуации подростков по гипертимному типу, рассматриваемому в качестве аргумента, соответствует не одно какое-либо значение, а целый спектр, распределяющихся в вариационный ряд числовых значений, например, такого психологического признака, как тревожность, который можно рассматривать в качестве зависимои переменной или функции Такого рода зависимость между переменными величинами называется корреляционной, или корреляцией Корреляционная связь — это согласованное изменение двух признаков, отражающее тот факт, что изменчивость одного признака находится в соответствии с изменчивостью другого

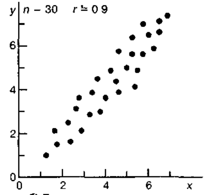
Функциональные связи легко обнаружить и измерить на единичных и групповых объектах, однако этого нельзя проделать с корреляционными связями, которые можно изучать только на представительных выборках методами математической статистики Корреляционные связи — это вероятностные изменения «Оба термина, — пишет Е В Сидоренко, — корреляционная связь и корреляционная зависимость — часто используются как синонимы Между тем, согласованные изменения признаков и отражающая это корреляционная связь между ними может свидетельствовать не о зависимости этих признаков между собой, а о зависимости обоих этих признаков от какого-то третьего признака или сочетания признаков, не рассматриваемых в исследовании Зависимость подразумевает влияние, связь — любые согласованные изменения, которые могут объясняться сотнями причин Корреляционные связи не могут рассматриваться как свидетельство причинно следственнои зависимости они свидетельствуют лишъ о том что изменениям одного признака как правило со путствуют определенные изменения другого но находится ли причина изменении в одном из признаков или она оказывается за пределами исследуемой пары признаков нам неизвестно»

Виды корреляционных связеи между измеренными признака ми могут быть различны так корреляция бывает линеиной и нелинеинои положительнои и отрицательнои Она линеина — если с увеличением или уменьшением одnои переменнои X вторая переменная Y в среднем либо также растет либо убывает Она нелинейна если при увеличении однои величины характер изменения второи не лине ен а описывается другими законами

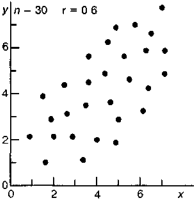
Корреляция будет поло жительнои если с увеличе нием переменнои X пере менная Y в среднем также увеличивается а если с уве личением X переменная Y имеет в среднем тенденцию к уменьшению то говорят о наличии отрицательнои кор



а) Выбросы



б) Положительная корреляция



в) Может быть положительная корреляция

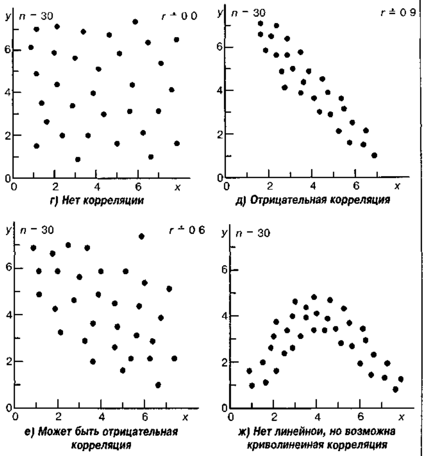


Рис 3 Типы корреляционных связей

реляции Возможна ситуация когда между переменными невоз можно установить какую-либо зависимость В этом случае говорят об отсутствии корреляционной связи Подчеркнем однако что нередко встречаются задачи в которых традиционная и наибо лее часто встречающаяся в психологических исследованиях ли неиная корреляционная связь отсутствует в то время как имеет ся высокозначимая криволинеиная связь например полиноми альная или гиперболическая

Задача корреляционного анализа сводится к установлению направления (положительное или отрицательное) и формы (линейная, нелинейная) связи между варьирующими признаками, измерению ее тесноты, и, наконец, к проверке уровня значимости полученных коэффициентов корреляции

Зависимость между коррелирующими переменными X и Y, как и в математике, можно выразить с помощью формул и уравнений (т е аналитически), а можно выразить графически

Графики корреляционных зависимостей строят по уравнениям следующих функций

$$\overline{Y}_x = F(X) \quad \text{или} \quad \overline{X}_y = F(Y),$$

которые называются уравнениями **регрессии** Здесь $\overline{Y}_x$ и $\overline{X}_y$ так называемые условные средние арифметические переменных X и Y

Переменные X и Y могут быть измерены в разных шкалах, именно это определяет выбор соответствующего коэффициента корреляции Представим соотношения между типами шкал, в которых могут быть измерены переменные X и Y и соответствующими мерами связи в виде таблицы 11 1

Таблица 11 1

Тип шкалы		Мера связи
Переменная X	**Переменная Y**	
Интервальная или отношений	Интервальная или отношений	Коэффициент Пирсона r_{xy}
Ранговая, интервальная или отношений	Ранговая, интервальная или отношений	Коэффициент Спирмена ρ_{xy}
Ранговая	Ранговая	Коэффициент «τ» Кендалла
Дихотомическая	Дихотомическая	Коэффициент «φ»
Дихотомическая	Ранговая	Рангово-бисериальный R_{rb}
Дихотомическая	Интервальная или отношений	Бисериальный $R_{бис}$
Интервальная	Ранговая	Не разработан

11.2. Коэффициент корреляции Пирсона

Термин «корреляция» был введен в науку выдающимся английским естествоиспытателем Френсисом Гальтоном в 1886 г Однако точную формулу для подсчета коэффициента корреляции разработал его ученик Карл Пирсон Знакомство с корреляционным анализом мы начнем с изучения этого коэффициента Сам коэффициент характеризует наличие только линейнои связи между признаками обозначаемыми как правило символами X и Y Формула расчета коэффициента корреляции построена таким образом что если связь между признаками имеет линейный характер коэффициент Пирсона точно устанавливает тесноту этои связи Поэтому он называется также коэффициентом линейнои корреляции Пирсона Если же связь между переменными X и Y не линеина то Пирсон предложил для оценки тесноты этои связи так называемое корреляционное отношение (см 11 9)

Величина коэффициента линеинои корреляции Пирсона не может превышать +1 и быть меньше чем 1 Эти два числа +1 и −1 — являются границами для коэффициента корреляции Когда при расчете получается величина большая +1 или меньшая −1 — следовательно произошла ошибка в вычислениях

Если коэффициент корреляции по модулю оказывается близким к 1 то это соответствует высокому уровню связи между переменными Так в частности при корреляции переменной величины с самои собои величина коэффициента корреляции будет равна +1 Подобная связь характеризует прямо пропорциональную зависимость Если же значения переменной X будут распложены в порядке возрастания а те же значения (обозначенные теперь уже как переменная Y) будут располагаться в порядке убывания то в этом случае корреляция между переменными X и Y будет равна точно −1 Такая величина коэффициента корреляции характеризует обратно пропорциональную зависимость

Знак коэффициента корреляции очень важен для интерпретации полученнои связи Подчеркнем еще раз что если знак коэффициента линеинои корреляции — плюс то связь между коррелирующими признаками такова что большей величине одно го признака (переменной) соответствует большая величина другого признака (другой переменной) Иными словами, если один показатель (переменная) увеличивается, то соответственно увеличивается и другой показатель (переменная) Такая зависимость носит название прямо пропорциональной зависимости

Если же получен знак минус, то большей величине одного признака соответствует меньшая величина другого Иначе говоря, при наличии знака минус, увеличению одной переменной (признака, значения) соответствует уменьшение другой переменной Такая зависимость носит название обратно пропорциональной зависимости При этом выбор переменной, которой приписывается характер (тенденция) возрастания — произволен Это может быть как переменная X, так и переменная Y Однако если психолог будет считать, что увеличивается переменная X, то переменная Y будет соответственно уменьшаться, и наоборот Эти положения очень важно четко усвоить для правильной интерпретации полученной корреляционной зависимости

В общем виде формула для подсчета коэффициента корреляции такова

$$r_{xy} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}} \qquad (11.1)$$

где x_i — значения, принимаемые переменной X,

y_i — значения, принимаемые переменной Y,

$\bar{x}$ — средняя по X,

$\bar{y}$ — средняя по Y

Расчет коэффициента корреляции Пирсона предполагает, что переменные X и Y распределены нормально

Формула (11.1) предполагает, что из каждого значения x переменной X, должно вычитаться ее среднее значение $\bar{x}$ Это неудобно Поэтому для расчета коэффициента корреляции используют не формулу (11.1), а ее аналог, получаемый из (11.1) простыми преобразованиями

$$r_{xy} = \frac{\sum (x_i y_i) - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sqrt{S_x S_y}} \qquad (11.2a)$$

где $$S_x = \sum x^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n} \text{ и}$$

$$S_y = \sum y^2 - \frac{\left(\sum y_i\right)^2}{n}$$

или модификацию этой формулы

$$r_{xy} = \frac{n \cdot \sum(x_i \cdot y_i) - \left(\sum x_i \cdot \sum y_i\right)}{\sqrt{\left[n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2\right] \cdot \left[n \cdot \sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2\right]}} \qquad (11.2b)$$

Согласно формулам (11 2а и 11 2b) необходимо подсчитать сумму каждой переменной, сумму квадратов каждой переменной и сумму последовательных произведений переменных друг на друга Подчеркнем, что сумма квадратов — не равняется квадрату суммы[1]

Обратим внимание читателя еще вот на какое обстоятельство В формуле (11 1) встречается величина

$$\sum(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) \qquad (11\ 3)$$

При делении на n (число значений переменной X или Y) она называется ковариацией Выражение (11 3) может быть подсчитано только в тех случаях, когда число значений переменной X равно числу значений переменной Y и равно n Формула (11 3) предполагает также, что при расчете коэффициентов корреляции нельзя произвольно переставлять элементы в коррелируемых столбцах, как это мы делали, например, в случае расчета по критерию S Джонкиера

Используя формулу 11 2, решим следующую задачу

Задача 11.1. 20 школьникам были даны тесты на наглядно-образное и вербальное мышление Измерялось среднее время решения заданий теста в секундах Психолога интересует вопрос существует ли взаимосвязь *между временем решения этих задач*? Переменная X — обозначает среднее время решения наглядно-образных а переменная Y — среднее время решения вербальных заданий тестов

Решение Представим исходные данные в виде таблицы 11 2 в которои введены дополнительные столб цы необходимые для расчета по формуле (11 2b) В таблице даны индивидуальные значения пере менных X и Y построчные произведения пере менных X и Y квадраты переменных всех индиви дуальных значении переменных X и Y а также суммы всех вышеперечисленных величин

Таблица 11 2

№ испы тумых п/п	X Среднее время решения наглядно образных задании	Y Среднее время решения вербаль ных за дании	X Y	X X	Y Y
1	19	17	323	361	289
2	32	7	224	1024	49
3	33	17	561	1089	289
4	44	28	1232	1936	784
5	28	27	756	784	729
6	35	31	1085	1225	961
7	39	20	780	1521	400
8	39	17	663	1521	289
9	44	35	1540	1936	1225
10	44	43	1892	1936	1849
11	24	10	240	576	100
11	37	28	1036	1369	784
13	29	13	377	841	169
14	40	43	1720	1600	1849
15	42	45	1890	1764	2025
16	32	24	768	1024	5760
17	48	45	2160	2304	2025
18	42	26	1092	1764	676
19	33	16	528	1089	256
20	47	26	1222	2209	676
Сумма	731	518	20089	27873	16000

Рассчитываем эмпирическую величину коэффициента корреляции по формуле 11 2b

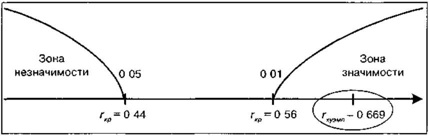
$$r_{xy\,эмп} = \frac{20 \cdot 20089 - 731 \cdot 518}{\sqrt{(20 \cdot 27873 - 731 \cdot 731)\,(20 \cdot 16000 - 518 \cdot 518)}} = 0{,}669$$

Определяем критические значения для полученного коэффициента корреляции по таблице 20 Приложения Особо отметим, что в таблице 20 Приложения величины критических значений коэффициентов линейной корреляции Пирсона даны по абсолютной величине Следовательно, при получении как положительного, так и отрицательного коэффициента корреляции по формуле (11 2) оценка уровня значимости этого коэффициента проводится по той же таблице 20 Приложения без учета знака, а знак добавляется для дальнейшей интерпретации характера связи между переменными X и Y

При нахождении критических значений для вычисленного коэффициента линейной корреляции Пирсона $r_{xy\,эмп}$ число степеней свободы рассчитывается как $k = n - 2$ В нашем случае $k = 20$, поэтому $n - 2 = 20 - 2 = 18$ В первом столбце таблицы 20 Приложения в строке, обозначенной числом 18, находим

$$r_{кр} = \begin{cases} 0{,}44 \text{ для } P \le 0{,}05 \\ 0{,}56 \text{ для } P \le 0{,}01 \end{cases}$$

Строим соответствующую «ось значимости»



Ввиду того что величина расчетного коэффициента корреляции попала в зону значимости — гипотеза H_0 отвергается и принимается гипотеза H_1 Иными словами, связь между временем решения наглядно образных и вербальных задач статистически значима на 1% уровне и положительна Полученная прямо пропорциональная зависимость говорит о том, что чем выше среднее время решения наглядно-образных задач, тем выше среднее время решения вербальных и наоборот

Для применения коэффициента корреляции Пирсона, необходимо соблюдать следующие условия:

1. Сравниваемые переменные должны быть получены в интервальной шкале или шкале отношений
2. Распределения переменных X и Y должны быть близки к нормальному
3. Число варьирующих признаков в сравниваемых переменных X и Y должно быть одинаковым
4. Таблицы уровней значимости для коэффициента корреляции Пирсона (таблица 20 Приложения) рассчитаны от $n = 5$ до $n = 1000$ Оценка уровня значимости по таблицам осуществляется при числе степеней свободы $k = n - 2$

11.3. Коэффициент корреляции рангов Спирмена

Коэффициент корреляции рангов, предложенный К Спирменом, относится к непараметрическим показателям связи между переменными, измеренными в ранговой шкале При расчете этого коэффициента не требуется никаких предположений о характере распределений признаков в генеральной совокупности Этот коэффициент определяет степень тесноты связи порядковых признаков, которые в этом случае представляют собой ранги сравниваемых величин Правила ранжирования варьирующих величин были описаны выше (см 1 4 1)

Величина коэффициента линейной корреляции Спирмена также лежит в интервале +1 и −1 Он, как и коэффициент Пирсона, может быть положительным и отрицательным, характеризуя направленность связи между двумя признаками, измеренными в ранговой шкале

В принципе число ранжируемых признаков (качеств, черт и т п) может быть любым, но сам процесс ранжирования большего чем 20 числа признаков — затруднителен Возможно, что именно поэтому таблица критических значений рангового коэффициента корреляции рассчитана лишь для сорока ранжируемых признаков ($n \le 40$, таблица 21 Приложения 1) В случае использования большего чем 40 числа ранжируемых признаков, уровень значимости коэффициента корреляции следует находить по таблице 20 Приложения для коэффициента корреляции Пирсона

Ранговый коэффициент линейной корреляции Спирмена подсчитывается по формуле

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum(D^2)}{n(n^2 - 1)} \qquad (11\ 4)$$

где n — количество ранжируемых признаков (показателей, испытуемых)

D — разность между рангами по двум переменным для каждого испытуемого

$\sum(D^2)$ — сумма квадратов разностей рангов

Используя ранговый коэффициент корреляции, решим следующую задачу

Задача 11.2 Психолог выясняет, как связаны между собой индивидуальные показатели готовности к школе, полученные до начала обучения в школе у 11 первоклассников и их средняя успеваемость в конце учебного года

Решение. Для решения этой задачи были проранжированы, во-первых, значения показателей школьной готовности, полученные при поступлении в школу, и, во-вторых, итоговые показатели успеваемости в конце года у этих же учащихся в среднем Результаты представим в таблице 11 3

Таблица 11 3

№ учащихся п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ранги показателей школьной готовности	3	5	6	1	4	11	9	2	8	7	10

Продолжение таблицы 113											
Ранги сред негодовои успевае мости	2	7	8	3	4	6	11	1	10	5	9
D	1	2	2	2	0	5	2	1	2	2	1
D^2	1	4	4	4	0	25	4	1	4	4	1

Подставляем полученные данные в формулу (11 4) и производим расчет Полу іаем

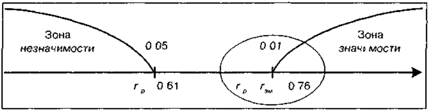
$$\rho \quad 1-\frac{6\;52}{11\;(11\;11\;1)} \quad 0\;76$$

Для нахождения уровня значимости обращаемся к таблице 21 Приложения 1 в которои приведены критические значения для коэффициентов ранговой корреляции Подчеркнем что в таблице 21 Приложения 1 как и в таблице для линеинои корреляции Пирсона все величины коэффициентов корреляции даны по абсолютнои величине Поэтому еще раз напомним что знак коэффициента корреляции учитывается только при его интерпретации

Однако в отличие от таблицы критических зна іении пирсоновскои корреляции в таблице 21 Приложения 1 нахождение уровнеи значимости осуществляется по числу n — т е по числу испытуемых В нашем случае $n = 11$ Для этого числа находим $r_{кр} = 0\ 61$ для 0 05 $r_{кр} = 0\ 76$ для 0 01 В стандартнои форме записи это выглядит следующим образом

$$r_{кр} = \begin{cases} 0\;61 \text{ для } P < 0\;05 \\ 0\;76 \text{ для } P < 0\;01 \end{cases}$$

Строим соответствующую ось значимости›



Полученный коэффициент корреляции совпал с критическим значением для уровня значимости в 1% Следовательно можно утверждать что показатели школьной готовности и итоговые оценки первоклассников связаны положительной корреляцион нои зависимостью — иначе говоря чем выше показатель школь нои готовности тем лучше учится первоклассник В терминах ста тистических гипотез психолог должен отклонить нулевую (H_0) ги потезу о сходстве и принять альтернативную (H) о наличии раз личии которая говорит о том что связь между показателями школьнои готовности и среднеи успеваемостью отлична от нуля

Решим еще одну задачу с использованием коэффициента корреляции Спирмена Эта задача взята из книги «Психологичес кие исследования Практикум по общеи психологии для студен тов психологических вузов» Москва Воронеж 1996 г стр 146 В книге эта задача рассматривается как тест на самооценку

Задача 11 3 Определить связь между ранговыми оценками ка честв личности входящими в представление че ловека о своем Я реальном и «Я идеальном

Решение При решении этой задачи мы взяли только 7 ка честв в то время как в психологических практи кумах предлагается ранжировать 20 качеств Реше ние подобных задач лучше всего оформлять сразу в виде таблицы В первом столбце таблицы 11 4 проранжированы 7 качеств личности по отноше нию к «Я реальному в третьем столбце табли цы — по отношению к Я идеальному В четвер том столбце таблицы представлены величины разности рангов между Я реальным и Я иде альным» со знаками В последнем столбце табли цы эти величины возведены в квадрат

Таблица 11 4

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
Я реальное	Качества личности	Я идеальное	D	D D
7	Ответственность	1	6	36
1	Общительность	5	4	16

Продолжение таблицы 113

3	Настоичивость	7	– 4	16
2	Энергичность	6	4	16
5	Жизнерадостность	4	1	1
4	Терпеливость	3	1	1
6	Решительность	2	4	16
Сумма			0	102

Сумма D_i должна быть равна нулю Это показатель правильности подсчета разностей

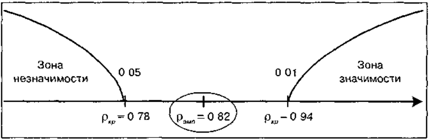
Производим подсчет коэффициента корреляции по формуле (11 4)

$$\rho = 1 - \frac{6\sum(D^2)}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6\cdot 102}{7\cdot(7\cdot 7-1)} = -0{,}82$$

Обращаемся к таблице 21 Приложения 1 для критических значений коэффициентов ранговой корреляции Для $n = 7$ находим $r_{кр} = 0{,}78$ для $P \le 0{,}05$ и $0{,}94$ для $P \le 0{,}01$ Представим это в стандартной форме записи

$$r_{кр} = \begin{cases} 0{,}78 \text{ для } P \le 0{,}05 \\ 0{,}94 \text{ для } P \le 0{,}01 \end{cases}$$

Строим соответствующую «ось значимости»



Полученная величина рангового коэффициента корреляции Спирмена попала в зону неопределенности В данном случае, при столь малом числе анализируемых качеств, на 5% уровне значимости следует принять гипотезу H_1 и отклонить гипотезу H_0 о сходстве Учитывая знак коэффициента корреляции — отрицательный, можно утверждать, что у испытуемого достаточно низкая самооценка, поскольку большей величине «Я реального» соответствует меньшая величина «Я идеального»

11.3.1. Случай одинаковых (равных) рангов

При наличии одинаковых рангов формула расчета коэффициента линейной корреляции Спирмена будет несколько иной В этом случае в формулу вычисления коэффициентов корреляции добавляются два новых члена, учитывающие одинаковые ранги Они называются поправками на одинаковые ранги и добавляются в числитель расчетной формулы

$$D1 = \frac{n^3 - n}{12} \qquad (11\ 5)$$

$$D2 = \frac{k^3 - k}{12} \qquad (11\ 6)$$

где n — число одинаковых рангов в первом столбце,

k — число одинаковых рангов во втором столбце

Если имеется две группы одинаковых рангов в каком либо столбце то формула поправки несколько усложняется

$$D3 = \frac{(n^3 - n) + (k^3 - k)}{12} \qquad (11\ 7)$$

где n — число одинаковых рангов в первой группе ранжируемого столбца,

k — число одинаковых рангов в второй группе ранжируемого столбца

Модификация формулы в общем случае такова

$$\rho_{\text{зчп}} = 1 - \frac{6\ \sum d^2 + D1 + D2 + D3}{n\ (n^2 - 1)} \qquad (11\ 8)$$

З а д а ч а 11.4. Психолог, используя тест умственного развития (ШТУР) проводит исследование интеллекта у 12 учащихся 9 класса Одновременно с этим он про сит учителей литературы и математики провести ранжирование этих же учащихся по показателям умственного развития Задача заключается в том чтобы определить как связаны между собой объек тивные показатели умственного развития (данные ШТУРа) и экспертные оценки учителей

Решение Экспериментальные данные этой задачи и допол нительные столбцы необходимые для расчета коэффициента корреляции Спирмена предста вим в виде таблицы 11 5

Таблица 11 5

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7	№ 8
№ уча щихся п/п	Ранги тести рова ния с помо щью ШТУРа	Экспер тные оценки учите лей по мате матике	Экспер тные оценки учите лей по лите ратуре	D (вто рого и третьего столб цов)	D (вто рого и четвер того столб цов)	D^2 (вто рого и третьего столб цов)	D^2 (вто рого и четвер того столб цов
1	6	5	5	1	0	1	0
2	7	10	8	3	2	9	4
3	4	8	7	4	1	16	1
4	5	4	11	1	7	1	49
5	9	6	3	3	3	9	9
6	12	8	6	4	2	16	4
7	2 5	2	11	0 5	9	0 25	81
8	2 5	3	11	0 5	8	0 25	64
9	10	8	1	2	7	4	49
10	8	11	3	3	8	9	64
11	11	12	3	1	9	1	81
12	1	1	9	0	8	0	0
Суммы	78	78	78	0	0	66 5	406

Поскольку при ранжировании были использованы одинаковые ранги, то необходимо проверить правильность ранжирования во втором, третьем и четвертом столбцах таблицы Суммирование в каждом из этих столбцов дат одинаковую сумму — 78

Проверяем по расчетной формуле (1 1) Проверка дает

$$\frac{N\ (N+1)}{2}=12\ \ 13\ 2=78$$

В пятом и шестом столбцах таблицы 11 5 приведены величины разности рангов между экспертными оценками психолога по тесту ШТУР для каждого ученика и величинами экспертных оценок учителей, соответственно по математике и литературе Сумма величин разностей рангов должна быть равна нулю Суммирование величин D в пятом и шестом столбцах дало искомый результат Следовательно, вычитание рангов проведено правильно Подобную проверку необходимо делать каждый раз при проведении сложных видов ранжирования

Теперь, прежде чем начать подсчет по формуле (11 4), необходимо рассчитать поправки на одинаковые ранги для второго, третьего и четвертого столбцов таблицы 11 5

В нашем случае в втором столбце таблицы два одинаковых ранга, следовательно по формуле (11 5) величина поправки $D1$ будет $D1=\frac{2\ 2\ 2-2}{12}=0\ 5$

В третьем столбце три одинаковых ранга, следовательно по формуле (11 6) величина поправки $D2$ будет $D2=\frac{3\ 3\ 3-3}{12}=2$

В четвертом столбце таблицы две группы по три одинаковых ранга, следовательно по формуле (11 7) величина поправки $D3$ будет $D3=\frac{(3\ 3\ 3-3)+(3\ 3\ 3-3)}{12}=4$

Отметим, что в некоторых руководствах формула расчета коэффициента ранговои корреляции несколько иная — добавки находятся в знаменателе, а не в числителе

Прежде чем приступить к решению задачи, напомним, что психолог выясняет два вопроса — как связаны величины рангов по тесту ШТУР с экспертными оценками по математике и по литературе Именно поэтому расчет придется проводить дважды

Считаем первый ранговый коэффициент $\rho_{эмп}$ с учетом добавок по формуле (11 8) Получаем

$$\rho_{эмп} = 1 - \frac{6\ 66{,}5 + 0{,}5 + 2}{12\ 143} = 1 - 0{,}233 = 0{,}767$$

Подсчитаем без учета добавки

$$\rho_{эмп} = 1 - \frac{6\ 66{,}5}{12\ 143} = 1 - 0{,}232 = 0{,}768$$

Как видим — разница в величинах коэффициентов корреляции оказалась очень незначительной

Считаем второй ранговый коэффициент $\rho_{эмп}$ с учетом добавок по формуле (11 8) Получаем

$$\rho_{эмп} = 1 - \frac{6\ 406 + 0\ 5 + 4}{12\ 143} = 1 - 1{,}422 = -0\ 422$$

Подсчитаем без учета добавки

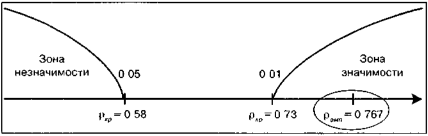
$$\rho_{эмп} = 1 - \frac{6\ 406}{12\ 143} = 1 - 1\ 419 = -0{,}419$$

И опять различия оказались очень незначительны

Поскольку число учащихся в обеих случаях одинаково, по таблице 21 Приложения 1 находим критические значения при $n = 12$ сразу для обоих коэффициентов корреляции В привычной форме записи получаем следующее

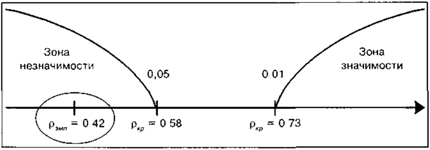
$$\rho_{кр} = \begin{cases} 0{,}58 \text{ для } P \leq 0{,}05 \\ 0{,}73 \text{ для } P \leq 0{,}01 \end{cases}$$

Откладываем первое значение $\rho_{эмп}$ на «оси значимости»



В первом случае полученный коэффициент ранговой корреляции находится в зоне значимости Поэтому психолог должен отклонить нулевую H_0 гипотезу о сходстве коэффициента корреляции с нулем и принять альтернативную H_1 о значимом отличии коэффициента корреляции от нуля Иными словами, полученный результат говорит о том, что чем выше экспертные оценки учащихся по тесту ШТУР, тем выше их экспертные оценки по математике

Откладываем второе значение $\rho_{эмп}$ на «оси значимости»



Во втором случае коэффициент ранговой корреляции находится в зоне незначимости Поэтому психолог должен принять нулевую H_0 гипотезу о сходстве коэффициента корреляции с нулем и отклонить альтернативную H_1 о значимом отличии коэффициента корреляции от нуля Иными словами, полученный результат говорит о том, что экспертные оценки учащихся по тесту ШТУР не связаны с экспертными оценками по литературе

Замечание Для более полного осмысления экспериментального материала, получаемого в психологических исследованиях, целесообразно, на наш взгляд, осуществлять подсчет коэффициентов корреляции и по Пирсону, и по Спирмену При этом не следует забывать, однако, что первый коэффициент соотносит значения величин, а второй — значения рангов этих величин Именно потому значения этих двух коэффициентов чаще всего оказываются несовпадающими, и их совместная интерпретация целиком определяется задачей, стоящей перед психологом

Для применения коэффициента корреляции Спирмена, необходимо соблюдать следующие условия:

1 Сравниваемые переменные должны быть получены в порядковой (ранговой) шкале, но могут быть измерены также в шкале интервалов и отношений

2 Характер распределения коррелируемых величин не имеет значения

3 Число варьирующих признаков в сравниваемых переменных X и Y должно быть одинаковым

4 Таблицы для определения критических значений коэффициента корреляции Спирмена (таблица 21 Приложения 1) рассчитаны от числа признаков равных $n = 5$ до $n = 40$ и при большем числе сравниваемых переменных следует использовать таблицу для пирсоновского коэффициента корреляции (таблицу 20 Приложения 1) Нахождение критических значений осуществляется при $k = n$

11.4. Расчет уровней значимости коэффициентов корреляции

Все коэффициенты корреляции, которые будут рассмотрены ниже, не имеют стандартных таблиц для нахождения критических значений В этих случаях поиск критических значений осуществляется с помощью t-критерия Стьюдента по формуле (11 9)

$$T\phi = |r_{эмп}| \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2_{эмп}}} \qquad (11\ 9)$$

где $r_{эмп}$ — коэффициент корреляции, n — число коррелируемых признаков, а величина $T\phi$ проверяется на уровень значимости по таблице 16 Приложения 1 для t-критерия Стьюдента Число степеней свободы в этом случае будет равно $k = n - 2$

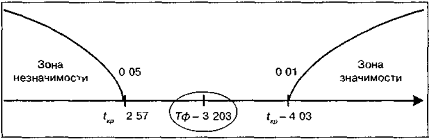
Однако с помощью формулы (11 9) можно проводить оценку уровней значимости и коэффициентов корреляции Пирсона и Спирмена Проведем, в частности, проверку уровня значимости коэффициента корреляции, полученного при решении задачи 11 3 и равного — 0 82 Мы помним что он попал в зону нео пределенности согласно таблице 21 Приложения 1 Вычисляем уровень значимости этого коэффициента по формуле 11 9

$$T\phi = |0\ 82|\ \sqrt{\frac{7-2}{1-0\ 82\ \ 0\ 82}} - 3\ 203$$

Число степеней свободы $k = n \quad 2$ в нашем случае при $n - 7$ $k = 7 - 2 = 5$ По таблице 16 Приложения 1 находим критичес кие значения критерия Стьюдента они равны соответственно для $P \le 0\ 05$ $t_{кр} = 2\ 57$ и для $P \le 0\ 01$ $t_{кр} = 4\ 03$ В принятой форме записи это выглядит так

$$t_{кр} - \begin{cases} 2\ 57 \text{ для } P \le 0\ 05 \\ 4\ 03 \text{ для } P < 0\ 01 \end{cases}$$

Строим «ось значимости



Полученная величина $T\phi$ как и в случае решения задачи 11 3 попала в зону неопределенности

11.5. Коэффициент корреляции «φ»

При сравнении двух переменных измеренных в дихотоми ческой шкале мерой корреляционной связи служит так называ емый коэффициент φ› или как назвал эту статистику ее автор К Пирсон — коэффициент ассоциации

Величина коэффициента «φ лежит в интервале +1 и 1 Он может быть как положительным так и отрицательным характе ризуя направление связи двух дихотомически измеренных при знаков

Решим с помощью коэффициента корреляции «φ» следую щую задачу

Задача 11 5 Влияет ли семеиное положение на успешность учебы студентов мужчин?

Решение Для решения этои задачи психолог выясняет у 12 студентов мужчин во первых женат он или хо лост соответственно проставляя каждому 1 — женат или 0 — холост и во вторых насколько успешно тот учится успешнои учебе проставля ется код 0 при наличии академических задол женностеи проставляется код 1 Для решения данные лучше свести в таблицу 11 6

Таблица 11 6

№ п/п	X — семеиное положение 0 — холост 1 — женат	Y — успешность обучения неуспешно — 1 успешно — 0
1	0	0
2	1	1
3	0	1
4	0	0
5	1	1
6	1	0
7	0	0
8	1	1
9	0	0
10	0	1
11	0	0
12	1	1

В общем виде формула вычисления коэффициента корреляции $\varphi_{эмп}$ выглядит так

$$\varphi_{эм} = \frac{pxy - px\ py}{\sqrt{px\ (1-px)\ py\ (1-py)}} \qquad (11\ 10)$$

где px — частота или доля признака, имеющего 1 по X, $(1 - px)$ — доля или частота признака, имеющего 0 по X, py — частота или доля признака, имеющего 1 по Y, $(1 - py)$ — доля или частота признака, имеющего 0 по Y, pxy — доля или частота признака, имеющая 1 одновременно как по X так и по Y

Частоты вычисляется следующим образом подсчитывается количество 1 в переменной X и полученная величина делится на общее число элементов этой переменной — N Аналогично подсчитываются частоты для переменной Y Обозначение pxy — соответствует частоте или доле признаков, имеющих единицу как по X так и по Y

Возвращаемся к решению задачи 11 5 Пусть px соответствует доли студентов, имеющих 1 по X, тогда $px = \frac{5}{12} = 0\ 4167$ (пять единичек, поделенных на общее число студентов, принявщих участие в эксперименте) В этом случае $(1 - px) = 1 - 0{,}4167 = 0{,}5833$

Пусть обозначение py — соответствует доли студентов, имеющих 1 по Y, тогда $py = \frac{6}{12} = 0{,}5$ В этом случае $(1 - py) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

Подсчитаем pxy — долю студентов, имеющих единицу как по X так и по Y В нашем случае $pxy = \frac{4}{12} = 0\ 3333$

Подставляем полученные величины в формулу (11 10), получаем

$$\varphi_{,,} = \frac{0\ 3333 - 0\ 4167\ \ 0{,}5}{\sqrt{0{,}4167\ \ 0\ 5833\ \ 0{,}5\ \ 0\ 5}} = 0{,}507$$

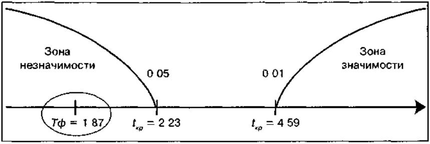
Поскольку, как мы уже указывали выше, для этого коэффициента корреляции нет таблиц значимости, рассчитываем его значимость по формуле (11 9)

$$T\phi = |0\ 507|\sqrt{\frac{7-2}{1-0\ 507\ \ 0\ 507}} = 1\ 87$$

Число степеней свободы в нашем случае будет равно $k = n - 2 = 12 - 2 = 10$ По таблице 16 Приложения 1 для $k = 10$ находим критические значения критерия Стьюдента, они равны соответственно для $P \leq 0,05$ $t_{кр} = 2,23$ и для $P \leq 0,01$ $t_{кр} = 4,59$ В принятой форме записи это выглядит так

$$t_{кр} = \begin{cases} 2,23 \text{ для } P \leq 0,05 \\ 4,59 \text{ для } P \leq 0,01 \end{cases}$$

Строим «ось значимости»



Значение величины *Тф* попало в зону незначимости Иными словами, психолог не обнаружил никакой связи между успешностью обучения и семейным положением студентов Или, в терминах статистических гипотез, гипотеза H_1 отклоняется и принимается гипотеза H_0 о сходстве коэффициента корреляции «φ» с нулем

Отметим, что кодирование, т е приписывание чисел 0 или 1 тому или иному признаку, было произвольным Можно было проставить холостым 1, значение коэффициента «φ» при этом не изменилось бы Проверьте!

11.5.1. Второй способ вычисления коэффициента «φ»

Коэффициент «φ» можно вычислить, не применяя метод кодирования В этом случае используется так называемая четырехпольная таблица, или таблица сопряженности Каждую клетку таблицы обозначим соответствующими буквами *a*, *b*, *c* и *d* Используя эту таблицу, решим задачу 11 5, приведенную в предыдущем разделе Представим данные этой задачи в виде таблицы 11 7

Таблица 11 7

Значение признаков	Семейное положение		Сумма
	Холостые	Женатые	
Плохо учится	$a = 2$	$b = 4$	6
Учится хорошо	$c = 5$	$d = 1$	6
Сумма	7	5	12

В каждой клетке таблицы 11 7 приведено число студентов, обладающих сразу двумя характеристиками Например в верхней левой клетке, имеющей обозначение a, указано общее число студентов, которые одновременно являются холостыми и имеют плохую успеваемость Подобных студентов было обнаружено 2 человека Таким же способом заполняют все клетки таблицы

Приведем общую формулу расчета коэффициента «φ» по таблице сопряженности

$$\varphi = \frac{b\ c - a\ d}{\sqrt{(a+c)\ (b+d)\ (a+b)\ (c+d)}} \qquad (11\ 11)$$

Подставляем данные таблицы 11 7 в формулу 11 11, получаем

$$\varphi_{эмп} = \frac{20-2}{\sqrt{7\ 5\ 6\ 6}} = \frac{18}{\sqrt{1260}} = 0{,}507$$

Значение $\varphi_{эмп}$, как этого следовало ожидать, получилось то же самое, что и в предыдущем случае Поскольку мы уже оценили уровень значимости, второй раз этого делать не стоит

Для применения коэффициента корреляции «φ» необходимо соблюдать следующие условия:

1 Сравниваемые признаки должны быть измерены в дихотомической шкале

2 Число варьирующих признаков в сравниваемых переменных X и Y должно быть одинаковым

3 Для оценки уровня достоверности коэффициента «φ» следует пользоваться формулой (11 9) и таблицей критических значений для t-критерия Стьюдента при $k = n - 2$

11.6. Коэффициент корреляции «τ» Кендалла

Коэффициент корреляции «τ» (тау) Кендалла относится к числу непараметрических, т е при вычислении этого коэффициента не играет роли характер распределения сравниваемых переменных Коэффициент «τ» предназначен для работы с данными, полученными в ранговой шкале Иногда этот коэффициент можно использовать вместо коэффициента корреляции Спирмена, поскольку способ его вычисления более прост Он основан на вычислении суммы инверсий и совпадений

Решим следующую задачу, применяя коэффициент «τ»

Задача 11.6 Психолог просит супругов проранжировать семь личностных черт, имеющих определяющее значение для семейного благополучия Задача заключается в том, чтобы определить, в какой степени совпадают оценки супругов по отношению к ранжируемым качествам

Данные задачи и необходимые для вычислений коэффициента Кендалла столбцы представим сразу в виде таблицы 11 8

Таблица 11 8

Черты личности	Муж	Жена	Совпадения	Инверсии
Ответственность	7	1		
Общительность	1	5		
Сдержанность	3	7		
Выносливость	2	6		
Жизнерадостность	5	4		
Терпеливость	4	3		
Решительность	6	2		
Сумма				

Для подсчета коэффициента корреляции «τ» (тау) необходимо упорядочить второй столбец (оценки мужа) таблицы 11 8 по возрастанию рангов, в нашем случае от 1 до 7 Соответственно этому поменяются местами как сами черты, так и соответствующие ранги третьего ряда Оформим эти преобразования в новую таблицу 11 9

Таблица 11 9

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
Черты личности	**Муж**	**Жена**	**Совпадения**	**Инверсии**
Общительность	1	5	2	4
Выносливость	2	6	1	4
Сдержанность	3	7	0	4
Терпеливость	4	3	1	2
Жизнерадостность	5	4	0	2
Отзывчивость	6	2	0	1
Ответственность	7	1	0	0
Сумма			4	17

Посмотрим, как следует заполнять последние два столбца таблицы 11 9 Теперь для работы нам нужен только столбец с рангами, проставленными женой На его основе заполним последние два столбца таблицы 11 9, подсчитав, сначала число совпадений

Подсчет совпадении происходит следующим образом берем самое верхнее число третьего столбца — 5 Подсчитываем сколько всего чисел больших 5 встречаются ниже в этом же столбце Находим их — это 6 и 7 Их всего два Двойку ставим напротив числа 5 в колонке «Совпадения» Берем затем следующее число 6 — ниже по столбцу и больше его, также ниже по столбцу, встречается только одно число 7 Ставим напротив 6 в столбце «Совпадения» — 1 Берем следующее число 7 — больше по величине не может встретиться ни одно число, поскольку 7 это максимальный ранг Ставим напротив 7 в столбце «Совпадения» — 0 И так далее

Для определения количества инверсий опять берем самое верхнее число третьего столбца — 5 Подсчитываем, сколько всего чисел встречаются ниже по столбцу, меньших чем 5 Это числа 4, 3, 2 и 1 Их 4 Ставим напротив числа 5 в столбце «Инверсия» число 4 Берем следующее число 6 — ниже по столбцу и меньше, чем 6, встречаются те же числа, что и для 5 Ставим напротив 6 в столбце «Инверсия» число — 4 То же верно и для чнсла 7 Меньше числа 3 ниже по столбцу встречаются числа 2 и 1 Ставим напротив 3 в столбце «Инверсия» число — 2 И так далее

Число совпадений обозначается буквой P, а число инверсий буквой Q Для проверки правильности подсчета числа инверсий и совпадений используется следующая формула

$$P + Q = \frac{(N-1)\ N}{2} \tag{11 12}$$

Где P — число совпадений,

Q — число инверсий,

N — число ранжируемых признаков (черт)

Подставляем в формулу (11 12) полученные в нашем случае величины, получаем

$$P + Q = 4 + 17 = 21 \quad \text{и} \quad \frac{(7-1)\ 7}{2} = 21$$

Следовательно, подсчет числа инверсий и совпадений был произведен правильно

Подсчет коэффициента Кендалла может осуществляться по трем тождественным формулам Первая формула

$$\tau_{эмп} = \frac{P-Q}{\frac{N\ (N-1)}{2}} \tag{11 13}$$

В двух других формулах используются либо P, либо Q

$$\tau_{эмп} = 1 - \frac{4\ Q}{N\ (N-1)} \tag{11 14}$$

$$\tau_{эмп} = \frac{4\ P}{N\ (N-1)} - 1 \tag{11 15}$$

Проведем подсчет коэффициента корреляции по всем трем формулам

$$\tau_{эмп} = \frac{4-17}{21} = -0\ 619 \tag{11 13}$$

$$\tau_{эмп} = 1 - \frac{4\ 17}{7\ 6} = 1 - 1{,}619 = -0\ 619 \tag{11 14}$$

$$\tau_{эмп} = \frac{4 \cdot 4}{7 \cdot 6} - 1 = 0{,}381 - 1 = -0{,}619 \qquad (11\ 15)$$

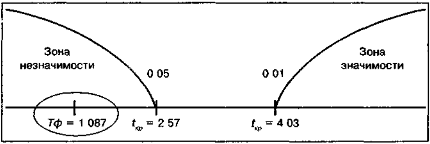
Проверим уровень значимости коэффициента корреляции по формуле (11 9)

$$T\phi = |0{,}619| \sqrt{\frac{7-2}{1-0{,}619 \cdot 0{,}619}} = 1{,}087$$

Число степеней свободы в нашем случае будет $k = n - 2 = 7 - 2 = 5$ По таблице 16 Приложения 1 для $k = 5$ находим критические значения критерия Стьюдента, они равны соответственно для $P \leq 0{,}05$ $t_{кр} = 2{,}57$ и для $P \leq 0{,}01$ $t_{кр} = 4{,}03$ В принятой форме записи это выглядит так

$$t_{кр} = \begin{cases} 2{,}57 \text{ для } P \leq 0{,}05 \\ 4{,}03 \text{ для } P \leq 0{,}01 \end{cases}$$

Строим «ось значимости»



Значение величины $T\phi$ попало в зону незначимости В терминах статистических гипотез гипотеза H_1 отклоняется и принимается гипотеза H_0 о том, что коэффициент корреляции «τ» Кендалла достоверно не отличается от нуля Иными словами, согласованности между мужем и женой в оценке значимых для семейного благополучия личностиых черт нет

Для применения коэффициента корреляции «τ» Кендалла необходимо соблюдать следующие условия:

1 Сравниваемые признаки должны быть измерены в порядковой шкале

2 Число варьирующих признаков в сравниваемых переменных X и Y должно быть одинаковым

3 Величина «τ» Кендалла независима от закона распределения величин X и Y

4 При расчетах этого коэффициента не допускается использование одинаковых рангов

5 Для оценки уровня достоверности коэффициента «τ» следует пользоваться формулой (11 9) и таблицей критических значений для t-критерия Стьюдента при $k = n - 2$

11.7. Бисериальный коэффициент корреляции

В тех случаях, когда одна переменная измеряется в дихотомической шкале (перемеиная X), а другая в шкале интервалов или отношений (перемеиная Y), используется бисериальный коэффициент корреляции Мы помним, что переменная X, полученная в дихотомической шкале, принимает только два значения (кода) 0 и 1 Особо подчеркнем, что несмотря иа то, что этот коэффициент изменяется в диапазоне от -1 до $+1$ его знак для интерпретации результатов не имеет значения Это исключение из общего правила

Расчет этого коэффициента производится по формуле

$$R_{бис} = \frac{\bar{X}1 - \bar{X}0}{S_y} \sqrt{\frac{n1\ n0}{N\ (N-1)}} \qquad (11\ 16)$$

где $\bar{X}1$ среднее по тем элементам переменной Y, которым соответствует код (призиак) 1 в переменной X Здесь $n1$ — количество единичек в переменной X

$\bar{X}0$ среднее по тем элементам переменной Y, которым соответствует код (признак) 0 в переменной X Здесь $n0$ — количество иулей в переменной X

$N = n1 + n0$ — общее количество элементов в переменной X

S_y — стандартное отклонение переменной Y, вычисляемое по формуле (4 7)

Значимость бисериального коэффциента корреляции оценивается по величине *Тф* *t*-критерия Стьюдента с числом степеней свободы $k = n - 2$

Используя бисериальный коэффициент корреляции, рассмотрим следующий пример

Задача 11.7. Психолог проверяет гипотезу о том, существуют ли гендерные различия в показателях интеллекта

Решение. Данные обследования 15 подростков разного пола по методике Айзенка приведены в таблице 11 10

Таблица 11 10

№ испытуемого п/п	Пол	*IQ*
1	1	102
2	0	110
3	1	86
4	1	90
5	0	120
6	1	78
7	0	95
8	0	103
9	1	105
10	1	93
11	1	123
12	0	89
13	1	109
14	1	100
15	0	105

Для решения задачи введем коды, обозначив юношей 1, а девушек 0 В нашем случае $n1 = 9$, а $n0 = 6$

Тогда $N = n1 + n0 = 15$ — общее число испытуемых

Прежде чем произвести расчет по формуле (11 16), найдем необходимые величины

Вначале находим средние значения IQ отдельно для юношей и для девушек

$$\overline{X}1 = \frac{102+86+90+78+105+93+123+109+100}{9} = 98{,}4$$

$$\overline{X}0 = \frac{110+120+95+103+89+105}{6} = 103{,}67$$

Затем по формуле (4 7) находим S_y для всех показателей IQ, оно равно $S_y = 12{,}374$

Вычисляем $R_{эмпбис}$ по формуле (11 16)

$$R_{эмпбис} = \frac{98{,}4-103\ 67}{12{,}374}\ \sqrt{\frac{9\ 6}{15\ 14}} = -0{,}216$$

Полученное в нашей задаче значеиие бисериальиого коэффициеита корреляции невелико и дает основание полагать, что между полом и уровнем интеллекта в данной выборке испытуемых значимой корреляциониой связи нет

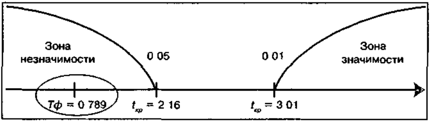
Однако проверим значимость полученного коэффициента корреляции с помощью формулы (11 9), при $k = n - 2 = 15 - 2 = 13$

$$T\phi = |0{,}216|\ \sqrt{\frac{15-2}{1-0{,}216\ \ 0{,}216}} = 0{,}789$$

Число степеией свободы в иашем случае будет равно $k = 13$ По таблице 16 Приложения для $k = 13$ находим критические значеиия критерия Стьюдента, они равны соответственно для $P \le 0{,}05$ $t_{кр} = 2{,}16$ и для $P \le 0{,}01$ $t_{кр} = 3{,}01$ В принятой форме записи это выглядит так

$$t_{кр} = \begin{cases} 2{,}16 \text{ для } P \le 0{,}05 \\ 3{,}01 \text{ для } P \le 0{,}01 \end{cases}$$

Строим «ось зиачимости»



Результат попал в зону незиачимости Поэтому принимается гипотеза H_0, согласно которой полученный бисериальный коэффициент корреляции значимо не отличается от нуля Иными словами, гендерных различий по интеллекту на даиной выборке испытуемых не обнаружено

Для применения бисериального коэффициента корреляции необходимо соблюдать следующие условия:

1 Сравниваемые переменные должны быть измереиы в разных шкалах одиа X — в дихотомической шкале, другая Y — в шкале интервалов или отношеиий

2 Предполагается, что перемеиная Y имеет нормальный закон распределеиия

3 Число варьирующих признаков в сравииваемых переменных X и Y должно быть одинаковым

4 Для оценки уровня достоверности бисериального коэффициента корреляции следует пользоваться формулой (11 9) и таблицей критических зиачеиий для t-критерия Стьюдента при $k = n - 2$

11.8. Рангово-бисериальный коэффициент корреляции

В тех случаях, когда одиа переменная измеряется в дихотомической шкале (переменная X), а другая в ранговой шкале (переменная Y), используется рангово-бисериальный коэффициент корреляции Мы помним, что переменная X, измеренная в дихотомической шкале, принимает только два значения (кода) 0 и 1 Особо подчеркнем иесмотря на то что этот коэффициент изменяется в диапазоие от −1 до +1, его знак для интерпретации результатов ие имеет значеиия Это еще одно исключение из общего правила

Расчет этого коэффициента производится по формуле

$$Rrb = \frac{(\overline{X}1 - \overline{X}0)\,2}{N} \qquad (11\ 17)$$

где $\overline{X}1$ — средний ранг по тем элементам переменной Y, которым соответствует код (признак) 1 в переменной X,

$\overline{X}0$ — средний ранг по тем элементам перемениой Y, которым соответствует код (признак) 0 в переменной X,

N— общее количество элементов в переменной X

Решим следующий пример с использоваиием раигово-бисериального коэффициента корреляцин

Задача 11.8. Психолог проверяет гипотезу о том, существуют ли гендерные различия в вербальных способностях

Решение. Для решения данной задачи 15 подростков разного пола были проранжированы учителем литературы по степени выраженности вербальных способностей Полученные данные представим сразу в виде таблицы 11 11

Таблица 11 11

№ испытуемого п/п	Пол	Ранги вербальных способностей
1	1	1
2	0	10
3	1	6
4	1	9
5	0	15
6	1	7
7	0	8
8	0	13
9	1	4
10	1	3
11	1	5
12	0	11
13	1	12
14	1	2
15	0	14

В данном случае правильность ранжирования можно не проверять, поскольку нет совпадающих рангов и ранжирование проводится по порядку

В таблице 11 11 юноши обозначены кодом 1, а девушки 0 В нашем случае юношей 9 человек, а девушек 6

Прежде чем произвести расчет по формуле (11 17), найдем необходимые величины т е средние значения рангов отдельно для юношей и для девушек

$$\bar{X}1 = \frac{1+6+9+7+4+3+5+12+2}{9} = 5\ 44$$

$$\bar{X}0 = \frac{10+15+8+13+11+14}{6} = 11{,}83$$

Вычисляем $R_{эмпrb}$ по формуле (11 17)

$$R_{эмпrb} = \frac{(5{,}44+11{,}83)\ 2}{15} = 0\ 852$$

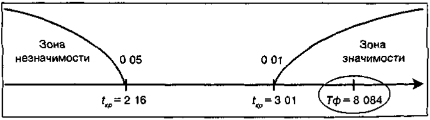
Проверим значимость полученного коэффициента корреляции с помощью формулы (11 9) при $k = n - 2 = 15 - 2 = 13$

$$T\phi = |0{,}852| \sqrt{\frac{15-2}{1-0\ 852\ 0{,}852}} = 8{,}084$$

Число степеней свободы в нашем случае будет равно $k = 13$ По таблице 16 Приложения 1 для $k = 13$ находим критические значения критерия Стьюдента, они равны соответственно для $P \leq 0{,}05$ $t_{кр} = 2{,}16$ и для $P \leq 0{,}01$ $t_{кр} = 3{,}01$ В принятой форме записи это выглядит так

$$t_{кр} = \begin{cases} 2{,}16 \text{ для } P \leq 0{,}05 \\ 3{,}01 \text{ для } P \leq 0{,}01 \end{cases}$$

Строим «ось значимости»



Результат попал в зону значимости Поэтому принимается гипотеза H_1, согласно которой полученный рангово-бисериальный коэффициент корреляции значимо отличается от нуля Иными словами, на данной выборке подростков обнаружены значимые гендерные различия по степени выраженности вербальных способностей

Для применения рангово-бисериального коэффициента корреляции необходимо соблюдать следующие условия:

1 Сравниваемые переменные должны быть измерены в разных шкалах одна X — в дихотомической шкале, другая Y — в ранговой шкале

2 Число варьирующих признаков в сравниваемых переменных X и Y должно быть одинаковым

3 Для оценки уровня достоверности рангово-бисериального коэффициента корреляции следует пользоваться формулой (11 9) и таблицей критических значений для t-критерия Стьюдента при $k = n - 2$

11.9. Корреляционное отношение Пирсона η

Все рассмотренные выше коэффициенты корреляции служат для выявления только линейной зависимости между признаками Для измерения нелинейной зависимости К Пирсон предложил показатель, который он назвал корреляционным отношением Напомним, что коэффициент корреляции r_{xy} (формула 11 1), который был введен Пирсоном, характеризует связь между переменными X и Y с точки зрения прямой или обратной пропорциональности, иными словами, получаемая связь между переменными является согласованной и такой, что с увеличением одной переменной другая (в среднем) либо только увеличивается, либо только уменьшается (в среднем) При этом в первом случае получается положительный коэффициент корреляции, во втором отрицательный

Корреляционное отношение описывает искомую связь, условно говоря, с двух сторон со стороны переменной X по отношению к Y, и со стороны переменной Y по отношению к X Соответственно этому корреляционное отношение представляет собой два показателя, обозначаемые как h_{yx} и h_{xy}. Они вычисляются отдельно друг от друга. Однако они связаны между собой, поскольку при строго линейной зависимости между переменными X и Y имеет место равенство $h_{yx} = h_{xy}$ В этом случае величины обоих показателей корреляционного отиошения совпадают с величиной коэффициента корреляции Пирсоиа.

Показатели корреляциоииого отношения вычисляются по следующим двум формулам·

$$h_{yx} = \sqrt{\frac{\sum f_x(\bar{y}_x - \bar{y})^2}{\sum f_y(y_i - \bar{y})^2}} \qquad (11.18)$$

$$h_{xy} = \sqrt{\frac{\sum f_y(\bar{x}_y - \bar{x})^2}{\sum f_x(x_i - \bar{x})^2}} \qquad (11.19)$$

здесь x и y общне, а x_y и y_x — групповые средние арифметическне, f_y и f_x частоты рядов X и Y. Согласно этим формулам оба показателя всегда положительны и располагаются в иитервале от 0 до +1.

Подчеркнем, что, как правило, $h_{yx} \neq h_{xy}$ Равенство между этими коэффициентамн возможио лишь при наличии строго линейной связи между коррелируемыми переменными. Именно поэтому различие между h_{xy} и h_{yx} будет означать наличие не линейной, а связи более сложного типа между коррелируемыми признаками.

Для вычисления корреляционного соотношения h_{yx} (Y по X) или h_{xy} (X по Y) иеобходимо выполнить следующие действия.

1) расположить по порядку исходные данные по X от меньшей величины к большей, при этом сохраннв значения соответствующих величин Y по отношению к X,
2) определить частоты перемеииой X — обозначение f_x;
3) подсчитать арифметические (частные) средние по перемеиной Y для соответствующей частоты f_x — обозначение $\bar{y}_x$;
4) найти варианты (неповторяющиеся значения) величнны X — обозначение x_i;
5) расположить по порядку исходные данные по Y от меньшей величины к большей, при этом сохраннв значения соответствующих величии X по отношению к Y;

6) определить частоты переменной Y — обозначение f_y,

7) подсчитать арифметические (частные) средние по переменной X для соответствующей частоты f_y — обозначение $\overline{x}_y$,

8) найти варианты (неповторяющиеся значения) переменной Y — обозначение y_i,

9) определить общие средние по переменной X и Y обозначение $\overline{x}$ и $\overline{y}$,

10) произвести расчет по формулам (11 18) и (11 19),

11) определить уровень значимости полученных показателей корреляционного отношения по таблице критических значений для t-критерия Стьюдента при $k = n - 2$

На конкретном примере рассмотрим, как производить расчет показателей корреляционного отношения

Задача 11.9. Психолог у 8 подростков сравнивает баллы по третьему, математическому, субтесту теста Векслера (переменная X) и оценки по алгебре (переменная Y) Интересующие психолога вопросы можно сформулировать двояко Первый вопрос — связаиа ли успешность решения третьего субтеста Векслера с оценками по алгебре? И второй — связаны ли оценки по алгебре с успешностью решения третьего субтеста Векслера?

Решение. Представим экспериментальные данные в следующем виде

Значения X	8	18	18	10	16	10	8	14
Значения Y	2	3	4	5	4	4	3	5

Если мы подсчитаем коэффициент линейной корреляции Пирсона по формуле (11 1) то получим величину $r_{xy} = 0{,}244$ Этот коэффициент незначим и, следовательно, линейной связи между переменными X и Y нет Нужно выяснить — существует ли между двумя вышеприведенными переменными другой тип связи?

Произведем расчет согласно пунктам 1—11

1 Расставим по порядку величины X от меньшей к наибольшей, сохраняя их соответствие с исходными данными по У

Значения X 8 8 10 10 14 16 18 18

Значения Y 2 3 4 5 5 4 3 4

2 Определяем частоты переменной X (обозначаемые как f_x) и соответствующие им неповторяющиеся значения переменной X (обозначающиеся как x_i) Частоты вычисляются по правилу, изложенному в главе 3, раздел 3 2 Согласно этому правилу, если какая-либо переменная величина встречается в анализируемом ряду один, два, три и большее число раз, то этой величине проставляется частота, равная соответственно одному, двум, трем и большим значениям Так, в нашем случае число 8 встречается два раза — следовательно его частота равна 2, число 10, также два раза, следовательно его частота также равна 2

Частоты переменной X f_x 2 2 1 1 2

Неповторяющиеся значения переменной X x_i 8 10 14 16 18

Проверим правильность подсчета частот — их сумма должна равняться числу варьирующих величин переменной X

$$\sum f_x = 2+2+1+1+2=8$$

3 Подсчитываем арифметические частные средние для переменной Y по отношению к переменной X Для этого одинаковым значениям X ставим в соответствие их среднее арифметическое по Y следующим образом в исходных данных двум значениям 8 и 8 по X соответствовали величины 2 и 3 по Y — следовательно, одному значению X (равному 8) — будет соответствовать частное среднее по Y равное $\frac{2+3}{2} = 2{,}5$ Значению 10 по X — $\frac{4+5}{2} = 4{,}5$ Соответствие между числами 14 и 5 и 16 и 4 остается неизменным Значению 18 по X ставим — $\frac{3+4}{2} = 3{,}5$

Таким образом построено новое распределение, где f_x — частота для переменной X Расположим полученные величины в следующем виде

Частоты по X	f_x	2	2	1	1	2
Значения X без повторов	x_i	8	10	14	16	18
Частные средние по Y	$\bar{y}_x$	2,5	4,5	5	4	3,5

4 Расположим по возрастающей экспериментальные данные по Y

Значения Y 2 3 3 4 4 4 5 5

Значения X 8 8 18 10 16 18 10 14

5 Подсчитаем соответствующие частоты

Частоты переменной Y f_y 1 2 3 2

Неповторяющиеся значения Y y_i 2 3 4 5

Проверка правильности подсчета частот $\sum f_y = 1+2+3+2=8$

4 6 Подсчитаем соответствующие частные средние по X

$$\frac{8+8}{2}=8,\ \frac{8+18}{2}=13,\ \frac{10+16+18}{3}=14{,}7 \text{ и } \frac{10+14}{2}=12$$

Расположим полученные величины в следующем виде

Частоты по Y	f_y	1	2	3	2
Значения Y без повторов	y_i	2	3	4	5
Частные средние по X	$\bar{x}_y$	8	13	14,7	12

7 Теперь подсчитаем общие средние

$$\bar{x}=\frac{(8+18+18+10+16+10+8+14)}{8}=\frac{102}{8}=12{,}75$$ — общее среднее по X

$$\bar{y}=\frac{(2+3+4+5+5+4+3+4)}{8}=\frac{30}{8}=3{,}75$$ — общее среднее по Y

8 Все готово для расчета по формулам (11 18) и (11 19)

$$h_{yx}=\sqrt{\frac{\sum f_x(\bar{y}_x-\bar{y})^2}{\sum f_y(y_i-\bar{y})^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2\ (2{,}5-3{,}75)^2+2\ (4{,}5-3{,}75)^2+1\ (5-3{,}75)^2+1\ (4-3{,}75)^2+2\ (3{,}5-3{,}75)^2}{1\ (2-3\ 75)^2+2\ (3-3{,}75)^2+3\ (4-3\ 75)^2+2\ (5-3{,}75)^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{6}{7{,}5}}=\sqrt{0\ 8}=0{,}89$$

Подсчитаем теперь

$$h_{yx} = \sqrt{\frac{\sum f\left(\bar{x}_y - \bar{x}\right)^2}{\sum f_x (x_i - \bar{x})^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1\ (8-12{,}75)^2 + 2\ (13-12\ 75)^2 + 3\ (14{,}7-12{,}75)^2 + 2\ (12-12{,}75)^2}{2\ (8-12{,}75)^2 + 2\ (10-12\ 75)^2 + 1\ (14-12{,}75)^2 + 1\ (16-12\ 75)^2 + 2\ (18-12\ 75)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{35{,}22}{127{,}5}} = \sqrt{0{,}276} = 0{,}525$$

В результате получено два неравных показателя корреляционного отношения Для проверки их значимости следует применить формулу (11 9) для $k = n - 2$

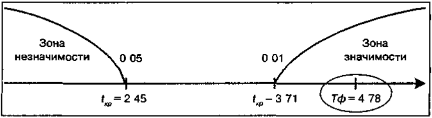
Проверим на уровень значимости первый показатель

$$T\phi = |0\ 89|\ \sqrt{\frac{8-2}{1-0{,}89\ \ 0{,}89}} = 4{,}78$$

По таблице 16 Приложения 1 для $k = n - 2 = 8 - 2 = 6$ находим

$$t_{кр} = \begin{cases} 2{,}45 \text{ для } P \le 0{,}05 \\ 3{,}71 \text{ для } P \le 0{,}01 \end{cases}$$

Строим соответствующую «ось значимости»

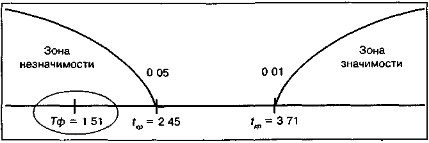


Можно сделать вывод о том, что полученный показатель значим Принимается гипотеза H_1

Подсчитываем уровень значимости второго показателя

$$T\phi = |0{,}525|\ \sqrt{\frac{8-2}{1-0\ 525\ \ 0{,}525}} = 1{,}51$$

Поскольку критические значения уже найдены выше, строим соответствующую «ось значимости»



Следовательно, полученный показатель незначим Принимается гипотеза H_0

Таким образом можно сделать вывод о том, что в данном случае есть значимое влиянне Y на X, а обратное влияние X на Y незначимо Следовательно, решение искомой задачи может звучать так хорошее знание алгебры влияет на эффективность работы с третьим субтестом Векслера, и, напротив, успешное решение третьего субтеста Векслера никак не сказывается на овладении учащимися алгеброй

Разумеется, корреляционное отношение Пирсона не дает возможности установить характер выявленной зависимости — она может быть параболнческой, кубической, логарифмической и др Из результатов анализа ясно только одно связь между переменными X и Y носнт нелинейный характер Более точно характер связи можно определить с помощью метода регрессионного анализа

К сожалению, в психологин метод корреляцнонного отношеиия не нашел широкого распространеиия Миогне нсследования, использующие корреляционый анализ, ограничивались нахожденнем только линейной зависимости между переменнымн, хотя нельзя исключить вероятность того, что реальные связи были нелинейнымн Напомним, что в нашем прнмере коэффициент корреляцни Пирсона, подсчитаиный по формуле (11 1) $r = 0,243$ оказался незначимым Однако, как это было установлено с помощью метода корреляциоиного отношения, связь, с одной стороны, действнтельно была незначимой, а с другой, напротив, высокозначимой

Для применения корреляционного отношения Пирсона необходимо соблюдать следующие условия:

1 Сравниваемые переменные должны быть измерены в шкале интервалов или отношений

2 Предполагается, что обе переменные имеют нормальный закон распределения

3 Число варьирующих признаков в сравниваемых переменных X и Y должно быть одинаковым

4 Для оценки уровня достоверности корреляционного отношения Пирсона следует пользоваться формулой (11 9) и таблицей критических значений для t-критерия Стьюдента при $k = n - 2$

11.10. Множественная корреляция

Наряду с анализом связей между двумя рядами данных можно проводить анализ многомерных корреляционных связей Наиболее простым случаем нахождения подобнои зависимости является вычисление коэффициентов множественной корреляции между тремя переменными X, Y и Z В соответствии с числом переменных вычисляются три коэффициента множественной корреляции Собственно говоря, коэффициент множественной корреляцни оценнвает тесноту линейной связи одной переменной, например X, с двумя остальными, Y и Z, и обозначается как $r_{x(yz)}$ При оценке тесноты линейной связи переменной Y с переменными X и Z, коэффициент множественной корреляции обозначается как $r_{y(xz)}$

Вычисление коэффициентов множественной корреляцин базируется на коэффициентах лннейной корреляции между переменными X и Y — r_{xy}, X и Z — r_{xz}, Y и Z — r_{yz} Для вычисления одного из коэффициентов множественной корреляцни, например $r_{x(yz)}$, нспользуется следующая формула

$$r_{x(y\ )} = \sqrt{\frac{r_{xy}^2 + r_{xz}^2 - 2\ r_{x\iota}\ \ r\ \ \ r_y}{1 - r_{yz}^2}} \qquad (11\ 20)$$

где r_{xy}, r_{xz}, r_{yz} — коэффицненты линейной корреляции между парами переменных X и Y, X и Z, Y и Z

Коэффициент множественной корреляции принимает значения от 0 до 1 Значимость этого коэффициеита оценивают по величине t-критерия Стьюдента с числом степеней свободы $k = n - 3$

Собственно говоря, формулы для вычисления коэффициентов $r_{y(xz)}$ и $r_{z(xy)}$ аналогичны формуле (11 20) и получаются из нее перестановкой индексов

Формула для вычисления коэффициента $r_{y(xz)}$

$$r_{y(x\ )} = \sqrt{\frac{r_{xy}^2 + r_v^2 - 2\ r_{xy}\ r_{xz}\ r_{yz}}{1 - r_{xz}^2}} \qquad (11\ 21)$$

Формула для вычисления коэффициента $r_{z(xy)}$

$$r_{(xy)} = \sqrt{\frac{r_{\chi}^2 + r_v^2 - 2\ r_{x1}\ r_{xz}\ r_{yz}}{1 - r_{xy}^2}} \qquad (11\ 22)$$

Задача 11.9. 10 менеджеров оценивались по методике экспертных оценок психологических характеристик личности руководителя (см Психологические тесты Т 2 Под ред А А. Карелина М Владос 1999 Стр 99) 15 экспертов производили оценку каждой психологической характеристики по пятибальной системе Психолога интересуют три вопроса в какой степени тактичность (переменная *X*) одновременно связана с требовательностью (переменная *Y*) и критичностью (переменная *Z*), в какой степени требовательность одновременно связана с тактичностью и критичностью, и, наконец, в какой степени критичность одновременно связана с тактичностью и требовательностью?

Решение. Результаты исследования сразу представим в виде таблицы 11 12, в которой произведем некоторые нужные вычисления

Таблица 11 12

Испытуемые п/п	Тактичность X	Требовательность Y	Критичность Z	X X	Y Y	Z Z	X Y	Y Z	X Z
1	70	18	36	4900	324	1296	1260	648	2520
2	60	17	29	3600	289	841	1020	439	1740

Продолжение таблицы 11.12

3	70	22	40	4900	484	1600	1540	880	2800
4	46	10	12	2116	100	144	460	120	552
5	58	16	31	3364	256	961	928	496	1798
6	69	18	32	4761	324	1024	1224	576	2208
7	32	9	13	1024	81	169	288	117	416
8	62	18	35	3844	324	1225	1116	630	2170
9	46	15	30	2116	225	900	690	450	1380
10	62	22	36	3844	484	1296	1364	792	2232
Сумма	575	165	294	34469	2891	9456	9908	5202	17816

Для подсчета необходимых коэффициентов множественной корреляции используем следующие выражения:

$$\sum(X_i-\overline{X})^2=\sum(X_i\cdot X_i)-\frac{\left(\sum X_i\right)^2}{n}=34\,469-\frac{575^2}{10}=1406{,}5$$

$$\sum(Y_i-\overline{Y})^2=\sum(Y_i\cdot Y_i)-\frac{\left(\sum Y_i\right)^2}{n}=2891-\frac{165^2}{10}=168{,}5$$

$$\sum(Z_i-\overline{Z})^2=\sum(Z_i\cdot Z_i)-\frac{\left(\sum Z_i\right)^2}{n}=9456-\frac{294^2}{10}=812{,}4$$

Отсюда:

$$S_x=\sqrt{\frac{1406{,}5}{10}}=11{,}86$$

$$S_y=\sqrt{\frac{168{,}5}{10}}=4{,}10$$

$$S_z=\sqrt{\frac{812{,}4}{10}}=9{,}01$$

Далее:

$$\sum(Y_i-\overline{Y})\cdot(X_i-\overline{X})=\sum Y\cdot X-\sum Y\ \sum\frac{X}{n}=9908-165\ \frac{575}{10}=420{,}5$$

$$\sum(Y-\bar{Y})(Z-\bar{Z})=\sum Y\ Z-\sum Y\ \sum\frac{Z}{n}=5202-165\ \frac{294}{10}=351{,}0$$

$$\sum(X-\bar{X})(Z-\bar{Z})=\sum X\ Z-\sum X\ \sum\frac{Z}{n}=17816-575\ \frac{294}{10}=911\ 0$$

Тогда коэффициенты Пирсона таковы

$$r_{xy}=\frac{\sum(Y_i-\bar{Y})(X_i-\bar{X})}{n\ S_x\ S_y}=\frac{420{,}5}{10\ 11{,}86\ 4{,}10}=0{,}865$$

$$r_y=\frac{\sum(Y_i-\bar{Y})(Z_i-\bar{Z})}{n\ S_y\ S}=\frac{351{,}0}{10\ 4{,}10\ 9\ 01}=0{,}950$$

$$r_x=\frac{\sum(X-\bar{X})(Z_i-\bar{Z})}{n\ S_x\ S}=\frac{911\ 0}{10\ 11{,}86\ 9\ 01}=0{,}853$$

Для вычисления $r_{x(yz)}$ подставляем полученные величины в формулу (11 20), получаем

$$r_{x(yz)}=\sqrt{\frac{0{,}865^2+0{,}853^2-2\ 0{,}865\ 0\,853\ 0{,}950}{1-0{,}950^2}}=\sqrt{0{,}758}=0\,871$$

Для вычисления $r_{y(xz)}$ подставляем полученные величины в формулу (11 21), получаем

$$r_{y(x)}=\sqrt{\frac{0{,}865^2+0{,}950^2-2\ 0{,}865\ 0{,}853\ 0{,}950}{1-0{,}853^2}}=\sqrt{0\,9136}=0{,}956$$

Для вычисления $r_{z(xy)}$ подставляем полученные величины в формулу (11 22), получаем

$$r_{x()}=\sqrt{\frac{0{,}950^2+0{,}853^2-2\ 0{,}865\ 0{,}853\ 0{,}950}{1-0{,}865^2}}=\sqrt{0{,}905}=0{,}951$$

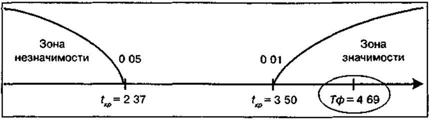
Поскольку из трех коэффицентов, первый $r_{x(yz)}$ оказался наименьшим по абсолютной величине, то проверим значимость только этого коэффициента по хорошо знакомой нам формуле (11 9) при $к = n - 3$

$$T\phi=\frac{0\,871}{\sqrt{\frac{10-3}{1-0\,871\ 0\,871}}}=4\,69$$

По таблице 16 Приложения 1 для t-критерия Стьюдента при $k = 10 - 3 = 7$ находим, что

$$t_{кр} = \begin{cases} 2{,}37 \text{ для } P \le 0{,}05 \\ 3{,}50 \text{ для } P \le 0{,}01 \end{cases}$$

Строим соответствующую «ось значимости»



Полученный коэффициент множественной корреляции попал в зону значимости Следовательно, необходимо принять ги потезу H_1 об отличии полученного коэффициента от нуля Очевидно также, что остальные коэффициенты множественной корреляции также окажутся в зоне значимости Поэтому возможна следующая интерпретация полученного результата — все три оцениваемых качества оказывают существенное влияние друг на друга, иными словами, такие качества личности менеджера, как критичность, тактичность и требовательность, выступают единым комплексом и в очень большой степени необходимы для успешности его профессиональной работы

Для применения множественного коэффициента корреляции необходимо соблюдать следующие условия:

1 Сравниваемые переменные должны быть измерены в шкале интервалов или отношений

2 Предполагается, что все переменные имеют нормальный закон распределения

3 Число варьирующих признаков в сравниваемых переменных должно быть одинаковым

4 Для оценки уровня достоверности корреляционного отношения Пирсона следует пользоваться формулой (11 9) и таблицей критических значений для t-критерия Стьюдента при $k = n - 3$

11.11. Частная корреляция

Название «частная корреляция» был впервые использовано в работе Д. Юла в 1907. Смысл этого понятия иллюстрирует следующий пример. Предположим, что при обработке некоторых данных удалось обнаружить значимую отрицательную корреляцию между длиной волос и ростом (т.е. люди низкого роста обладают более длинными волосами). На первый взгляд это может показаться странным: однако, если включить в расчет еще один признак — переменную «пол» и использовать не линейную, а частную корреляцию, то результат получит закономерное объяснение, поскольку женщины в среднем имеют более длинные волосы, чем мужчины, а их рост в среднем ниже, чем у мужчин. После учета переменной «пол» частная корреляция между длиной волос и ростом может оказаться близкой к единице. Иными словами, если одна величина коррелирует с другой, то это может быть отражением того факта, что они обе коррелируют с третьей величиной или с совокупностью величин.

Если известна линейная связь между парами переменных X, Y и Z, то можно подсчитать частные коэффициенты корреляции, показывающие линейную корреляционную зависимость между двумя переменными при постоянной величине третьей переменной. Для определения частного коэффициента корреляции между переменными X и Y при постоянной величине переменной Z используют формулу:

$$r_{xy(z)} = \frac{r_{xy} - r_{xz} \cdot r_{yz}}{\sqrt{\left(1 - r_{xz}^2\right) \cdot \left(1 - r_{yz}^2\right)}} \qquad (11.23)$$

Заключение (z) в скобки означает, что влияние переменной z на корреляцию между X и Y постоянно. В том случае, если бы влияния переменной Z не было бы совсем, мы бы получили обычный коэффициент корреляции Пирсона между переменными X и Y (который уже подсчитан выше и равен 0,865).

Аналогично строят частные корреляционные зависимости между X и Z (при постоянной Y) и Y и Z (при постоянной X).

$$r_{xz(y)} = \frac{r_{xz} - r_{xy} \cdot r_{yz}}{\sqrt{\left(1 - r_{xy}^2\right) \cdot \left(1 - r_{yz}^2\right)}} \qquad (11.24)$$

$$r_{yz(x)} = \frac{r_{yz} - r_{xy}\ r_{x}}{\sqrt{\left(1 - r_{xr}^2\right)\left(1 - r_{x}^2\right)}} \tag{11 25}$$

Значимость частного коэффициента корреляции оценивают по величине *Тф*, подсчитанной по формуле (11 9) для *t*-критерия Стьюдента с числом степеней свободы $k = n - 2$

Задача 11.10. В условиях предыдущей задачи психолога опять интересуют три вопроса в какой степени тактичность (*X*) связана с требовательностью (*Y*), при условии того, что критичность (*Z*) при этом остается неизменной, в какой степени тактичиость (*X*) связана с критичностью (*Z*) при условин того, что требовательность (*Y*) остается неизменной, в какой степени требовательность (*Y*) связана с критичностью (*Z*), при условии того, что тактичность (*X*) остается неизменой?

Решение. На эти вопросы может ответить вычисление коэффициентов частной корреляции по формулам (11 23), (11 24), (11 25)

Для ответа на первый вопрос задачи рассчитаем частный коэффициент корреляции по формуле (11 23)

$$r_{x1(\ )} = \frac{0{,}865 - 0{,}853\ 0{,}950}{\sqrt{(1 - 0{,}853\ 0{,}853)(1 - 0{,}950\ 0{,}950)}} = 0{,}335$$

Для ответа на второй вопрос задачи рассчитаем частный коэффициент корреляции по формуле (11 24)

$$r_{x\ (v)} = \frac{0{,}853 - 0{,}865\ 0{,}950}{\sqrt{(1 - 0{,}865\ 0{,}865)(1 - 0{,}950\ 0{,}950)}} = 0{,}200$$

Для ответа на третий вопрос задачн рассчитаем частный коэффициент корреляцни по формуле (11 25)

$$r_{x\ (v)} = \frac{0{,}950 - 0{,}865\ 0{,}853}{\sqrt{(1 - 0{,}865\ 0{,}865)(1 - 0{,}853\ 0{,}853)}} = 0{,}809$$

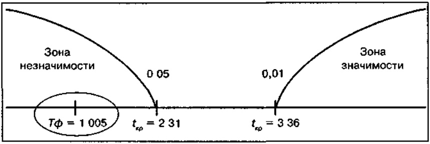
Проверим на значимость первый коэффициент частной корреляции

$$T\phi = 0{,}335\ \sqrt{\frac{10-2}{1-0{,}335\ 0\ 335}} = 1{,}005$$

По таблице 16 Приложения 1 для t-критерия Стьюдента при $k = n - 2 = 10 - 2 = 8$ находим, что

$$t_{кр} = \begin{cases} 2{,}31 \text{ для } P \le 0{,}05 \\ 3{,}36 \text{ для } P \le 0{,}01 \end{cases}$$

Строим соответствующую «ось значимости»



Соответствующий коэффициент частной корреляции попал в зону незначимости, следовательно мы должны принять гипотезу H_0 об отсутствии отличий этого коэффициента от нуля Подсчет этого коэффициента должен был дать ответ на вопрос — в какой степени тактичность (X) связана с требовательиостью (Y), при условии того, что критичность (Z) при этом остается неизменной Выяснилось, что в подобных условиях связь между тактичностью и требовательностью отсутствует Напомним, однако, что все линейные коэффициенты корреляции между измеряемыми переменными были высокозначимыми

Поскольку коэффициент частной корреляции между тактичностью (X) и критичностью (Z) $r_{xz(y)}$ оказался равным 0,200, что существенно меиьше предыдущего частного коэффициента корреляции, то его уровеиь значимости мы оценивать не будем, а сразу дадим интерпретацию полученного результата Выяснилось таким образом, что при постоянной требовательности, связь между тактичностью и критичностью отсутствует

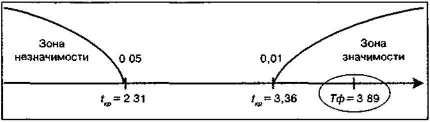
Проверим на уровень значимости последний коэффициент частной корреляции $r_{y\cdot(x)} = 0{,}809$

$$T\phi = 0{,}809\sqrt{\frac{10-2}{1-0{,}809\ 0{,}809}} = 3{,}89$$

По таблице 16 Приложения 1 для t-критерия Стьюдента при $k = n - 2 = 10 - 2 = 8$ находим, что

$$t_{кр} = \begin{cases} 2{,}31 \text{ для } P \le 0{,}05 \\ 3{,}36 \text{ для } P \le 0{,}01 \end{cases}$$

Строим соответствующую «ось значимости»



Коэффициент частной корреляции попал в зону значимости, следовательно необходимо принять гипотезу H_1 об отличии этого коэффициента от нуля Интерпретация полученного результата такова при условии неизменного уровня тактичности, налицо сильная связь между требовательностью и критичностью

Для применения частного коэффициента корреляции необходимо соблюдать следующие условия:

1 Сравниваемые переменные должны быть измерены в шкале интервалов или отношений

2 Предполагается, что все переменные имеют нормальный закон распределения

3 Число варьирующих признаков в сравниваемых переменных должно быть одинаковым

4 Для оценки уровня достоверности корреляционного отношения Пирсона следует пользоваться формулой (11 9) и таблицей критических значений для t-критерия Стьюдента при $k = n - 2$

В заключение подчеркнем, что содержательное ограничение корреляционного анализа состоит в том, что он позволяет обнаружить только наличие связи и не дает оснований для установления причинно-следственных отношений. Например, можно обнаружить положительную корреляцию между уровнем умственного развития детей старшего дошкольного возраста и календарными сроками смены молочных зубов коренными. Другими словами, чем раньше происходит замена молочных зубов, тем выше показатели умственного развития детей. Следует ли делать вывод о том, что смена зубов способствует умственному развитию детей, или, напротив, ускоренное умственное развитие приводит к более быстрому изменению состава зубов. Оба предположения выглядят одинаково нелепо.

Причина в том, что оба показателя непосредственно отражают индивидуальный темп биологического созревания. Другими словами, они связаны с третьей — латентной переменной, которая недоступна для прямого измерения, но благодаря этой связи оба показателя значимо коррелируют между собой. Формальная логика корреляционного анализа не позволяет исследовать эти аспекты взаимообусловленности статистических рядов данных.

Глава 12

РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

12.1. Линейная регрессия

Взаимосвязь между переменными величинами может быть описана разными способами. Напрнмер, как было показано в предыдущем разделе, эту связь можно описать с помощью различных коэффициентов корреляции (линейных, частных, корреляционного отиошения и т.п.). В то же время эту связь можно выразить по-другому: как зависимость между аргументом (величиной) X и функцией Y. В этом случае задача будет состоять в нахождении зависимости вида $Y = F(X)$ или, напротив, в нахождении зависимости вида $X = F(Y)$. При этом изменение функции в зависимости от изменений одного или нескольких аргументов называется регрессией.

Графическое выражение регрессионного уравнения называют линией регрессии. Линия регрессии выражает наилучшее предсказание зависимой переменной (Y) по независимым переменным (X). Эти независимые переменные, а их может быть много, носят название ***предикторов***.

Регрессию выражают с помощью двух уравнений регрессии, которые в самом простом случае выглядят, как уравнения прямой, а именно так:

$$Y = a0 + a1 \cdot X \qquad (12.1)$$

$$X = b0 + b1 \cdot Y \qquad (12.2)$$

В уравнении 12 1 Y — зависимая переменная, а X — независимая переменная, $a0$ свободный член, а $a1$ — коэффициент регрессии, или угловой коэффициент, определяющий наклон линии регрессии по отношению к осям координат

В уравнении 12 2 X — зависимая переменная, а Y — независимая переменная, $b0$ свободный член, а $b1$ — коэффициент регрессии, или угловой коэффициент, определяющий наклон линии регрессии по отношению к осям координат

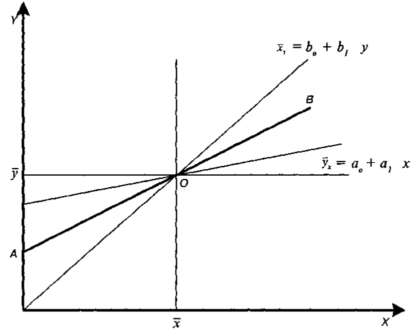


Рис 4. Линии регрессии Y по X и X по Y в системе прямоугольных координат

Линии регрессии пересекаются в точке O ($\bar{x}$, $\bar{y}$), с координатами, соответствующими средним арифметическим значениям корреляционно связанных между собой переменных X и Y Линия AB, проходящая через точку O, соответствует линейной функциональной зависимости между переменными величинами X и Y, когда коэффициент корреляции между X и Y равен $r_{xy} = 1$ При этом наблюдается такая закономерность чем сильнее связь между X и Y, тем ближе обе линии регрессии к прямой AB, и, наоборот, чем слабее связь между этими величинами, тем больше линии регресии отклоняются от прямой AB При отсутствии связи между X и Y линии регрессии оказываются под прямым углом по отношению друг к другу и в этом случае $r_{xy} = 0$

Количественное представление связи (зависимости) между X и Y (между Y и X) называется регрессионным анализом Главная задача регрессионного анализа заключается, собственно говоря, в нахождении коэффициентов $a0$, $b0$, $a1$ и $b1$ и определении уровня значимости полученных аналитических выражений (12 1) и (12 2), связывающих между собой переменные X и Y

При этом коэффициенты регрессии $a1$ и $b1$ показывают, насколько в среднем величина одной переменной изменяется при изменении на единицу меры другой Коэффициент регрессии $a1$ в уравнении (12 1) можно подсчитать по формуле

$$a1 = r_{xy} \frac{S_y}{S_x} \qquad (12\ 3)$$

а коэффициент b1 в уравнении (12 2) по формуле (12 4)

$$b1 = r_{yx} \frac{S_x}{S_y} \qquad (12\ 4)$$

где r_{yx} — коэффициент корреляции между переменными X и Y,

S_x — среднеквадратическое отклонение, подсчитанное для переменной X,

S_y — среднеквадратическое отклонение, подсчитанное для переменной Y

Коэффициенты регрессии можно вычислить также без подсчета среднеквадратических отклонений по следующим формулам

$$a1 = r_{xy} \sqrt{\frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}} \qquad (12\ 5)$$

$$b1 = r_{xy} \cdot \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2}} \qquad (12.6)$$

В том случае, если неизвестен коэффициент корреляции, коэффициенты регрессии можно вычислить по следующим формулам:

$$a1 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})\cdot(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} \qquad (12\ 7)$$

$$b1 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})\cdot(y_i - \bar{y})}{\sum(y_i - \bar{y})^2} \qquad (12.8)$$

Сравнивая формулы (11.1) (вычисление r_{xy}), (12.7) и (12.8), видим, что в числителе этих формул стоит одна и та же величина: $\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$. Последнее говорит о том, что величины $a1$, $b1$ и r_{xy} взаимосвязаны Более того, зная две из них — всегда можно получить третью. Например, зная величины $a1$ и $b1$ можно легко получить r_{xy}:

$$r_{xy} = \sqrt{a1\ b1} \qquad (12.9)$$

Формула (12.9) достаточно очевидна, поскольку, умножив $a1$, вычисленный по формуле (12.3) на $b1$, вычисленный по формуле (12.24), получим:

$$r_{xy} \cdot \frac{S_y}{S_x} \cdot r_{yx} \cdot \frac{S_x}{S_y} = r_{xy} \cdot r_{xy}$$

Формула (12 9) очень важна, поскольку она позволяет по известным значениям коэффициентов регрессии $a1$ и $b1$ определить коэффициент корреляции, и, кроме того, сравнивая вычисления по формулам (11.1) и (12.9), можно проверить правильность расчета коэффициента корреляции Как и коэффициент корреляции, коэффициенты регрессии характеризуют только линейную связь и при положительной связи имеют знак плюс, при отрицательной — знак минус

В свою очередь *свободные члены $a0$ и $b0$ в уравнениях регрессии* придется вычислять по следующим формулам Для подсчета свободного члена $a0$ уравнения регрессии (12 1) используется формула·

$$a0 = \frac{\sum y \ \sum x \ \ \sum x \ \sum x\,y}{\sum x \ - \sum (x)^2} \qquad (12\ 10)$$

Для подсчета свободного члена $b0$ уравнения регрессии (12 2) используется формула

$$b0 = \frac{\sum x \ \sum y - \sum y \ \sum x\,y}{\sum y^2 - \sum (y)^2} \qquad (12\ 11)$$

Вычисления по формулам (12 7) (12 8) (12 10) и (12 11) достаточно сложны поэтому при расчетах коэффициентов регрессии используют как правило более простой метод Он заключается в решении двух систем уравнений При решении одной системы на ходятся величины $a0$ и $a1$ и при решении другои — $b0$ и $b1$

Общий вид снстемы уравнений для нахождения величнн $a0$ и $a1$ таков

$$\begin{cases} a0 \ N + a1 \ \sum x = \sum y \\ a0 \ \sum x + a1 \ \sum (x \ \ x) = \sum y \ \ x \end{cases} \qquad (12\ 12)$$

Общий вид системы уравнений для нахождения величин — $b0$ и $b1$ таков

$$\begin{cases} b0 \ N + b1 \ \sum y = \sum x \\ b0 \ \sum y + b1 \ \sum (y \ \ y) = \sum y \ \ x \end{cases} \qquad (12\ 13)$$

В системах уравнений (12 12) и (12 13) используются следу ющие обозначения

N	—	число элементов в переменной X или в переменнои Y
$\sum x$	—	сумма всех элементов переменнои X
$\sum y$	—	сумма всех элементов переменной Y
$\sum (y \ \ y)$	—	произведение всех элементов переменнои Y друг на друга
$\sum (x \ \ x)$	—	произведение всех элементов переменнои X друг на друга

$\sum(y_i x_i)$ — попарное произведение всех элементов переменной X на соответствующие элементы переменной Y

Приведем несколько примеров линейной регрессии

Пример 1. В исследовании Ф Гальтона (который и ввел в науку понятие регрессии) был измерен рост 205 родителей и 930 их взрослых детей (см таблицу 3 3) При этом, если за Y взять рост ребенка, а за X рост родителя, уравнение регрессии, связывающее рост ребенка с ростом родителей, имеет вид

$$\overline{Y} = Y + \frac{2}{3}\left(X - \overline{X}\right) \qquad (12\ 14)$$

где $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ средние по всей выборке испытуемых

Таким образом, зная величины средних по всей выборке и рост одного из родителей — X_i, из уравнения 12 14 можно подсчитать величину Y_i, т е рост ребенка

Пример 2. Психологи выявили взаимосвязь между успешностью обучения математике Y и показателем невербального интеллекта X Было получено следующее уравнение регрессии

$$Y = 1 + 0{,}025\ \ X \qquad (12\ 15)$$

Предположим, что показатель невербального интеллекта учащегося равен 132, тогда согласно уравнению регрессии (12 15) можно предсказать его показатель средней успеваемости по математике

$$Y = 1 + 0{,}025\ \ 132 = 4{,}3$$

У другого учащегося показатель невербального интеллекта оказался равен 82, тогда его средняя успеваемость по математике составит

$$Y = 1 + 0{,}025\ \ 82 = 3{,}05$$

Для закрепления основных понятий регрессионного анализа решим следующую задачу

Задача 12.1. У 8 подростков психолог сравнивает баллы по третьему субтесту теста Векслера (переменная X) и оценки по алгебре (переменная Y) (см задачу 11 9) Теперь его интересует вопрос на сколько баллов повысится успешность решения третьего субтеста Векслера, если оценки по алгебре повысятся на 1 балл? Кроме того, его интересует вопрос, будет ли повышение успешности решения третьего субтеста Векслера на 1 балл влиять на повышение оценок по алгебре?

Решение. Ответы на эти вопросы психолог получит с помощью использования метода регрессии Расположим исходные данные в виде таблицы, в которой произведем предварительные необходимые вычисления

Таблица 12 1

№ испытуемых п/п	x_i	y_i	$x_i\ y_i$	$x_i\ x_i$	$y_i\ y_i$
1	8	2	16	64	4
2	8	3	24	64	9
3	10	4	40	100	16
4	10	5	50	100	25
5	14	5	70	196	25
6	16	4	64	256	16
7	18	3	54	324	9
8	18	4	72	324	16
Суммы	102	30	390	1428	120

С помощью решения системы уравнений (12 12) необходимо найти уравнение регрессии Y на X, т е определить коэффициенты $a0$ и $a1$, и таким образом ответить на вопрос — на сколько баллов повысится успешность решения третьего субтеста Векслера, если оценки по алгебре повысятся в среднем на 1 балл

В системе уравнений (12 12) благодаря вычислениям, приведенным в таблице 12 1, нам известны все необходимые величины сумм и число $N = 8$, поскольку в эксперименте участвовало 8 человек Итак, находим $a0$ и $a1$ Для этого перепишем систему уравнений (12 12), учитывая данные таблицы 12 1

$$\begin{cases} a0 \quad 8 + a1 \quad 102 = 30 \\ a0 \quad 102 + a1 \quad 1428 = 390 \end{cases} \qquad (12\ 16)$$

Решая эту систему уравнений, находим $a0 = 3$ и $a1 = 0{,}06$

Следовательно, искомое уравнение регрессии Y на X будет иметь вид

$$\overline{Y}x = 3 + 0{,}06 \quad X \qquad (12\ 17)$$

Теперь найдем уравнение регрессии X на Y Для этого необходимо решить систему уравнений (12 13), чтобы определить величины $b0$ и $b1$ Подставляем в систему уравнений (12 13) данные из таблицы 12 1 получаем

$$\begin{cases} b0 \quad 8 + b1 \quad 30 = 102 \\ b0 \quad 30 + b1 \quad 120 = 390 \end{cases} \qquad (12\ 18)$$

Решая эту систему уравнений, находим $b0 = 9$ и $b1 = 1$

Тогда искомое уравнение регрессии X на Y будет иметь вид

$$\overline{X}y = 9 + 1 \quad Y \qquad (12\ 19)$$

У нас получено два уравнения регрессии (12 17) и (12 19) Коэффициенты $a1$ и $b1$ в уравнениях регрессии показывают, насколько в среднем величина одного признака, например Y, изменяется при изменении другого признака на единицу меры, например X

Иными словами, мы уже можем ответить на оба вопроса нашей задачи Так, согласно уравнению (12 17), увеличение на 1 балл успешности решения третьего субтеста теста Векслера влечет за собой увеличение оценок по алгебре на 0,06 или на 6% В то же время, согласно уравнению регрессии (12 19), — увеличение на 1 балл оценки по алгебре влечет за собой увеличение оценок по третьему субтесту Векслера также на 1 балл

Читателю предлагается сравнить выводы, полученные при решении задач 11 9 и 12 1 и провести аналогию между результатами

Регрессионные уравнения (12 17) и (12 19) можно получить также и другим способом на основе коэффициента корреляции Пирсона между признаками X и Y (он был вычислен в задаче 11 9 и оказался равным 0,243) и дисперсиями переменных X и Y

Подсчитаем дисперсии S_x и S_y по формуле (4 7) Они равны соответственно 4,27 и 1,04

Тогда коэффициент $a1$ для уравнения регрессии (12 17) подсчитывается согласно формуле (12 3) следующим образом

$$a1 = r_{xy} \frac{S_y}{S_x} = 0{,}243 \frac{1{,}04}{4{,}27} = 0{,}06$$

Аналогично коэффициент $b1$ для уравнения регрессии (12 19) подсчитывается по формуле (12 4) следующим образом

$$b = r_{xy} \frac{S_x}{S_y} = 0{,}243 \frac{4{,}27}{1{,}04} = 0{,}997 \approx 1$$

Выше было показано, что если известны два коэффициента регрессии для обеих линий регрессий (т е Y по X и X по Y), то на их основе можно получить коэффициент линейной корреляции между X и Y по формуле (12 9) Проделаем эти вычисления

$$r_{xy} = \sqrt{0\ 06\ \ 0\ 997} - 0{,}244$$

Для применения метода линейного регрессионного анализа необходимо соблюдать следующие условия:

1 Сравниваемые переменные X и Y должны быть измерены в шкале интервалов или отношений

2 Предполагается, что переменные X и Y имеют нормальный закон распределения

3 Число варьирующих признаков в сравниваемых переменных должно быть одинаковым

12.2. Множественная линейная регрессия

Предположим, что психолог при анализе успешности обучения подростков в дополнение к независимой переменной IQ рассматривает другие независимые переменные, влияющие, по его мнению, на успеваемость, например такие, как мотивация, личностные особенности и т п В этом случае можно построить линейное уравнение множественной регрессии, в которое будут входить все вышеназванные переменные В общем случае, зависимость между несколькими переменными величинами выражают уравнением множественной регрессии, которая может быть как линейнои, так и не линейной В простейшем случае множественная линейная регрессия выражается уравнением с двумя независимыми переменными величинами X и Z и имеет вид (12 20) Y в данном случае является зависимой переменной

$$Y = a + b \ X + c \ Z \tag{12 20}$$

где a — свободный член, b и c — параметры уравнения (12 20)

Уравнение (12 20) может решаться относительно зависимой переменной Z, тогда X и Y являются независимыми переменными и уравнение множественной регрессии имеет следующий вид

$$Z = a + b \ X + c \ Y \tag{12 21}$$

Можно решить уравнение (12 20) и относительно X, тогда Z и Y будут независимыми переменными, а уравнение будет иметь следующий вид

$$X = a + b \ Y + c \ Z \tag{12 22}$$

При проведении конкретных расчетов выбор зависимых и независимых переменных определяется планом эксперимента

Решение уравнений (12 20), (12 21) и (12 22) состоит в том, что находятся величины a, b и c на основе решения системы из трех уравнений

Для решения уравнения (12 20) система имеет следующий вид

$$\begin{cases} a \ N + b \ \sum x + c \ \sum z_i = \sum y \\ a \ \sum x + b \ \sum (x \ \ x) + c \ \sum x \ \ z = \sum x \ \ y_i \\ a \ \sum z_i + b \ \sum (x_i \ \ z_i) + c \ \sum (z_i \ \ z) = \sum y \ \ z_i \end{cases} \tag{12 13}$$

Для решения уравнения (12 21) система будет выглядеть следующим образом

$$\begin{cases} a \ N + b \ \sum x + c \ \sum y_i = \sum z \\ a \ \sum x + b \ \sum (x \ \ x_i) + c \ \sum y \ \ x = \sum x \ \ z \\ a \ \sum y + b \ \sum (x_i \ \ y) + c \ \sum (y \ \ y) = \sum y \ \ z_i \end{cases} \tag{12 14}$$

Для решения уравнения (12 22) система будет иметь следующий вид

$$\begin{cases} a \ N + b \ \sum y + c \ \sum z = \sum x \\ a \ \sum y + b \ \sum (y \ \ y) + c \ \sum y \ \ z = \sum x \ \ y \\ a \ \sum z_i + b \ \sum (x \ \ z) + c \ \sum (z \ \ z) = \sum x \ \ z_i \end{cases} \qquad (12\ 15)$$

В обшем случае уравнение регрессии представляет собой сложный полином, описывающий зависимость сразу между несколькими переменными Такое уравнение множественной регрессии имеет вид

$$Y = b_0 + b_1 \ X_1 + b_2 \ X_2 + \quad + b_l \ X_p \qquad (12\ 16)$$

Где X_1, X_2, X_3 и т п — интересующие психолога независимые переменные, а Y — зависимая переменная

Приведем примеры уравнений множественной регрессии В исследовании Р Кеттелла было установлено, что эффективность деятельности психолога-практика и психолога-исследователя можно прогнозировать на основе разных характеристик, поскольку уравнения множественной регрессии имеют для них разный вид

Уравнение множественной регрессии для психолога-практика

$$Эфф = 0{,}72A + 0{,}29B + 0{,}29H + 0{,}29N \qquad (12\ 17)$$

Уравнение множественной регрессии для психолога-исследователя

$$Эфф = 0{,}31A + 0{,}78B + 0{,}47N \qquad (12\ 18)$$

Где

A — готовность к контактам,

B — общая интеллектуальность,

H — ненасыщаемость контактами с другими людьми,

N — умение поддерживать контакт

Следовательно, для психолога-исследователя не характерно наличие интенсивного общения, в то время как для психолога-практика интенсивное общение оказывается самым значимым качеством (цит по В Н Дружинин Экспериментальная психология М 1997, с 36)

Для закрепления материала решим с помощью уравнения множественной регрессии следующую задачу Вспомним задачу 11 9, в которой 10 менеджеров оценнвались по методике экспертных оценок психологических характеристик личности руководителя Психолога интересовали тогда связи тактичности (переменная X) с требовательностью (переменная Y) и критичностью (переменная Z) Сейчас его интересует вопрос — при увеличении величины экспертных баллов на 1 при оценке тактичностн, на какую велнчину экспертных баллов увеличится или уменьщнтся экспертная оценка требовательности и критичности?

Иными словами, решается уравнение множественной регрессни вида

$$X = a + b\ Y + c\ Z \qquad (12\ 22)$$

Для решения этой задачи воспользуемся системой уравнений (12 15) и таблицей 11 12 Перепишем данные из таблицы 11 12 сразу в систему уравнений (12 15), получим следующую систему уравнений (12 19)

$$\begin{cases} a\ 10 + b\ 165 + c\ 294 = 575 \\ a\ 165 + b\ 2891 + c\ 5202 = 9908 \\ a\ 294 + b\ 5202 + c\ 9456 = 17816 \end{cases} \qquad (12\ 19)$$

Чтобы решить эту систему относительно параметров a, b и c, разделим каждое из уравнений системы (12 19) на коэффициент при параметре a, т е первое уравнение системы поделим на 10, второе на 165, третье на 294 Получится следующая система уравнений

$$\begin{cases} a + b\ 16{,}5 + c\ 29{,}4 = 57{,}5 \\ a + b\ 17{,}52 + c\ 31{,}52 = 60{,}05 \\ a + b\ 17{,}69 + c\ 32{,}16 = 60{,}59 \end{cases} \qquad (12\ 20)$$

Затем вычтем первое уравнение нз второго, а второе из третьего, получим

$$\begin{cases} b\ 1{,}02 + c\ 2{,}13 = 2{,}55 \\ b\ 0{,}17 + c\ 0{,}64 = 0{,}55 \end{cases} \qquad (12\ 21)$$

Опять проделаем ту же операцию, т е разделим каждое уравнение системы (12 21) на коэффициент при b Для первого уравнения это будет 1,02, а для второго — 0,17 Получим следующую систему

$$\begin{cases} b + c \quad 2{,}08 = 2{,}49 \\ b + c \quad 3{,}68 = 3{,}18 \end{cases} \qquad (12\ 22)$$

Вычтем из первого уравнения системы (12 22) второе, получим

$$- c \quad 1{,}59 = - 0{,}68 \qquad (12\ 23)$$

Отсюда $c = 0{,}43$

Подставляя полученное значенне c в первое уравнение системы (12 23) получаем

$$b + 0{,}43 \quad 2{,}08 = 2{,}49 \qquad (12\ 24)$$

Отсюда $b = 1{,}59$

Подставляем полученные значення b и c в первое уравнение системы (12 20) получаем

$$a + 1{,}59 \quad 16{,}5 + 0{,}43 \quad 29{,}4 = 57{,}5 \qquad (12\ 25)$$

Отсюда $a = 18{,}47$

Следовательно, искомое уравнение регресии будет выглядеть так

$$X = 18{,}47 + 1{,}59 \quad Y + 0{,}43 \quad Z \qquad (12\ 26)$$

Полученное уравнение (12 26) дает ответ на вопрос задачи Так, при увеличении величины оценки тактичности на 1 балл величина экспертных оценок показателя требовательности увеличится в среднем на 1,6 балла, при постоянной величине критнчности А при постоянной величине требовательности при увеличении величины оценки тактнчности величина экспертных оценок показателя критичности увеличится в среднем на 0,43 балла

Полученное уравнение множественной регрессии (12 26) имеет еще одно приложение Так, подставляя в него значения переменных Y и Z, можно определить ожидаемую величину переменной X Для $Y = 10$ и $Z = 8$ получаем экспертную оценку тактичности в среднем $X \approx 38$, а при $Y = 15$ и $Z = 14$ экспертная оценка тактичности в среднем $X \approx 48{,}5$

Для применения метода множественной линейной регрессии необходимо соблюдать следующие условия:

1 Сравниваемые переменные должны быть измерены в шкале интервалов или отношений

2 Предполагается, что все переменные имеют нормальный закон распределения

3 Число варьирующих признаков в сравниваемых переменных должно быть одинаковым

12.3. Оценка уровней значимости коэффициентов регрессионного уравнения

Для коэффициентов регрессионного уравнения проверка их уровня значимости осуществляется по t-критерию Стьюдента и по критерию F Фишера Ниже мы рассмотрим оценку достоверности показателей регрессии только для линейных уравнений (12 1) и (12 2)

$$Y = a0 + a1 \quad X \qquad (12\ 1)$$

$$X = b0 + b1 \quad Y \qquad (12\ 2)$$

Для это типа уравнений оценивают по t-критерию Стьюдента только величины коэффициентов $a1$ и $b1$ с использованием вычисления величины $Tф$ по следующим формулам

$$Tф = \frac{a1}{Sb_{yx}} \qquad (12\ 27)$$

где
$$Sb_x = \sqrt{\frac{(1-r_x^2)\sum(y-\bar{y})^2}{(n-2)\sum(x-\bar{x})^2}} \qquad (12\ 28)$$

Где r_{yx} коэффициент корреляции, а величину $a1$ можно вычислить по формулам 12 5 или 12 7

Формула (12 27) используется для вычисления величины $Tф$ которая позволяет оценить уровень значимости коэффициента $a1$ уравнения регрессии Y по X

$$Tф = \frac{b1}{Sb_x} \qquad (12\ 29)$$

где $$Sb = \sqrt{\frac{(1-r_{yx}^2)\sum(x-\bar{x})^2}{(n-2)\sum(y-\bar{y})^2}} \quad (12\ 30)$$

Величину $b1$ можно вычислить по формулам (12 6) или (12 8)

Формула (12 29) используется для вычисления величины $Tф$, которая позволяет оценить уровень значимости коэффицнента $b1$ уравнения регрессии X по Y

Пример. Оценим уровень значимости коэффициентов регрессии $a1$ и $b1$ уравнений (12 17), и (12 18), полученных при решении задачи 12 1 Воспользуемся для этого формулами (12 27), (12 28), (12 29) и (12 30)

Напомним вид полученных уравнений регрессии

$$Yx = 3 + 0{,}06 \quad X \quad (12\ 17)$$

$$Xy = 9 + 1 \quad Y \quad (12\ 19)$$

Величина $a1$ в уравнении (12 17) равна 0,06 Поэтому для расчета по формуле (12 27) нужно подсчитать величину Sb_{yx} Согласно условию задачи величина $n = 8$ Коэффициент корреляции также уже был подсчитан нами по формуле 12 9

$r - \sqrt{0\ 06\ \ 0{,}997} = 0\ 244$ Осталось вычислить величины $\sum(y-\bar{y})^2$ и $\sum(x-\bar{x})^2$, которые у нас не подсчитаны Лучше всего эти расчеты проделать в таблице 12 2

Таблица 12 2

№ испытуемых п/п	x_i	y_i	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$y-\bar{y}$	$(y-\bar{y})^2$
1	8	2	- 4 75	22 56	- 1 75	3 06
2	8	3	4 75	22 56	0 75	0 56
3	10	4	2 75	7 56	0 25	0 06
4	10	5	- 2 75	7 56	1 25	15 62
5	14	5	1 25	1 56	1 25	15 62
6	16	4	3 25	10 56	0 25	0 06
7	18	3	5 25	27 56	- 0 75	0 56
8	18	4	5 25	27 56	0 25	0 06
Суммы	102	30	0	127 48	0	35 6
Средние	12 75	3 75				

Подставляем полученные значения в формулу (12 28), получаем

$$Sb_{yx} = \sqrt{\frac{(1-0{,}244^2)\ 35{,}6}{(8-2)\ 127{,}48}} = \sqrt{\frac{33{,}48}{764{,}88}} = \sqrt{0{,}043} = 0{,}21$$

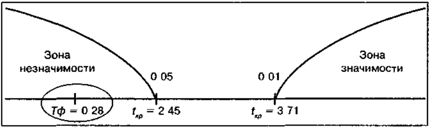
Теперь рассчитаем величину *Тф* по формуле (12 27)

$$Гф = \frac{a1}{Sb_{yx}} = \frac{0{,}6}{0{,}21} = 0{,}28$$

Величина *Тф* проверяется на уровень значимости по таблице 16 Приложения 1 для *t*-критерия Стьюдента Число степеней свободы в этом случае будет равно 8 – 2 = 6, поэтому критические значения равны соответственно для $P \leq 0{,}05$ $t_{кр} = 2{,}45$ и для $P \leq 0{,}01$ $t_{кр} = 3{,}71$ В принятой форме записи это выглядит так

$$t_{кр} = \begin{cases} 2{,}45 \text{ для } P \leq 0{,}05 \\ 3{,}71 \text{ для } P \leq 0{,}01 \end{cases}$$

Строим «ось значимости»



Полученная величина *Тф* попала в зону незначимости, следовательно мы должны принять гипотезу H_0 о том, что величина коэффициента регрессии уравнения (12 17) неотличима от нуля Иными словами, полученное уравнение регрессии неадекватно исходным экспериментальным данным

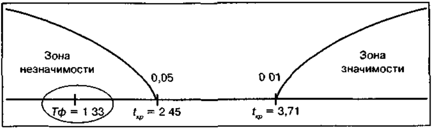
Рассчитаем теперь уровень значимости коэффициента *b*1 Для этого необходимо вычислить величину Sb_{xy} по формуле (12 30), для которой уже расчитаны все необходимые величины

$$Sb_{xy} = \sqrt{\frac{(1-0{,}244^2)\ 127{,}48}{(8-2)\ 35{,}6}} = \sqrt{\frac{119{,}83}{213{,}6}} = \sqrt{0{,}561} = 0{,}75$$

Теперь рассчитаем величину *Тф* по формуле (12 27)

$$Тф = \frac{b1}{Sb_{x}} = \frac{1}{0{,}75} = 1{,}33$$

Мы можем сразу построить «ось значимости», поскольку все предварительные операции были проделаны выше



Полученная величина *Тф* попала в зону незначимости, следовательно мы должны принять гипотезу H_0 о том, что величина коэффициента регрессии уравнения (12 19) неотличима от нуля Иными словами, полученное уравнение регрессии неадекватно исходным экспериментальным данным

12.4. Нелинейная регрессия

Полученный в предыдущем разделе результат несколько обескураживает мы получили, что оба уравнения регрессии (12 15) и (12 17) неадекватны экспериментальным данным Последнее произошло потому, что оба эти уравнения характеризуют линейную связь между признаками, а мы в разделе 11 9 показали, что между переменными *X* и *Y* имеется значимая криволинейная зависимость Иными словами, между переменными *X* и *Y* в этой задаче необходимо искать не линейные, а криволинейные связи Проделаем это с использованием пакета «Стадия 6 0» (разработка А П Кулаичева, регистрационный номер 1205)

Задача 12.2. Психолог хочет подобрать регрессионную модель, адекватную экспериментальным данным, полученным в задаче 11 9

Решение. Эта задача решается простым перебором моделей криволинейной регрессии предлагаемых в статистическом пакете Стадия Пакет организован таким образом, что в электронную таблицу, которая является исходной для дальнеишеи работы, заносятся экспериментальные данные в виде первого столбца для переменной X и второго столбца для переменной Y Затем в основном меню выбирается раздел Статистики, в нем подраздел — регрессионный анализ, в этом подразделе вновь подраздел — криволинеиная регрессия В последнем меню даны формулы (модели) различных видов криволинейной регрессии, согласно которым можно вычислять соответствующие регрессионные коэффициенты и сразу же проверять их на значимость Ниже рассмотрим только несколько примеров работы с готовыми моделями (формулами) криволинейной регрессии

1 Первая модель — экспонента Ее формула такова

$$\overline{Y}x = \sum(a_0 + a_1 \quad X)$$

При расчете с помощью статпакета получаем $a_0 = 1$ и $a_1 = 0,022$

Расчет уровня значимости для a_1 дал величину $P = 0\ 535$ Очевидно, что полученная величина незначима Следовательно, данная регрессионная модель неадекватна экспериментальным данным

2 Вторая модель — степенная Ее формула такова

$$\overline{Y}x = a_0 + a_1 \quad X_i$$

При подсчете $a_0 = -5,29$, $a_1 = 7,02$ и $a_2 = 0,0987$

Уровень значимости для a_1 — $P = 7,02$ и для a_2 — $P = 0,991$ Очевидно, что ни один из коэффициентов не значим

Вывод — данная модель неадекватна экспериментальным данным

3 Третья модель — полином Ее формула такова

$$Y = a_0 + a_1 \quad X^1 + a_2 \quad X^1 + a_3 \quad X^3$$

При подсчете $a_0 = -29,8$, $a_1 = 7,28$, $a_2 = -0,488$ и $a_3 = 0,0103$

Уровень значимости для a_1 — $P = 0,143$, для a_2 — $P = 0,2$ и для a — $P = 0,272$

Вывод — данная модель неадекватна экспериментальным данным

4 Четвертая модель — парабола Ее формула такова

$$Y = a_0 + a_1 \ X^1 + a_2 \ X^1$$

При подсчете $a_0 = -9{,}88$, $a_1 = 2{,}24$ и $a_2 = -0{,}0839$

Уровень значимости для a_1 — $P = 0{,}0186$, для a_2 — $P = 0{,}0201$ Оба регрессионных коэффициента оказались значимыми Следовательно, задача решена — мы выявили форму криволинейной зависимости между успешностью решения третьего субтеста Векслера и уровнем знаний по алгебре — это зависимость параболического вида Этот результат подтверждает вывод, полученный при решении задачи 11 9 о наличии криволинейной зависимости между переменными Подчеркнем, что именно с помощью криволинейной регрессии был получен точный вид зависимости между изучаемыми переменными

Главв 13

ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

13.1. Основные понятия факторного анализа

Факторный анализ — статистический метод, который используется при обработке больших массивов экспериментальных данных Задачами факторного анализа являются сокращение числа переменных (редукция данных) и определение структуры взаимосвязей между переменными, т е классификация переменных, поэтому факторный анализ используется как метод сокращения данных или как метод структурной классификации

Важное отличие факторного анализа от всех описанных выше методов заключается в том, что его нельзя прнменять для обработки первичных, или, как говорят, «сырых», экспериментальных данных, т е полученных непосредственно при обследовании испытуемых Материалом для факторного анализа служат корреляционные связи, а точнее — коэффициенты корреляции Пирсона, которые вычисляются между переменными (т е психологическими признаками), включенными в обследование Иными словами, факторному анализу подвергают корреляционные матрицы, или, как их иначе называют, матрицы интеркорреляции Наименования столбцов и строк в этих матрицах одинаковы так как они представляют собой перечень переменных, включенных в анализ По этой причине матрицы интеркорреляций всегда квадратные, т е число строк в них равно числу столбцов, и симметричные, т е на симметричных местах относительно главной диагонали стоят одни и те же коэффициенты корреляции

Необходимо подчеркнуть, что исходная таблица данных, из которой получается корреляционная матрица, не обязательно должна быть квадратной Например, психолог измерил три показателя интеллекта (вербальный, невербальный и общий) и школьные отметки по трем учебным предметам (литература, математика, физика) у 100 испытуемых — учащихся девятых классов Исходная матрица данных будет иметь размер 100×6, а матрица интеркорреляций размер 6×6, поскольку в ней имеется только 6 переменных При таком количестве переменных матрица интеркорреляций будет включать 15 коэффициентов и проанализировать ее не составит труда

Однако представим, что произойдет, если психолог получит не 6, а 100 показателей от каждого испытуемого В этом случае он должен будет анализировать 4950 коэффициентов корреляции Число коэффициентов в матрице вычисляется по формуле $\frac{n\ (n+1)}{2}$ и в нашем случае равно соответственно $\frac{(100 \times 99)}{2} = 4950$ Очевидно, что провести визуальный анализ такой матрицы — задача труднореализуемая Вместо этого психолог может выполнить математическую процедуру факторного анализа корреляционной матрицы размером 100×100 (100 испытуемых и 100 переменных) и таким путем получить более простой материал для интерпретации экспериментальных результатов

Главное понятие факторного анализа — **фактор** Это искусственный статистический показатель, возникающий в результате специальных преобразований таблицы коэффициентов корреляции между изучаемыми психологическими признаками, или матрицы интеркорреляций Процедура извлечения факторов из матрицы интеркорреляций называется факторизацией матрицы В результате факторизации из корреляционной матрицы может быть извлечено разное количество факторов вплоть до числа, равного количеству исходных переменных Однако факторы, выделяемые в результате факторизации, как правило, неравноценны по своему значению

Элементы факторной матрицы называются ***«факторными нагрузками, или весами»***, и они представляют собой коэффициенты корреляции данного фактора со всеми показателями, использованными в исследовании Факторная матрица очень важна, поскольку она показывает, как изучаемые показатели связаны с каждым выделенным фактором При этом факторный вес демонстрирует меру, или тесноту, этой связи

Поскольку каждый столбец факторной матрицы (фактор) является своего рода переменной величиной, то сами факторы также могут коррелировать между собой Здесь возможны два случая корреляция между факторами равна нулю, в таком случае факторы являются независимыми (ортогональными) Если корреляция между факторами больше нуля, то в таком случае факторы считаются зависимыми (облическими) Подчеркнем, что ортогональные факторы в отличие от облических дают более простые варианты взаимодействий внутри факторной матрицы

В качестве иллюстрации ортогональных факторов часто приводят задачу Л Терстоуна, который, взяв ряд коробок разных размеров и формы, измерил в каждой из них больше 20 различных показателей и вычислил корреляции между ними Профакторизовав полученную матрицу интеркорреляций, он получил три фактора, корреляция между которыми была равна нулю Этими факторами были «длина», «ширина» и «высота»

Для того чтобы лучше уловить сущность факторного анализа, разберем более подробно следующий пример

Предположим, что психолог у случайной выборки студентов получает следующие данные

- V_1 — вес тела (в кг),
- V_2 — количество посещений лекций и семинарских занятий по предмету,
- V_3 — длина ноги (в см),
- V_4 — количество прочитанных книг по предмету,
- V_5 — длина руки (в см),
- V_6 — экзаменационная оценка по предмету

(V — от английского слова variable — переменная)

При анализе этих признаков не лишено оснований предположение о том, что переменные V_1, V_3 и V_5 — будут связаны между собой, поскольку чем больше человек, тем больше он весит и тем длиннее его конечности Сказанное означает, что между этими переменными должны получиться статистически значимые коэффициенты корреляции, поскольку эти три переменные измеряют некоторое фундаментальное свойство индивидуумов в выборке, а именно их размеры Точно так же вероятно, что при вычислении корреляций между V_2, V_4 и V_6 тоже будут получены достаточно высокие коэффициенты корреляции, поскольку посещение лекций и самостоятельные занятия будут способствовать получению более высоких оценок по изучаемому предмету

Таким образом, из всего возможного массива коэффициентов, который получается путем перебора пар коррелируемых признаков V_1 и V_2, V_1 и V_3 и т д , предположительно выделятся два блока статистически значимых корреляций Остальная часть корреляций — между признаками, входящими в разные блоки, вряд ли будет иметь статистически значимые коэффициенты, поскольку связи между такими признаками, как размер конечности и успеваемость по предмету, имеют скорее всего случайный характер Итак, содержательный анализ 6 наших переменных показывает, что они, по сути дела, измеряют только две обобщенные характеристики, а именно размеры тела и степень подготовленности по предмету

К полученной матрице интеркорреляций, т е вычисленным попарно коэффициентам корреляций между всеми шестью переменными $V_1 - V_6$, допустимо применить факторный анализ Его можно проводить и вручную, с помощью калькулятора, однако процедура подобной статистической обработки очень трудоемка По этой причине в настоящее время факторный анализ проводится на компьютерах, как правило, с помощью стандартных статистических пакетов Во всех современных статистических пакетах есть программы для корреляционного и факторного анализов Компьютерная программа по факторному анализу по существу пытается «объяснить» корреляции между переменными в терминах небольшого числа факторов (в нашем примере двух)

Предположим, что, используя компьютерную программу, мы получили матрицу интеркорреляций всех шести переменных и подвергли ее факторному анализу В результате факторного анализа получилась таблица 13 1, которую называют «факторной матрицей», или «факторной структурной матрицей»

Таблица 13 1

Переменная	Фактор 1	Фактор 2
V_1	0 91	0 01
V_2	0 20	0 96
V_3	0 94	- 0 15
V_4	0 11	0 85
V_5	0 89	0 07
V_6	- 0 13	0 93

По традиции факторы представляются в таблице в виде столбцов, а переменные в вндe строк Заголовки столбцов таблицы 13 1 соответствуют номерам выделенных факторов, но более точно было бы нх называть «факторные нагрузки», или «веса», по фактору 1, то же самое по фактору 2 Как указывалось выше, факторные нагрузки, или веса, представляют собой корреляции между соответствующей переменной и данным фактором Например, первое число 0,91 в первом факторе означает, что корреляция между первым фактором и переменной V_1 равна 0,91 Чем выше факторная нагрузка по абсолютной величине, тем больше ее связь с фактором

Из таблицы 13 1 видно, что переменные V_1, V_3 и V_5 имеют большие корреляции с фактором 1 (фактически переменная 3 имеет корреляцию близкую к 1 с фактором 1) В то же время переменные V_1, V_3 и V_5 имеют корреляции близкие к 0 с фактором 2 Подобио этому фактор 2 высоко коррелирует с переменными V_2, V_4 и V_6 и фактически не коррелирует с переменными V_1, V_3 и V_5

В данном примере очевидно, что существуют две структуры корреляций, и, следовательно, вся информация таблицы 13 1 определяется двумя факторами Теперь начинается заключительный этап работы — интерпретация полученных данных Анализируя факторную матрицу, очень важно учитывать знаки факторных нагрузок в каждом факторе Если в одиом и том же факторе встречаются нагрузки с противоположными знаками, это означает, что между переменными, имеющими протнвоположные знаки, существует обратио пропорциональная зависимость

Отметим, что при интерпретации фактора для удобства можно изменить знаки всех нагрузок по данному фактору на противоположные

Факторная матрица показывает также, какие переменные образуют каждый фактор Это связано, прежде всего, с уровнем значимости факторного веса По традиции минимальный уровень значимости коэффициентов корреляции в факторном анализе берется равным 0,4 или даже 0,3 (по абсолютной величине), поскольку нет специальных таблиц, по которым можно было бы определить критические значения для уровня значимости в факторной матрице Следовательно, самый простой способ увидеть какие переменные «принадлежат» фактору это значит отметить те из них, которые имеют нагрузки выше чем 0,4 (или меньше чем – 0,4) Укажем, что в компьютерных пакетах иногда уровень значимости факторного веса определяется самой программой и устанавливается на более высоком уровне, например 0,7

Так, из таблицы 13 1, следует вывод, что фактор 1 — это сочетание переменных V_1, V_3 и V_5 (но не V_1, V_4 и V_6, поскольку их факторные нагрузки по модулю меньше чем 0,4) Подобно этому фактор 2 представляет собой сочетание переменных V_2, V_4 и V_6

Выделенный в результате факторизации фактор представляет собой совокупность тех переменных из числа включенных в анализ, которые имеют значимые нагрузки Нередко случается, однако, что в фактор входит только одна переменная со значимым факторным весом, а остальные имеют незначимую факторную нагрузку В этом случае фактор будет определяться по названию единственной значимой переменной

В сущности, фактор можно рассматривать как искусственную «единицу» группировки переменных (признаков) на основе имеющихся между ними связей Эта единица является условной, потому что, изменив определенные условия процедуры факторизации матрицы интеркорреляций, можно получить иную факторную матрицу (структуру) В новой матрице может оказаться иным распределение переменных по факторам и их факторные нагрузки.

В связи с этим в факторном анализе существует понятие «простая структура» Простой называют структуру факторной матрицы, в которой каждая переменная имеет значимые нагрузки только по одному из факторов, а сами факторы ортогональны, т е не зависят друг от друга В нашем примере два общих фактора независимы Факторная матрица с простой структурой позволяет провести интерпретацию полученного результата и дать наименование каждому фактору В нашем случае фактор первый — «размеры тела», фактор второй — «уровень подготовленности»

Сказанное выше не исчерпывает содержательных возможностей факторной матрицы Из нее можно извлечь дополнительные характеристики, позволяющие более детально исследовать связи переменных и факторов Эти характеристики называются «общность» и «собственное значение» фактора

Однако, прежде чем представить их описание, укажем на одно принципиально важное свойство коэффициента корреляции, благодаря которому получают эти характеристики Коэффициент корреляции, возведенный в квадрат (т е помноженный сам на себя), показывает, какая часть дисперсии (вариативности) признака является общей для двух переменных, или, говоря проще, насколько сильно эти переменные перекрываются Так, например, две переменные с корреляцией 0,9 перекрываются со степенью $0{,}9 \times 0{,}9 = 0{,}81$ Это означает, что 81% дисперсии той и другой переменной являются общими, т е совпадают Напомним, что факторные нагрузки в факторной матрице — это коэффициенты корреляции между факторами и переменными, поэтому, возведенная в квадрат факторная нагрузка характеризует степень общности (или перекрытия) дисперсий данной переменной и данного фактором

Если полученные факторы не зависят друг от друга («ортогональное» решение), по весам факторной матрицы можно определить, какая часть дисперсии является общей для переменной и фактора Вычислить, какая часть вариативности каждой переменной совпадает с вариативностью факторов, можно простым суммированием квадратов факторных нагрузок по всем факторам Из таблицы 13 1, например, следует, что $0{,}91 \times 0{,}91 + 0{,}01 \times 0{,}01 = 0{,}8282$, т е около 82% вариативности первой переменной «объясняется» двумя первыми факторами Полученная величина называется ***общностью*** переменной, в данном случае переменной V_1

Переменные могут иметь разную степень общности с факторами Переменная с большей общностью имеет значительную степень перекрытия (большую долю дисперсии) с одним или несколькими факторами Низкая общность подразумевает, что все корреляции между переменными и факторами невелики Это означает, что ни один из факторов не имеет совпадающей доли вариативности с данной переменной Низкая общность может свидетельствовать о том, что переменная измеряет нечто качественно отличающееся от других переменных, включенных в анализ Например, одна переменная, связанная с оценкой мотивации среди заданий, оценивающих способности, будет иметь общность с факторами способностей близкую к нулю

Малая общность может также означать, что определенное задание испытывает на себе сильное влияние ошибки измерения или крайне сложно для испытуемого Возможно, напротив, также, что задание настолько просто, что каждый испытуемый дает на него правильный ответ, или задание настолько нечетко по содержанию, что испытуемый не понимает суть вопроса Таким образом, низкая общность подразумевает, что данная переменная не совмещается с факторами по одной из причин либо переменная измеряет другое понятие, либо переменная имеет большую ошибку измерения, либо существуют искажающие дисперсию признака различия между испытуемыми в вариантах ответа на это задание

Наконец, с помощью такой характеристики, как собственное значение фактора, можно определить относительную значимость каждого из выделенных факторов Для этого надо вычислить, какую часть дисперсии (вариативности) объясняет каждый фактор Тот фактор, который объясняет 45% дисперсии (перекрытия) между переменными в исходной корреляционной матрице, очевидно является более значимым, чем другой, который объясняет только 25% дисперсии Эти рассуждения, однако, допустимы, если факторы ортогональны, иначе говоря, не зависят друг от друга

Для того чтобы вычислить собственное значение фактора, нужно возвести в квадрат факторные нагрузки и сложить их по столбцу Используя данные таблицы 13 1 можно убедиться что собственное значение фактора 1 составляет ($0,91 \times 0,91 + 0,20 \times 0,20 + 0,94 \times$

$\times$ 0,94 + 0,11 $\times$ 0,11 + 0,84 $\times$ 0,84 + (– 0,13) $\times$ (– 0,13)) = 2,4863
Если собственное значение фактора разделить на число переменных (6 в нащем примере), то полученное число покажет, какая доля дисперсии объясняется данным фактором В нашем случае получится $\frac{2,4863}{6}$ 100% = 41,4% Иными словами, фактор 1 объясняет около 41% информации (дисперсии) в исходной корреляционной матрице Аналогнчный подсчет для второго фактора даст 41,5% В сумме это будет составлять 82,9%

Таким образом, два общих фактора, будучн объединены, объясняют только 82,9% дисперсии показателей исходной корреляционной матрицы Что случилось с «оставшимися» 17,1%? Дело в том, что рассматрнвая корреляции между 6 переменными, мы отмечали, что корреляцин распадаются на два отдельных блока, и поэтому решили, что логично анализировать материал в понятиях двух факторов, а не 6, как и количество исходных переменных Другими словами, число конструктов, необходимых, чтобы описать данные, уменьшилось с 6 (число переменных) до 2 (число общих факторов) В результате факторизации часть ннформации в исходной корреляционной матрице была принесена в жертву построению двухфакторной модели Единственным условием, при котором информация не утрачивается, было бы рассмотрение шестифакторной модели

13.2. Условия применения факторного анализа

Факторный анализ может быть уместен, если выполняются следующие критерии

1 Нельзя факторизовать качественные данные, полученные по шкале наименований, например, такие, как цвет волос (черный / каштановый / рыжий) и т п

2 Все переменные должны быть незавнсимыми, а их распределение должно приближаться к нормальному

3 Связи между переменными должны быть приблизительно линейны или, по крайней мере, не иметь явно криволинейного характера

4 В исходной корреляционной матрице должно быть несколько корреляций по модулю выше 0,3 В противном случае достаточно трудно извлечь из матрицы какие-либо факторы

5 Выборка испытуемых должна быть достаточно большой Рекомендации экспертов варьируют Наиболее жесткая точка зрения рекомендует не применять факторный анализ, если число испытуемых меньше 100, поскольку стандартные ошибки корреляции в этом случае окажутся слишком велики

Однако если факторы хорошо определены (например, с нагрузками 0,7, а не 0,3), экспериментатору нужна меньшая выборка, чтобы выделить их Кроме того, если известно, что полученные данные отличаются высокой надежностью (например, используются валидные тесты), то можно анализировать данные и по меньшему числу испытуемых

13.3. Приемы для определения числа факторов

Разработано несколько приемов для выбора «правильного» числа факторов из корреляционной матрицы Определение числа выделяемых факторов, вероятно, наиболее важное решение, которое необходимо принять при проведении факторного анализа Неверное решение может привести к бессмысленным результатам при обработке самого четкого набора данных Нет ничего страшного в том, чтобы попытаться выполнить несколько вариантов анализа, базирующегося на разном числе факторов, и использовать нескольких различных приемов, определяющих выбор факторов

Первые руководящие принципы — это теория, здравый смысл, а также прошлый опыт При этом психолог должен установить

- не способствует ли увеличение числа факторов уменьшению доли нагрузок в диапазоне от −0,4 до +0,4? Если это так, то это увеличение скорее всего не имеет смысла,
- не появляются ли какие либо большие корреляции между факторами при осуществлении облических вращений Последнее может указывать, что было извлечено слиш-

ком много факторов, и два фактора проходят через один и тот же кластер переменных Корреляции между факторами больше, чем приблизительно 0,5 могут косвенно свидетельствовать об этом,

- не разделились ли какие-либо хорошо известные факторы на две или большее количество частей Например, если во множестве предшествующих исследований было показано, что набор заданий формирует только один фактор (например экстраверсия), а вам кажется, что в вашем анализе, они все же формируют два фактора, вероятно, что было извлечено слишком много факторов

Существует ряд способов определения числа факторов, с которыми связаны исследуемые переменные величины Наиболее надежны из них — определение числа вкладов ряда первых *m* факторов в общую дисперсию Обычно, если сумма вкладов пер вых *m* факторов составляет 90 или 95%, этой величиной ограничивают число анализируемых факторов

Иллюстрирует это приведенный ниже пример в таблице 13 2

Таблица 13 2

	Собственные значения 10 факторов Метод главных компонент			
Факторы	Собственные значения факторов	% общей дисперсии	Кумулят соб знач	Кумулят %
1	6 118369	61 18369	6 11837	61 1837
2	1 800682	18 00682	7 91905	79 1905
3	472888	4 72888	8 39194	83 9194
4	407996	4 07996	8 79993	87 9993
5	317222	3 17222	9 11716	91 1716
6	293300	2 93300	9 41046	94 1046
7	195808	1 95808	9 60626	96 0626
8	170431	1 70431	9 77670	97 7670
9	137970	1 37970	9 91467	99 1467
10	085334	85334	10 00000	100 0000

Как можно видеть из таблицы, первый фактор (значение 1) объясняет 61% процент общей дисперсии, фактор 2 (значение 2) — 18% процентов, и т д Четвертый столбец содержит накопленную или кумулятивную дисперсию Напомним, что дисперсии, выделяемые факторами, называются *собственными значениями*

Таким образом, из 10 факторов первые 5 объясняют 91% всей дисперсии, их анализом можно ограничиться Фактически, однако, только первые два фактора несут на себе основную нагрузку, и реально исследователи в такой ситуации нередко пренебрегают оставшимися тремя, которые все вместе объясняют не более 12%

В заключение отметим, что проблема определения числа факторов имеет ряд дискуссионных аспектов Существуют несколько методов определения количества факторов, но они достаточно сложны и их реализация возможна только на ЭВМ

13.4. Вращение факторов

Вращение факторов изменяет положение факторов по отношению к переменным таким образом, что получаемое решение легко интерпретировать Как упоминалось выше, факторы идентифицируют, наблюдая, какие переменные имеют большие и/или нулевые нагрузки по ним Решения, которые не подчиняются интерпретации, — это те решения, в которых большое число переменных имеет нагрузки «среднего уровня» по фактору, т е нагрузки порядка 0,3 Они слишком малы, чтобы рассматриваться как «выступающие» и использоваться для идентификации фактора, и все же слишком велики, чтобы их можно было игнорировать безо всякого риска

Вращение (ротация факторов) перемещает факторы относительно переменных таким образом, что каждый фактор начинает обладать несколькими существенными нагрузками и несколькими нагрузками близкими к нулю Иными словами, цель вращения — преобразовать факторную матрицу таким образом, чтобы получилась простая структура, в которой каждый фактор имеет некоторое количество больших нагрузок и некоторое маленьких, и подобно этому каждая переменная имеет существенные нагрузки только по некоторым факторам

Приведем пример факторной матрицы «до» и «после» вращения

Таблица 13 3

	До вращения	До вращения	После вращения (Варимакс)	После вращения (Варимакс)
	Фактвр 1	Фактор 2	Фактор 1	Фактор 2
Экстраверсия	0 37	0 29	0 60	0 00
Тревожность	0 42	0 52	0 74	0 00
Нейрстизм	0 43	- 0 43	0 13	0 75
Агрессивность	0 51	- 0 32	0 06	0 89

Эта таблица демонстрнрует, насколько проще ннтерпретировать факторы, полученные после вращения, по сравнению с факторами, имевшимися до вращения Факторное решение до вращения (левая половина таблицы 13 3) трудно интерпретировать, поскольку все переменные имеют почти равные нагрузки как по первому, так и по второму фактору После вращения (правая половина таблицы 13 3) получается простая структура, провести интерпретацию которой становится значнтельно проще Распределение нагрузок по факторам дает основание утверждать, что первый фактор измеряет экстраверсию н тревожность, второй — нейротизм и агрессивность

В практике факторного анализа используются разные варианты вращения факторов, при этом выделяются два основных метода вращения — ***ортогональное*** и ***косоугольное*** (***облическое***)

Сущность ортогонального вращения заключается в том, что при вращении остается верным предположение о независимостн факторов

Ортогональное вращение бывает четырех видов ***варимакс***, ***квартимакс***, ***эквимакс*** и ***биквартимакс***

При использовании метода ***варимакс*** минимизируется количество переменных, имеющих высокие нагрузки на данный фактор, при этом максимально увеличивается дисперсия фактора Это способствует упрощению описания фактора за счет группировки вокруг него только тех переменных, которые в большей степени связаны с ним, чем остальные

Квартимакс, напротив, миннмизирует количество факторов, необходимых для объяснения данной переменной Этот метод усиливает возможности интерпретации переменных Он позволяет выделить один фактор с достаточно высокими нагрузками на большинство переменных

Последующие два метода являются комбинациями *варимакса* и *квартимакса* Однако, как показывает практика, психологи предпочитают использовать метод *варимакс*

Что касается методов косоугольного вращения, то они также позволяют упростить описанне факторного решения за счет введения предположения о коррелированности факторов В статистических программах иа ЭВМ большое распространение получил метод *облимин*. Этот метод эквнвалентен методу *эквимакс* для ортогонального вращения

13.5. Использование факторного анализа в психологии

Факторный анализ широко используется в психологии в разных направлениях, связанных с решением как теоретических, так и практических проблем

В теоретическом плане использованне факторного анализа связано с разработкой так называемого факторно-аналитического подхода к изучению структуры личности, темперамента и способностей Использование факторного анализа в этих сферах основано на широко принятом допущеиин, согласно которому наблюдаемые и доступные для прямого измерения показатели являются лишь косвенными и/или частными внешними проявлениями более общих характеристик Эти характернстики, в отличие от первых, являются скрытыми, так иазываемыми латентными переменнымн, поскольку они представляют собой понятия или коиструкты, которые не доступны для прямого измерения Однако они могут быть установлены путем факторнзации корреляционных связей между наблюдаемыми чертами н выделением факторов, которые (прн условии хорошей структуры) можно интерпретировать как статистическое выражение искомой латентной переменной

Хотя факторы имеют чисто математический характер, предполагается, что они репрезентируют скрытые переменные (теоретически постулируемые конструкты или понятия), поэтому названия факторов нередко отражают сущность изучаемого гипотетического конструкта Так, факторный анализ, который был разработан в начале XX века Ч Спирменом для исследования структуры способностей, позволил ввести в психологию понятие общего фактора способностей — фактора g Впоследствии Л Терстоун выдвинул и экспериментально апробировал модель, которая включала 12 факторов способностей Факторно-аналитические исследования темперамента и личности в зарубежной психологии охватывают целый ряд теорий прошлого и настоящего, включая теории Г Олпорта, Р Кэттелла, Г Айзенка и других

В отечественной психологии факторный анализ наиболее широко использовался в дифференциальной психологии и психофизиологии при изучении свойств нервной системы человека в работах Б М Теплова и его школы Теплов придавал большое значение этому виду статистической обработки данных, подчеркивая, что факторный анализ — ценное орудие в любой области, где можно хотя бы в виде предварительной гипотезы предположить наличие некоторых основных параметров, функций, свойств, образующих «структуру» данной области явлений

В настоящее время факторный анализ широко используется в дифференциальной психологии и психодиагностике С его помощью можно разрабатывать тесты, устанавливать структуру связей между отдельными психологическими характеристиками, измеряемыми набором тестов или заданиями теста (см Приложение 2)

Еще один аспект использования факторного анализа заключается в так называемой «редукции» данных или «концептуальной чистке» большого количества тестов, разработанных с различных теоретических позиций для измерения личностных особенностей В результате факторизации матрицы корреляций, полученной на большой выборке испытуемых при использовании различных личностных тестов, можно более точно выявить структуру личностных особенностей, определяемых используемыми тестами

Факторный анализ используется также для стандартизации тестовых методик, которая проводится на репрезентативной выборке испытуемых

Для более подробного ознакомления с различными вариантами применения факторного анализа в психологии рекомендуем следующую литературу (4, 12, 15, 25, 39)

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица 1

Критические значения критерия знаков G для уровней статистической значимости $p \leq 0{,}05$ и $p \leq 0{,}01$

n	p		n	p		n	p		n	p	
	0,05	0,01		0,05	0,01		0,05	0,01		0,05	0,01
5	0	–	27	8	7	49	18	15	92	37	34
6	0	0	28	8	7	50	18	16	94	38	35
7	0	0	29	9	7	52	19	17	96	39	36
8	1	0	30	10	8	54	20	18	98	40	37
9	1	0	31	10	8	56	21	18	100	41	37
10	1	0	32	10	8	58	22	19	110	45	42
11	2	1	33	11	9	60	23	20	120	50	46
12	2	1	34	11	9	62	24	21	130	55	51
13	3	1	35	12	10	64	24	22	140	59	55
14	3	2	36	12	10	66	25	23	150	64	60
15	3	2	37	13	16	68	26	23	160	69	64
16	4	2	38	13	11	70	27	24	170	73	69
17	4	3	39	13	11	72	28	25	180	78	73
18	5	3	40	14	12	74	29	26	190	83	78
19	5	4	41	14	12	76	30	27	200	87	83
20	5	4	42	15	13	78	31	28	220	97	92
21	6	4	43	15	13	80	32	29	240	106	101
22	6	5	44	16	13	82	33	30	260	116	110
23	7	5	45	16	14	84	33	30	280	125	120
24	7	5	46	16	14	66	34	31	300	135	129
25	7	6	47	17	15	88	35	32			
26	8	6	48	17	15	90	36	33			

Таблица 2

Критические значения критерия T Вилкоксона для уровней статестической значимости $p \leq 0{,}05$ и $p \leq 0{,}01$

n	p		n	p	
	0,05	0,01		0,05	0,01
5	0	–	28	130	101
6	2	–	29	140	110
7	3	0	30	151	120
8	5	1	31	163	130
9	8	3	32	175	140
10	10	5	33	187	151
11	13	7	34	200	162
12	17	9	35	213	173
13	21	12	36	227	185
14	25	15	37	241	198
15	30	19	38	256	211
16	35	23	39	271	224
17	41	27	40	286	238
18	47	32	41	302	252
19	53	37	42	319	266
20	60	43	43	336	281
21	67	49	44	353	296
22	75	55	45	371	312
23	83	62	46	389	328
24	92	69	47	407	345
25	100	76	48	426	362
26	110	84	49	446	379
27	119	92	50	466	397

Таблица 3

Критические значения критерия χ^2 Фридмана для количества условии $c = 3$ и количества испытуемых от двух до девяти ($2 \le n \le 9$)

$n = 2$		$n = 3$		$n = 4$		$n = 5$	
χ^2	p	χ^2	p	χ^2	p	χ^2	p
0	1 000	0 000	1 000	0 0	1 000	0 0	1 000
1	0 833	0 667	0 944	0 5	0 931	0 4	0 954
3	0 500	2 000	0 528	1 5	0 653	1 2	0 691
4	0 167	2 667	0 361	2 0	0 431	1 6	0 522
		4 667	0 194	3 5	0 273	2 8	0 367
		6 000	0 028	4 5	0 125	3 6	0 182
				6 0	0 069	4 8	0 124
				6 5	0 042	5 2	0 093
				8 0	0 0046	6 4	0 039
						7 6	0 024
						8 4	0 0085
						10 0	0 00077

$n = 6$		$n = 7$		$n = 8$		$n = 9$	
χ^2	p	χ^2	p	χ^2	p	χ^2	p
0 00	1 000	0 000	1 000	0 00	1 000	0 000	1 000
0 33	0 956	0 286	0 954	0 25	0 967	0 222	0 971
1 00	0 740	0 857	0 768	0 75	0 794	0 667	0 814
1 33	0 570	1 143	0 620	1 00	0 654	0 889	0 865
2 33	0 430	2 000	0 486	1 75	0 531	1 556	0 569
3 00	0 252	2 571	0 305	2 25	0 355	2 000	0 398
4 00	0 184	3 429	0 237	3 00	0 285	2 667	0 328
4 33	0 142	3 714	0 192	3 25	0 236	2 889	0 278
5 33	0 072	4 571	0 112	4 00	0 149	3 556	0 187
6 33	0 052	5 429	0 085	4 75	0 120	4 222	0 154
7 00	0 029	6 000	0 052	5 25	0 079	4 667	0 107
8 33	0 012	7 143	0 027	6 25	0 047	5 556	0 069
9 00	0 0081	7 714	0 021	6 75	0 038	6 000	0 057
9 33	0 0055	8 000	0 016	7 00	0 030	6 222	0 048
10 33	0 0017	8 857	0 0084	7 75	0 018	6 889	0 031
12 00	0 00013	10 286	0 0036	9 00	0 0099	8 000	0 019
		10 571	0 0027	9 25	0 0080	8 222	0 016
		11 143	0 0012	9 75	0 0048	8 667	0 010
		12 286	0 0003	10 75	0 0024	9 556	0 0060
		14 000	0 000021	12 00	0 0011	10 667	0 0035
				12 25	0 00086	10 889	0 0029
				13 00	0 00026	11 566	0 0013
				14 25	0 000061	12 667	0 00066
				16 00	0 0000036	13 556	0 00035
						14 000	0 00020
						14 222	0 000097
						14 889	0 000054
						16 222	0 0000011
						18 000	0 0000006

Таблица 4

Критические значения критерия χ^2 Фридмана для количества условий $c = 4$, $2 \leq n \leq 4$

$n = 2$		$n = 3$		$n = 4$			
χ^2	p	χ^2	p	χ^2	p	χ^2	p
0 0	1 000	0 0	1 000	0 0	1 000	5 7	0 141
0 6	0 958	0 6	0 958	0 3	0 992	6 0	0 105
1 2	0 834	1 0	0 910	0 6	0 928	6 3	0 094
1 8	0 792	1 8	0 727	0 9	0 900	6 6	0 077
2 4	0 625	2 2	0 608	1 2	0 800	6 9	0 068
3 0	0 542	2 6	0 524	1 5	0 75	7 2	0 054
3 6	0 458	3 4	0 446	1 8	0 677	7 5	0 052
4 2	0 375	3 8	0 342	2 1	0 549	7 8	0 036
4 8	0 208	4 2	0 300	2 4	0 524	8 1	0 033
5 4	0 167	5 0	0 207	2 7	0 508	8 4	0 019
6 0	0 042	5 4	0 175	3 0	0 432	8 7	0 014
		5 8	0 148	3 3	0 389	9 3	0 012
		6 6	0 075	3 6	0 355	9 6	0 0069
		7 0	0 054	3 9	0 324	9 9	0 0062
		7 4	0 033	4 5	0 242	10 2	0 0027
		8 2	0 017	4 8	0 200	10 8	0 0016
		9 0	0 0017	5 1	0 190	11 1	0 00094
				5 4	0 158	12 0	0 000072

Таблица 5

Критические значения критерия тенденций L Пейджа для количества условий от трех до шести ($3 \leq c \leq 6$) и количества испытуемых от двух до двенадцати ($2 \leq n \leq 12$)

N	с (количество условий)				
	3	4	5	6	p
2	–	–	109	178	0 001
	–	60	106	173	0 01
	28	58	103	166	0 05
3	–	89	160	250	0 001
	42	87	155	252	0 01
	41	84	150	244	0 05
4	66	117	210	341	0 001
	55	114	204	331	0 01
	54	111	197	321	0 05
5	70	145	259	420	0 001
	66	141	251	409	0 01
	66	137	244	397	0 05

Продолжение таблицы 5

N	c (количество условий)				
	3	4	5	6	p
6	83 81 79	172 167 163	307 299 291	499 486 474	0 001 0 01 0 05
7	96 93 91	198 193 189	355 346 338	577 563 550	0 001 0 01 0 05
8	109 106 104	225 220 214	403 393 384	655 540 625	0 001 0 01 0 05
9	121 119 116	252 246 240	451 441 431	733 717 701	0 001 0 01 0 05
10	134 131 128	278 272 266	499 487 477	811 793 777	0 001 0 01 0 05
11	147 144 141	305 298 292	546 534 523	888 869 852	0 001 0 01 0 05
12	160 166 153	331 324 317	593 581 570	965 946 928	0 001 0 01 0 05

Таблица 6

Таблица вероятностей P для биномиального распределения при $p = q = 0,5$*

n \ m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	031	188	500	812	969	+**										
6	016	109	344	656	891	984	+									
7	008	062	226	500	773	938	992	+								
8	004	035	145	363	637	855	965	996	+							
9	002	020	090	254	500	746	910	980	998	+						
10	001	011	055	172	377	623	828	945	989	998	+					
11		006	033	113	274	500	726	887	967	994	+	+				
12		003	019	073	194	387	613	806	927	981	997	+	+			
13		002	011	046	133	291	500	709	867	954	969	998	+	+		
14		001	006	029	090	212	395	505	788	910	971	994	999	+	+	+
15			004	018	059	151	304	500	696	849	941	982	996	+	+	+
16			002	011	038	105	227	402	598	773	896	962	989	999	+	+

* Знаком + в таблице обозначены значения близкие к 1

** В таблице все величины даны без начального нуля и последующеи запятои так что если в таблице дано число например 013 – то это число следует читать как 0 013

Продолжение таблицы 6

T_2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
17			001	006	025	072	166	315	500	685	834	928	975	994	999	+
18			001	004	015	048	119	240	407	593	760	881	952	985	996	999
19				002	010	032	084	180	324	500	676	820	916	968	990	996
20				001	006	021	058	132	252	412	588	748	668	942	979	994
21				001	004	013	039	095	192	332	500	668	808	905	961	987
22					002	008	026	067	143	262	416	554	738	857	933	974
23					001	005	017	047	105	202	339	500	661	796	895	953
24					001	003	011	032	076	154	271	419	581	729	846	924
25						002	007	022	054	115	212	345	500	655	788	885

Таблица 7

Критические значения критерия U Вилкоксона—Манна—Уитни для уровня статистической значимости $p \le 0{,}05$ и $p \le 0{,}01$

n_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n_2	$p = 0{,}05$																		
3	–	0																	
4	–	0	1																
5	0	1	2	4															
6	0	2	3	5	7														
7	0	2	4	6	8	11													
8	1	3	5	8	10	13	15												
9	1	4	6	9	12	15	18	21											
10	1	4	7	11	14	17	20	24	27										
11	1	5	8	12	16	19	23	27	31	34									
12	2	5	9	13	17	21	25	30	34	38	42								
13	2	6	10	15	19	24	28	33	37	42	47	51							
14	3	7	11	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61						
15	3	7	12	18	23	28	33	39	44	50	55	61	66	72					
16	3	8	14	19	25	30	36	42	48	54	60	65	71	77	83				
17	3	9	15	20	26	33	39	45	51	57	64	70	77	83	89	96			
18	4	9	16	22	28	35	41	48	55	61	68	75	82	88	95	102	109		
19	4	10	17	23	30	37	44	51	55	65	72	80	87	94	101	109	116	123	
20	4	11	18	25	32	39	47	54	62	69	77	84	92	100	107	115	123	130	138
	$p = 0{,}01$																		
5	–	–	0	1															
6	–	–	1	2	3														
7	–	0	1	3	4	6													
8	–	0	2	4	6	7	9												
9	–	1	3	5	7	9	11	14											
10	–	1	3	6	8	11	13	16	19										
11	–	1	4	7	9	12	15	18	22	25									
12	–	2	5	8	11	14	17	21	24	28	31								

Продолжение таблицы 7

n_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n_2									p = 0,01										
13	0	2	5	9	12	16	20	23	27	31	35	39							
14	0	2	6	10	13	17	22	25	30	34	38	43	47						
15	0	3	7	11	15	19	24	28	33	37	42	47	51	55					
16	0	3	7	12	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61	66				
17	0	4	8	13	18	23	28	33	38	44	49	55	50	66	71	77			
18	0	4	9	14	19	24	30	36	41	47	53	59	65	70	76	82	65		
19	1	4	9	15	20	26	32	38	44	50	56	63	69	75	82	88	94	101	
20	1	5	10	16	22	28	34	40	47	53	60	67	73	80	87	93	100	107	114

									p = 0,05									
n_1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
21	19	26	34	41	49	57	65	73	81	89	97	105	113	121	130	138	146	154
22	20	28	36	44	52	50	69	77	65	94	102	111	119	128	136	145	154	162
23	21	29	37	46	55	63	72	81	90	99	107	116	125	134	143	152	161	170
24	22	31	39	48	57	66	75	85	94	103	113	122	131	141	150	160	169	179
25	23	32	41	50	50	69	79	89	98	108	118	128	137	147	157	167	177	187
26	24	33	43	53	62	72	82	93	103	113	123	133	143	154	154	174	185	195
27	25	35	45	55	65	75	86	96	107	118	128	139	150	160	171	182	193	203
28	26	36	47	57	68	79	89	100	111	122	133	144	156	167	178	189	200	212
29	27	38	48	59	70	82	93	104	116	127	139	150	162	173	185	196	208	220
30	28	39	50	62	73	85	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228
31	29	41	52	54	76	88	100	112	124	137	149	161	174	166	199	211	224	236
32	30	42	54	66	78	91	103	116	129	141	154	167	180	193	206	219	232	245
33	31	43	55	65	81	94	107	120	133	146	159	173	186	199	213	226	239	253
34	32	45	58	71	84	97	110	124	137	151	154	178	192	206	219	233	247	261
35	33	46	59	73	86	100	114	128	142	155	170	184	198	212	226	241	255	269
36	35	48	61	75	89	103	117	132	146	160	175	189	204	219	233	248	283	278
37	36	49	63	77	92	106	121	135	150	165	180	196	210	225	240	255	271	286
38	37	51	65	79	94	109	124	139	155	170	185	201	216	232	247	263	278	294
39	38	52	67	82	97	112	128	143	159	175	190	206	222	238	254	270	286	302
40	39	53	69	84	100	115	131	147	153	179	196	212	228	245	261	278	294	311
									p = 0,01									
21	10	16	22	29	35	42	49	55	83	70	77	84	91	98	105	113	120	127
22	10	17	23	30	37	45	52	59	66	74	81	89	96	104	111	119	127	134
23	11	18	25	32	39	47	55	62	70	78	66	94	102	109	117	125	133	141
24	12	19	26	34	42	49	57	66	74	82	90	98	107	115	123	132	140	149
25	12	20	27	35	44	52	50	69	77	86	95	103	112	121	130	138	147	156
26	13	21	29	37	46	54	53	72	81	90	99	108	117	126	136	145	154	163
27	14	22	30	39	48	57	66	75	85	94	103	113	122	132	142	151	161	171
28	14	23	32	41	50	59	69	78	88	96	108	118	128	138	148	158	168	178
29	15	24	33	42	52	62	72	82	92	102	112	123	133	143	154	164	175	185
30	15	25	34	44	54	64	75	85	95	106	117	127	138	149	160	171	182	192

Продолжение таблицы 7

n_1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
n_2	$p = 0{,}01$																	
31	16	26	36	46	66	67	77	88	99	110	121	132	143	155	166	177	188	200
32	17	27	37	47	58	69	90	91	103	114	126	137	149	160	172	184	195	207
33	17	28	38	49	50	72	83	95	106	118	130	142	154	166	178	190	202	214
34	18	29	40	51	62	74	86	98	110	122	134	147	159	172	184	197	209	222
35	19	30	41	53	64	77	89	101	114	126	139	152	164	177	190	203	216	229
36	19	31	42	54	67	79	92	104	117	130	143	156	170	183	196	210	223	236
37	20	32	44	56	69	81	95	108	121	134	148	161	175	189	202	216	230	244
38	21	33	45	58	71	84	97	111	125	138	152	166	180	194	208	223	237	251
39	21	34	46	59	73	86	100	114	128	142	157	171	185	200	214	229	244	258
40	22	35	48	61	75	89	103	117	132	146	161	176	191	206	221	236	251	266

n_1	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
n_2	$p = 0{,}05$																		
21																			
22	171																		
23	180	189																	
24	188	198	207																
25	197	207	217	227															
26	206	216	226	237	247														
27	214	225	236	247	258	268													
28	223	234	245	257	268	279	291												
29	232	243	255	267	278	290	302	314											
30	240	252	265	277	289	301	313	326	338										
31	249	261	274	287	299	312	325	337	350	363									
32	258	271	284	297	310	323	336	349	362	375	389								
33	266	280	293	307	320	334	347	361	374	388	402	415							
34	275	289	303	317	331	345	359	373	387	401	415	429	113						
35	284	298	312	327	341	356	370	385	399	413	428	442	457	471					
36	292	307	322	337	352	367	381	396	411	426	441	456	471	486	501				
37	301	316	332	347	362	378	393	408	424	439	454	470	485	501	516	531			
38	310	325	341	357	373	388	404	420	436	452	467	483	499	515	531	547	563		
39	318	335	351	367	383	399	416	432	448	464	481	497	513	530	546	562	579	596	
40	327	344	360	377	394	410	427	444	460	477	494	511	527	544	551	578	594	611	628
	$p = 0{,}01$																		
21																			
22	142																		
23	150	158																	
24	154	166	174																
25	165	174	183	192															
26	173	182	191	201	210														
27	180	190	200	209	219	229													

Продолжение таблицы 7

n_1	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
									$p = 0{,}01$										
28	188	198	208	218	229	239	249												
29	196	206	217	227	236	249	259	270											
30	203	214	225	236	247	258	270	281	292										
31	211	223	234	245	257	298	280	291	303	314									
32	219	231	242	254	266	278	290	302	314	326	338								
33	227	239	251	263	276	268	300	313	325	337	350	362							
34	234	247	260	272	285	298	311	323	336	349	362	375	387						
35	242	255	268	281	294	308	321	334	347	360	374	387	400	413					
36	250	263	277	290	304	318	331	345	358	372	386	389	413	427	440				
37	258	271	285	299	313	327	341	355	370	384	398	412	426	440	454	468			
38	265	280	294	308	323	337	352	366	381	395	410	424	439	453	468	482	497		
39	273	288	303	317	332	347	362	377	392	407	422	437	462	467	482	497	512	527	
40	281	296	311	326	342	357	372	388	403	418	434	449	465	480	495	511	526	542	557

n_1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
n_2									$p = 0{,}05$									
41	40	55	70	66	102	118	135	151	168	184	201	218	234	251	268	285	302	319
42	41	55	72	88	105	121	138	155	172	189	206	223	240	258	275	292	310	327
43	42	55	74	91	107	124	142	159	176	194	211	229	247	264	262	300	318	335
44	43	59	76	93	110	128	145	163	181	199	216	235	253	271	269	307	325	344
45	44	61	78	95	113	131	149	167	185	203	222	240	259	277	296	315	333	352
46	45	62	80	97	115	134	152	171	189	208	227	246	265	284	303	322	341	350
47	46	64	81	100	118	137	166	175	194	213	232	261	271	290	310	329	349	369
48	47	65	83	102	121	140	159	178	198	218	237	257	277	297	317	337	357	377
49	48	66	85	104	123	143	163	182	202	222	243	263	283	303	324	344	365	385
50	49	68	87	106	126	146	166	186	207	227	248	268	289	310	331	352	372	383
51	50	69	89	109	129	149	170	190	211	232	253	274	295	316	338	359	380	402
52	51	71	91	111	131	152	173	194	215	237	258	280	301	323	345	366	388	410
53	52	72	92	113	134	155	177	198	220	241	253	285	307	329	362	374	396	418
54	53	74	94	115	137	158	180	202	224	246	269	291	313	336	369	381	404	427
55	54	75	96	118	139	161	184	206	228	251	274	297	319	342	365	369	412	435
66	55	76	98	120	142	154	187	210	233	256	279	302	326	349	372	396	420	443
57	57	78	100	122	145	167	191	214	237	261	254	308	332	355	379	403	427	451
58	58	79	102	124	147	171	194	218	241	265	289	314	338	362	386	411	435	460
59	59	81	103	127	150	174	198	222	246	270	295	319	344	369	393	418	443	468
60	60	82	105	129	153	177	201	225	250	275	300	325	350	375	400	426	451	476
									$p = 0{,}01$									
41	23	36	49	63	77	91	106	121	136	151	166	181	196	211	227	242	258	273
42	23	37	50	65	79	94	109	124	139	155	170	166	201	217	233	249	265	280
43	24	38	52	66	81	96	112	127	143	159	175	190	207	223	239	255	271	288

Продолжение таблицы 7

n_1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
n_2	p = 0,01																	
44	25	39	53	68	83	99	115	130	146	163	179	195	212	228	245	262	278	295
45	25	40	54	70	65	101	117	134	150	167	183	200	217	234	251	268	285	303
46	26	41	56	71	87	104	120	137	154	171	188	205	222	240	257	275	292	310
47	27	42	57	73	90	106	123	140	157	175	192	210	228	245	263	281	299	317
48	27	43	56	75	92	109	126	143	161	179	197	215	233	251	269	288	306	325
49	28	44	60	77	94	111	129	147	165	183	201	220	238	257	276	294	313	332
50	29	45	61	78	96	114	132	150	168	187	206	225	244	263	282	301	320	339
51	29	46	53	80	96	116	135	153	172	191	210	229	249	268	288	307	327	347
52	30	47	64	82	100	119	137	157	176	195	215	234	254	274	294	314	334	354
53	31	48	65	83	102	121	140	160	179	199	219	239	259	280	300	320	341	361
54	31	49	67	85	104	114	143	163	183	203	224	244	265	285	306	327	348	369
55	32	50	66	87	106	126	148	166	187	207	228	249	270	291	312	333	355	376
66	33	51	69	89	106	129	149	177	190	211	233	254	275	297	318	340	362	354
57	33	52	71	90	111	131	152	173	194	215	237	259	281	302	324	347	369	391
66	34	53	72	92	113	133	155	176	198	220	242	264	286	308	331	353	376	398
59	34	54	73	94	115	136	158	179	201	224	246	268	291	314	337	360	363	406
60	35	55	75	96	117	138	150	183	205	228	250	273	296	320	343	366	390	413

n_1	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
n_2	p = 0,05																		
41	336	353	370	367	404	421	438	456	473	490	507	524	541	559	576	593	610	628	645
42	345	362	380	387	415	432	450	467	485	503	520	538	556	573	591	609	626	644	662
43	353	371	389	407	425	443	461	479	497	515	533	552	570	588	606	624	642	660	679
44	362	380	399	417	436	454	473	491	510	528	547	565	S84	602	621	640	655	677	695
45	371	390	408	427	446	465	484	503	522	541	550	579	598	617	636	655	674	693	712
46	380	399	418	437	457	476	495	515	534	554	573	593	612	631	651	670	690	709	729
47	368	408	428	447	467	487	507	527	547	566	586	606	626	846	566	696	706	726	746
46	387	417	437	456	478	496	518	539	559	579	600	620	640	661	661	701	722	742	763
49	406	426	447	468	468	509	530	550	571	592	613	634	654	675	696	717	738	759	780
50	414	435	457	478	499	520	541	562	583	605	626	547	669	690	711	732	754	775	796
51	423	445	466	488	509	531	553	574	596	618	539	661	683	704	726	748	770	791	813
52	432	454	476	406	520	542	564	586	508	630	652	675	697	719	741	753	786	608	830
53	441	463	465	508	530	553	575	598	620	643	666	688	711	734	756	779	602	824	847
54	449	472	495	518	541	564	587	610	633	656	679	702	725	748	771	794	818	841	864
55	458	481	505	528	551	575	598	622	645	669	692	716	739	763	766	810	834	857	881
66	467	491	514	538	552	586	610	634	657	681	705	729	753	777	601	825	850	874	898
57	476	500	524	548	572	697	621	645	670	694	719	743	768	792	816	841	865	890	915
58	484	509	534	558	583	608	633	657	682	707	732	757	782	607	832	856	661	906	931
59	493	518	543	568	594	619	644	669	694	720	745	770	796	821	547	872	897	923	948
60	502	527	553	578	604	630	655	651	707	733	758	784	810	836	662	888	913	939	965

Продолжение таблицы 7

n_1	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	$p = 0{,}01$																		
41	289	304	320	336	351	367	383	388	414	430	446	462	477	493	509	525	541	557	573
42	296	312	328	345	361	377	393	409	425	442	458	474	490	507	523	539	556	572	588
43	304	321	337	354	370	387	403	420	437	453	470	487	503	520	537	553	570	667	604
44	312	329	346	363	380	397	414	431	448	465	482	499	516	533	550	568	585	602	619
45	320	337	354	372	389	407	424	441	459	476	494	511	526	547	564	682	599	617	535
46	328	345	363	381	399	416	434	452	470	488	506	524	542	560	578	696	614	632	650
47	335	353	372	390	408	426	445	453	481	500	518	836	555	573	592	610	629	547	666
46	343	362	360	399	418	436	455	474	492	511	530	549	568	587	606	625	543	662	661
49	351	370	389	408	427	446	465	464	504	523	542	561	581	600	619	639	658	678	697
50	359	378	398	417	437	456	476	495	515	535	654	574	594	613	633	653	673	693	713
51	366	366	406	526	446	466	486	506	526	546	666	587	607	627	647	667	688	708	728
52	374	395	415	435	456	476	496	517	537	558	578	569	620	640	661	682	702	723	744
53	382	403	423	444	465	486	507	628	549	570	691	612	533	654	675	696	717	738	759
54	390	411	432	453	475	496	517	538	550	581	603	624	646	667	689	710	732	753	775
55	398	419	441	462	484	506	527	549	571	593	615	637	659	680	702	724	746	768	790
66	405	427	449	471	494	516	538	550	582	605	627	649	671	694	716	738	761	784	606
57	413	436	458	581	503	526	548	571	593	616	639	662	684	707	730	753	776	799	822
58	421	444	467	490	513	536	559	582	505	628	651	674	697	721	744	767	790	814	837
59	429	452	475	499	522	545	569	592	616	640	663	667	710	734	758	781	805	829	853
50	437	460	484	508	532	665	579	503	627	651	675	699	723	747	772	796	820	844	668

n_1	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
n_2	$p = 0{,}05$																			
41	662																			
42	679	697																		
43	697	715	733																	
44	714	733	751	770																
45	731	750	769	789	808															
46	749	768	788	807	827	846														
47	766	786	806	826	846	866	886													
48	783	804	824	845	865	886	906	927												
49	808	821	842	863	884	905	926	947	968											
50	818	839	861	882	903	925	946	968	989	1010										
51	835	857	879	901	922	944	966	968	1010	1032	1054									
52	852	875	897	919	942	964	986	1009	1031	1053	1076	1098								
53	870	893	915	938	961	934	1006	1029	1052	1075	1098	1120	1143							
54	887	910	934	957	980	1003	1026	1050	1073	1096	1119	1143	1168	1189						
55	904	928	952	975	999	1023	1046	1070	1094	1113	1141	1165	1189	1213	1236					
55	922	946	970	994	1018	1042	1067	1091	1115	1139	1163	1187	1212	1236	1260	1284				
57	939	964	988	1013	1037	1082	1087	1111	1136	1161	1185	1210	1235	1259	1284	1309	1333			
66	956	981	1007	1032	1057	1082	1107	1132	1157	1182	1207	1232	1257	1282	1308	1333	1358	1383		
59	974	999	1025	1050	1076	1101	1127	1152	1178	1201	1229	1255	1280	1308	1331	1357	1383	1408	1434	
60	991	1017	1043	1069	1095	1121	1147	1173	1199	1225	1251	1277	1303	1329	1355	1381	1407	1433	1460	1486

Продолжение таблицы 7

n_1	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
n_2										$p = 0{,}01$										
41	589																			
42	605	621																		
43	621	637	654																	
44	636	654	671	688																
45	652	670	688	706	723															
46	668	687	705	723	741	759														
47	684	703	722	740	759	777	796													
46	700	719	738	757	776	795	814	834												
49	716	736	755	775	794	814	835	853	872											
50	732	752	772	792	812	832	652	872	892	912										
51	748	769	789	809	830	850	870	891	911	932	952									
52	764	785	806	827	847	869	889	910	931	951	972	993								
53	780	802	823	844	865	886	908	929	950	971	993	1014	1035							
54	796	818	840	861	883	905	926	948	970	991	1013	1035	1057	1078						
55	812	834	857	879	901	923	945	967	989	1011	1034	1056	1078	1100	1122					
56	828	851	873	896	919	941	964	986	1069	1031	1054	1077	1099	1122	1145	1167				
57	844	867	890	913	936	959	982	1005	1028	1051	1074	1096	1121	1141	1167	1191	1213			
58	861	884	907	931	954	978	1001	1024	1048	1071	1095	1118	1142	1165	1189	1213	1236	1260		
59	877	900	924	948	972	996	1020	1044	1068	1091	1115	1139	1163	1187	1211	1235	1254	1283	1307	
60	893	917	941	965	990	1014	1038	1063	1087	1111	1136	1160	1185	1209	1234	1258	1282	1307	1331	1356

Таблица 8

Критические значения критерия Q Розенбаума для уровня статистической значимости $p \leq 0{,}05$ и $p \leq 0{,}01$

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
								$p = 0{,}05$								
11	6															
12	6	6														
13	6	6	6													
14	7	7	6	6												
15	7	7	6	6	6											
16	8	7	7	7	6	6										
17	7	7	7	7	7	7	7									
18	7	7	7	7	7	7	7	7								
19	7	7	7	7	7	7	7	7	7							
20	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7						
21	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7					
22	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7				
23	8	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7			
24	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7		
25	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	
26	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	7

Продолжение таблицы 8

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	20
$p = 0{,}01$																
11	9															
12	9	9														
13	9	9	9													
14	9	9	9	9												
15	9	9	9	9	9											
16	9	9	9	9	9	9										
17	10	9	9	9	9	9	9									
18	10	10	9	9	9	9	9	9								
19	10	10	10	9	9	9	9	9	9							
20	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9						
21	11	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9					
22	11	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9				
23	11	11	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9			
24	12	11	11	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9		
25	12	11	11	10	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	
26	12	12	11	11	10	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9

Таблица 9

Критические значения критерия *H* Крускала–Уоллиса для разных сочетаний n_1, n_2 и n_3

Объемы выборок					Объемы выборок					Объемы выборок				
n_1	n_2	n_3	H	p	n_1	n_2	n_3	H	p	n_1	n_2	n_3	H	p
2	1	1	2 7000	0 600	4	4	1	6 6667	0 010	5	4	1	6 9545	0 008
2	2	1	3 6000	0 200				6 1667	0 022				6 8400	0 011
2	2	2	4 5714	0 067				4 9667	0 048				4 9855	0 044
3	1	1	3 2000	0 300				4 8667	0 054				4 8600	0 056
3	2	1	4 2857	0 100				4 1667	0 082				3 9873	0 098
			3 8571	0 133				4 0867	0 102				3 9600	0 102
3	2	2	5 3272	0 029	4	4	2	7 0364	0 006	5	4	2	7 2045	0 009
			4 7143	0 048				6 8727	0 011				7 1182	0 010
			4 5000	0 087				5 4545	0 046				5 2727	0 049
			4 4643	0 105				5 2364	0 052				5 2682	0 050
3	3	1	5 1429	0 043				4 5545	0 098				4 5409	0 098
			4 5714	0 100				4 4455	0 103				4 5182	0 101
			4,0000	0,129	4	4	3	7 1439	0 010	5	4	3	7 4449	0 010
3	3	2	6 2500	0 011				7 1364	0 011				7 3949	0 011
			5 3611	0 032				5 5985	0 049				5 6664	0 049
			5 1369	0 081				5 5758	0 051				5 6308	0 060
			4 5656	0 100				4 5455	0 099				4 5487	0 099
			4 2500	0 121				4 4773	0 102				4 5231	0 103
3	3	3	7 2000	0 004	4	4	4	7 6538	0 008	5	4	4	7 7604	0 009
			6 4889	0 011				7 5385	0 011				7 7440	0 011

Продолжение таблицы 9

Объемы выборок				
n_1	n_2	n_3	H	p
			5 6889	0 029
			5 6000	0 050
			5 0967	0 086
			4 6222	0 100
4	1	1	3 5714	0 200
4	2	1	4 8214	0 057
			4 5000	0 076
			4 0179	0 114
4	2	2	6 0000	0 014
			5 3333	0 033
			5 1250	0 052
			4 4583	0 100
			4 1667	0,105
4	3	1	5 8333	0 021
			5 2083	0 050
			5 0000	0 057
			4 0558	0 093
			3 8889	0 129
4	3	2	6 4444	0 008
			6 3000	0 011
			5 4444	0 046
			5 4000	0 051
			4 5111	0 098
			4 4444	0 102
4	3	3	6 7455	0 010
			6 7091	0 013
			5 7909	0 046
			5 7273	0 050
			4 7091	0 092
			4 7000	0 101

Объемы выборок				
n_1	n_2	n_3	H	p
			5 6923	0 049
			5 6538	0 054
			4 6539	0 097
			4 5001	0 104
5	1	1	3 8571	0 143
5	2	1	5 2500	0 036
			5 0000	0 048
			4 4500	0 071
			4 2000	0 095
			4 0500	0 119
5	2	2	6 5333	0 008
			6 1333	0 013
			5 1600	0 034
			5 0400	0 056
			4 3733	0 090
			4 2933	0 122
5	3	1	6 4000	0 012
			4 9800	0 048
			4 8711	0 052
			4 0178	0 095
			3 6400	0 123
5	3	2	6 9091	0 009
			6 8218	0 010
			5 2509	0 049
			5 1055	0 052
			4 6509	0 091
			4 4945	0 101
5	3	3	7 0788	0 009
			6 9818	0 011
			5 6485	0 049
			5 5152	0 051
			4 5333	0 097
			4 4121	0 109

Объемы выборок				
n_1	n_2	n_3	H	p
			5 6571	0 049
			5 6176	0 050
			4 6187	0 100
			4 5527	0 102
5	5	1	7 1091	0 009
			6 8364	0 011
			5 1273	0 046
			4 6091	0 053
			4 1091	0 086
			4 0364	0 105
5	5	2	7 3385	0 010
			7 2692	0 010
			5 3385	0 047
			5 2462	0 051
			4 6231	0 097
			4 5077	0 100
5	5	3	7 5780	0 010
			7 5429	0 010
			5 7055	0 046
			5 6264	0 051
			4 5451	0 100
			4 5363	0 102
5	5	4	7 8229	0 010
			7 7914	0 010
			5 6657	0 049
			5 6429	0 050
			4 5229	0 099
			4 5200	0 101
5	5	5	8 0000	0 009
			7 9800	0 010
			5 7800	0 049
			5 6600	0 051
			4 5800	0 100
			4 5000	0 102

Таблица 10

Критические значения критерия тенденций S Джонкира для количества групп (c) от трех до шести ($3 \le c \le 6$) и количества испытуемых в каждой группе от двух до десяти ($2 \le n \le 10$)

c	n								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
				$p = 0{,}05$					
3	10	17	24	33	42	53	64	76	88
4	14	26	38	51	66	82	100	118	138
5	20	34	51	71	92	115	140	166	194
6	26	44	67	93	121	151	184	219	256
				$p = 0{,}01$					
3	–	25	32	45	99	74	90	106	124
4	20	34	50	71	92	115	140	167	195
5	26	48	72	99	129	162	197	234	274
6	34	62	94	130	170	213	260	309	361

Таблица 11

Значения функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} c^{-\frac{x^2}{2}}$

(ординаты нормальной кривой)

	Сотые доли x									
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3985	3961	3955	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0 3	3814	3502	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3837	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0 7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444

Продолжение таблицы 11

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1 0	0 2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1 1	2179	2155	2131	2107	2053	2059	2036	2012	1989	1965
1 2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1 3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1 4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1 5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1 6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0969	0973	0957
1 7	0940	0925	0609	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1 8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0581	0669
1 9	0656	0644	0632	0520	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2 0	0 0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2 1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2 2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2 3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2 4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2 5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2 6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0140	0107
2 7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2 8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2 9	0060	0058	0056	0065	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3 0	0 0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3 1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3 2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3 3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	00)4	0013	0013
3 4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3 5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0005
3 6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3 7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3 8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3 9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001
4 0	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001

Таблица 12

Критические значения критерия χ^2 для уровней статистической значимости $p \leq 0{,}05$ и $p \leq 0{,}01$ при разном числе степеней свободы ν

	p			*p*			*p*	
ν	**0,05**	**0,01**	*ν*	**0,05**	**0,01**	*ν*	**0,05**	**0,01**
1	3 841	6 635	35	49 802	57 342	69	89 391	99 227
2	5 991	9 210	36	60 998	58 619	70	90 531	100 425
3	7 815	11 345	37	52 192	59 892	71	91 670	101 621
4	9 488	13 277	38	53 384	61 162	72	92 808	102 816
5	11 070	15 086	39	54 572	62 428	73	93 945	104 010
6	12 592	16 812	40	55 758	63 691	74	95 081	105 202
7	14 057	18 475	41	56 942	64 950	75	96 217	106 393
8	15 507	20 090	42	58 124	66 208	76	97 351	107 562
9	16 919	21 666	43	59 304	67 459	77	98 484	108 771
10	18 307	23 209	44	60 481	68 709	78	99 617	109 958
11	19 675	24 725	45	61 656	69 957	79	100 749	111 144
12	21 026	26 217	46	62 830	71 201	80	101 879	112 329
13	22 362	27 688	47	64 001	72 443	81	103 010	113 512
14	23 685	29 141	48	65 171	73 683	82	104 139	114 695
15	24 966	30 578	49	66 339	74 919	83	105 267	115 876
16	26 298	32 000	50	67 505	76 154	84	105 395	117 057
17	27 587	33 409	51	68 669	77 386	85	107 522	118 236
18	28 989	34 805	52	69 832	78 616	86	108 648	119 414
19	30 144	36 191	53	70 993	79 843	87	109 773	120 591
20	31 410	37 566	54	72 153	81 069	88	110 898	121 767
21	32 671	38 932	55	73 311	82 292	89	112 022	122 942
22	33 924	40 289	56	74 488	83 513	90	113 145	124 116
23	35 172	41 638	57	75 624	84 733	91	114 268	125 289

Продолжение таблицы 12

	p			*p*			*p*	
ν	0,05	0,01	ν	0,05	0,01	ν	0,05	0,01
24	36 415	42 980	58	76 778	85 960	92	115 360	126 462
25	37 652	44 314	59	77 931	87 166	93	116 511	127 633
26	38 885	45 642	60	79 082	88 379	94	117 632	128 803
27	40 113	46 983	61	80 232	89 591	95	118 752	129 973
28	41 337	48 278	62	81 381	90 802	98	119 871	131 141
29	42 557	49 588	63	82 529	92 010	97	120 990	132 309
30	43 773	50 992	64	83 675	93 217	98	122 108	133 476
31	44 985	52 191	65	84 821	94 422	98	123 225	134 642
32	46 194	53 486	66	85 966	95 626	100	124 342	135 807
33	47 400	54 776	67	87 108	98 828			
34	48 602	58 081	68	88 250	98 028			

Таблица 13

Критические значения критерия Колмогорова—Смирнова при сопоставлении эмпирического распределения с теоретическим

n	d_{max}		*n*	D_{max}	
	P = 0,05	*P* = 0,01		*P* = 0,05	*P* = 0,01
5	0 6074	0 7279	60	0 1921	0 2302
10	0 4295	0 5147	60	0 1753	0 2101
15	0 3507	0 4202	70	0 1623	0 1945
20	0 3037	0 3639	80	0 1518	0 1820
25	0 2716	0 3255	90	0 1432	
30	0 2480	0 2972	100	0 1358	
40	0 2147	0 2574	$n > 100$	$1\ 36/\sqrt{n}$	$1\ 63/\sqrt{n}$

Таблица 14

Величины угла φ (*в радианах*)
для разных процентных долей φ = 2 arcsin $\sqrt{P}$

% доля	%, последний десятичный знак									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Значения φ = 2 arcsin $\sqrt{P}$									
0 0	0 000	0 020	0 028	0 035	0 040	0 045	0 049	0 053	0 057	0 080
0 1	0 083	0 066	0 089	0 072	0 075	0 077	0 080	0 082	0 085	0 087
0 2	0 089	0 092	0 094	0 098	0 098	0 100	0 102	0 104	0 109	0 108
0 3	0 110	0 111	0 113	0 115	0 117	0 118	0 120	0 122	0 123	0 125
0 4	0 127	0 128	0 130	0 131	0 133	0 134	0 136	0 137	0 139	0 140
0 5	0 142	0 143	0 144	0 146	0 147	0 148	0 150	0 151	0 153	0 154
0 6	0 156	0 156	0 158	0 159	0 160	0 161	0 163	0 164	0 165	0 166
0 7	0 168	0 169	0 170	0 171	0 172	0 173	0 175	0 176	0 177	0 178
0 8	0 179	0 180	0 182	0 163	0 184	0 185	0 186	0 187	0 188	0 189
0 9	0 190	0 191	0 192	0 193	0 194	0 195	0 196	0 197	0 198	0 199
1	0 200	0 210	0 220	0 229	0 237	0 246	0 254	0 262	0 269	0 277
2	0 284	0 291	0 298	0 304	0 311	0 318	0 324	0 330	0 336	0 342
3	0 348	0 354	0 360	0 365	0 371	0 376	0 382	0 387	0 392	0 398
4	0 403	0 408	0 413	0 418	0 423	0 428	0 432	0 437	0 442	0 446
5	0 451	0 456	0 460	0 465	0 469	0 473	0 478	0 482	0 486	0 491
6	0 495	0 499	0 503	0 507	0 512	0 516	0 520	0 524	0 528	0 532
7	0 536	0 539	0 543	0 647	0 551	0 555	0 559	0 562	0 666	0 570
8	0 574	0 577	0 561	0 584	0 588	0 592	0 595	0 599	0 602	0 606
9	0 609	0 613	0 616	0 620	0 623	0 627	0 630	0 633	0 637	0 640
10	0 644	0 647	0 650	0 653	0 657	0 660	0 663	0 866	0 670	0 673
11	0 676	0 679	0 682	0 686	0 689	0 692	0 695	0 698	0 701	0 704
12	0 707	0 711	0 714	0 717	0 720	0 723	0 726	0 729	0 732	0 735
13	0 738	0 741	0 744	0 747	0 750	0 752	0 755	0 758	0 761	0 764

Продолжение таблицы 14

% доля	%, последний десятичный знак									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Значения $\varphi = 2 \arcsin \sqrt{P}$									
14	0 767	0 770	0 773	0 776	0 778	0 781	0 784	0 787	0 790	0 793
15	0 795	0 798	0 801	0 804	0 807	0 809	0 812	0 815	0 818	0 820
16	0 823	0 826	0 828	0 831	0 834	0 637	0 839	0 642	0 645	0 847
17	0 860	0 853	0 855	0 858	0 861	0 663	0 666	0 868	0 871	0 874
18	0 876	0 879	0 881	0 664	0 887	0 889	0 892	0 894	0 897	0 900
19	0 602	0 905	0 907	0 910	0 912	0 915	0 917	0 920	0 922	0 925
20	0 927	0 930	0 932	0 935	0 937	0 940	0 942	0 945	0 947	0 950
21	0 962	0 955	0 967	0 969	0 982	0 964	0 967	0 969	0 972	0 974
22	0 976	0 979	0 981	0 984	0 986	0 988	0 991	0 993	0 998	0 998
23	1 000	1 003	1 005	1 007	1 010	1 012	1 015	1 017	1 019	1 022
24	1 024	1 026	1 029	1 031	1 033	1 036	1 038	1 040	1 043	1 045
25	1 047	1 050	1 052	1 054	1 056	1 059	1 061	1 063	1 066	1 088
26	1 070	1 072	1 075	1 077	1 079	1 082	1 084	1 086	1 088	1 091
27	1 093	1 095	1 097	1 100	1 102	1 104	1 106	1 109	1 111	1 113
28	1 115	1 117	1 120	1 122	1 124	1 126	1 129	1 131	1 133	1 135
29	1 137	1 140	1 142	1 144	1 146	1 148	1 151	1 153	1 155	1 157
30	1 159	1 161	1 164	1 166	1 168	1 170	1 172	1 174	1 177	1 179
31	1 182	1 183	1 185	1 187	1 190	1 192	1 194	1 196	1 198	1 200
32	1 203	1 205	1 207	1 209	1 211	1 213	1 215	1 217	1 220	1 222
33	1 224	1 226	1 228	1 230	1 232	1 234	1 237	1 239	1 241	1 243
34	1 245	1 247	1 249	1 251	1 254	1 256	1 258	1 260	1 262	1 264
35	1 266	1 268	1 270	1 272	1 274	1 277	1 279	1 281	1 283	1 285
36	1 287	1 289	1 291	1 293	1 295	1 297	1 299	1 302	1 304	1 306
37	1 308	1 310	1 312	1 314	1 316	1 318	1 320	1 322	1 324	1 326
38	1 328	1 330	1 333	1 335	1 337	1 339	1 341	1 343	1 345	1 347

Продолжение таблицы 14

% доля	%, последний десятичный знак									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Значения $\varphi = 2 \arcsin \sqrt{P}$									
39	1 349	1 351	1 353	1 355	1 357	1 359	1 361	1 363	1 365	1 367
40	1 369	1 371	1 374	1 376	1 378	1 360	1 382	1 364	1 386	1 388
41	1 390	1 392	1 394	1 398	1 398	1 400	1 402	1 404	1 406	1 408
42	1 410	1 412	1 414	1 416	1 418	1 420	1 422	1 424	1 426	1 428
43	1 430	1 432	1 434	1 436	1 438	1 440	1 442	1 444	1 446	1 448
44	1 451	1 453	1 455	1 457	1 459	1 461	1 463	1 465	1 467	1 469
45	1 471	1 473	1 475	1 477	1 479	1 481	1 483	1 485	1 497	1 489
46	1 491	1 493	1 495	1 497	1 499	1 501	1 603	1 505	1 507	1 509
47	1 511	1 513	1 515	1 517	1 519	1 521	1 523	1 525	1 527	1 529
48	1 531	1 533	1 535	1 537	1 539	1 641	1 543	1 545	1 547	1 549
49	1 551	1 563	1 556	1 557	1 559	1 561	1 563	1 565	1 567	1 569
60	1 571	1 573	1 575	1 577	1 579	1 581	1 583	1 585	1 587	1 589
51	1 591	1 593	1 595	1 597	1 599	1 601	1 603	1 605	1 607	1 609
52	1 611	1 613	1 615	1 617	1 619	1 621	1 623	1 625	1 627	1 629
53	1 631	1 633	1 635	1 637	1 639	1 641	1 643	1 645	1 647	1 649
54	1 661	1 663	1 655	1 657	1 659	1 661	1 663	1 665	1 667	1 669
55	1 671	1 673	1 675	1 677	1 679	1 681	1 683	1 685	1 687	1 689
56	1 691	1 693	1 695	1 697	1 699	1 701	1 703	1 705	1 707	1 709
57	1 711	1 713	1 715	1 717	1 719	1 721	1 723	1 725	1 727	1 729
58	1 731	1 734	1 736	1 736	1 740	1 742	1 744	1 746	1 748	1 750
59	1 752	1 754	1 756	1 758	1 760	1 762	1 764	1 766	1 768	1 770
60	1 772	1 774	1 776	1 778	1 780	1 782	1 784	1 786	1 789	1 791
61	1 793	1 795	1 797	1 799	1 801	1 803	1 805	1 807	1 809	1 811
62	1 813	1 815	1 817	1 819	1 821	1 823	1 826	1 828	1 830	1 832
63	1 834	1 836	1 838	1 640	1 842	1 644	1 646	1 848	1 850	1 853

Продолжение таблицы 14

% доля	%, последний десятичный знак									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Значения $\varphi = 2 \arcsin \sqrt{P}$									
64	1 855	1 857	1 859	1 861	1 863	1 865	1 867	1 869	1 871	1 873
65	1 875	1 878	1 880	1 882	1 884	1 886	1 888	1 890	1 892	1 894
86	1 897	1 899	1 901	1 903	1 905	1 907	1 909	1 911	1 913	1 916
67	1 918	1 920	1 922	1 924	1 926	1 928	1 930	1 933	1 935	1 937
86	1 939	1 941	1 943	1 946	1 948	1 950	1 952	1 954	1 956	1 958
69	1 961	1 963	1 965	1 967	1 969	1 971	1 974	1 976	1 978	1 980
70	1 982	1 984	1 867	1 969	1 991	1 993	1 995	1 998	2 000	2 002
71	2 004	2 006	2 009	2 011	2 013	2 015	2 018	2 020	2 022	2 024
72	2 026	2 029	2 031	2 033	2 035	2 038	2 040	2 042	2 044	2 047
73	2 049	2 051	2 053	2 056	2 058	2 060	2 062	2 065	2 067	2 069
74	2 071	2 074	2 076	2 078	2 081	2 083	2 085	2 087	2 090	2 092
75	2 094	2 097	2 099	2 101	2 104	2 106	2 108	2 111	2 113	2 115
76	2 118	2 120	2 122	2 125	2 127	2 129	2 132	2 134	2 136	2 139
77	2 141	2 144	2 146	2 148	2 151	2 153	2 156	2 158	2 160	2 163
78	2 165	2 168	2 170	2 172	2 175	2 177	2 180	2 182	2 185	2 187
79	2 190	2 192	2 194	2 197	2 199	2 202	2 204	2 207	2 209	2 212
80	2 214	2 217	2 219	2 222	2 224	2 227	2 229	2 231	2 234	2 237
91	2 532	2 536	2 539	2 543	2 546	2 550	2 554	2357	2 561	2 554
92	2 558	2 572	2 575	2 579	2 583	2 587	2 591	2 594	2 598	2 602
93	2 608	2 610	2 614	2 618	2 622	2 626	2 630	2 634	2 638	2 542
94	2 547	2 651	2 655	2 659	2 864	2 668	2 673	2 677	2 681	2 686
95	2 691	2 295	2 700	2 705	2 709	2 714	2 719	2 724	2 729	2 734
96	2 739	2 744	2 749	2 754	2 760	2 765	2 771	2 776	2 782	2 788
97	2 793	2 799	2 805	2 811	2 818	2 824	2 830	2 837	2 844	2 851
98	2 858	2 865	2 872	2 880	2 888	2 896	2 904	2 913	2 922	2 931

Продолжение таблицы 14

% доля	% последний десятичный знак									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Значения $\varphi = 2 \arcsin \sqrt{P}$									
99 0	2 941	2 942	2 943	2 944	2 945	2 946	2 948	2 949	2 950	2 951
99 1	2 952	2 953	2 954	2 955	2 956	2 957	2 958	2 959	2 960	2 961
99 2	2 963	2 964	2 965	2 986	2 967	2 968	2 969	2 971	2 972	2 973
99 3	2 974	2 975	2 976	2 978	2 979	2 980	2 981	2 983	2 984	2 985
99 4	2 997	2 998	2 989	2 990	2 992	2 993	2 995	2 996	2 997	2 999
99 5	3 000	3 002	3 003	3 004	3 006	3 007	3 009	3 010	3 012	3 013
99 6	3 015	3 017	3 018	3 020	3 022	3 023	3 025	3 027	3 028	3 030
99 7	3 032	3 034	3 036	3 038	3 040	3 041	3 044	3 046	3 048	3 050
99 8	3 052	3 054	3 057	3 059	3 062	3 064	3 067	3 069	3 072	3 075
99 9	3 078	3 082	3 085	3 089	3 093	3 097	3 101	3 107	3 113	3 122
100	3 142									

Таблица 15

Уровни статистической значимости разных значений критерия φ Фишера

P равно или меньше	р равно или меньше (последний десятичный знак)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0 00	2 91	2 81	2 70	2 62	2 55	2 49	2 44	2 39	2 35	
0 01	2 31	2 28	2 25	2 22	2 19	2 16	2 14	2 11	2 09	2 07
0 02	2 05	2 03	2 01	1 99	1 97	1 96	1 94	1 92	1 91	1 89
0 03	1 88	1 86	1 85	1 84	1 82	1 81	1 80	1 79	1 77	1 76
0 04	1 75	1 74	1 73	1 72	1 71	1 70	1 68	1 67	1 66	1 65
0 05	1 54	1 54	1 63	1 62	1 61	1 60	1 59	1 58	1 57	1 56
0 06	1 56	1 55	1 54	1 53	1 52	1 52	1 51	1 50	1 49	1 48
0 07	1 48	1 47	1 46	1 46	1 45	1 44	1 43	1 43	1 42	1 41
0 08	1 41	1 40	1 39	1 39	1 38	1 37	1 37	1 36	1 36	1 35
0 09	1 34	1 34	1 33	1 32	1 32	1 31	1 31	1 30	1 30	1 29
0 10	1 29									

Таблица 16

Критические значения *t* критерия Стьюдента при различных уровнях значимости *p*

Число степеней свободы *K*	*p*			Число степеней свободы *K*	*p*		
	0,05	0,01	0,001		0,05	0,01	0,001
1	12 71	63 66	64 60	18	2 10	2 88	3 92
2	4 30	9 92	31 60	19	2 09	2 86	3 88
3	3 18	5 84	12 92	20	2 09	2 85	3 85
4	2 78	4 60	8 61	21	2 08	2 83	3 82
5	2 57	4 03	6 87	22	2 07	2 82	3 79
6	2 45	3 71	5 96	23	2 07	2 81	3 77
7	2 37	3 50	5 41	24	2 08	2 80	3 75
8	2 31	3 36	5 04	25	2 06	2 79	3 73
9	2 26	3 25	4 78	26	2 06	2 78	3 71
10	2 23	3 17	4 59	27	2 05	2 77	3 69
11	2 20	3 11	4 44	28	2 05	2 76	3 67
12	2 18	3 05	4 32	29	2 05	2 76	3 66
13	2 16	3 01	4 22	30	2 04	2 75	3 65
14	2 14	2 98	4 14	40	2 02	2 70	3 55
15	2 13	2 95	4 07	60	2 00	2 66	3 46
16	2 12	2 92	4 02	120	1 98	2 62	3 37
17	2 11	2 90	3 97	∞	1 96	2 58	3 29
P	0 05	0 01	0 001	–	0 05	0 01	0 001

Таблица 17

Критические значения критерия *F* Фишера для уровней статистической значимости $p \leq 0{,}05$ и $p \leq 0{,}01$ df_1 – число степеней свободы в числителе, df_2 – число степеней свободы в знаменателе

df_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
df_2	$p \leq 0{,}05$											
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18 51	19 00	19 16	19 25	19 30	19 33	19 36	19 37	19 38	19 39	19 40	19 41

Продолжение таблицы 17

df	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
df_2	$p \leq 0,05$											
3	10 13	9 55	9 28	9 12	9 01	8 94	8 88	8 84	8 81	8 78	8 76	8 74
4	7 71	6 94	6 59	6 39	6 26	6 16	6 08	6 04	6 00	5 96	5 93	5 91
5	6 61	5 79	5 41	5 19	5 05	4 95	4 88	4 82	4 78	4 74	4 70	4 68
6	5 99	5 14	4 76	4 53	4 39	4 28	4 21	4 15	4 10	4 06	4 03	4 00
7	5 59	4 74	4 35	4 12	3 97	3 87	3 79	3 73	3 88	3 63	3 60	3 57
8	5 32	4 46	4 07	3 84	3 69	3 58	3 50	3 44	3 39	3 34	3 31	3 28
9	5 12	4 26	3 86	3 63	3 48	3 37	3 29	3 23	3 18	3 13	3 10	3 07
10	4 96	4 10	3 71	3 48	3 33	3 22	3 14	3 07	3 02	2 97	2 94	2 91
11	4 84	3 98	3 59	3 36	3 20	3 09	3 01	2 95	2 90	2 86	2 82	2 79
12	4 75	3 88	3 49	3 26	3 11	3 00	2 92	2 85	2 80	2 76	2 72	2 69
13	4 67	3 80	3 41	3 18	3 02	2 92	2 84	2 77	2 72	2 67	2 63	2 60
14	4 60	3 74	3 34	3 11	2 96	2 85	2 77	2 70	2 65	2 60	2 56	2 53
15	4 54	3 68	3 29	3 06	2 90	2 79	2 70	2 54	2 59	2 55	2 51	2 48
16	4 49	3 63	3 24	3 01	2 85	2 74	2 86	2 59	2 54	2 49	2 45	2 42
	$p \leq 0,01$											
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98 49	99 00	99 17	99 25	99 30	99 33	99 36	99 37	99 39	99 40	99 41	99 42
3	34 12	30 82	29 46	28 71	28 24	27 91	27 67	27 49	27 34	27 23	27 13	27 05
4	21 20	18 00	16 69	15 98	15 52	15 21	14 98	14 80	14 86	14 54	14 45	14 37
5	16 26	13 27	12 06	11 39	10 97	10 67	10 45	10 29	10 15	10 05	9 96	9 89
6	13 74	10 92	9 78	9 15	8 75	8 47	8 26	8 10	7 98	7 87	7 79	7 72
7	12 25	9 55	8 45	7 85	7 46	7 19	7 00	6 84	6 71	6 62	6 54	6 47
8	11 26	8 65	7 59	7 01	6 63	6 37	6 19	6 03	5 91	5 82	5 74	5 67
9	10 56	8 02	6 99	6 42	6 06	5 80	5 62	5 47	5 35	5 26	5 18	5 11
10	10 04	7 56	6 55	5 99	5 64	5 39	5 21	5 08	4 95	4 85	4 78	4 71
11	9 65	7 20	6 22	5 67	5 32	5 07	4 88	4 74	4 63	4 54	4 46	4 40
12	9 33	6 93	5 95	5 41	5 06	4 82	4 65	4 50	4 39	4 30	4 22	4 16
13	9 07	6 70	5 74	5 20	4 86	4 62	4 44	4 30	4 19	4 10	4 02	3 96
14	8 86	6 51	5 56	5 03	4 69	4 46	4 28	4 14	4 03	3 94	3 86	3 80
15	8 58	6 36	5 42	4 89	4 56	4 32	4 14	4 00	3 89	3 80	3 73	3 67
16	8 53	6 23	5 29	4 77	4 44	4 20	4 03	3 89	3 78	3 69	3 61	3 55

Продолжение таблицы 17

df_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
df_2	$p \leq 0{,}05$											
17	4 45	3 59	3 20	2 96	2 81	2 70	2 62	2 55	2 50	2 45	2 41	2 38
18	4 41	3 55	3 16	2 93	2 77	3 66	2 58	2 51	2 46	2 41	2 37	2 34
19	4 38	3 52	3 13	2 90	2 74	2 63	2 55	2 48	2 43	2 38	2 34	2 31
20	4 35	3 49	3 10	2 87	2 71	2 60	2 52	2 45	2 40	2 35	2 31	2 28
21	4 32	3 47	3 07	2 84	2 68	2 57	2 49	2 42	2 37	2 32	2 28	2 25
22	4 30	3 44	3 05	2 82	2 66	2 55	2 47	2 40	2 35	2 30	2 26	2 23
23	4 28	3 42	3 03	2 80	2 64	2 53	2 45	2 38	2 32	2 28	2 24	2 20
24	4 26	3 40	3 01	2 78	2 62	2 51	2 43	2 36	2 30	2 26	2 22	2 18
25	4 24	3 38	2 99	2 76	2 60	2 49	2 41	2 34	2 28	2 24	2 20	2 16
26	4 22	3 37	2 98	2 74	2 59	2 47	2 39	2 32	2 27	2 22	2 18	2 15
27	4 21	3 35	2 96	2 73	2 57	2 46	2 37	2 30	2 25	2 20	2 16	2 13
28	4 20	3 34	2 95	2 71	2 56	2 44	2 36	2 29	2 24	2 19	2 15	2 12
29	4 18	3 33	2 93	2 70	2 54	2 43	2 35	2 28	2 22	2 18	2 14	2 10
30	4 17	3 32	2 92	2 69	2 53	2 42	2 34	2 27	2 21	2 16	2 12	2 08
32	4 15	3 30	2 90	2 67	2 51	2 40	2 32	2 25	2 19	2 14	2 10	2 07
34	4 13	3 28	2 88	2 65	2 49	2 38	2 30	2 23	2 17	2 12	2 08	2 05
	$p \leq 0{,}01$											
17	8 40	6 11	5 18	4 67	4 34	4 10	3 93	3 79	3 88	3 59	3 52	3 45
18	8 28	6 01	5 09	4 58	4 25	4 01	3 85	3 71	3 60	3 51	3 44	3 37
19	8 18	5 93	5 01	4 50	4 17	3 94	3 77	3 63	3 52	3 43	3 36	3 30
20	8 10	5 85	4 94	4 43	4 10	3 87	3 71	3 56	3 45	3 37	3 30	3 23
21	8 02	5 78	4 87	4 37	4 04	3 81	3 65	3 51	3 40	3 31	3 24	3 17
22	7 94	5 72	4 82	4 31	3 99	3 76	3 59	3 45	3 35	3 26	3 18	3 12
23	7 88	5 66	4 76	4 26	3 94	3 71	3 54	3 41	3 30	3 21	3 14	3 07
24	7 82	5 61	4 72	4 22	3 90	3 67	3 50	3 36	3 25	3 17	3 09	3 03
25	7 77	5 57	4 68	4 18	3 86	3 63	3 46	3 32	3 21	3 13	3 05	2 99
26	7 72	5 53	4 64	4 14	3 82	3 59	3 42	3 29	3 17	3 09	3 02	2 96
27	7 68	5 49	4 60	4 11	3 79	3 56	3 39	3 26	3 14	3 08	2 98	2 93
28	7 84	5 45	4 57	4 07	3 76	3 53	3 36	3 23	3 11	3 03	2 95	2 90
29	7 60	5 42	4 54	4 04	3 73	3 50	3 33	3 20	3 08	3 00	2 92	2 87
30	7 56	5 39	4 51	4 02	3 70	3 47	3 30	3 17	3 08	2 98	2 90	2 84
32	7 50	5 34	4 46	3 97	3 86	3 42	3 25	3 12	3 01	2 94	2 86	2 80
34	7 44	5 29	4 42	3 93	3 61	3 38	3 21	3 08	2 97	2 89	2 82	2 76

Продолжение таблицы 17

df_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
df_2	$p \le 0\ 05$											
36	4,11	3,26	2,86	2,63	2,48	2,36	2,28	2,21	2,15	2,10	2,06	2,03
38	4,10	3,25	2,85	2,62	2,46	2,35	2,26	2,19	2,14	2,09	2,05	2,02
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,26	2,18	2,12	2,07	2,04	2,00
42	4,07	3,22	2,83	2,59	2,44	2,32	2,24	2,17	2,11	2,06	2,02	1,99
44	4,08	3,21	2,82	2,56	2,43	2,31	2,23	2,16	2,10	2,05	2,01	1,98
46	4,05	3,20	2,81	2,57	2,42	2,30	2,22	2,14	2,09	2,04	2,00	1,97
48	4,04	3,19	2,80	2,56	2,41	2,30	2,21	2,14	2,08	2,03	1,99	1,96
50	4 03	3,18	2,79	2,86	2,40	2 29	2 20	2,13	2 07	2 02	1,96	1 95
55	4 02	3 17	2,78	2,54	2,38	2,27	2 18	2,11	2,05	2 00	1 97	1,93
60	4 00	3 15	2 76	2,52	2 37	2 25	2 17	2 10	2 04	1,99	1 95	1 92
65	3 99	3 14	2 75	2,51	2 36	2 24	2 15	2,08	2 02	1 98	1 94	1 90
70	3 98	3 13	2 74	2 50	2 35	2 23	2 14	2 07	2 01	1 97	1,93	1 89
80	3 96	3 11	2 72	2 48	2 33	2 21	2 12	2 05	1 99	1 95	1,91	1 88
100	3 94	3 09	2 70	2 46	2 30	2 19	2 10	2 03	1 97	1 92	1 88	1 85
125	3 92	3 07	2 88	2 44	2 29	2 17	2 08	2 01	1 95	1 90	1 86	1 83
150	3 91	3 08	2 67	2 43	2 27	2 16	2 07	2 00	1 94	1 89	1 85	1 82
200	3 89	3 04	2 65	2 41	2 26	2 14	2 05	1 98	1 92	1 87	1 83	1 60
400	3 86	3 02	2 62	2 39	2 23	2 12	2 03	1 96	1 90	1 85	1 81	1 78
1000	3 85	3 00	2 61	2 38	2 22	2 10	2 02	1 95	1 89	1 84	1 80	1 76
∞	3 84	2 99	2 60	2 37	2 21	2 09	2 01	1 94	1 88	1 83	1 79	1 75
	$p \le 0\ 01$											
36	7 39	5 25	4 38	3 89	3 58	3 35	3 18	3 04	2 94	2 86	2 78	2 72
38	7 35	5 21	4 34	3 86	3 54	3 32	3 15	3 02	2 91	2 82	2 75	2 69
40	7 31	5 18	4 31	3 83	3 51	3 29	3 12	2 99	2 88	2 80	2 73	2 66
42	7 27	5 15	4 29	3 80	3 49	3 26	3 10	2 96	2 86	2 77	2 70	2 54
44	7 24	5 12	4 26	3 78	3 46	3 24	3 07	2 94	2 84	2 75	2 68	2 62
46	7 21	5 10	4 24	3 76	3 44	3 22	3 05	2 92	2 82	2 73	2 66	2 60
48	7 19	5 08	4 22	3 74	3 42	3 20	3 04	2 90	2 80	2 71	2 84	2 58
50	7 17	5 08	4 20	3 72	3 41	3 18	3 02	2 88	2 78	2 70	2 62	2 56
55	7 12	5 01	4 16	3 68	3 37	3 15	2 98	2 85	2 75	2 66	2 59	2 53
60	7 08	4 98	4 13	3 65	3 34	3 12	2 95	2 82	2 72	2 63	2 56	2 50
85	7 04	4 95	4 10	3 62	3 31	3 09	2 93	2 79	2 70	2 61	2 54	2 47
70	7 01	4 92	4 08	3 60	3 29	3 07	2 91	2 77	2 67	2 59	2 51	2 45
80	6 96	4 88	4 04	3 56	3 25	3 04	2 87	2 74	2 64	2 55	2 48	2 41
100	6 90	4 82	3 99	3 51	3 20	2 99	2 82	2 69	2 59	2 51	2 43	2 36
125	6 84	4 78	3 94	3 47	3 17	2 96	2 79	2 68	2 56	2 47	2 40	2 33
150	6 81	4 75	3 91	3 44	3 14	2 92	2 76	2 62	2 53	2 44	2 37	2 30
200	6 76	4 71	3 88	3 41	3 11	2 90	2 73	2 60	2 50	2 41	2 34	2 28
400	6 70	4 66	3 83	3 36	3 06	2 85	2 69	2 55	2 46	2 37	2 29	2 23
1000	6 86	4 62	3 80	3 34	3 04	2 82	2 86	2 53	2 43	2 34	2 26	2 20
∞	6 64	4 60	3 78	3 32	3 02	2 80	2 84	2 51	2 41	2 32	2 24	2 18

Продолжение таблицы 17

df_1	14	16	20	2 4	30	40	50	75	100	200	500	∞
df_2	$p \leq 0$ 05											
1	245	246	248	249	260	251	252	253	253	254	254	254
2	19 42	19 43	19 44	19 45	19 46	19 47	19 47	19 48	19 49	19 49	19 50	19 50
3	8 71	8 69	8 56	8 84	8 62	8 60	8 88	8 57	8 56	8 54	8 54	8 53
4	5 87	5 84	5 60	5 77	5 74	5 71	5 70	5 68	5 66	5 65	5 84	5 63
5	4 64	4 60	4 56	4 53	4 50	4 46	5 44	4 42	4 40	4 38	4 37	4 36
6	3 96	3 92	3 87	3 84	3 81	3 77	3 75	3 72	3 71	3 69	3 68	3 67
7	3 52	3 49	3 44	3 41	3 38	3 34	3 32	3 29	3 28	3 25	3 24	3 23
8	3 23	3 20	3 15	3 12	3 08	3 06	3 03	3 00	2 98	2 96	2 94	2 93
9	3 02	2 98	2 93	2 90	2 86	2 82	2 89	2 77	2 76	2 73	гэг	2 71
10	2 86	2 82	2 77	2 74	2 70	2 67	2 64	2 61	2 59	2 56	2 55	2 54
11	2 74	2 70	2 65	2 61	2 57	2 63	2 50	2 47	2 45	2 42	2 41	2 40
12	2 64	2 60	2 54	2 50	2 46	2 42	2 40	2 36	2 35	2 32	2 31	2 30
13	2 55	2 51	2 46	2 42	2 38	2 34	2 32	2 28	2 26	2 24	2 22	2 21
14	2 48	2 44	2 39	2 35	2 31	2 27	2 24	2 21	2 19	2 16	2 14	2 13
15	2 43	2 39	2 33	2 29	2 25	2 21	2 18	2 15	2 12	2 10	2 08	2 07
16	2 37	2 33	2 28	2 24	2 20	2 16	2 13	2 09	2 07	2 04	2 02	2 01
	$p \leq 0{,}01$											
1	6142	6169	6208	6234	6261	6286	6302	6323	6334	6352	6361	6366
2	99 43	99 44	99 46	99 46	99 47	99 48	99 48	99 4	99 49	99 49	99 60	99 50
3	26 92	26 аз	26 69	26 60	26 50	26 41	26 35	26 27	26 23	26 18	26 14	26 12
4	14 24	14 15	14 02	13 93	13 63	13 74	13 69	13 61	13 57	13 52	13 46	13 46
5	9 77	9 68	9 55	9 47	9 38	9 29	9 24	9 17	9 13	9 07	9 04	9 02
6	7 60	7 52	7 39	7 31	7 23	7 14	7 09	7 02	6 99	6 94	6 80	6 88
7	6 35	6 27	6 15	6 07	5 98	5 80	5 85	5 78	5 75	5 70	5 67	5 65
8	5 86	5 48	5 36	5 28	5 20	5 11	5 06	5 00	4 96	4 91	4 88	4 86
9	5 00	4 92	4 80	4 73	4 64	4 56	4 51	4 45	4 41	4 36	4 33	4 31
10	4 60	4 52	4 41	4 33	4 25	4 17	4 12	4 05	4 01	3 96	3 93	3 91
11	4 29	4 21	4 10	4 02	3 94	3 86	3 80	3 74	3 70	3 66	3 62	3 60
12	4 05	3 96	3 86	3 78	3 70	3 61	3 56	3 49	3 46	3 41	3 38	3 36
13	3 86	3 78	3 67	3 59	3 51	3 42	3 37	3 30	3 27	3 21	3 18	3 16
14	3 70	3 62	3 51	3 43	3 34	3 26	3 21	3 14	3 11	3 06	3 02	3 00
15	3 86	3 48	3 36	3 29	3 20	3 12	3 07	3 00	2 97	2 92	2 89	2 87
16	3 45	3 37	3 25	3 18	3 10	3 0)	2 96	2 98	2 86	2 80	2 77	2 75

Продолжение таблицы 17

df_1	14	16	20	2 4	30	40	50	75	100	200	500	∞
df_2						$p \le 0$ 05						
17	2 33	2 29	2 23	2 19	2 15	2 11	2 08	2 04	2 02	1 99	1 97	1 96
18	2 29	2 25	2 19	2 15	2 11	2 07	2 04	2 00	1 98	1 95	1 93	1 92
19	2 26	2 21	2 15	2 11	2 07	2 02	2 00	1 96	1 94	1 91	1 90	1 88
20	2 23	2 18	2 12	2 08	2 04	1 99	1 86	1 92	1 90	1 87	1 85	1 84
21	2 20	2 15	2 09	2 05	2 00	1 96	1 93	1 89	1 87	1 84	1 82	1 81
22	2 18	2 13	2 07	2 03	1 98	1 93	1 91	1 87	1 84	1 81	1 80	1 78
23	2 14	2 10	2 04	2 00	1 96	1 91	1 88	1 84	1 82	1 79	1 77	1 76
24	2 13	2 09	2 02	1798	1 94	1 89	1 86	1 82	1 80	1 76	1 74	1 73
25	2 11	2 06	2 00	1 96	1 92	1 87	1 84	1 80	1 77	1 74	1 72	1 71
26	2 10	2 05	1 99	1 95	1 90	1 85	1 82	1 78	1 76	1 72	1 70	1 88
27	2 08	2 03	1 97	1 93	1 88	1 84	1 80	1 76	1 74	1 71	1 68	1 67
28	2 06	2 02	1 96	1 91	1 87	1 81	1 78	1 75	1 72	1 69	1 67	1 65
29	2 05	2 00	1 94	1 90	1 85	1 80	1 77	1 73	1 71	1 68	1 65	1 54
30	2 04	1 99	1 93	1 89	1 84	1 79	1 76	1 72	1 69	1 86	1 54	1 62
32	2 02	1 97	1 91	1 86	1 82	1 76	1 74	1 69	1 67	1 84	1 61	1 59
34	2 00	1 95	1 89	1 84	1 60	1 74	1 71	1 67	1 64	1 61	1 59	1 57
						$p \le 0$ 01						
17	3 35	3 27	3 16	3 08	3 00	2 92	2 86	2 79	2 76	2 70	2 67	2 65
18	3 27	3 19	3 07	3 00	2 91	2 83	2 78	2 71	2 68	2 62	2 59	2 57
19	3 19	3 12	3 00	2 92	2 84	2 76	2 70	2 63	2 60	2 54	2 51	2 49
20	3 13	3 05	2 94	2 86	2 77	2 69	2 63	2 56	2 53	2 47	2 44	2 42
21	3 07	2 99	2 88	2 60	2 72	2 63	2 88	2 51	2 47	2 42	2 38	2 36
22	3 02	2 94	2 83	2 75	2 67	2 58	2 63	2 46	2 42	2 37	2 33	2 31
23	2 97	2 69	2 78	2 70	2 62	2 53	2 48	2 41	2 37	2 32	2 28	2 26
24	2 93	2 85	2 74	2 86	2 58	2 49	2 44	2 36	2 33	2 27	2 23	2 21
25	2 89	2 81	2 70	2 62	2 54	2 45	2 40	2 32	2 29	2 23	2 19	2 17
26	2 86	2 77	2 66	2 58	2 50	2 41	2 36	2 28	2 25	2 19	2 15	2 13
27	2 83	2 74	2 63	2 55	2 47	2 38	2 33	2 25	2 21	2 16	2 12	2 10
26	2 80	2 71	2 60	2 52	2 44	2 35	2 30	2 22	2 18	2 13	2 09	2 08
29	2 77	2 88	2 57	2 49	2 41	2 32	2 27	2 19	2 15	2 10	2 08	2 03
30	2 74	2 86	2 55	2 47	2 38	2 29	2 24	2 16	2 13	2 07	2 03	2 01
32	2 70	2 62	2 51	2 42	2 34	2 25	2 20	2 12	2 08	2 02	1 98	1 96
34	2 66	2 58	2 47	2 38	2 30	2 21	2 15	2 08	2 04	1 98	1 94	1 91

Продолжение таблицы 17

df_1	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
df_2						$p = 0,05$						
36	1,98	1,93	1,87	1,82	1,78	1,72	1,69	1,65	1,62	1,59	1,56	1,55
38	1,86	1,92	1,85	1,80	1,76	1,71	1,67	1,63	1,60	1,57	1,54	1,53
40	1,95	1,90	1,84	1,79	1,74	1,69	1,66	1,61	1,59	1,55	1,53	1,51
42	1,94	1,89	1,82	1,78	1,73	1,68	1,64	1,60	1,57	1,54	1,51	1,49
44	1,92	1,88	1,81	1,76	1,72	1,66	1,63	1,58	1,56	1,52	1,50	1,46
46	1,91	1,87	1,80	1,75	1,71	1,65	1,62	1,57	1,54	1,51	1,48	1,46
48	1,90	1,86	1,79	1,74	1,70	1,64	1,61	1,56	1,53	1,50	1,47	1,45
50	1,90	1,85	1,78	1,74	1,69	1,63	1,60	1,55	1,52	1,48	1,46	1,44
55	1,88	1,83	1,76	1,72	1,67	1,61	1,58	1,52	1,50	1,46	1,43	1,41
60	1,86	1,81	1,75	1,70	1,65	1,59	1,56	1,50	1,48	1,44	1,41	1,39
65	1,85	1,80	1,73	1,68	1,63	1,57	1,54	1,49	1,46	1,42	1,39	1,37
70	1,84	1,79	1,72	1,67	1,62	1,56	1,63	1,47	1,45	1,40	1,37	1,35
80	1,82	1,77	1,70	1,65	1,60	1,54	1,51	1,45	1,42	1,38	1,35	1,32
100	1,79	1,75	1,68	1,63	1,57	1,51	1,48	1,42	1,39	1,34	1,30	1,28
125	1,77	1,72	1,65	1,60	1,55	1,49	1,45	1,39	1,36	1,31	1,27	1,25
150	1,76	1,71	1,84	1,59	1,54	1,47	1,44	1,37	1,34	1,29	1,25	1,22
200	1,74	1,69	1,62	1,57	1,52	1,45	1,42	1,35	1,32	1,26	1,22	1,19
400	1,72	1,67	1,60	1,54	1,49	1,42	1,38	1,32	1,28	1,22	1,16	1,13
1000	1,70	1,65	1,58	1,53	1,47	1,41	1,36	1,30	1,26	1,19	1,13	1,08
∞	1,69	1,64	1,57	1,52	1,46	1,40	1,35	1,28	1,24	1,17	1,11	1,00
						$p = 0,01$						
36	2,62	2,54	2,43	2,35	2,26	2,17	2,12	2,04	2,00	1,94	1,90	1,87
38	2,59	2,51	2,40	2,32	2,22	2,14	2,08	2,00	1,97	1,90	1,86	1,84
40	2,56	2,49	2,37	2,29	2,20	2,11	2,05	1,97	1,94	1,88	1,84	1,81
42	2,54	2,46	2,35	2,26	2,17	2,08	2,02	1,94	1,91	1,85	1,80	1,78
44	2,52	2,44	2,32	2,24	2,15	2,08	2,00	1,92	1,88	1,82	1,78	1,75
46	2,50	2,42	2,30	2,22	2,13	2,04	1,98	1,90	1,86	1,60	1,76	1,72
48	2,48	2,40	2,28	2,20	2,11	2,02	1,96	1,88	1,84	1,78	1,73	1,70
50	2,46	2,39	2,26	2,18	2,10	2,00	1,94	1,86	1,82	1,76	1,71	1,68
55	2,43	2,35	2,23	2,15	2,06	1,96	1,90	1,82	1,78	1,71	1,66	1,54
60	2,40	2,32	2,20	2,12	2,03	1,93	1,87	1,79	1,74	1,68	1,63	1,60
85	2,37	2,30	2,18	2,09	2,00	1,90	1,84	1,76	1,71	1,64	1,60	1,56
70	2,35	2,28	2,15	2,07	1,98	1,88	1,82	1,74	1,69	1,62	1,56	1,63
80	2,32	2,24	2,11	2,03	1,94	1,84	1,78	1,70	1,65	1,57	1,52	1,49
100	2,26	2,19	2,08	1,88	1,89	1,79	1,73	1,54	1,59	1,51	1,46	1,43
125	2,23	2,15	2,03	1,94	1,85	1,75	1,58	1,59	1,54	1,46	1,40	1,37
150	2,20	2,12	2,00	1,91	1,83	1,72	1,66	1,56	1,51	1,43	1,37	1,33
200	2,17	2,09	1,97	1,88	1,79	1,69	1,62	1,63	1,48	1,39	1,33	1,28
400	2,12	2,04	1,92	1,84	1,74	1,64	1,57	1,47	1,42	1,32	1,24	1,19
1000	2,09	2,01	1,89	1,81	1,71	1,61	1,54	1,44	1,38	1,28	1,19	1,11
∞	2,07	1,99	1,87	1,79	1,69	1,59	1,52	1,41	1,36	1,25	1,15	1,00

Таблица 18

Критические значения критерия Линка и Уоллеса. $P = 0,05$, k —число выборочных групп, n — объем выборочной группы

n \ k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	30	40	50
2	3,43	2,35	1,74	1,39	1,15	0,99	0,87	0,77	0,70	0,63	0,58	0,54	0,50	0,47	0,443	0,418	0,396	0,376	0,358	0,245	0,187	0,151
3	1,90	1,44	1,14	0,94	0,80	0,70	0,62	0,56	0,51	0,47	0,43	0,40	0,38	0,35	0,335	0,317	0,301	0,287	0,274	0,189	0,146	0,119
4	1,62	1,25	1,01	0,84	0,72	0,63	0,57	0,51	0,47	0,43	0,40	0,37	0,35	0,33	0,310	0,294	0,279	0,266	0,254	0,177	0,136	0,112
5	1,53	1,19	0,96	0,81	0,70	0,61	0,55	0,50	0,45	0,42	0,39	0,36	0,34	0,32	0,303	0,287	0,273	0,260	0,249	0,173	0,134	0,110
6	1,50	1,17	0,95	0,60	0,69	0,61	0,55	0,49	0,45	0,42	0,39	0,36	0,34	0,32	0,302	0,287	0,273	0,260	0,249	0,174	0,135	0,110
7	1,49	1,17	0,95	0,60	0,69	0,61	0,55	0,50	0,45	0,42	0,39	0,36	0,34	0,32	0,304	0,289	0,275	0,262	0,251	0,175	0,136	0,111
8	1,49	1,18	0,96	0,81	0,70	0,62	0,55	0,50	0,46	0,42	0,39	0,37	0,35	0,33	0,308	0,292	0,278	0,265	0,254	0,178	0,138	0,113
9	1,50	1,19	0,97	0,82	0,71	0,62	0,56	0,51	0,47	0,43	0,40	0,37	0,35	0,33	0,312	0,296	0,282	0,269	0,258	0,180	0,140	0,115
10	1,52	1,20	0,98	0,83	0,72	0,63	0,57	0,52	0,47	0,44	0,41	0,38	0,36	0,34	0,317	0,301	0,287	0,274	0,262	0,183	0,142	0,117
11	1,54	1,22	0,99	0,84	0,73	0,64	0,58	0,52	0,48	0,44	0,41	0,38	0,36	0,34	0,322	0,306	0,291	0,278	0,266	0,186	0,145	0,119
12	1,56	1,23	1,01	0,85	0,74	0,65	0,58	0,53	0,49	0,45	0,42	0,39	0,37	0,35	0,327	0,311	0,296	0,282	0,270	0,189	0,147	0,121
13	1,58	1,25	1,02	0,86	0,75	0,66	0,59	0,54	0,49	0,46	0,42	0,40	0,37	0,35	0,332	0,316	0,300	0,287	0,274	0,192	0,149	0,122
14	1,60	1,26	1,03	0,87	0,76	0,67	0,60	0,55	0,50	0,46	0,43	0,40	0,38	0,36	0,337	0,320	0,305	0,291	0,279	0,195	0,152	0,124
15	1,62	1,28	1,05	0,89	0,77	0,68	0,61	0,55	0,51	0,47	0,44	0,41	0,38	0,36	0,342	0,325	0,310	0,295	0,283	0,198	0,154	0,126
16	1,64	1,30	1,06	0,90	0,78	0,69	0,62	0,56	0,52	0,48	0,44	0,41	0,39	0,37	0,348	0,330	0,314	0,300	0,287	0,201	0,156	0,128
17	1,66	1,32	1,08	0,91	0,79	0,70	0,63	0,57	0,52	0,48	0,45	0,42	0,39	0,37	0,352	0,335	0,319	0,304	0,291	0,204	0,158	0,130
18	1,68	1,33	1,09	0,92	0,80	0,71	0,64	0,58	0,53	0,49	0,46	0,43	0,40	0,38	0,357	0,339	0,323	0,308	0,295	0,207	0,161	0,132
19	1,70	1,35	1,10	0,93	0,81	0,72	0,64	0,59	0,54	0,50	0,46	0,43	0,41	0,38	0,362	0,344	0,327	0,312	0,299	0,210	0,163	0,134
20	1,72	1,36	1,12	0,95	0,82	0,73	0,65	0,59	0,54	0,50	0,47	0,44	0,41	0,39	0,367	0,348	0,332	0,317	0,303	0,212	0,165	0,135
30	1,92	1,52	1,24	1,05	0,91	0,81	0,73	0,66	0,60	0,56	0,52	0,49	0,46	0,43	0,408	0,387	0,369	0,352	0,337	0,237	0,184	0,151
40	2,08	1,66	1,35	1,14	0,99	0,88	0,79	0,72	0,66	0,61	0,57	0,53	0,50	0,47	0,444	0,422	0,402	0,384	0,367	0,258	0,201	0,165
50	2,23	1,77	1,45	1,22	1,06	0,94	0,85	0,77	0,71	0,65	0,61	0,57	0,53	0,50	0,476	0,453	0,431	0,412	0,394	0,277	0,216	0,177
100	2,81	2,23	1,83	1,55	1,34	1,19	1,07	0,97	0,89	0,83	0,77	0,72	0,67	0,64	0,60	0,573	0,546	0,521	0,499	0,351	0,273	0,224
200	3,61	2,88	2,35	1,99	1,73	1,53	1,38	1,25	1,15	1,06	0,99	0,93	0,87	0,82	0,18	0,74	0,70	0,67	0,64	0,454	0,353	0,290
500	5,15	4,10	3,35	2,84	2,47	2,19	1,97	1,79	1,64	1,52	1,42	1,32	1,24	1,17	1,11	1,06	1,01	0,96	0,92	0,65	0,504	0,414
1000	6,81	5,43	4,44	3,77	3,28	2,90	2,61	2,37	2,18	2,02	1,88	1,76	1,65	1,56	1,47	1,40	1,33	1,27	1,22	0,86	0,669	0,549

Продолжение таблицы 18

n \ k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	30	40	50
												$p = 0{,}01$										
2	7,92	4,32	2,84	2,10	1,66	1,38	1,17	1,02	0,91	0,82	0,74	0,68	0,63	0,58	0,54	0,51	0,480	0,454	0,430	0,285	0,214	0,172
3	3,14	2,12	1,57	1,25	1,04	0,89	0,78	0,69	0,62	0,57	0,52	0,48	0,45	0,42	0,39	0,37	0,352	0,334	0,318	0,217	0,165	0,134
4	2,48	1,74	1,33	1,08	0,91	0,78	0,69	0,62	0,56	0,51	0,47	0,44	0,41	0,38	0,36	0,34	0,323	0,307	0,293	0,200	0,153	0,125
5	2,24	1,60	1,24	1,02	0,88	0,75	0,66	0,59	0,51	0,49	0,46	0,42	0,40	0,37	0,35	0,33	0,314	0,299	0,285	0,196	0,151	0,123
6	2,14	1,55	1,21	0,99	0,85	0,74	0,65	0,59	0,54	0,49	0,45	0,42	0,39	0,37	0,35	0,33	0,313	0,298	0,284	0,196	0,151	0,123
7	2,10	1,53	1,20	0,99	0,84	0,73	0,65	0,59	0,53	0,49	0,45	0,42	0,39	0,37	0,35	0,33	0,314	0,299	0,286	0,198	0,152	0,124
8	2,09	1,53	1,20	0,99	0,85	0,74	0,66	0,59	0,53	0,49	0,46	0,43	0,40	0,37	0,35	0,33	0,318	0,303	0,289	0,200	0,154	0,126
9	2,09	1,54	1,21	1,00	0,85	0,75	0,66	0,60	0,54	0,50	0,46	0,43	0,40	0,38	0,36	0,34	0,322	0,307	0,293	0,203	0,156	0,127
10	2,10	1,55	1,22	1,01	0,86	0,76	0,67	0,61	0,55	0,51	0,47	0,44	0,41	0,38	0,36	0,34	0,327	0,311	0,297	0,206	0,159	0,129
11	2,11	1,56	1,23	1,02	0,87	0,76	0,68	0,61	0,56	0,51	0,48	0,44	0,42	0,39	0,37	0,35	0,332	0,316	0,302	0,209	0,161	0,132
12	2,13	1,58	1,25	1,04	0,89	0,78	0,69	0,62	0,57	0,52	0,48	0,45	0,42	0,40	0,37	0,35	0,337	0,321	0,306	0,213	0,164	0,134
13	2,15	1,60	1,26	1,05	0,90	0,79	0,70	0,63	0,58	0,53	0,49	0,46	0,43	0,40	0,38	0,36	0,342	0,326	0,311	0,216	0,166	0,136
14	2,18	1,62	1,28	1,06	0,91	0,80	0,71	0,64	0,58	0,54	0,50	0,46	0,43	0,41	0,39	0,36	0,347	0,330	0,316	0,219	0,169	0,138
15	2,20	1,63	1,30	1,08	0,92	0,81	0,72	0,65	0,59	0,54	0,50	0,47	0,44	0,41	0,39	0,37	0,352	0,335	0,320	0,222	0,171	0,140
16	2,22	1,65	1,31	1,09	0,93	0,82	0,73	0,66	0,60	0,55	0,51	0,48	0,45	0,42	0,40	0,38	0,357	0,340	0,325	0,226	0,174	0,142
17	2,25	1,67	1,33	1,10	0,95	0,83	0,74	0,67	0,61	0,56	0,52	0,48	0,45	0,43	0,40	0,38	0,362	0,345	0,329	0,229	0,176	0,144
18	2,27	1,69	1,34	1,12	0,96	0,84	0,75	0,68	0,62	0,57	0,53	0,49	0,46	0,43	0,41	0,39	0,367	0,350	0,334	0,232	0,179	0,146
19	2,30	1,71	1,36	1,13	0,97	0,85	0,76	0,68	0,62	0,57	0,53	0,50	0,46	0,44	0,41	0,39	0,372	0,354	0,338	0,235	0,181	0,148
20	2,32	1,73	1,38	1,14	0,98	0,86	0,77	0,69	0,63	0,58	0,54	0,50	0,47	0,44	0,42	0,40	0,376	0,359	0,343	0,238	0,184	0,150
30	2,59	1,95	1,54	1,27	1,09	0,96	0,85	0,77	0,70	0,65	0,60	0,56	0,52	0,49	0,46	0,44	0,419	0,399	0,381	0,266	0,205	0,168
40	2,80	2,11	1,66	1,38	1,18	1,04	0,93	0,84	0,76	0,70	0,65	0,61	0,57	0,64	0,51	0,48	0,456	0,435	0,415	0,289	0,223	0,183
50	2,99	2,25	1,78	1,48	1,27	1,11	0,99	0,90	0,82	0,75	0,70	0,65	0,61	0,57	0,64	0,51	0,489	0,466	0,446	0,310	0,240	0,196
100	3,74	2,83	2,24	1,86	1,60	1,40	1,25	1,13	1,03	0,95	0,88	0,82	0,77	0,73	0,69	0,65	0,62	0,590	0,564	0,393	0,304	0,248
200	4,79	3,63	2,88	2,39	2,06	1,81	1,61	1,46	1,33	1,23	1,14	1,06	0,99	0,94	0,88	0,84	0,80	0,76	0,73	0,507	0,392	0,320
500	6,81	5,16	4,10	3,41	2,93	2,58	2,30	2,08	1,90	1,75	1,62	1,52	1,42	1,34	1,26	1,20	1,14	1,09	1,04	0,73	0,560	0,458
1000	9,01	6,83	5,42	4,52	3,88	3,41	3,05	2,76	2,52	2,32	2,15	2,01	1,88	1,77	1,68	1,59	1,51	1,44	1,38	0,96	0,743	0,608

Таблица 19

Критические значения критерия Немени
n — число испытуемых
k — число групп

n	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 9$	$k = 10$
				$p = 0,05$				
1	3 3	4 7	6 1	7 5	9 0	10 5	12 0	13 5
2	8 8	12 6	16 5	20 5	24 7	28 9	33 1	37 4
3	15 7	22 7	29 9	37 3	44 8	52 5	60 3	68 2
4	23 9	34 6	45 6	57 0	68 6	80 4	92 4	104 6
5	33 1	48 1	63 5	79 3	95 5	112 0	128 8	145 8
6	44 3	62 9	83 2	104 0	125 3	147 0	169 1	191 4
7	54 4	79 1	104 6	130 8	157 6	184 9	212 8	240 9
8	66 3	96 4	127 6	159 0	192 4	225 7	259 7	294 1
9	78 9	114 8	152 0	190 2	229 3	269 1	309 6	350 6
10	92 3	134 3	177 8	222 6	268 4	315 0	362 4	410 5
11	106 3	154 8	205 0	256 6	309 4	363 2	417 9	473 3
12	120 9	176 2	233 4	292 2	352 4	413 6	476 0	539 1
13	130 2	198 5	263 0	329 3	397 1	466 2	536 5	607 7
14	152 1	221 7	293 8	367 8	443 6	520 8	599 4	679 0
15	168 6	245 7	325 7	407 8	491 9	577 4	664 6	752 8
16	185 6	270 0	358 6	449 1	541 7	635 9	732 0	829 2
17	203 1	296 2	392 6	491 7	593 1	696 3	801 5	907 9
18	221 2	322 6	427 6	535 5	646 1	758 5	873 1	989 0
19	239 8	349 7	463 6	580 6	700 5	822 4	946 7	1072 4
20	258 8	377 6	500 5	626 9	756 4	888 1	1022 3	1158 1
21	278 4	406 1	538 4	674 4	813 7	955 4	1099 8	1245 9
22	298 4	435 3	577 2	723 0	872 3	1024 3	1179 1	1335 7
23	318 9	465 2	616 9	772 7	932 4	1094 8	1260 3	1427 7
24	339 8	495 8	657 4	823 5	993 7	1166 8	1343 2	1521 7
25	361 1	527 0	608 8	875 4	1056 3	1240 4	1427 9	1617 6

Продолжение таблицы 19

n	k = 3	k = 4	k = 5	k = 6	k = 7	k = 8	k = 9	k = 10
p = 0,01								
1	4 1	5 7	7 3	8 9	10 5	12 2	13 9	15 6
2	10 9	15 3	19 7	24 3	28 9	33 6	38 3	43 1
3	19 5	27 5	35 7	44 0	52 5	61 1	69 8	78 6
4	29 7	41 9	54 5	67 3	80 3	93 6	107 0	120 6
5	41 2	58 2	75 8	93 6	111 9	130 4	149 1	168 1
6	53 9	76 3	99 3	122 8	146 7	171 0	195 7	220 6
7	67 6	95 8	124 4	154 4	181 6	215 2	246 3	277 7
8	82 4	116 8	152 2	188 4	225 2	262 6	300 6	339 0
9	98 1	139 2	181 4	224 5	268 5	313 1	358 4	404 2
10	114 7	162 8	212 2	262 7	314 2	366 5	419 5	473 1
11	132 1	187 6	244 6	302 9	362 2	422 6	463 7	545 6
12	150 4	213 5	278 5	344 9	413 5	481 2	551 0	621 4
13	169 4	240 6	313 8	368 7	464 9	542 4	621 0	700 5
14	189 1	268 7	350 5	434 2	510 4	606 0	693 8	782 6
15	209 6	297 8	388 5	481 3	575 8	671 9	769 3	867 7
16	230 7	327 9	427 9	530 1	634 2	740 0	847 3	955 7
17	252 5	359 0	468 4	580 3	694 4	810 2	927 8	1046 5
18	275 0	391 0	510 2	632 1	756 4	882 6	1010 6	1140 0
19	298 1	423 8	553 1	685 4	820 1	957 0	1095 8	1236 2
20	321 8	457 6	597 2	740 0	885 5	1033 3	1183 3	1334 9
21	346 1	492 2	642 4	796 0	952 6	1111 6	1273 0	1436 0
22	371 0	627 6	688 7	853 4	1021 3	1191 8	1364 8	1539 7
23	396 4	563 8	736 0	912 1	1091 5	1273 8	1458 8	1645 7
24	422 4	600 9	784 4	972 1	1163 4	1357 6	1554 8	1754 0
25	449 0	638 7	833 8	1033 3	1236 7	1443 2	1652 8	1864 6

Таблица 20

Критические значения коэффициента корреляции r_{xy} Пирсона

$k = n - 2$	P		$k = n - 2$	P	
	0 05	0,01		0 05	0 01
5	0 75	0 87	27	0 37	0 47
6	0 71	0 83	28	0 36	0 46
7	0 67	0 80	29	0 36	0 46
8	0 63	0 77	30	0 35	0 45
9	0 60	0 74	35	0 33	0 42
10	0 68	0 71	40	0 30	0 39
11	0 55	0 68	45	0 29	0 37
12	0 63	0 66	50	0 27	0 35
13	0 51	0 64	60	0 25	0 33
14	0 50	0 62	70	0 23	0 30
15	0 48	0 61	80	0 22	0 28
16	0 47	0 59	90	0 21	0 27
17	0 46	0 58	100	0 20	0 25
18	0 44	0 56	125	0 17	0 23
19	0 43	0 55	150	0 16	0 21
20	0 42	0 54	200	0 14	0 18
21	0 41	0 53	300	0 11	0 15
22	0 40	0 52	400	0 10	0 13
23	0 40	0 51	500	0 09	0 12
24	0 39	0 50	700	0 07	0 10
25	0 38	0 49	900	0 06	0 09
26	0 37	0 48	1000	0 06	0 09

Таблица 21

Критические значения коэффициента корреляции рангов Спирмена

n	P		n	P		n	P	
	0,05	0,01		0,05	0,01		0,05	0,01
5	0,94	–	17	0,48	0,62	29	0,37	0,48
6	0,85	–	18	0,47	0,60	30	0,36	0,47
7	0,78	0,94	19	0,46	0,58	31	0,36	0,46
8	0,72	0,88	20	0,45	0,57	32	0,36	0,45
9	0,68	0,83	21	0,44	0,56	33	0,34	0,45
10	0,64	0,79	22	0,43	0,64	34	0,34	0,44
11	0,61	0,76	23	0,42	0,53	35	0,33	0,43
12	0,68	0,73	24	0,41	0,52	36	0,33	0,43
13	0,56	0,70	25	0,49	0,51	37	0,33	0,43
14	0,64	0,68	26	0,39	0,50	38	0,32	0,41
15	0,52	0,88	27	0,38	0,49	39	0,32	0,41
16	0,60	0,64	28	0,38	0,48	40	0,31	0,40

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Пример использования методов математической статистики в дипломной работе

В число основных задач дипломных работ входит

1. Формирование у студентов умения работы с лнтературными источниками
2 Формирование у студентов умения работать с экспериментальными психологическимн методиками и тестами
3 Обучение студентов умению обрабатывать результаты экспериментальных нсследованнй с помощью разлнчных статистических методов

Рассмотрим пример решения третьей задачи в дипломной работе Тема дипломной работы была сформулирована так «Зависимость тревожности и агрессивности лнчности от уровня субъективного контроля»

Приведем оглавление диплома:

Введение

Глава I Теоретические основы агрессивностн и тревожности личности

1 1 Современные представления о содержании агресснвностн и тревожиости личностн

1 2 Анализ понятия «субъективный контроль» личности

Глава II Основные результаты выполненного исследования агрессивности и тревожности личности и их зависимости от уровня субъективного контроля

2 1 Обоснование методики исследования агрессивности и тревожности личности и их зависимости от уровня субъективного контроля

2.2. Описание выполненного эксперимента

2.3 Статистическая обработка результатов выполненного эксперимента

2 4 Использованне метода множественной регрессни для оценки взаимосвязи шкал УСК с методикой Басса—Дарки и методикой Спилбергера

Заключение

Приложения

Литература

Из названия диплома следует, что основной задачей исследования было выявление характера взаимосвязи между такими личностными характеристиками, как тревожность, агрессивность, с одной стороны, и степень интернальности/экстернальности — с другой

Для решения поставленной выше задачи были выбраны

1 Методика Басса—Дарки для оценки уровня агрессивности,

2 Методика УСК для оценки уровня субъективного контроля

3 Методика Спилбергера—Ханина — для оценки уровня тревожности

По этим методнкам было обследовано 60 испытуемых (из них 30 подростков в возрасте от 14 до 16 лет и 30 взрослых в возрасте от 22 до 37 лет)

Обработка проводилась с помощью статистического пакета Stadia (Автор А П Кулаичев, регистрационный № 1205)

Ниже приведен список включенных в обработку показателей

Методика Басса—Дарки

X_1 — Физическая агрессия

X_2 — Косвенная агрессия

X_3 — Раздражение

X_4 — Негативизм

X_5 — Обида

X_6 — Подозрительность

X_7 — Вербальная агрессия

X_8 — Чувство вины

Методика УСК (уровень субъективного контроля)

X_9 — Шкала общей интернальности

X_{10} — Шкала интернальности в области достижений

X_{11} — Шкала интернальности в области неудач

X_{12} — Шкала интернальности в семейных отиошениях

X_{13} — Шкала интернальности в области производственных отношений

X_{14} — Шкала интернальности в области межличностных отношений

X_{15} — Шкала интернальности в отношении здоровья и болезни

Методика Спилбергера—Ханина

X_6 — Ситуационная тревожность

X_{17} — Личностная тревожность

Статистическая обработка результатов эксперимента была начата с того, что по всей выборке для каждой переменной были построены характеристики распределения — гистограммы Для большинства переменных распределение оказалось близко к нормальному, и поэтому в дальнейшем были использованы параметрические методы статистического анализа

Следующим шагом в дипломной работе явилась оценка различий между взрослыми н подростками по всем показателям с помошью t-критерия Стьюдента Достоверных различий между группами по всем показателям обнаружено не было (кроме показателя X_{12} — интернальности в семейных отношениях, у взрослых этот показатель оказался значимо выше, чем у подростков, на 1% уровне значимости), поэтому в дальнейшем выборка рассматривалась как однородная

На следующем этапе была вычислена корреляционная матрица и проведен качественный анализ значимых корреляционных связей Оказалось, например, что показатели раздражения и негативнзма положительно связаны с косвенной агрессией на 5% уровне Те же показатели связаны с вербальной агрессией на 1% уровне значимости Это означает, что большей величине агрессин соответствует большее раздражение и негативизм и т д

После качественного анализа матрица интеркорреляций подверглась факторному анализу По полученной факторной матрице, которая включала 17 факторов, была проанализирована оценка вклада каждого фактора в общую дисперсию Было выявлено, что вклад первых трех факторов составляет около 91% Поэтому в последующей операции вращения факторов по методу варимакс были выбраны первые три фактора Они представлены ниже в таблице 1

Таблица 1

Переменные	Фактор 1	Фактор 2	Фактор 3
X	0 065	0 534	0 027
X_2	0 037	0 828	- 0 116
X_3	0 293	0 714	0 045
X_4	- 0 145	0 667	- 0 485
X_5	- 0 268	0 334	0 634
X_6	- 0 301	0 395	0 509
X_7	0 093	0 812	- 0 349
X_8	- 0 294	0 386	0 648
X_9	0 661	0 098	0 303
X_{0}	0 433	0 021	0 346
X	0 656	0 142	0 210
X_{12}	0 562	0 018	0 205
X_{13}	0 679	0 159	0 134
X_{14}	0 674	0 107	0 119
X_{5}	0 519	- 0 035	0 089
X_{16}	0 644	- 0 247	0 169
X_{1}	0 466	0 317	0 574

Проанализируем полученную после вращения факторную матрицу Согласно наибольшему факторному весу первый фактор можно назвать фактором общей интернальности В этот фактор со значимыми и положительными весами вошли все показатели методики УСК Кроме того, в этот же фактор со значимыми весами и отрицательными знаками вошли показатели ситуационной и личностной тревожности Следовательно, высокая интернальность образует единый фактор с личностной и ситуационной тревожностью

Второй фактор можно назвать фактором «косвенной агрессии» Со значимыми весами в него входят практически все показатели методики Басса—Дарки Подчеркнем, что, условно говоря, этот фактор оказался «чистым» фактором агрессивности, не связанным с показателями других методик

Третий фактор, также условно, можно назвать фактором «чувства вины» Он интересен тем, что в него вошли некоторые показатели всех трех методик Во-первых, с положительным и значимым весом в него вошли показатели чувства вины (по которому и назван фактор), обиды и подозрительности из методики Басса—Дарки, ситуационной тревожности из методики Спилберга—Ханина и интернальности в области достижений В этот же фактор с отрицательными знаками вошли показатели негативизма и вербальной агрессии Таким образом, личностная тревожность положительно связана с чувствами вины, обиды, подозрительности и интернальностью в области достижений и отрицательно с негативизмом и вербальной агрессией

Для того чтобы полнее выявить характер взаимосвязи между показателями, которые вошли в третий фактор со значимыми весами, эти показатели были использованы в методе множественного регрессионного анализа

Ниже мы приведем для примера анализ только одного регрессионного уравнения, в котором в качестве зависимой переменной была выбрана переменная X_{17} — личностиая тревожность В качестве независимых переменных в уравнении множественной регрессии были выбраны показатели X_4, X_5, X_6, X_7, X_8 и X_{14} С помощь пакета STADIA былы получены следующие коэффициенты в уравнении множественной регрессии

$$У(X_{17}) = 2{,}18 + 0{,}005 \quad X_4 + 0{,}233 \quad X_5 + 0{,}653 \quad X_6 + 0{,}010 \quad X_7 + \\ + 0{,}465 \quad X_8 + 0{,}086 \quad X_{14}$$

При этом коэффициенты при переменных X_5, X_6 и X_8 имеют уровень значимости близкий к 1%

Согласно полученному регрессионному уравнению личностная тревожность в наибольшей степени детерминирована подозрительностью (0,653 X_7), затем чувством вины (0,465 X_8) и в меньшей степени обидой (0,233 X_5)

Приведенные выше статистические выкладки не охватывают всех имеющихся возможностей обработки экспериментальных данных Они представляют собой пример того, как, имея определенную совокупность экспериментальных данных, строить один из вариантов их статистической обработки

Краткая классификация задач н методов их статистического решеиия представлена в таблице (модификация таблицы 1 2 из пособия Е В Сидореико, 25, с 34)

Таблица

Задачи	Условия	Методы
1 Выявление различий в уровне исследуемого признака	а) 2 выборки испытуемых	критерий Макнамары Q критерии Розенбаума U критерии Манна–Уитни φ критерий (угловое пре образование Фишера)
	б) 3 и больше выборок испытуемых	S критерий Джонкнра H критерии Крускала–Уоллиса
2 Оценка сдвига значений исследуемого признака	а) 2 замера на одной и той же выборке испытуемых	T критерий Вилкоксона G критерий знаков φ критерий (угловое пре образовзние Фишера t критерий Стьюдента
	б) 3 и более замеров на одной и той же выборке испытуемых	$\chi^2_{\phi p}$ критерий Фридмана L критерий тенденций Пейджа t критерии Стьюдента
3 Выявление различий в распредвлении признака	а) при сопоставлении эмпирического распредвления с теоретическим	χ^2 критерий Пирсона λ – критерии Колмогоро за–Смирнова t критерий Стьюдвита
	б) при сопоставлении двух ампирических раопредвлений	χ^2 критерии Пирсона λ – критерий Колмогоро ва–Смириова φ критерии (угловое пре образование Фишера)
4 Выявление степени согласовиности изменвиий	а) двух признаков	φ коэффициент корреляции Пирсона τ коэффициент корреляции Кендвлла R – бисериvльный коэф фициент корреляции η коррвляционисе отно шение Пирсона

Продолжение таблицы

		ρ коэффициент ранговой корреляции Спирмена r коэффициент корреляции Пирсона Линейная и криволинейная регрессии
	б) трех или большего числа признаков	ρ коэффициеит ранговой корреляции Спирмена r коэффициент корреляции Пирсона Множественная и частная корреляции Линейная криволинейная и множественная регрессия Факторныи и кластерныи анализы
5 Анализ изменений признака под влиянием контролируемых условии	а) под влиянна одного фактора	S критерии Джонкира L критерий тенденции Пейджа Однофакторный дисперсионный анализ Критерий Линка и Уоллеса Критерий Немени Множественное сравнение независимых выборок
	б) под влилнием двух факторов одноврембино	Двухфакторный дисперсионный анализ

Работать с этой таблицей рекомендуется следующим образом

1 По первому столбцу таблицы, выбирается задача, стоящая в исследоваиии

2 По второму столбцу таблицы определяются условия решения задачи, например, сколько выборок обследовано или на какое количество групп может быть разбита обследованная выборка

3 Выбирается соответствующий статистический метод Можно выбрать несколько методов и сравнить их результаты

Литература

1 *Артемьева Е Ю , Мартынов Е М* Вероятностные методы в психологии М МГУ, 1975
2 *Бетц В* Проблема корреляции в психологии М , 1923
3 *Битинас Б* Миогомерный анализ в педагогике и педагогической психологии Вильнюс, 1971
4 *Благуш П* Факторный анализ с обобщениями М Финансы и статистика 1989
5 *Гласс Дж , Стенли Дж* Статистические методы в педагогике и психологии М Прогресс, 1976
6 *Гмурман В Е* Теория вероятностей и математическая статистика М Высшая школа, 1999
7 *Готтсданкер Роберт* Основы психологического эксперимента М МГУ 1982
8 *Грабарь М И* Применение математической статистики в психологических исследованиях Непараметрические методы М Педагогика, 1977
9 *Гублер Е В , Генкин А А* Применение непараметрических критериев статистики в медико-биологических исследованиях Л Медицина, 1973
10 *Гусев А Н , Измайлов Ч А , Михалевская М Б* Измерение в психологии М Смысл, 1997
11 *Джарол Б Мангеим, Ричард К Рич* Политология Методы исследования М Весь мир, 1997
12 *Иберла К* Факторный анализ М Статистика, 1980
13 *Калинина В Н , Панкин В Ф* Математическая статистика М Высшал школа, 1998
14 *Кендэл М* Ранговые корреляции М , 1975
15 *Ким Дж О , Мьюллер Ч У* Факторный анализ статистические методы и практические вопросы // Факторный, дискриминационный и кластерный анализ М Финансы и статистика, 1989
16 *Корнилова Т В* Введение в психологический эксперимент М МГУ 1997
17 *Кулагин Б В* Основы профессиональной диагностики Л Медицина, 1984 С 13—20
18 *Кулаичев А П* Методы с средства анализа данных в среде WINDOWS М НПО «Информатика и компьютеры», 1998
19 *Купер К* Индвидуальные различия М Аспект пресс, 2000
20 *Лакин Г Ф* Биомерия М Высшая школа, 1990
21 *Лупандин В И* Математические методы в психологии Екатеринбург 1996

22 *Митропольский А К* Техника статистических вычислении М Наука, 1971
23 *Михеев В И* Методика получения и обработки экспериментальных данных в психолого-педагогических исследованиях М Изд-во ун-та дружбы народов, 1986
24 *Морозов Ю В* Основы высшей математики и статистики М Медицина, 1998
25 *Окунь Я* Факторный анализ М Статистика 1974
26 *Осипов Г В , Андреев Э П* Методы измерения в социологии М Наука 1977
27 *Плохинскии Н А* Биометрия 2-е изд М МГУ 1970
28 Психологическая диагностика Учебное пособие / Под ред К М Гуревича, Е М Борисвой М Изд-во УРАО 1997
29 *Романко В К* Курс теории вероятностей и математической статистики для психологов М МГППИ, 2000
30 *Сидоренко Е В* Методы математической обработки в психологии СПб Социально-психологический центр, 1996
31 *Стивенс С С* Экспериментаяьная психология Т 1 М Изд-во иностранной литературы, 1960 С 19—87
32 *Суходольскии Г В* Основы математической статистики для психологов Л ЛГУ 1972
33 *Тернер Д* Вероятность, статистика и исследование операций М Статистика, 1976
34 *Тюрин Ю Н Макаров А А* Анализ данных на компьютере М Финансы и статистика, 1995
35 *Урбах В Ю* Математическая статистика для биологов и медиков М , 1963
36 *Урбах В Ю* Биометрические методы Статистическая обработка опытных данных в биологии, сельском хозяйстве и меди цине М Наука, 1964
37 *Урбах В Ю* Статистический анализ в биологических и медицинских исследованиях М , 1975
38 *Фишер Р А* Статистические методы для исследователей М 1958
39 *Харман Г* Современный факторный анализ М Статистика, 1972
40 *Ядов В А* Социологическое исследование методология, программа, методы Самара Самарский университет, 1995
41 *Яноши Л* Теория и практика обработки результатов измерений М , 1968
42 WWW SAS COM / адрес сайта SAS в сети ИНТЕРНЕТ
43 WWW SPSS COM / адрес сайта SPSS в сети ИНТЕРНЕТ